期末复习 2.

2024年6月8日 星期六 15:38

Ch8 复向量空间上的算子.

设 $T\in L(V)$ 则 $\{0\}=\text{null}\,T^0\subset \text{null}\,T^1\subset\cdots\subset \text{null}\,T^k\subset \text{null}\,T^{k+1}\subset\cdots$

若 m 使 $\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}$ 则 $\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}=\cdots$

令 $n=\dim V \Rightarrow \text{null}\,T^n=\text{null}\,T^{n+1}=\cdots$

$V=\text{null}\,T^n\oplus \text{range}\,T^n$

$\dim V=\dim\text{null}\,T^n+\dim\text{range}\,T^n$.

广义本征向量 generalized eigenvector.

设 $T\in L(V)$, λ 为 T 本征值, 向量 $v\in V$ 称为 T 的相应于 λ 的广义本征向量, 若 $v\neq0$ 且存在正整数 j 使 $(T-\lambda I)^j v=0$

$j=\dim V$ 时, 每个都满足.

广义本征空间, $G(\lambda,T)$

设 $T\in L(V)$, $\lambda\in F$, 则 T 相应于 λ 的广义本征向量空间 $G(\lambda,T)$ 定义为 T 的相应于 λ 的所有广义本征向量的集合, 包括 0 向量.

$G(\lambda,T)=\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$

对 $\lambda_1,\cdots\lambda_m$ 为 T 的所有不同的本征值; $v_1,\cdots v_m$ 分别为相应的广义本征向量.

则 $v_1,\cdots v_m$ 线性无关

幂零的 (nilpotent).

$N\in L(V)$ 为幂零的, 则 $N^{\dim V}=0$ $\quad G(0,N)=V$. $\quad \text{null}\,N^{\dim V}=V$.

算子分解.

对 $T\in L(V)$, $p\in P(F)$ 则 $\text{null}\,p(T)$ 和 $\text{range}\,p(T)$ 在 T 下不变 (invariant).

V 为复向量空间, $T\in L(V)$. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为 T 不同本征值 则

(a) $V=G(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus G(\lambda_m,T)$

(b) 每个 $G(\lambda_j,T)$ 在 T 下不变. $\Rightarrow$ 对每个 $G(\lambda_j,T)$ 中取一个基, 所有基放一起

即有 V 的由 T 广义本征向量组成基.

(c) 每个 $(T-\lambda_j I)|_{G(\lambda_j,T)}$ 都为幂零的

重数 multiplicity $\quad$ e.v. λ 的重数为对应的 e.s $G(\lambda,T)$ 的维数,

即 为 $\dim\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$.

例 $T\in L(C^3)$ 使 $T(z_1,z_2,z_3)=(6z_1+3z_2+4z_3,\ 6z_2+2z_3,\ 7z_3)$.

$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}6&3&4\\0&6&2\\0&0&7\end{pmatrix}$ $\quad$ e.v. 为 6, 7. $\quad T-7I=\begin{pmatrix}-1&3&4\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$(T-7I)v=0 \quad v=(10,2,1)^T$

$G(6,T)=\text{span}((1,0,0),(0,1,0))$ $\quad G(7,T)=\text{span}((10,2,1))$

T 关于这个基的矩阵为

$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3\\0&6\end{pmatrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&7\end{pmatrix}$ 上三角块对角阵.

重数之和等于 $\dim V$.

※: $N\in L(V)$ 为幂零, 则 $I+N$ 有平方根.

$I+a_1N+a_2N^2+\cdots+a_{\dim V-1}N^{\dim V-1}=\sqrt{N}$

※ $N \in \mathcal{L}(V)$为幂零，则 $I+N$ 有平方根.
若 $N^{\dim V}=0$ 设平方根为 $I+a_1N+a_2N^2+\cdots+a_{\dim V-1}N^{\dim V-1}=\sqrt{N}$
平方求系数即可知.

※ V为复向量空间, $T\in\mathcal{L}(V)$ 可逆，则 T 有平方根.

8.C 特征多项式与极小多项式
假设 V为复空间, $T\in\mathcal{L}(V)$ 令 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为 T的 e.v. 其重数为 $d_1,\cdots,d_m$.
则 $(z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_m)^{d_m}$ 为 T 特征多项式 (characteristic polynomial).
其 degree 为 $\dim V$ (重数之和为维数), 零点为特征值

※ Cayley~Hamilton Theorem
V为复向量空间, $T\in\mathcal{L}(V)$, q表示 T的 c.p. 则 $q(T)=0$

首一多项式 monic polynomial. 即首项系数为1.

Minimal polynomial. 极小多项式
$T\in\mathcal{L}(V)$. 有唯一的 p 为首一多项式, 其次数最小使 $p(T)=0$
假设已知 T矩阵为 $\mathcal{M}(T)$ 对 $m=1,2,\cdots$
$a_0\mathcal{M}(I)+a_1\mathcal{M}(T)+\cdots+a_{m-1}\mathcal{M}(T)^{m-1}=-\mathcal{M}(T)^m$.
解出 $a_0,a_1,\cdots a_{m-1}$. 而 $T^{\dim V}=0$ 极多计算 $\dim V$次即可.

特征多项式为极小多项式的多项式倍.
例: $\begin{pmatrix}6&3&4\\0&6&2\\0&0&7\end{pmatrix}$ c.p. 为 $(z-6)^2(z-7)$ 故 mi.p 为 $(z-6)(z-7)$或 $(z-6)^2(z-7)$
而 $(T-6I)(T-7I)\neq 0$ 故 mi.p 为 $(z-6)^2(z-7)$.
$\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\0&&7\end{pmatrix}$ c.p.为$(z-6)^2(z-7)$ m.p为 $(z-6)(z-7)$.

8.D Jordan Form
设 $N\in\mathcal{L}(V)$ 为 nilpotent. $\exists\, v_1,\cdots v_n\in V$ 和非负整数 $m_1,\cdots m_n$ 使
(a) $N^{m_1}v_1,\cdots Nv_1, v_1,\cdots, N^{m_n}v_n,\cdots Nv_n, v_n$ 为V的基
(b) $N^{m_1+1}v_1=\cdots=N^{m_n+1}v_n=0$

※ Jordan basis 没看懂
设$T\in\mathcal{L}(V)$ V的基称为T的 Jordan basis if T关于这个基有分块
对角矩阵 $\begin{pmatrix}A_1&&0\\&\ddots&\\0&&A_p\end{pmatrix}$ 每个A_j形如 $A_j=\begin{pmatrix}\lambda_j&1&&0\\&\lambda_j&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda_j\end{pmatrix}$

对 $A=\begin{pmatrix}2&4&2&2\\-2&0&1&3\\-2&-2&3&3\\-2&-6&3&7\end{pmatrix}$ $A-\lambda I=\begin{pmatrix}2-\lambda&\lambda-6&2&0\\-2&-\lambda&1&2\\-2&0&3-\lambda&\lambda\\-2&-4&3&4\lambda\end{pmatrix}$

对 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $A-\lambda I=\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3-\lambda & \lambda \\ -2 & -4 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$0=(A-2I)v=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ -2 & -6 & 3 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$ 两个

$A-4I=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 仅一个

$(A-4I)^2=\begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 & 4 \\ & 16 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 36 & & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 20 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -3 & -1-\lambda & -2 \\ 7 & 5 & 6-\lambda \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det=-\lambda(6-\lambda)(-1-\lambda)+15+14-7(\lambda+1)$
$-3(6-\lambda)-10\lambda$
$=(\lambda^2+\lambda)(6-\lambda)+15+14-7\lambda-7-18-7\lambda$
$=-\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+4-14\lambda$
$=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0.$ $(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 1 & -3 & 2 \\ \hline 1-2 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ & 1 & -2 & & \\ \hline & & -3 & 8 & \\ & & -3 & 6 & \\ \hline & & & 2 & -4 \end{array}$$

Ch9. complexification of V 复化 V_C.

V_C 为 $V\times V$，其元素为有序对 (u,v)，$u,v\in V$ 记 $u+iv$.

V 的基为 V_C 的基. $T_C(u+iv)=Tu+iTv$，$T_C\in\mathcal{L}(V_C)$ 其中 $u,v\in V$

T_C 的极小多项式等于 T 的极小多项式 λ 为 T_C 特征值 iff $\bar\lambda$ 为 T_C 本征值.

$T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda\in C$ $(T_C-\lambda I)^j(u+iv)=0$ iff $(T_C-\bar\lambda I)^j(u-iv)=0$

T_C 非实的本征值成对出现.

λ 与 $\bar\lambda$ 重数相等 Cayley-Hamilton $q(T)=0$ q 为 charactic poly..-

λ与n重数相等　Cayley-Hamilton $q(T)=0$

9.2 实内积空间上的算子.

非自伴的正规算子.

1、设V为二维实内积空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，则以下条件等价：

(a) T为正规的而不自伴的

(b) T关于V的每个规范正交基的矩阵都有$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$　$b\neq 0$

(c) T关于V某个规范正交基的矩阵有$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$的形式　其中$b>0$.

2、V为内积空间，$T\in\mathcal{L}(V)$为正规的，U为V的在T下不变的子空间，则：

(a) $U^\perp$在T下不变；(b) U在T^*下不变 (c) $(T|_U)^*=(T^*)|_U$；(d) $T|_U\in\mathcal{L}(U)$为正规算子. $T|_{U^\perp}\in\mathcal{L}(U^\perp)$

3、对V为实内积空间，$T\in\mathcal{L}(V)$则：

T为正规的 $\iff$ V有规范正交基使T关于这个基有分块对角矩阵，对角线上每个块为1×1矩阵或$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$形式的$2\times 2$矩阵

10. 迹与行列式.

① 迹 (trace)

设$T\in\mathcal{L}(V)$

· 若$F=C$ 则T的迹等于T的按重数重复的全体e.v.之和，

$F=R$ — — — T_C — — — —

记作 trace T

例：设$T\in\mathcal{L}(C^3)$矩阵为$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　本征值为$1, 2\pm 3i$.

$\Rightarrow$ trace $T=5$.

② 若$\dim V=n$ 则 trace T 为T特征多项式中z^{n-1}系数的相反数

③ $\mathrm{trace}(AB)=\mathrm{trace}(BA)$　因其对角线元素之和

③ trace(AB) = trace(BA)

④ 基变时迹不变 · 为其对角线元素之和

⑤ trace(S+T) = trace S + trace T

⑥ 不存在 $S,T\in L(V)$ 使 $ST-TS=I$. (由③可知)

10.2 行列式 ·

determinant of an operator $\det T$

F=C 为 e.v. 的积 (记算重数)

F=R 为 T_C 的 e.v 的积 · · —

① $\det T$ 为 $(-1)^n$ 乘 T 的 c.p 的常数次

② T 的 c.p 可写作 $z^n - \operatorname{tr} T \cdot z^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\det T)$

③ $T\in L(V)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\det T\neq 0$.

④ T 的 c.p 为 $\det(zI-T)$

排列 (permutation) perm m　将 (1,2,⋯ m) 所有 m 排列组成的集合计作 perm m .

如 $(2,3,4,5,1)\in \text{perm } 5$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

① A 为方阵, B 为交换 A 的两列得到的矩阵 . $\det A = -\det B$

② 若方阵 A 有两个列为相同的, 则 $\det A = 0$.

③ $\det(AB) = \det(BA) = (\det A)(\det B)$

④ 设 V 为内积空间, $S\in L(V)$ 为等距同构 . 则 $|\det S| = 1$

⑤ $|\det T| = \det\sqrt{T^*T}$