МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

А.О. Пашко

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до виконання самостійної роботи
з дисципліни "Інтелектуальна обробка даних"

Київ – 2024

Пашко А.О. Методичні рекомендації до виконання самостійної роботи з дисципліни "Інтелектуальна обробка даних" для студентів галузі знань 12 «Інформаційні технології» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» освітнього рівня бакалавр освітньої програми «Інформатика»

Автор:
Пашко А.О., д.ф.-м.н., професор, професор кафедри теоретичної кібернетики факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Мета дисципліни «Інтелектуальна обробка даних» – вивчення основних та найбільш перспективних напрямків аналізу даних: зберігання інформації, оперативний і інтелектуальний аналіз, а також методів та алгоритмів інтелектуального аналізу; знайомство з актуальними питаннями, що постають при розробці програмних продуктів, що обробляють великі обсяги даних.

Протягом вивчення студенти мають опанувати основні методи та моделі інтелектуальної обробки та аналізу даних, засоби їх реалізації, навчитися аналізувати та уникати сучасних проблем, пов'язаних із збиранням та обробленням інформації.

Початком інтелектуальної обробки даних є попередній аналіз даних, що базується на методах та алгоритмах статистичного аналізу даних.

Завдання. У файлах A1.txt- A32.txt міститься запис кардіограми людини по 12 каналах. Час запису – 10 сек. Дискретність: 500 точок за 1 сек. Структура файлу – 1-й канал, 2-й канал, … 12-й канал (амплітуда у відносних одиницях). Довжина запису N=5000, $\Delta t = 1/500 = 0.002$.

Алгоритм обробки

1. Попередній аналіз

Побудувати графік кардіограми по кожному каналу. Для заданих змінних оцінити основні статистичні параметри (середнє, середнє гармонічне, середнє геометричне, дисперсію, середню різницю Джині, моду, медіану, коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу, побудувати гістограму, перевірити гіпотезу про закон нормальний закон розподілу). Нормалізувати дані по кожному стовпчику (математичне сподівання рівне нулю, дисперсія рівна 1).

На рис. 1 зображено графік ЕКГ одного каналу, на рис. 2 графік перших 6 каналів. На рис. 3 -графік модуля сигналу, що обчислений по всіх 12 каналах за допомогою метрики Евкліда.

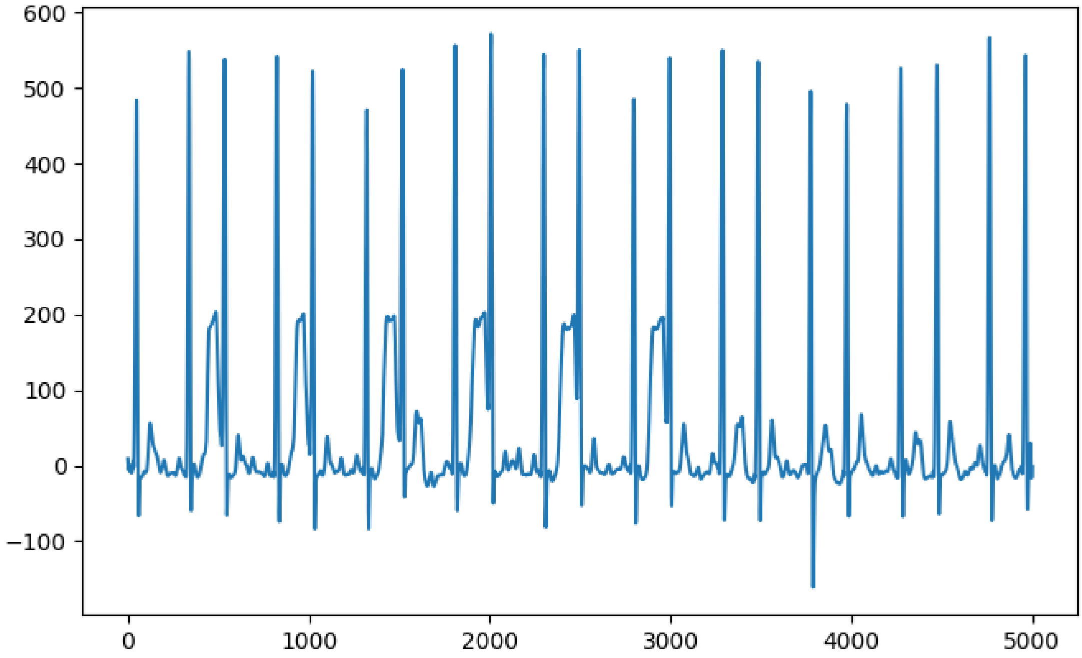

Рис. 1. Перший канал ЕКГ

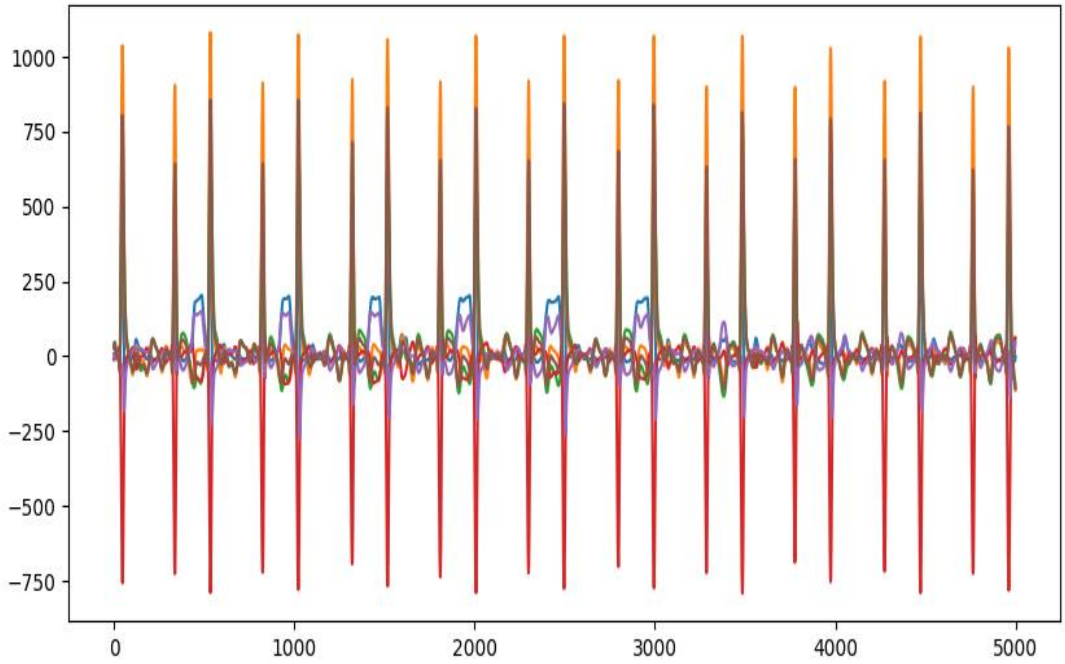

Рис. 2. Перші шість каналів ЕКГ

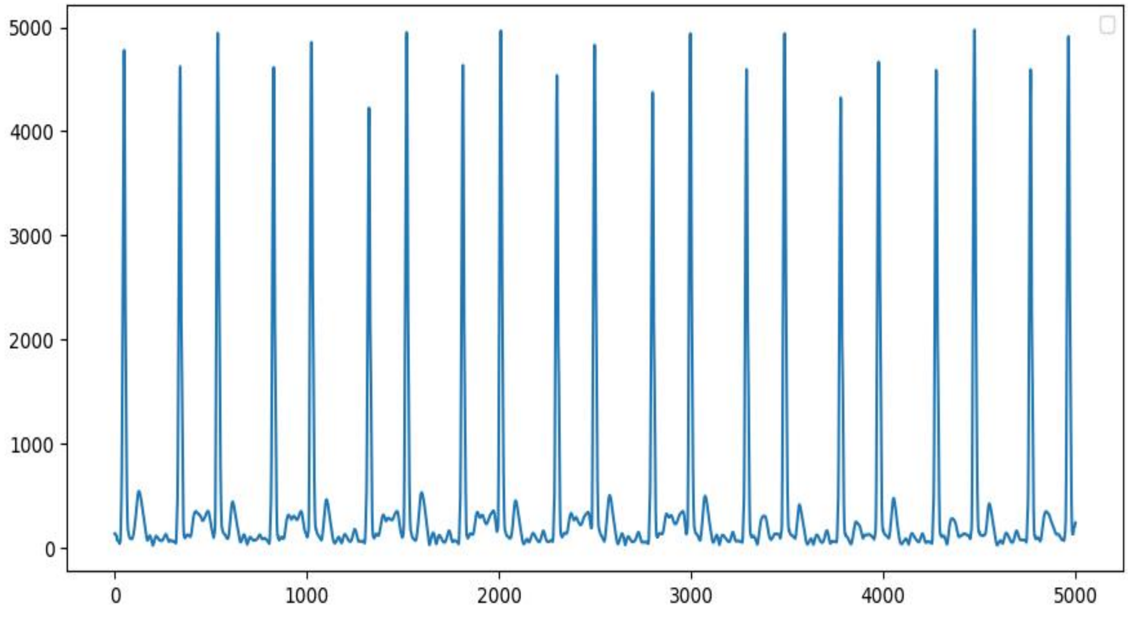

Рис. 3. Модуль сигналу ЕКГ по 12 каналах

В подальшому працюємо, наприклад, з модулем сигналу ЕКГ. Основні статистичні параметри (рис. 4):

середнє значення= 455.4804114770106

дисперсія= 852331.4898986891

середнє квадратичне відхилення= 455.4804114770106

медіана= 455.4804114770106

найменша медіана= 455.4804114770106
мода = 455.4804114770106
найбільш наявні значення= 455.4804114770106
найбільш наявні значення= 3.341037053050792 10.528041479277817

```
середнє значення= 455.4804114770106
дисперсія= 852331.4898986891
середнє квадратичне відхилення= 455.4804114770106
медіана= 455.4804114770106
найменша медіана= 455.4804114770106
мода = 455.4804114770106
найбільш наявні значення= 455.4804114770106
найбільш наявні значення= 3.341037053050792 10.528041479277817
```

Рис. 4. Результати розрахунків описової статистики

Діаграма розподілу модуля сигналу зображена на рис. 5.

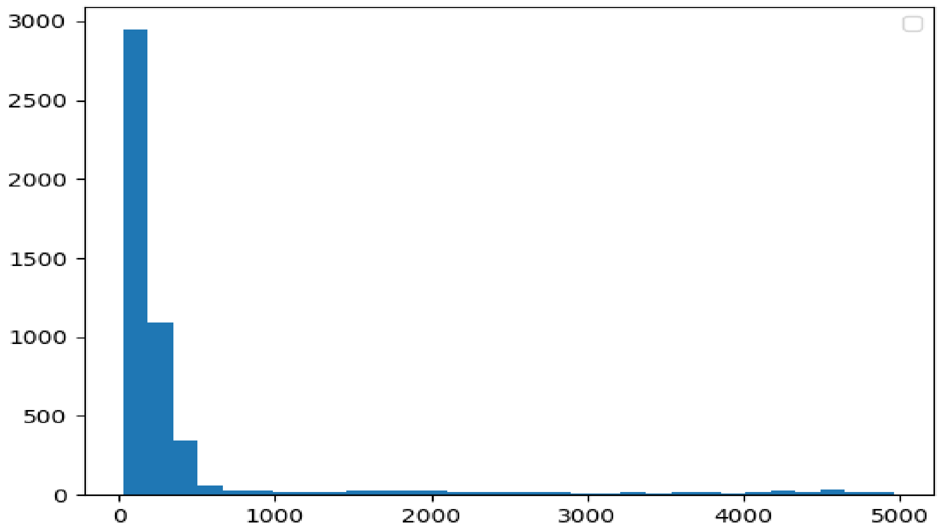

Рис. 5. Діаграма розподілу модуля сигналу

2. **Однофакторний дисперсійний аналіз.**

Перевірити чи є результати вимірювання різними рівнями одного фактору (12 рівнів).

Для кожного рівня знаходимо

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2\right].$$

За припущенням дисперсійного аналізу - повинна мати місце рівність дисперсій. Перевірити рівність дисперсії.

При виконанні припущення про рівність дисперсій, знаходимо оцінку дисперсії, що характеризує розсіювання поза впливом фактора,

$$S_0^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_i^2 \frac{1}{k(n-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = \frac{1}{k(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2\right]$$

Знаходимо вибіркову дисперсію всіх спостережень

$$S^2 = \frac{1}{kn-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - \frac{1}{kn}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2\right]$$

Знаходимо оцінку дисперсії, що характеризує зміни параметра, пов'язані з фактором

$$S_A^2 = \frac{n}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2. \qquad \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i; \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Оцінка впливу фактора на зміни середнього значення визначається відношенням (вплив значущий з ймовірністю 1-α)

$$\frac{S_A^2}{S_0^2} > F_\alpha[k-1; k(n-1)]$$

де $F_\alpha(f_1,f_2)$ - α- квантиль F- розподілу з f_1 та f_2 степенями свободи.

3. Двофакторний аналіз.

Побудувати таблицю двофакторного експерименту за правилом – кожен канал розбити на 5 частин (по 1000 даних у кожній частині)

Рівні фактора B(j)	Рівні фактора A (i)				
	A_1	A_2	A_3	A_4 …	A_{12}
B_1					
B_2					
B_3					
B_4					
B_5					

В кожній клітинці таблиці зберігається масив із n=1000 значень.

Якщо фактори А і В незалежні:

Знаходимо середнє значення в кожній клітинці x_{ij}.

Обчислюємо основні показники

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^2; \quad Q_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} X_i^2; \quad Q_3 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} X_{j'}^2;$$

$$Q_4 = \frac{1}{mk}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2 = \frac{1}{mk}\left(\sum_{j=1}^{m} X_{j'}\right)^2.$$

X_i - сума по стовпчиках (рівень фактора A_i), $X_{i'}$ - сума по рядках (рівень фактора $B_{j'}$).

Знаходимо оцінки дисперсій

$$S_0^2 = \frac{Q_1 + Q_4 - Q_2 - Q_3}{(k-1)(m-1)}; \quad S_A^2 = \frac{Q_2 - Q_4}{k-1}; \quad S_B^2 = \frac{Q_3 - Q_4}{m-1}.$$

Якщо $\frac{S_A^2}{S_0^2} > F_\alpha(f_1, f_2)$ для f_1=k-1, f_2=(k-1)(m-1) то фактор А є значущим. Аналогічно для фактора В при f_1=m-1, f_2=(k-1)(m-1) .

Якщо фактори А і В залежні:

Знаходимо додатково

$$Q_5 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} x_{ij\nu}^2. \quad S_{AB}^2 = \frac{Q_5 - nQ_1}{mk(n-1)},$$

взаємодію факторів перевіряємо за критерієм

$\frac{nS_0^2}{S_{AB}^2} > F_\alpha(f_1, f_2)$, де $f_1 = (k-1)(m-1)$, $f_2 = mk(n-1)$.

4. Кореляційний аналіз

Провести основні етапи кореляційного аналізу.

Крок 1. Нормалізація всіх змінних:

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \; i = \overline{1,N}; \; j = \overline{1,m}.$$

Крок2. Обчислення кореляційної матриці. На рис. 6 наведено приклад.

$$r = \frac{1}{n}\left(X^{*\prime} X^{*}\right).$$

dk =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0.915	0.269	-0.972	0.88	0.802	-0.461	0.038	0.755	0.907	0.917	0.924
1	0.915	1	0.617	-0.983	0.628	0.972	-0.449	-0.072	0.671	0.881	0.9	0.912
2	0.269	0.617	1	-0.473	-0.201	0.773	-0.167	-0.223	0.157	0.356	0.377	0.393
3	-0.972	-0.983	-0.473	1	-0.752	-0.916	0.462	0.025	-0.725	-0.914	-0.929	-0.938
4	0.88	0.628	-0.201	-0.752	1	0.444	-0.388	0.15	0.687	0.741	0.744	0.744
5	0.802	0.972	0.773	-0.916	0.444	1	-0.416	-0.131	0.569	0.797	0.82	0.835
6	-0.461	-0.449	-0.167	0.462	-0.388	-0.416	1	0.827	0.157	-0.326	-0.446	-0.506
7	0.038	-0.072	-0.223	0.025	0.15	-0.131	0.827	1	0.594	0.103	-0.029	-0.098
8	0.755	0.671	0.157	-0.725	0.687	0.569	0.157	0.594	1	0.86	0.785	0.738
9	0.907	0.881	0.356	-0.914	0.741	0.797	-0.326	0.103	0.86	1	0.99	0.975
10	0.917	0.9	0.377	-0.929	0.744	0.82	-0.446	-0.029	0.785	0.99	1	0.995
11	0.924	0.912	0.393	-0.938	0.744	0.835	-0.506	-0.098	0.738	0.975	0.995	1

Рис. 6. Приклад кореляційної матриці

Крок 3. Аналіз кореляційної матриці – виділити групу із трьох (чотирьох) параметрів, парна кореляція між якими велика (коефіцієнт кореляції близька по модулю до 1) .

Наприклад, параметри 0, 1, 3 або 0, 1, 3, 11 (рис. 1).

Параметри *a, b, c* та *d* вибирати в залежності від результатів розрахунків по варіантах.

Крок 4. Знайти частковий коефіцієнт кореляції між ознаками *a* та *b* без урахування впливу ознаки *c*:

$$r_{ab(c)} = \frac{r_{ab} - r_{ac} r_{bc}}{\sqrt{(1 - r_{ac})(1 - r_{bc})}}$$

r_{ij} - коефіцієнт кореляції (кореляція Пірсона) між параметрами *i* та *j*.

Крок 5. Знайти частковий коефіцієнт кореляції:

- між ознаками *a* та *c* без урахування впливу ознаки *b*;
- між ознаками *a* та *b* без урахування впливу ознаки *c* та *d*;
- між ознаками *a* та *c* без урахування впливу ознаки *b* та *d*;
- між ознаками *a* та *d* без урахування впливу ознаки *b* та *c*.

Крок 6. Знайти множинний коефіцієнт кореляції для параметра *a*, при лінійному двофакторному зв’язку з параметрами *b* та *c*

$$r_{a/bc} = \sqrt{\frac{r_{ab}^2 + r_{ac}^2 - 2 r_{ab} r_{ac} r_{bc}}{1 - r_{bc}^2}} .$$

Крок 7. Знайти множинний коефіцієнт кореляції для параметра a, при лінійному трифакторному зв'язку з параметрами b, c та d.

$$R_{a/bcd} = 1 - (1 - r_{ab}^2)(1 - r_{ac(b)}^2)(1 - r_{ad(bc)}^2)$$

Крок 8. Зробити висновки про кореляцію між параметрами. Чи існує параметр, що є незалежним (кореляція з іншими факторами невелика)?

5. Факторний аналіз

Крок 1. Знаходження власних чисел кореляційної матриці r з рівняння

$$|r - \lambda E| = 0, k = \overline{1, m},$$

де E — одинична матриця розміром $m \times m$.

Власні числа та частка дисперсії, що пояснюється змінною

№п/п	Власні числа	Частка дисперсії	Сумарна дисперсія
1	0.00123	11.9997	100
2	0.001335	11.9985	99.98974975
3	0.0004547	11.9971	99.97862449
4	0.0005151	11.9967	99.97483523
5	0.002178	11.9962	99.97054263
6	0.011	11.994	99.95239219
7	0.016	11.983	99.86072333
8	0.027	11.967	99.72738681
9	0.269	11.94	99.50238142
10	1.386	11.671	97.26066111
11	2.23	10.285	85.71038467
12	8.055	8.055	67.12660656

Перші три змінні пояснюють 97% всієї дисперсії.

Крок 2. Власні значення λ_k упорядковуються за абсолютним рівнем вкладу кожного головного компонента до загальної дисперсії.

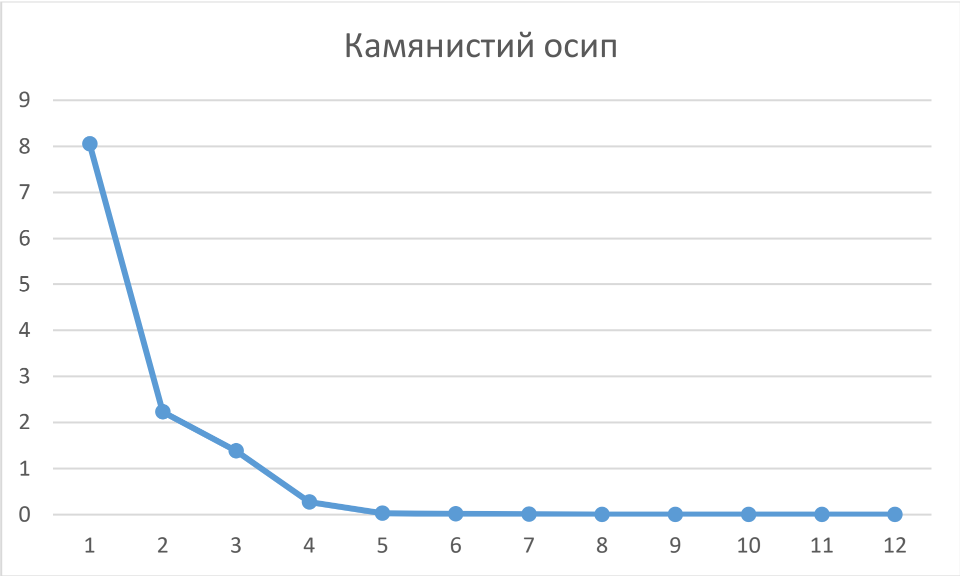

Рис. 7. Графік для критерію кам’янистого осипу

Критерій інформативності приймає значення

$$I_k = \frac{\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3'}{\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3' + \ldots + \lambda_{10}' + \lambda_{11}' + \lambda_{12}'} = \frac{11{,}671}{12{,}0} = 0{,}9726.$$

Крок 3. Обчислення власних векторів a_k розв’язуємо систему рівнянь

$$(r - \lambda E)a = 0$$

за таких умов:

$$a_j' a_k = \begin{cases} 0\,(j \neq k), \\ 1\,(j = k). \end{cases}$$

Власні вектори (матриця L)

vv =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	-0.607	0.076	0.174	$5.393 \cdot 10^{-3}$	-0.1	0.533	0.237	-0.074	-0.316	-0.149	0.048	-0.34
1	0.386	0.027	0.674	0.152	0.023	0.018	-0.342	-0.206	-0.262	0.152	-0.074	-0.34
2	0.149	-0.023	0.014	$-1.553 \cdot 10^{-3}$	0.075	0.068	0.558	0.317	-0.041	0.678	-0.264	-0.158
3	-0.404	0.033	0.645	0.161	-0.011	-0.349	0.176	0.204	0.278	-0.021	0.02	0.348
4	0.214	-0.019	$6.152 \cdot 10^{-3}$	0.025	0.22	-0.453	0.507	0.038	-0.335	-0.476	0.175	-0.268
5	-0.481	-0.014	-0.218	-0.025	0.017	-0.589	-0.308	-0.068	-0.241	0.309	-0.142	-0.315
6	-0.03	0.046	$2.18 \cdot 10^{-3}$	-0.024	0.084	-0.057	0.254	-0.704	0.035	0.365	0.516	0.16
7	0.076	0.359	-0.022	$-9.957 \cdot 10^{-3}$	-0.326	-0.027	-0.148	0.484	-0.226	0.17	0.649	$5.195 \cdot 10^{-3}$
8	-0.065	-0.758	0.056	-0.037	0.218	0.08	-0.118	0.218	0.226	0.062	0.416	-0.271
9	-0.043	0.428	-0.139	0.533	0.439	0.07	-0.063	0.046	0.428	-0.011	0.1	-0.339
10	0.012	0.296	0.157	-0.768	0.035	-0.062	0.013	-0.013	0.414	-0.049	0.015	-0.343
11	0.084	-0.123	-0.061	0.271	-0.762	-0.135	0.172	-0.155	0.353	-0.063	-0.031	-0.345

Рис. 8. Матриця власних векторів

	0
0	0.34
1	0.34
2	0.158
3	-0.348
4	0.268
5	0.315
6	-0.16
7	$-5.195\cdot 10^{-3}$
8	0.271
9	0.339
10	0.343
11	0.345

Рис. 9. Власний вектор максимального власного числа

Крок 4. Перевірити виконання умов $a'_j a_k = \begin{cases} 0\,(j \neq k), \\ 1\,(j = k). \end{cases}$ для векторів a_k.

Крок 5. Знаходження головних компонентів (векторів $z_k = x \cdot a_k,\ k = \overline{1, m}.$). Побудова гафіків основних компонент, перевірка властивостей.

Перші три головні фактори

№п/п	Z1	Z2	Z3
1	0,143742	0,106662	-0,35059
2	-0,48503	0,044493	-0,37265
3	-0,31641	0,044899	-0,38265
4	-0,25538	0,008308	-0,3653
5	-0,1269	0,04438	-0,37617
6	-0,30143	0,060948	-0,35856
7	0,133987	0,093535	-0,32858
8	0,312733	0,121627	-0,3473
…	…	…	…
5000	6,240308	2,605887	4,476333

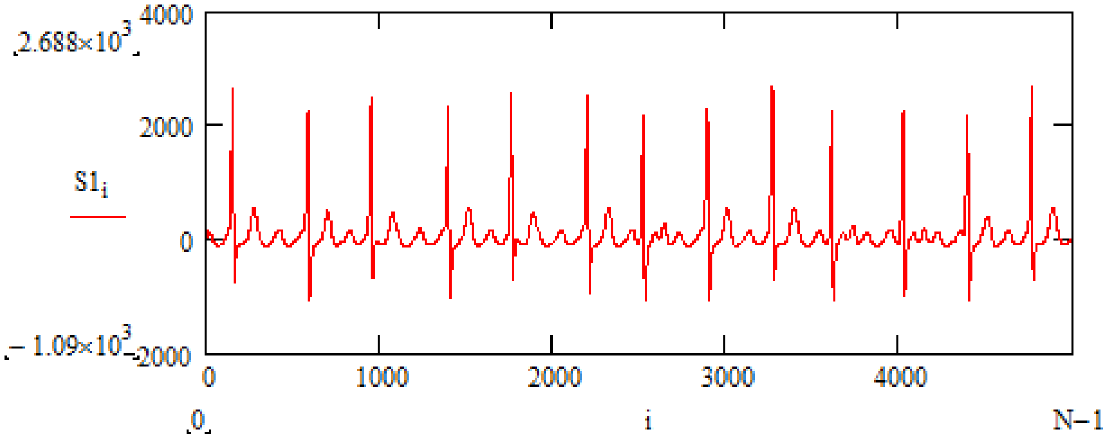

Рис. 10. Графік першої головної компоненти

Крок 6. Головні компоненти задовольняють умови:

$$\sum_{i=1}^{n} z_{k,i} = 0,\ i = \overline{1,n};$$

$$\frac{1}{n} z'_k z_k = \lambda_k,\ k = \overline{1,m};$$

$$z'_j z_k = 0,\ j = \overline{1,m}, j \neq k.$$

Перевірити виконання вказаних умов.

Крок 7. Зробити висновки за результатами факторного аналізу.

6. Кластерний аналіз

А). Будемо вважати, що записана кардіограма (12 каналів) являє собою множину багатовимірних точок деякого евклідового простору. Розмірність точок -12, кількість точок -5000.

Використовуючи алгоритми кластеризації, а саме k-means, провести розбиття множини точок на k підмножин. Розглянути варіанти k=11, k=7.

Б) Провести кластеризацію даних трьох головних факторів (дані є трьох вимірними векторами)

Результатом є перелік точок, що входять до кожного кластеру.

Визначити, чи співпадають кластери у варіантах А) та Б).

Алгоритм k-Means

1. Випадково обрати k точок, які будуть початковими центрами мас кластерів.

2. Віднести кожен об’єкт до кластеру з найближчим центром мас.

3. Перерахувати центри мас кластерів згідно з поточним членством.

4. Якщо критерій зупинки алгоритму не виконується, повернутися до кроку 2.

У якості критерію зупинки обирають один з двох варіантів:
1. Немає переходу об’єктів з кластера в кластер на кроці 2.
2. Мінімальна зміна середньоквадратичної помилки.

Алгоритм чутливий до вибору центрів мас.

Результати кластеризації точок ЕКГ по всіх каналах на 11 кластерів (рис.11) та 7 кластерів (рис. 12).

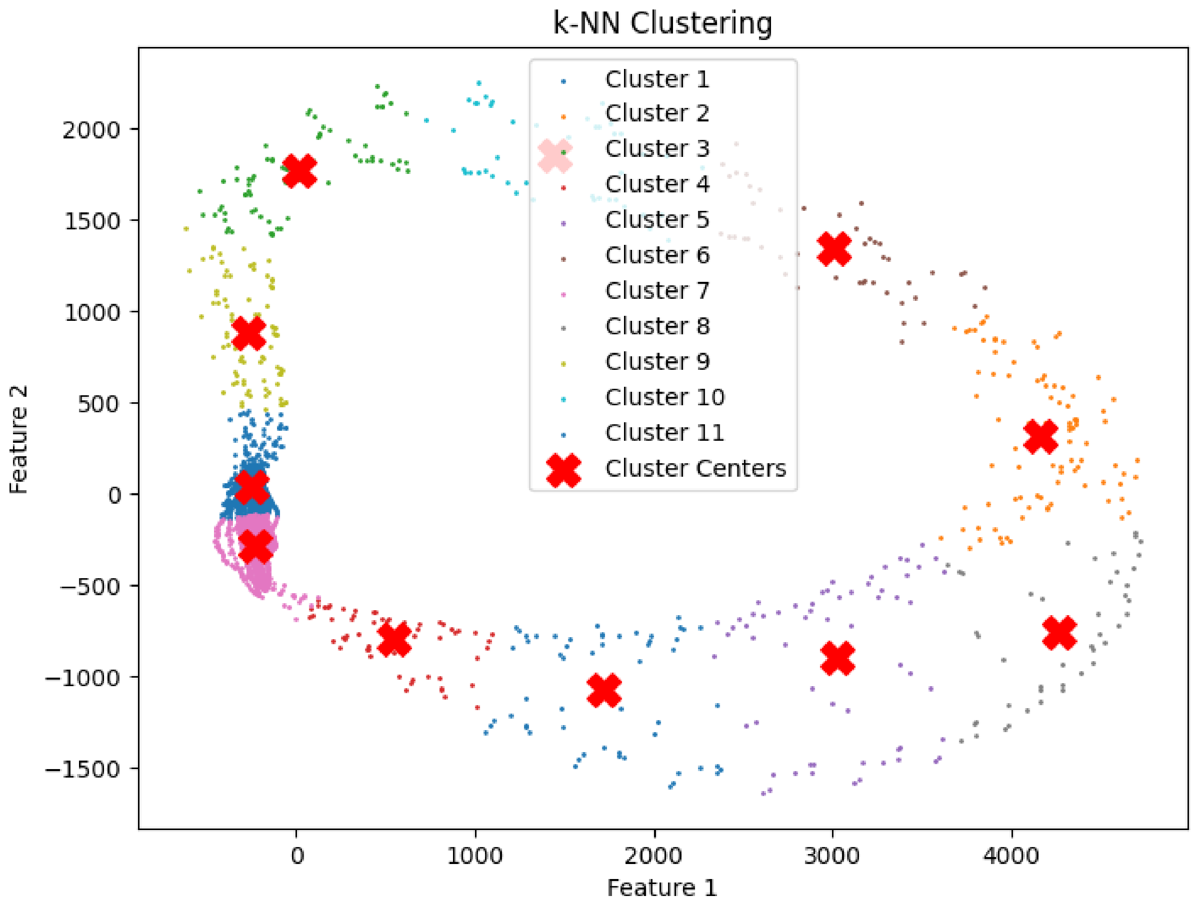

Рис. 11. Кластеризація на 11 кластерів

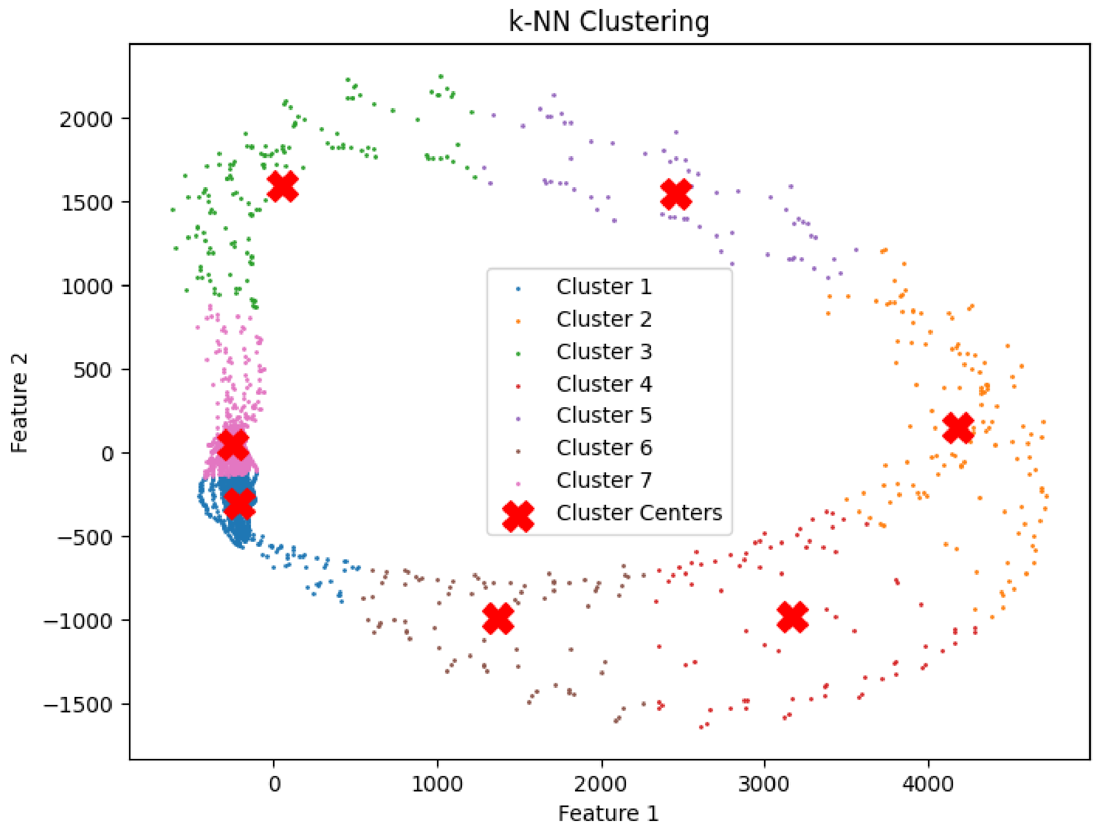

Рис. 12. Кластеризація на 7 кластерів

На основі кластеризації на 11 класів визначені точки R-піків (рис. 13).

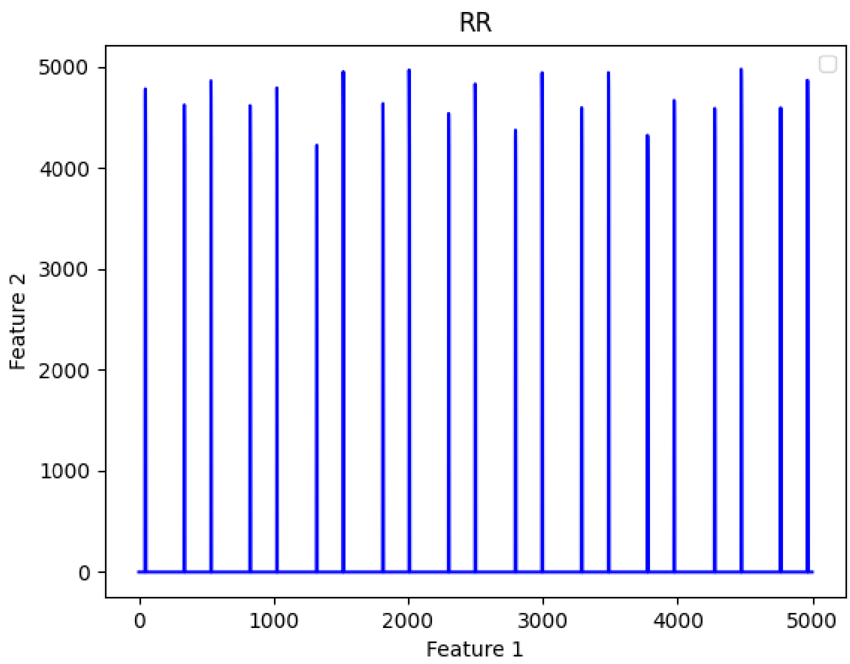

Рис. 13. Точки R- піків QRS комплексу.

7. Перетворення Фур'є.

Виконати перетворення Фур'є за формулами

$$A_0 := \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left(s1_i\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot i\cdot 0}{N}\right)\right)$$

$$A_{\frac{N}{2}} := \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left(s1_i\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot i}{1}\right)\right)$$

$$A_l := \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left(s1_i\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot i\cdot l}{N}\right)\right) \qquad l := 1, 2 .. \frac{N}{2} - 1$$

$$B_j := \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left(s1_i\cdot\sin\left(\frac{2\pi\cdot i\cdot j}{N}\right)\right) \qquad j := 0, 1 .. \frac{N}{2}$$

Знайти спектр $C_j := \sqrt{\left(A_j\right)^2 + \left(B_j\right)^2} \qquad j := 0, 1 .. \frac{N}{2}$.

Побудувати графік для кожної змінної. Обчислити частоту першої синусоїди (або крок по частоті).

Порівняти отримані результати.

Виконати обернене перетворення Фур'є

$$d1_i := \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}}\left(A_j\cdot\cos\left(\frac{2\pi j\cdot i}{N}\right)\right) + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}}\left(B_j\cdot\sin\left(\frac{2\pi j\cdot i}{N}\right)\right)$$

.

Порівняти початковий і результуючий масиви.

Результати перетворення Фур'є для оцінки спектр модуля сигналу наведені на рис.14., перші двісті точок зображені на рис. 15.

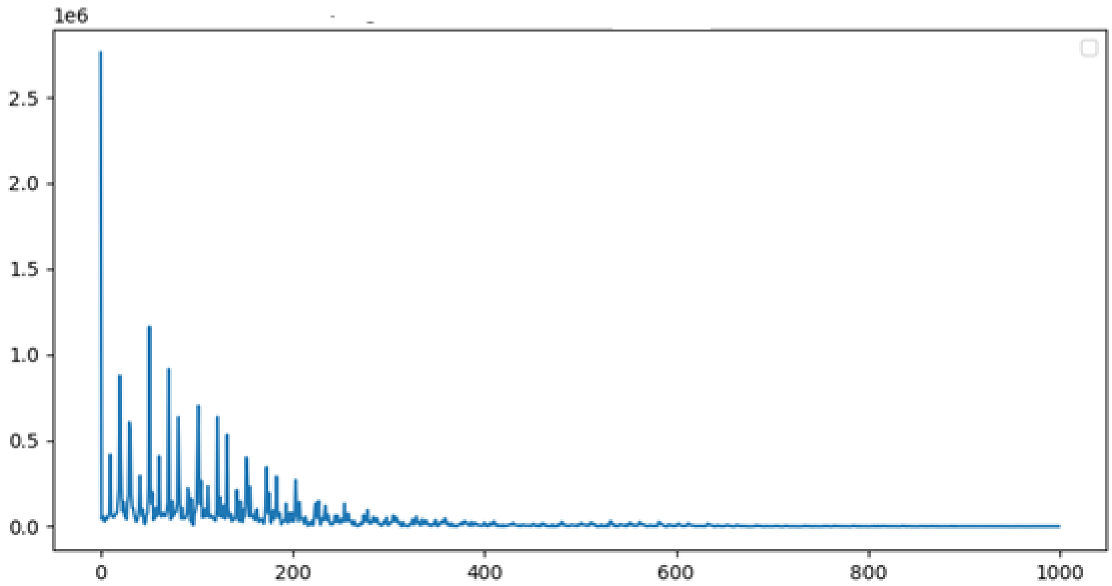

Рис. 14. Спектр модуля сигналу

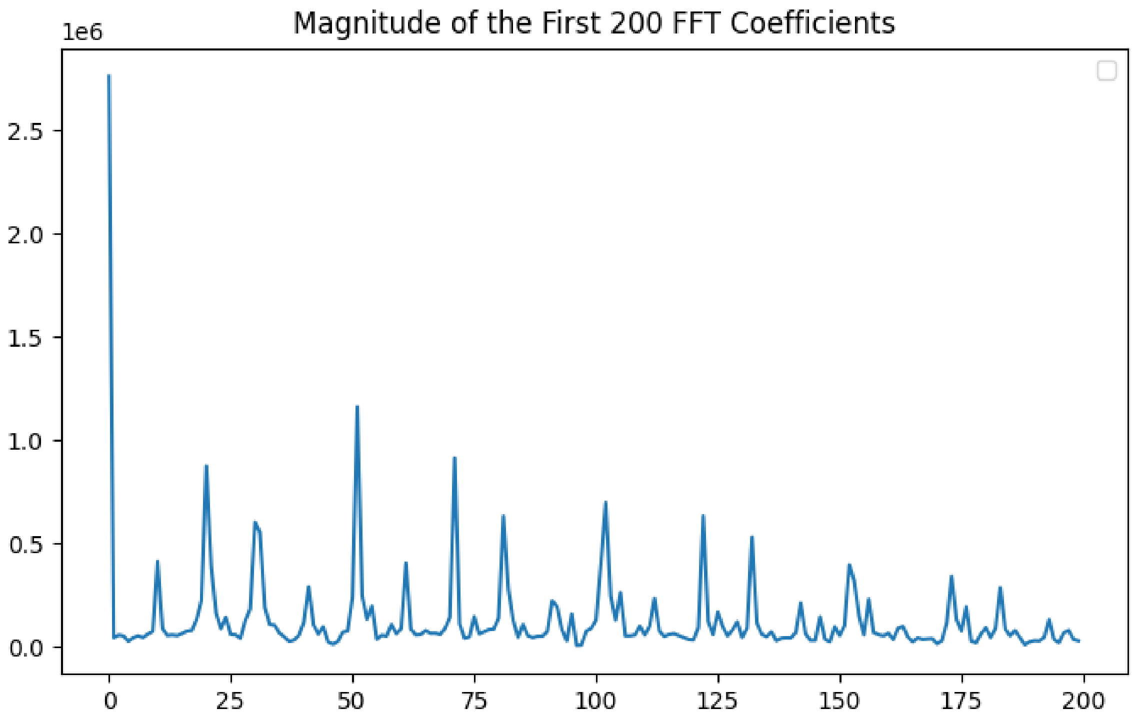

Рис. 15. Спектр модуля сигналу (перші 200 точок)

Рекомендована література

1. Пашко А.О. Статистичний аналіз даних / Пашко А.О. : Електронне видання, -2019.-55 с.
2. Бахрушин В.Є. Методи аналізу даних : навчальний посібник для студентів / В.Є. Бахрушин. – Запоріжжя : КПУ, 2011. – 268 с.
3. Майборода Р.Є. Регресія: Лінійні моделі: Навчальний посібник / Р.Є. Майборода. – К.:ВПЦ «Київський університет». - 2007. – 296 с.
4. Бахрушин В.Є. Аналіз даних: Конспект лекцій. – Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2006. – 170 с.
5. Королюк В.С., Боровських Ю.В. Асимптотичний аналіз розподілів статистик. – К.: Наукова думка, 1984. – 301 с.
6. Іващенко П.О., Семеняк І.В., Іванов В.В. Багатовимірний статистичний аналіз. – Харків: Основа, 1992. – 144 с.
7. Бахрушин В.Є. Математичне моделювання. − Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2003. − 138 с.
8. Закс Л. Статистичне оцінювання. – 1976. – 598 с.
9. Гірко В.Л. Багатовимірний статистичний аналіз. – К. : Вища школа, 1988. – 320 с.
10. Ugarte M.D. Probability and statistics with R / M.D. Ugarte, A.F. Militino, A.T. Arnholt. – Boca Raton, London, New York: CRC Press, Taylor&Francis Group. - 2008. – 700 p.

Додаток А. Таблиця критичних значень критерію Фішера.

$\alpha = 0{,}05$

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00