期中复习

2024年4月12日 星期五 12:30

Ch1

复数 C 记号 F 表示 R 或 C

R^2 表示 $\{(x,y): x,y \in R\}$ R^3 表示 $\{(x,y,z): x,y,z \in R\}$

组，长度为 n $(x_1, \cdots, x_n)$

向量空间 性质：
vector space

① 交换性 $u+v=v+u$
② 结合性 $(u+v)+w=u+(v+w)$
③ 加法单位元 0 $0+v=v$
④ 加法逆元 $v+w=0$
⑤ 乘法单位元 $v \cdot 1=v$
⑥ 分配律 $a(v+u)=av+au$

子空间 (subspace)：U 为 V 子空间若：
① 加法恒等元，$0 \in U$ $0+v=v$
② 加法封闭：$u, v \in U$，$u+w \in U$.
③ 标乘封闭：$a \in F$，$u \in U$，$au \in U$.

定义子空间的和：$U_1, U_2, \cdots U_m$ 为 V 子集.
$U_1+U_2+\cdots+U_m=\{u_1+u_2+\cdots+u_m : u_i \in U_i\}$.
如 $(x,0,0)$ $(0,y,0) \Rightarrow (x,y,0)$

直和 $\oplus$

设 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 为 V 子空间.
$U_1+\cdots+U_m$ 为直和，若 $U_1+\cdots+U_m$ 中每个元素都可唯一表示成 $u_1+\cdots+u_m$，$u_j \in U_j$.
用 $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$ 表示

考虑 $0=(0,0,\cdots,0)=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 若其中每个 $u_i=0$ 必须成立 (唯一解?)
则 为直和.

理：$U+W$ 为直和 $U \oplus W$ iff $U \cap W=\{0\}$

Ch2.

$\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_m)=\{a_1v_1+\cdots+a_mv_m; a_i \in F\}$ 称为线性张成空间

多项式 (polynomial) $P(F)$ 次数 $\deg p$

$P_m(F)=\mathrm{span}(1, z, \cdots, z^m)$.

线性无关：$\sum_{i=1} a_iv_i=0$ 解仅有 $a_i=0 \Rightarrow v_i$ 线性无关

基：线性无关且张成向量空间 V，则称为基 (base)

设 V 有限维，U 为 V 子空间，则存在 V 子空间 W 使 $V=U \oplus W$.
设 $u_1, \cdots u_m$ 为 U 的基，将其扩充至 V 中为 $u_1, \cdots u_m, w_1, \cdots w_n$.
令 $W=\mathrm{span}(w_1, \cdots w_n)$ 下证 $V=U+W$，$U \cap W=\{0\}$
设 $v \in V$，$\exists a_i, b_i \in F$ 使 $v=\sum a_iu_i+\sum b_jw_j \Rightarrow V=U+W$.
$\Rightarrow v \in U+W$ 而 $U+W \subset V \Rightarrow U+W=V$.
再设 $v' \in U \cap W$ $\exists a_1 \cdots a_m$; $b_1 \cdots b_n \in F$ 使 $v=\sum a_iu_i=\sum b_iw_i$
$\Rightarrow a_1u_1+\cdots+a_mu_m-b_1w_1-\cdots-b_nw_n=0$ $\because u_i, w_i$ 为线性无关的.
故 $a_i=b_i=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow U \cap W=\{0\}$

维数 dimension
$\dim V=$ 其任意基的长度. $\Rightarrow$ 每个长度为 $\dim V$ 的线性无关向量组都为 V 的基
$\dim P_m(F)=m+1$ $P_m(F)$ 基 $(1, z, \cdots z^m)$ 长度为 $m+1$.

1° V 有限维 U 为 V 子空间 $\dim U \le \dim V$

2° $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1 \cap U_2)$

Ch3. 线性映射.

条件：$T(u+v)=Tu+Tv$；$T(\lambda v)=\lambda T(v)$.

linear map：$T: V \to W$ $T \in L(V,W)$ 所有线性映射的集合.

1° 设 $v_1 \cdots v_n$ 为 V 的基，$w_1, \cdots w_n \in W$. 存在唯一的 $T: V \to W$ 使 $Tv_i=w_i$.

2° $STu=TSu$ $TI=IT$ $(S_1+S_2)T=S_1T+S_2T$；$S(T_1+T_2)=ST_1+ST_2$

3° $T(0)=0$ $\because T(0+0)=2T(0)$
对 $T \in L(V,W)$

零空间 null T $\mathrm{null}\,T=\{v \in V: Tv=0\}$
null T 为 V 子空间

值域 range T $\mathrm{range}\,T=\{Tv: v \in V\}$.
range T 为 W 子空间

$\dim V=\dim \mathrm{null}\,T+\dim \mathrm{range}\,T$

满射 surjective $T: V \to W$ 值域为 W 则 T 为满的
单射 injective 对 $Tu=Tv \Rightarrow u=v \Rightarrow T$ 单射 $\Rightarrow \mathrm{null}\,T=\{0\}$

设 $T: V \to W$，$\dim V<\dim W$ 则 T 不为满射
$\dim V>\dim W$ T 不为单射

矩阵. $m \times n$ m 行 n 列

$T \in L(V,W) \Rightarrow M(T)$
$\left.\begin{array}{l} v_1 \cdots v_n \text{ 为 } V \text{ 的基} \\ w_1, \cdots w_m \text{ 为 } W \text{ 的基} \end{array}\right\}$ $M(T)$ 以其为基.

记 $F^{m,n}$ 为 $m \times n$ 矩阵.
$\dim F^{m,n}=mn$.

$M_{m \times n} \times M_{n \times p}=M_{m \times p}$ → 第 j 行第 k 列元素
第 j 行 第 k 列 相对应元素相乘再求和 =

记 $A_{j,\cdot}$ 为 A 的第 j 行
$A_{\cdot,k}$ 为 A 的第 k 列 $(AC)_{j,k}=A_{j,\cdot} \times C_{\cdot,k}$.

可逆 (invertible) 逆 (inverse)
若 $ST=I$ 且 $TS=I$ S 为 T 的逆 记作 T^{-1}
※ 有逆 $\Leftrightarrow$ 其单且满

同构 isomorphic
若 $T \in L(V,W)$ T 为可逆的 称 T 为同构 (isomorphism)
…同构的 (isomorphic)

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{bmatrix}_{1 \times 5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4 \\ 2a_1+2a_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ 时}$$

$a_0+\cdots+16a_4=0$
$a_1+a_3=0$ $f(2)$ $f(1)=f(-1)$

A 为 V 的 iff $\lambda v+(1-\lambda)w \in A$.
对 $v, w \in A$ 与 $\lambda \in F$
$\lambda v+(1-\lambda)w \in A$
$(1-\lambda)v+\lambda w \in A$
若 A 为 V 仿射子集 对 $v \in V$
$\Rightarrow A=v+U$

对 $T \in L(V,W)$ $\mathrm{null}\,T=\{v \in V, Tv=0\}$. $\mathrm{range}\,T=\{Tv, v \in V\}$

单射 $\Leftrightarrow \mathrm{null}\,T=\{0\}$
满射 $\Leftrightarrow$ ~~range T = W~~ $\dim \mathrm{range}\,T=\dim W$

$\dim V=\underbrace{\dim \mathrm{null}\,T}_{=m}+\dim \mathrm{range}\,T$.

$u_1, \cdots u_m$ 扩展到 V 的基 $u_1, \cdots u_m, v_1, \cdots v_n$. LHS $=m+n$

下证 $\dim \mathrm{range}\,T=n$ $\because Tu_i=0$
$\Rightarrow \mathrm{range}\,T=\{Tv_i, v_i \in V\}$
而 $v_1 \cdots v_n$ 线性无关 $\Rightarrow Tv_i$ 线性无关
$\Rightarrow \dim \mathrm{range}\,T=n$.

$\dim \mathrm{null}\,ST \le \dim \mathrm{null}\,S+\dim \mathrm{null}\,T$.

$ST \in L(U,W)$
LHS $=$ ~~dim U~~ range ST $\le$ $\dim \mathrm{range}\,T$.
RHS $=\dim V-\dim \mathrm{range}\,S+$ ~~dim U~~ ~~range~~
$\Leftrightarrow \dim \mathrm{range}\,T+\dim \mathrm{range}\,S \le \dim V+\dim \mathrm{range}\,ST$

取任意 $v \in \mathrm{null}\,T_1 \Rightarrow T_1v=0$
$T_2v=(ST_1)v=S(T_1v)=0 \Rightarrow \mathrm{null}\,T_1 \subset \mathrm{null}\,T_2$.
$\varphi_1, \varphi_2: V \to F$
$\mathrm{null}\,\varphi_1=\mathrm{null}\,\varphi_2$.

行 列 和

$M_{a \times b} \times M_{b \times c}=M_{a \times c}$
i, j 个

$T \in L(V,W)$
$v_1 \cdots v_n$ $\dim V=n$
$w_1 \cdots w_m$ $\dim W=m$.
range $T=\mathrm{span}(Tv_1, \cdots, Tv_n)$
$\Rightarrow \dim \mathrm{range}\,T=n$.
$\because$ 一致有

$T \in L(V,W)$.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $T \in L(V,W)$

※ 可逆 ⇔ 其单且满

同构 isomorphic

若 $T\in L(V,W)$ T为可逆的 称T为同构 (isomorphism)

该两向量空间为同构的 (isomorphic)

有限维

1° 两向量空间同构 iff 其 dim 相同

2° $\dim L(V,W)=(\dim V)(\dim W)$

算子 (operator) $L(V,V)$ 记作 $L(V)$ 表示 V上所有算子组成的集合

设 $V_1,\cdots V_m$ 为F上 vector space.

$V_1\times\cdots\times V_m=\{(v_1,\cdots v_m): v_i\in V_i\}$ 亦为F上向量空间

$\dim(V_1\times\cdots\times V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$.

设 $U_1,U_2,\cdots U_m$ 均为V的子空间. 映射 $\Gamma: U_1\times\cdots\times U_m\to U_1+\cdots+U_m$

定义为 $\Gamma(u_1,\cdots u_m)=u_1+\cdots+u_m$ 则 $U_1+\cdots+U_m$ 为直和 iff 其为单射.

iff $\dim(U_1+\cdots+U_m)=\dim U_1+\cdots+\dim U_m$

设 $v\in V$, U为V的子空间, 则 $v+U$ 为V的子集 定义 $v+U=\{v+u: u\in U\}$.

仿射子集 (affine subset)

V的仿射子集为形如 $v+U$ 的子集, 其中 $v\in V$, U为V子空间

对 $v\in V$ 与V的子空间U, 称 $v+U$ 平行于U.

商空间 (quotient space) V/U.

设U为V子空间, V/U 指所有平行于U的仿射子集的集合.

$V/U=\{v+U: v\in V\}$

设U为V子空间, $v,w\in V$, 则以下陈述等价:

(a) $v-w\in U$

(b) $v+U=w+U$

(c) $(v+U)\cap(w+U)\neq\varnothing$

定义在 V/U 上加法: $(v+U)+(w+U)=(v+w)+U$.

$\lambda(v+U)=(\lambda v)+U$ ⇒ 商空间为向量空间.

商映射: π U为V子空间, 商映射 $\pi: V\to V/U$ 对 $v\in V$

有 $\pi(v)=v+U$

$$\boxed{\dim V/U=\dim V-\dim U}$$

定义 $\tilde{T}$ $T\in L(V,W)$ $\tilde{T}: V/(\operatorname{null}T)\to W$ $\tilde{T}(v+\operatorname{null}T)=Tv$.

$\tilde{T}$ 的零空间与值域.

设 $T\in L(V,W)$ 则

(a) $\tilde{T}$ 为 $V/(\operatorname{null}T)$ 到W的线性映射

(b) $\tilde{T}$ 为单的

(c) $\operatorname{range}\tilde{T}=\operatorname{range}T$

(d) $V/\operatorname{null}T$ 同构于 $\operatorname{range}T$.

对偶. V上线性泛函为V到F的线性映射. linear functional.

对偶空间 (dual space) V'

V上所有线性泛函构成的向量空间称为V的对偶空间, 记为 V'

即 $V'=L(V,F)$

$\dim V'=\dim V$

对偶基: $v_1,\cdots,v_n$ 为V的基, 则 $v_1\cdots v_n$ 的对偶基为 V' 中元素组 $\varphi_1,\cdots\varphi_n$

其中 φ_j 为V上线性泛函. 使 $\varphi_j(v_k)=\begin{cases}1, & k=j\\0, & k\neq j\end{cases}$.

对偶基为对偶空间的基

若 $T\in L(V,W)$ T的对偶映射为 $T'\in L(W',V')$: 对于 $\varphi\in W'$, $T'(\varphi)=\varphi\circ T$.

性质: 对 $S,T\in L(V,W)$ 有 $(S+T)'=S'+T'$

对所有 $\lambda\in F$ 和 $T\in L(V,W)$ 有 $(\lambda T)'=\lambda T'$.

对所有 $T\in L(U,V)$ 和所有 $S\in L(V,W)$ 有 $(ST)'=T'S'$

零化子 (annihilator) U^0

对于 $U\subset V$, U的零化子 (记为 U^0) 定义如下:

$U^0=\{\varphi\in V': 对所有 u\in U 都有 \varphi(u)=0\}$

U^0 为 V' 子空间 且 $\dim U+\dim U^0=\dim V$

T' 的零空间: V,W有限维, $T\in L(V,W)$

$\operatorname{null}T'=(\operatorname{range}T)^0$

$\dim\operatorname{null}T'=\dim\operatorname{null}T+\dim W-\dim V$.

T为满射 ⇔ T' 为单射. T单 ⇔ T' 满.

$T\in L(V,W)$, $\dim\operatorname{range}T'=\dim\operatorname{range}T$

$\operatorname{range}T'=(\operatorname{null}T)^0$.

转置: A^t

$A(m\times n)\to A^t(n\times m)$ $(A^t)_{k,j}=A_{j,k}$ ⇒ $A=\begin{pmatrix}5&-2\\3&8\\-4&2\end{pmatrix}$ $A^t=\begin{pmatrix}5&3&-4\\-2&8&2\end{pmatrix}$

$(AC)^t=C^tA^t$ $M(T')=(M(T))^t$

秩 (rank). $\dim\operatorname{range}T=\operatorname{rank}T$

⇒ 行秩 = 列秩 一般称秩为列秩

第四章略 (复数/多项式).

第五章: 本征值, 本征向量, 不变子空间.

... 不变子空间

$T\in L(V,W)$.

$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $T\in L(V,W)$

同构时 $\operatorname{null}T=\{0\}$ $\operatorname{range}T=W$

$\dim V=\dim\operatorname{null}T+\dim\operatorname{range}T=\dim W$.

~~$TS(ST)^{-1}=T\ TST^{-1}S^{-1}=$~~

~~$ST(ST)^{-1}=STS^{-1}T^{-1}=$~~ $STT^{-1}=$

$TS(ST)^{-1}=TSS^{-1}T^{-1}=I$

$=\ T$

设 $t\in V$

A为V子空间. ~~设 $t\in V$~~

对V的子空间U, $v\in V$

其仿射子集为 $v+U=\{v+u: u\in U\}$.

$\langle A,B\rangle=$

$T^2=I$.

$(T-I)(T+I)=0$

⇒ $T=I$ 或 $T=-I$ 可对角化

$\pi: V\to V/U$

$\pi(v)=v+U$.

$T(x,y,z)=(4x+5y+6z, 7x+8y+9z)$

$\begin{pmatrix}4&7\\5&8\\6&9\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4&3\\5&3\\6&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$

对 $v,w\in V$.

$v+\operatorname{null}T$, $w+\operatorname{null}T\in V/(\operatorname{null}T)$

$\tilde{T}(v+\operatorname{null}T)+\tilde{T}(w+\operatorname{null}T)=Tv+Tw=T(v+w)$

$=\tilde{T}(v+w+\operatorname{null}T)$

$\tilde{T}(\lambda v+\operatorname{null}T)=T(\lambda v)=\lambda Tv=\lambda\tilde{T}(v+\operatorname{null}T)$

∴线性

SS^{-1} TT^{-1}

$ST(TS)^{-1}=I=(TS)^{-1}ST$

ST 可逆

$STU=I$. $TT^{-1}=TUS$

$ST=U^{-1}$

$STT^{-1}=U^{-1}U$

基为

$(-1,0,1)$

$(1,1,1)$.

3×3 ~~1×3~~ 1×5

3×1 3×1

φ_1

$\begin{pmatrix}8&0&0\\3&5&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8x\\3x+5y\\y+2z\end{pmatrix}$

转置 $\begin{pmatrix}8&3&0\\0&5&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(a) 8, 5, 2.

(b) $U=\{pq: q\in P(F)\}$

(c) $\dim P(F)/U=\dim P(F)-\dim U$

证两向量空间同构, T为线性映射 (单, 满射)

第四章略（线性映射）。

第五章：本征值、本征向量、不变子空间。

invariant subspace 不变子空间

设 $T\in L(V)$ 称 V 的子空间 U 在 T 下不变，若对每个 $u\in U$，都有 $Tu\in U$。

eigenvalue 本征值。

设 $T\in L(V)$，称数 $\lambda\in F$ 为 T 的本征值，若存在 $v\in V$ 使 $v\neq 0$ 且 $Tv=\lambda v$。

※ 若 λ 为 T 本征值

$\Leftrightarrow$ $T-\lambda I$ 非单、非满、非可逆

eigenvector 本征向量 v

设 $T\in L(V)$，λ 为 T 的本征值，向量 $v\in V$ 为 T 本征向量若 $Tv=\lambda v$。

即 $(T-\lambda I)v=0$ ∴ 相当于 $v\in null(T-\lambda I)$

对 $T\in L(V)$，$\lambda_1,\cdots\lambda_m$ 为其互不相同的本征值，其对应本征向量 $v_1,\cdots v_m$ 线性无关。

※ V 上每个算子最多有 $\dim V$ 个互不相同的本征值

定义：限制算子（restriction operator），$T|_U$

商算子（quotient operator），T/U。

设 $T\in L(V)$ 且 U 为 V 在 T 下不变子空间。

$T|_U\in L(U)$ 定义为 $T|_U(u)=Tu$。

$(T/U)(v+U)=Tv+U$。

5.B 本征向量与上三角阵

定义 T^m $T\in L(V)$，m 为正整数。 $T^m=T\cdots T$. T^0 为 I，$T^{-m}=(T^{-1})^m$

定义 $p(T)$ 设 $T\in L(V)$，$p\in P(F)$，对 $z\in F$ 有 $p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2\cdots+a_mz^m$

则 $p(T)=a_0I+a_1T+\cdots+a_mT^m$ 算子。

多项式的积 $p,q\in P(F)$，则 $pq\in P(F)$ $(pq)z=p(z)q(z)$。

复向量空间上的算子都有本征值。

上三角矩阵 $M(T)$。

$T\in L(V)$，并设 $v_1,\cdots v_n$ 为 V 的基。T 关于该基矩阵定义为 $n\times n$ 矩阵

$$M(T)=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n}\end{pmatrix}$$

$Tv_k=A_{1,k}v_1+\cdots+A_{n,k}v_n$

例 $T\in L(F^3)$ 为 $T(x,y,z)=(2x+y,5y+3z,8z)$。

$$M(T)=\begin{pmatrix} 2&1&0\\0&5&3\\0&0&8\end{pmatrix}$$

上三角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ 为该矩阵本征值

称为对角线

$\Downarrow$ v_j 为 V 的基

条件：对 $j=1,\cdots,n$ 有 $Tv_j\in span(v_1,\cdots,v_j)$。

$j=1,\cdots n$ 有 $span(v_1,\cdots v_j)$ 在 T 下不变。

V 有限维复向量空间，$T\in L(V)$ T 关于 V 的某个基有上三角矩阵。

矩阵 T 可逆 iff 其上三角矩阵对角线上元素都不为0

$M(T-\lambda I)$ 不可逆

5.C 本征空间与对角矩阵

对角矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 的矩阵

本征空间（eigenspace） $E(\lambda,T)$。

设 $T\in L(V)$ 且 $\lambda\in F$。 T 的相对于 λ 的本征空间 $E(\lambda,T)=null(T-\lambda I)$

设 V 为有限维的，$T\in L(V)$ 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为 T 的互异的本征值。则

$E(\lambda_1,T)+\cdots+E(\lambda_m,T)$ 为直和，且 $\dim E(\lambda_1,T)+\cdots+\dim E(\lambda_m,T)\le\dim V$

※ 可对角化的条件：满足一个即可。

1° 有由 T 的本征向量构成的基。

2° 存在 T 下不变的一维子空间 $U_1,\cdots U_n$ 使得 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$。

3° $V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$。

4° $\dim V=\dim E(\lambda_1,T)+\cdots+\dim E(\lambda_m,T)$。

对 $T\in L(V)$ 有 $\dim V$ 个互异个本征值则其可对角化 但反过来不成立。

关于标准基矩阵为 $\begin{pmatrix} 2&1&0\\0&5&3\\0&0&8\end{pmatrix}$ 本征值为 2、5、8。

$T(x,y,z)=\lambda(x,y,z)$ 的非零解

$\lambda=2\Rightarrow(1,0,0)$

$\lambda=5\Rightarrow(1,3,0)$

$\lambda=8\Rightarrow(1,6,6)$

$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&8\end{pmatrix}$

对 $T\in L(V)$ 有 $\dim V$ 的本征值 $\to$ 可对角化。

V 的基 $v_1\cdots v_n$ 对偶基为 V' 中 $\varphi_1,\cdots\varphi_n$

φ_j 为 V 上线性泛函 $\varphi_j(v_k)=\begin{cases}1; & k=j\\ 0; & k\neq j\end{cases}$

证两向量空间同构，

需证 $T\in L(M,N)$ T 为线性映射（加，数乘）

再证 T 满射且单射。

$v+U=x+W$

对 $u\in U$，$w\in W$

$v+u=x+w$。

设 $v_1,v_2\in V$. A 仿

假设 $a\in V$，子空间 U，$A=\{a+u,u\in U\}$.

$v=a+u_1$，$w=a+u_2$

$\lambda(a+u_1)+(1-\lambda)(a+u_2)=a+\underbrace{(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)}_{\in U}\in A$.

$\lambda v+(1-\lambda)w\in A$，$v,w\in A$，$\lambda\in F$.

令 $A-a=\{x-a:x\in A\}$，

需证 $A-a$ 为子空间：

$\lambda(x-a)=\lambda x+(1-\lambda)a-a\in A-a$.

$(x-a)+(y-a)=(x+y)-2a=2\cdot\left(\frac{x+y}{2}-a\right)\in A-a$

$\Rightarrow$ $A-a$ 为子空间

$a+(A-a)$ 为仿射空间

$v\in null(T-\lambda I)$.

$\varphi\in L(V,F)$ $\varphi\neq 0$.

$\dim V/null(\varphi)=1$ $\dim null\varphi=\cancel{\dim V}$ $\dim V-\dim range\varphi$

$\dim V-\dim null\varphi=1$

$\pi:V\to V/U$

$\pi(v)=v+U=\{v+u:v\in V\}$. $-\dim V+\dim range\varphi=1$ $\dim F=1$

$\Rightarrow$ $\dim range\varphi=1$.

$\dim V/U=1$. $\varphi\in L(V,F)$ $null\varphi=U$

U 为 V 子空间 $\pi:V\to V/U$.

$\exists S\in L(V/U,W)$ 使 $T=S\circ\pi$ iff $U\subset null T$

若 $U\subset null T$.

$V\to V/U$. $u\in U$，$\pi u=0$.

$\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3y\\x\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$T-\lambda I$ (a,b,c)

$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&3\\0&0&6\end{pmatrix}v=0$ $\Rightarrow(1,0,0)$ $0\cdot a=0$ $b=0$ $b+c=0$

$\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&0&3\\0&0&3\end{pmatrix}v=0$ $(1,3,0)$

$\begin{pmatrix}-6&1&0\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}v=0$ $(1,6,6)$

$(2x+y,5y+3z,8z)=(2x,2y,2z)$.

$(2x+y,5y+3z,8z)=(5x,5y,5z)$ $2x+1=5x$ $x=\frac{1}{3}$

$z=0$，$y=1$，$x=\frac{1}{3}\Rightarrow(1,3,0)$

$=(8x,8y,8z)$

$z=1$，$y=1$，$x=\frac{1}{6}\Rightarrow(1,6,6)$

$T(w,z)=(z,0)=\lambda(w,z)$

$\lambda w=z$，$z=0$

$y=0$，$z=0$

$\Rightarrow\lambda=0$ $(w,0)$

$E(0,T)=\{(w,0),w\in C\}$

求对偶基 $(1,1,1)$ $(1,0,1)$ $(0,1,1)$.

设 $f_1, f_2, f_3(x,y,z) = a$

$f_1(1,1,1) = a+b+c = 1$ $f_2(1,0,1) = a+c = 0$, $f_3(0,1,1) = b+c = 0$

$\Rightarrow f_1 = x+y-z$. 同理求 f_2, f_3.

$f(x) =$

$f(x) \longrightarrow f(2) + \int_0^1 f(x)\,dx$

$1, x, x^2$.

$\varphi_0(1, x, x^2) = a + bx + cx^2$.

$\varphi_1(1, x, x^2) = 1 =$

$\varphi_2(0, x, 0) = 0$

$\varphi_3(0, 0, x^2) = 0$