期末复习

2024年6月2日 星期日 01:21

Ch6. 内积空间

在R^n中向量x的长度称为x的范数(norm)，记作$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

$x \in R^n$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

点积(dot product) 对于$x,y \in R^n$，x和y的点积(记作$x \cdot y$)定义为

$x \cdot y = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ 其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

对于复数$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in C^n$，定义$z$范数为$\|z\|=\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}$

$\|z\|^2=z_1\bar{z_1}+\cdots+z_n\bar{z_n}$ $\bar{z_n}$表示z_n共轭.

定义内积：$u,v \Rightarrow \langle u,v\rangle$为一个数 GF：$\langle v,v\rangle\geq 0$.

$\langle v,v\rangle=0$ iff $v=0$ $\underbrace{\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle}_{\text{仅前一个成立}}$ $\langle \lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$

$\langle u,\lambda v\rangle=\bar{\lambda}\langle u,v\rangle$.

$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$，在复空间内成立，实空间内：$\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$.

范数(norm) $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$. $\|\lambda v\|=|\lambda|\,\|v\|$.

if $\langle u,v\rangle=0$，称u,v为正交的.(orthogonal).

※ $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2 \Leftrightarrow u,v$正交

正交分解： $u=cv+(u-cv)$ 取c使v与$u-cv$垂直，即v,w正交.

即$0=\langle u-cv,v\rangle=\langle u,v\rangle-c\|v\|^2 \Rightarrow c=\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$

$u=\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\cdot v+\left(u-\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\cdot v\right)$ $u=cv+w$，v,w正交.

柯西-施瓦茨不等式，设$u,v\in V$. 则$|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\,\|v\|$

等号成立 iff $u=cv$ (c为常数) 即同方向(反方向)

例子：$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|^2\leq(x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)$.

$\left|\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx\right|^2\leq\left(\int_{-1}^{1}(f(x))^2dx\right)\left(\int_{-1}^{1}(g(x))^2dx\right)$.

三角不等式：设$u,v\in V$，则$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ 同向时成立

平行四边形恒等式：设$u,v\in V$. 则$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$.

6.B. 定义：规范正交的：若每个向量范数为1且与其他正交，则称为规范正交的. 即V上向量组$e_1,e_2,\cdots e_n$为规范正交，如果 $\langle e_j,e_k\rangle=\begin{cases}1, & 若j=k.\\0, & 若j\neq k.\end{cases}$

若$e_1,\cdots,e_m$为V中规范正交向量组，则对$a_1,\cdots a_m\in F$均有$\|a_1e_1+\cdots+a_me_m\|^2=|a_1|^2+\cdots+|a_m|^2$. ，则规范正交组线性无关.

规范正交基 设为$e_1,e_2,\cdots e_n$ 则$v=\langle v,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle v,e_n\rangle e_n$.

$\|v\|^2=|\langle v,e_1\rangle|^2+\cdots+|\langle v,e_n\rangle|^2$.

Gram-Schmitt 过程 $v_1,v_2,\cdots v_m$为V中线性无关向量组.

设$e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\Rightarrow e_j=\frac{v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\|v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|}$

则$e_1,\cdots,e_m$为V中规范正交组，使对$j=1,\cdots,m$有：

$span(v_1,\cdots v_j)=span(e_1,\cdots e_j)$

例：求$P_2(R)$规范正交基. $\langle p,q\rangle=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$

取$P_2(R)$的基为$1,x,x^2$. $\|1\|^2=\int_{-1}^{1}1^2dx=2 \Rightarrow \|1\|=\sqrt{2}$.

故$e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\langle x,1\rangle=\int_{-1}^{1}xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}=0$

$e_2=\frac{v_2-\langle v_2,e_1\rangle e_1}{\|v_2-\langle v_2,e_1\rangle e_1\|}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}x$

$\int_{-1}^{1}x^2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}dx\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(1+1)=\frac{1}{3}$

$e_3=\frac{v_3-\langle v_3,e_1\rangle e_1-\langle v_3,e_2\rangle e_2}{\|v_3-\langle v_3,e_1\rangle e_1-\langle v_3,e_2\rangle e_2\|}$

$=\frac{x^2-\frac{1}{3}}{}=\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$

$\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx$.

$\int_{-1}^{1}x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}dx$

$$e_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, e_1\rangle e_1 - \cdots}{\| v_3 - \langle v_3, e_1\rangle e_1 - \langle v_3, e_2\rangle e_2 \|}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$= \frac{1}{2} \cdot 3 (1+1) \cdots$

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx.$$
$$= \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\, dx$$
$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x \Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{9}(1+1) + \frac{2}{9}$$
$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，若 T 关于 V 某个基有上三角阵，则关于 V 的某个规范正交基有上三角矩阵。

舒尔定理. 设 V 有限维复向量空间且 $T \in \mathcal{L}(V)$，则 T 关于 - - - - - - -.

对线性泛函 $\varphi: F^3 \to F$　$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3$.

即对每个 $z \in F^3$，$\varphi(z) = \langle z, u\rangle$，其中 $u = (2, -5, 1)$

里斯表示定理.

设 V 为有限维的且 φ 为 V 上的线性泛函，则存在唯一的向量 $u \in V$ 使对每个 $v \in V$ 均有 $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$.

证明：先证存在再证唯一. 设 $e_1, e_2, \cdots e_n$ 为 V 的规范正交基.

则对每个 $v \in V$ 有：$\varphi(v) = \varphi(\langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n)$

$= \langle v, e_1\rangle \varphi(e_1) + \cdots + \langle v, e_n\rangle \varphi(e_n)$.

$= \langle v, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} e_n\rangle$

$\therefore$ $\boxed{\text{取 } u = \overline{\varphi(e_1)}\, e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)}\, e_n}$ 则对每个 $v \in V$ 都有 $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$.

例：求 $u \in P_2(\mathbb{R})$ 使对每个 $p \in P_2(\mathbb{R})$ 有 $\int_{-1}^{1} p(t)(\cos(\pi t))\,dt = \int_{-1}^{1} p(t)u(t)\,dt$

设 $\varphi(p) = \int_{-1}^{1} p(t)(\cos \pi(t))\,dt$.　正交规范基为 $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$.

$$u(x) = \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\cos(\pi t))\,dt\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,t(\cos(\pi t))\,dt\right)\sqrt{\tfrac{3}{2}}x$$
$$+ \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{45}{8}}\left(t^2 - \tfrac{1}{3}\right)(\cos \pi t)\,dt\right)\sqrt{\tfrac{45}{8}}\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) = -\frac{45}{2\pi^2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$

6.C 正交补，$U^\perp$

U 为 V 子集，则 U 的正交补（记作 $U^\perp$）为由 V 中与 U 每个向量都正交的那些向量组成的集合：$U^\perp = \{v \in V : 对每个 u \in U 均有 \langle v, u\rangle = 0\}$.　orthogonal complement.

性质：(a) U 为 V 子集，则 $U^\perp$ 为 V 子空间　(e) 若 U 与 W 均为 V 的子集且 $U \subset W$，则 $W^\perp \subset U^\perp$.

(b) $\{0\}^\perp = V$　(c) $V^\perp = \{0\}$.　(d) U 为 V 子集，则 $U \cap U^\perp \subset \{0\}$

若 U 为 V 有限维子空间，则 $V = U \oplus U^\perp$.　$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

$U = (U^\perp)^\perp$

def：正交投影 (orthogonal projection)，P_U.

U 为 V 有限子空间，定义 V 到 U 上正交投影为如下算子 $P_U \in \mathcal{L}(V)$：

对 $v \in V$，写成 $v = u + w$，其中 $u \in U$, $w \in U^\perp$ 则 $P_U v = u$.

例：设 $x \in V$，$x \neq 0$ 且 $U = \operatorname{span}(x)$ 试证对每个 $v \in V$ 有 $P_U v = \frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x$.

$$v = \frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x + \left(v - \frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x\right).$$

正交投影性质：设 U 为 V 有限维子空间，$v \in V$. 有：

$P_U \in \mathcal{L}(V)$；$P_U u = u$ 对 $u \in U$；$P_U w = 0$ 对 $w \in U^\perp$；$\operatorname{range} P_U = U$；

$\operatorname{null} P_U = U^\perp$；$v - P_U v \in U^\perp$；$P_U^2 = P_U$；$\|P_U v\| \le \|v\|$；对 U 正交基

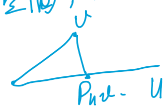
$P_U v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_m\rangle e_m$

$P_U \in L(V)$ … ; $\|P_U v\| \le \|v\|$; …

$\text{null}\, P_U = U^\perp$; $v - P_U v \in U^\perp$; $P_U^2 = P_U$; $\|P_U v\| \le \|v\|$;

$e_1, e_2, \dots, e_m$ 有 $P_U v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m\rangle e_m$

极小化：假设U为V有限维子空间，$v \in V$，$u \in U$ $\|v - P_U v\| \le \|v - u\|$ iff $u = P_U v$ 时等号.



Ch7 内积空间上的算子.

7.A 自伴算子与正规算子.

设 $T \in L(V, W)$ T的伴随 (adjoint) 记作 $T^*: W \to V$：对 $v \in V$，$w \in W$ 有：

$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$

例：$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1)$ 求 T^*.

$T^*: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 取 $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 对每个 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 有：

$\langle (x_1, x_2, x_3), T^*(y_1, y_2)\rangle = \langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)\rangle = \langle (x_2 + 3x_3, 2x_1), (y_1, y_2)\rangle$.

$= x_2 y_1 + 3x_3 y_1 + 2x_1 y_2 = \langle (x_1, x_2, x_3), (2y_2, y_1, 3y_1)\rangle$.

故 $T^*(y_1, y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1)$

性质：(a) $(S+T)^* = S^* + T^*$ (b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ (c) $(T^*)^* = T$

(d) $I^* = I$ (e) $(ST)^* = T^* S^*$.

对 $T \in L(V, W)$ 有：$\text{null}\, T^* = (\text{range}\, T)^\perp$ $\text{range}\, T^* = (\text{null}\, T)^\perp$

$\text{null}\, T = (\text{range}\, T^*)^\perp$ $\text{range}\, T = (\text{null}\, T^*)^\perp$.

共轭转置：conjugate transpose. $\begin{pmatrix} 2 & 3+4i & 7 \\ 6 & 5 & 8i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3-4i & 5 \\ 7 & -8i \end{pmatrix}$

T^*矩阵：设 $T \in L(V, W)$ $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为V的规范正交基；$f_1, \dots, f_m$ 为W的规范正交基.

则 $\mathcal{M}(T^*, (f_1, \dots, f_m), (e_1, \dots, e_n))$ 为 $\mathcal{M}(T, (e_1, e_2, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m))$ 的共轭转置.

自伴算子 (self-adjoint) $T \in L(V)$ 若 $T = T^*$ 则为自伴的. 即 $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle = \langle v, T^* w\rangle$.

↓

特征值都是实的.

$\boxed{\text{若对 } T \in L(V)\text{，所有 } v \in V \text{ 有 } \langle Tv, v\rangle = 0 \text{ 则 } T = 0}$

正规算子 (normal) 如若 $TT^* = T^* T$，则称T正规 自伴显然正规.

性质：$\text{null}\, T = \text{null}\, T^*$ T为正规的 iff $\|Tv\| = \|T^* v\|$

若T正规，T与 T^* 有相同特征向量，T的本征向量都正交.

复谱定理：设 $F = \mathbb{C}$ 且 $T \in L(V)$ 则以下等价：

(a) T为正规的

… 的规范正交基.

复谱定理：设 $F=\mathbb{C}$ 且 $T\in L(V)$ 则 ……
(a) T为正规的
(b) V 有一个由T本征向量组成的规范正交基.
(c) T关于V的某个规范正交基有对角矩阵

实谱定理. $T\in L(V)$ 自伴，$b^2<4c$ 则 $T^2+bT+cI$ 可逆

$$\langle (T^2+bT+cI)v, v\rangle = \langle T^2v, v\rangle + b\langle Tv, v\rangle + c\langle v, v\rangle$$
$$= \langle Tv, Tv\rangle + b\langle Tv, v\rangle + c\|v\|^2$$
$$\geq \|Tv\|^2 - |b|\|Tv\|\|v\| + c\|v\|^2$$
$$= \left(\|Tv\| - \frac{|b|\|v\|}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)\|v\|^2 > 0.$$

设 $T\in L(V)$ 自伴，设 U 为V在T下不变子空间，则
(a) $U^\perp$ 在T下不变 (b) $T|_U\in L(U)$ 为自伴的 (c) $T|_{U^\perp}\in L(U^\perp)$ 为自伴的

实谱定理.
设 $F=\mathbb{R}$ 且 $T\in L(V)$ 则等价：
(a) T自伴 (b) V有一个由T本征向量组成的规范正交基
(c) T关于V某个规范正交基有对角矩阵

7.C 正算子与等距同构

positive operator：$T\in L(V)$，T自伴时 $\langle Tv, v\rangle \geq 0$. $\Rightarrow$ T所有本征值非负.
平方根，$R^2=T$，R为T ……　且唯一[正]平方根.

isometry(等距同构). $\|Sv\|=\|v\|$，$S\in L(V)$ 则 ……
若 $S\in L(V)$ 为 isometry，等价于：
$\langle Su, Sv\rangle = \langle u, v\rangle$；对V中任意规范正交向量组/基 $e_1,\cdots e_n$ 有 $Se_1,\cdots Se_n$ 正交.
$SS^*=S^*S=I$.
S^*为 isometry

7.D 极分解与奇异值分解.

……：对T为 positive operator，$\sqrt{T}$ 表示其正平方根，$\exists S\in L(V)$ 为 isometry

[illegible]

极分解：对 T 为 positive operator，$\sqrt{T}$ 表示其正平方根，$\exists S \in GL(V)$ [illegible]

使 $T = S\sqrt{T^*T}$

奇异值 (singular values)

$T \in L(V)$，T 奇异值为 $\sqrt{T^*T}$ 的本征值，且每个本征值 λ 都有重数

$\dim E(\lambda, \sqrt{T^*T})$ 次

例 $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 3z_1, 2z_2, -3z_4)$，$TT^* = \begin{pmatrix} 9 & & & 0 \\ & 4 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 9 \end{pmatrix}$，

$\sqrt{TT^*} = \begin{pmatrix} 3 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \dim E(3, \sqrt{T^*T}) = 2$，$\dim E(2, \sqrt{T^*T}) = 1$，$\dim E(0, \sqrt{T^*T}) = 1$.

$\Rightarrow T$ 奇异值为 $3, 3, 2, 0$.

对 $T \in L(V)$ 奇异值 $s_1, \cdots, s_n$，V 有两规范正交基 $e_1, \cdots e_n$ 和 $f_1, \cdots f_n$ 使对每个 $v \in V$ 均有

$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + \cdots + s_n\langle v, e_n\rangle f_n$.