



システム制御理論と統計的機械学習

第1章：はじめに

加嶋 健司

October 3, 2025

京都大学情報学研究科

準備

確率密度関数

「 x は X に実現値をもつ**確率変数** (random variable) である」ことを, $x \in \text{rv}(X)$ と表記

「 $x \in \text{rv}(X)$ の実現値が $x \in X$ である」などとフォントを使い分け

前提

- $x \in \text{rv}(X)$ に対して規格化条件 $\int_X \varphi_x(x) dx = 1$ を満たす非負値関数 $\varphi_x : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ がただ一つ存在 (x の**確率密度関数** (probability density function), $x \sim \varphi_x$ と表記)
- $x \in \text{rv}(X)$, $y \in \text{rv}(Y)$ に対して $(x, y) \in \text{rv}(X \times Y)$ であり,

$$\varphi_x(x) = \int_Y \varphi_{(x,y)}(x, y) dy, \quad \varphi_y(y) = \int_X \varphi_{(x,y)}(x, y) dx \quad (1.1)$$

- 積分により確率変数の一部を消去することを**周辺化**という

確率密度関数の例

Example (例 1.2.1)

ある風力発電所での時刻 k における風速と発電量を確率変数 $v_k, y_k \in \text{rv}(\mathbb{R})$ により表現

- たとえば

$$(v_1, y_1, v_2, y_2, \dots, v_{10}, y_{10}) \in \text{rv}(\mathbb{R}^{20}),$$

$$(v_1, y_1) \in \text{rv}(\mathbb{R}^2)$$

- 右図では、風が強いほど発電量が多い

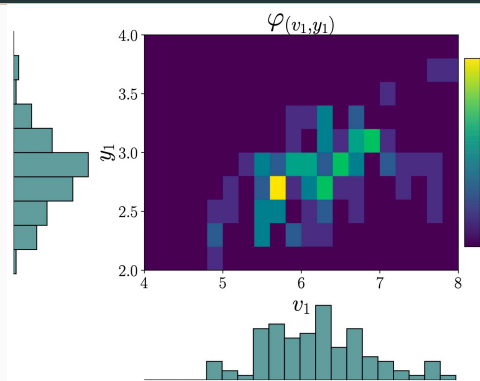


Figure 1: 結合確率密度関数 $\varphi(v_1, y_1)$ と周辺確率密度関数 $\varphi_{v_1}, \varphi_{y_1}$

確率と期待値

定義 1.2.2 – 確率・期待値

$x \in \text{rv}(X)$, $B \subset X$ に対して

- x の実現値が集合 $B \subset X$ に含まれる**確率** (probability)

$$\mathbb{P}_x(B) := \int_B \varphi_x(x) dx \quad (1.2)$$

関数 \mathbb{P}_x を x の**分布** (distribution)

- x の**期待値** (expectation)

$$\mathbb{E}[x] := \int_X x \varphi_x(x) dx \quad (1.3)$$

- $\mathbb{P}[x > 1] := \mathbb{P}_x(\{x | x > 1\})$ のように条件を直接的に表記
- $x = y$ は $\mathbb{P}[x = y] = 1$ (x と y の実現値はいつも等しい), $x > y$ などと同様

独立性

定義 1.2.4 – 独立・同分布

- $\{x_i\}_{1 \leq i \leq l}$ は**独立** (independent) ($x \perp y$ と表記)

$$\varphi_x(x) = \prod_{i=1}^l \varphi_{x_i}(x_i), \quad \forall x_i \in X_i, \quad (x := (x_1, \dots, x_l)) \quad (1.4)$$

- $x, y \in \text{rv}(X)$ が $\varphi_x = \varphi_y$ を満たすとき, **同分布をもつ** (identically distributed)
- $\{x_i\}_i$ が独立かつ同分布をもつとき, **独立同分布**または **i.i.d.**

- $x \in \text{rv}(X)$ と関数 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $f(x) \in \text{rv}(Y)$ は「 x の実現値が x のとき, いつも実現値が $f(x)$ となる確率変数」
- $y = f(x)$ とかけるとき, $y \in \text{rv}(x)$ と表記

同分布であるが独立でない例

注意

$x = y$ ならば x と y は同分布をもつが、逆は成り立たない

- 反例： $x \in \text{rv}(\mathbb{R})$ の確率密度関数が $\varphi_x(x) \propto \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$ と与えられるとき、 x と $y := -x$ は同分布をもつが、 $\mathbb{P}(x = y) = 0$

$x \perp\!\!\!\perp y$ の仮定のもとでは、 φ_x, φ_y から $\varphi_{(x,y)} = \varphi_x \varphi_y$ が定まる。

指示関数 $\mathbb{1}_B(x) := \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$

諸定理

定理 1.2.5 – 確率変数の関数の独立性

確率変数 x, y, z が $x \perp y$ かつ $z \in \text{rv}(y)$ を満たすならば, $x \perp z$

定理 1.2.6 – 確率変数の関数の期待値

確率変数 $f(x)$ の期待値 $\mathbb{E}[f(x)]$ は $\int_X f(x)\varphi_x(x)dx$ に等しい

定理 1.2.7 – 期待値演算の線形性

任意の $x_1, x_2 \in \text{rv}(\mathbb{R}^n)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{E}[a_1x_1 + a_2x_2] = a_1\mathbb{E}[x_1] + a_2\mathbb{E}[x_2]$

定理 1.2.8 – 独立な確率変数の和の確率密度関数

$x, y \in \text{rv}(\mathbb{R}^n)$ が $x \perp y$ を満たすとき, $z := x + y$ の確率密度関数は, 畳み込み積 $*$ を用いて $\varphi_z(z) = (\varphi_x * \varphi_y)(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x(x)\varphi_y(z-x)dx$