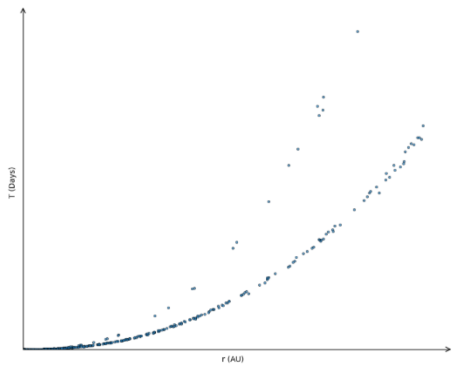
挑战任务 2——神秘空间的引力规律

【任务说明】

在我们熟悉的太阳系里，行星绕着太阳转，月亮绕着地球转，它们都遵循一个重要的规律：离中心天体越远（绕转半径 r 越大），绕一圈所需的时间（绕转周期 T）越长。这个周期和半径有个明确的定量关系：周期 T 的平方与其绕转半径 r 的立方成正比（ $T^2 \propto r^3$ ），或者等价的，$T = kr^{3/2}$。这个物理规律被称为开普勒第三定律。



天文学家在最近的深空观测中发现了若干个特殊的星系系统，这些系统存在一些异常的行为。天文学家通过高精度望远镜获得了这些系统中所有星系的天体轨道数据（周期 T 和半径 r ），如图所示。从图中可以看到，绝大部分天体（记为群体 A）的（ T ，r ）数据点都分布在一条平滑的曲线上，但同时也存在一些少量离群的数据点 (记为群体 B) 。

天文学家猜测星系中占绝大部分的群体 A 仍然满足 $T = k_1 r^{\alpha_1}$ 这样的幂律关系，只不过 k_1 和 α_1 与太阳系的数据不同。为了想进一步研究这些星系背后的物理机制，科学家首先需要定量地对采集到的数据进行处理。其中尤为重要的第一步便是分析占系统中占绝大部分的群体 A 的物理机制，确定主导的物理机制参数 k_1 和 α_1 。

你的任务是：借助观测到的数据集，自行构建数据处理方法，最终确定目标区域的物理法则，即确定 k_1 和 α_1 的值。

【物理背景】人类对天体运行规律的探索史

人类对天体运行规律的探索史，本质是一部从“依赖直觉与神话”逐步走向“基于观测与数学”的科学演进史，开普勒三定律则是这一进程的核心里程碑。

从仰望星空的古人到精密计算的天文学家，人类对“日月星辰为何如此运动”的追问从未停止。这一探索大致可分为三个阶段：古代天文学的经验积累、中世纪到文艺复兴的理论突破，以及开普勒用数学定律最终揭开天体运行的真相。

一、古代天文学：基于经验的“宇宙模型”构建

古代文明因农业生产（需判断节气）和宗教需求（将天体视为神的象征），最早开始系统观测天体，但认知核心围绕“地球为中心”展开，且多依赖直观经验。

1. 古文明的观测与记录

古埃及：通过观测天狼星与尼罗河泛滥的关联，制定了人类最早的太阳历（365 天），但未形成系统的运行理论。

古巴比伦：记录了行星（尤其是金星）的位置变化，编制出“星历表”预测天体位置，发现了“行星逆行”现象（如火星有时看起来向后运动），为后续理论提供了基础数据。

古代中国：长期观测日月食、彗星等天象，形成“浑天说”“盖天说”等宇宙观，其中“浑天说”认为“天如鸡子，地如鸡中黄”，虽未明确日心或地心，但注重通过仪器（如浑仪）精准测量天体位置。

2. 古希腊：从哲学猜想走向几何模型

古希腊是古代天文学的集大成者，首次尝试用“几何逻辑”解释天体运行，而非单纯依赖经验。

早期猜想：毕达哥拉斯提出“宇宙是完美的球体”，柏拉图主张“天体沿正圆轨道运行”（因正圆被视为最完美的几何图形），这些哲学观点深刻影响了后续千年的天文学认知。

地心说的初步形成：亚里士多德提出“地心说”框架，认为地球静止在宇宙中心，月亮、太阳、行星分别在不同“天球”上围绕地球旋转，这一理论贴合“大地不动”的直觉，成为主流认知。

托勒密的“地心说模型”：公元 2 世纪，托勒密在《天文学大成》中，结合前人观测数据，构建了一套精密的“地心说数学模型”。为解释行星逆行，他引入“本轮”（行星绕小圆旋转）和“均轮”（小圆的圆心绕地球旋转的大圆），甚至加入“偏心点”“等距点”调整，使模型能精准预测天体位置，这套理论统治天文学近 1400 年。

二、中世纪到文艺复兴：挑战权威的“认知突破”

中世纪时，托勒密的地心说被基督教教会与宗教教义绑定（地球是上帝创造的宇宙中心），成为不可质疑的权威。但到了文艺复兴时期，科学思想复苏，天文学家开始通过更精密的观测，挑战这一千年教条。

1. 哥白尼的“日心说”：重构宇宙中心

波兰天文学家哥白尼（1473-1543）长期观测行星运动，发现托勒密模型过于复杂（为解释所有行星，需引入数十个本轮）。他受古希腊“太阳是宇宙中心”猜想的启发，提出“日心说”：

核心观点：太阳静止在宇宙中心，地球和其他行星围绕太阳旋转，地球同时还在自转（解释昼夜交替）。

理论优势：无需复杂的本轮，仅用“行星公转速度不同”就能解释“逆行”现象（如地球“超车”火星时，火星看起来向后退），大幅简化了天体运行的计算。

局限性：受柏拉图“正圆轨道”思想的影响，哥白尼仍坚持“行星沿正圆绕太阳旋转”，导致其模型与部分观测数据（尤其是火星轨道）存在微小偏差，这也为后续开普勒的突破留下了空间。

2. 第谷的精密观测：为科学理论提供“数据基石”

丹麦天文学家第谷（1546-1601）是“近代天文观测之父”，他虽不认同哥白尼的日心说（担心“地球运动”会导致恒星位置变化，即“恒星视差”，但当时无望远镜无法观测），却用自制仪器（如大型象限仪）积累了人类历史上最精准的观测数据：观测误差仅约 1 角分（相当于手表时针 1 秒内转过的角度），远超此前所有天文学家。

1600 年，开普勒因学术分歧投奔第谷，成为其助手，第谷将火星观测数据交给开普勒，这一合作直接催生了开普勒三定律。

三、开普勒三定律：用数学揭开天体运行的真相

开普勒（1571-1630）是数学家出身，他没有局限于“维护传统理论”，而是以“数据为核心”，大胆质疑前人的认知，最终用三条简洁的数学定律，彻底揭开了行星运行的规律。

1. 从“正圆”到“椭圆”的突破

开普勒最初也遵循“正圆轨道”传统，尝试用各种正圆组合解释火星轨道，但计算结果与第谷的观测数据始终存在“8 角分”的偏差。面对这一微小误差，他没有修改数据，而是提出关键疑问：“会不会正圆轨道本身就是错的？”

经过数年计算，他发现“椭圆轨道”能完美贴合观测数据，由此推翻了千年的“正圆教条”，并陆续提出三条定律。

2. 开普勒三定律的核心内容与意义

（1）第一定律（椭圆定律，1609 年）

内容：行星绕太阳运行的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的两个焦点之一。

意义：首次正确描述了行星轨道的形状，解释了行星与太阳距离的变化（近日点和远日点），彻底打破“天体沿正圆运行”的认知。

（2）第二定律（面积定律，1609 年）

内容：行星与太阳的连线（矢径）在相等时间内扫过相等的面积。

意义：揭示了行星公转速度的变化规律——近日点速度快，远日点速度慢，让“行星运动为何时快时慢”有了科学解释。

（3）第三定律（周期定律，1619 年）

内容：行星公转周期（T）的平方，与行星到太阳平均距离（r，椭圆半长轴）的立方成正比，即$T^2 \propto r^3$。

意义：首次发现太阳系各行星运行的“统一规律”，证明行星运动并非孤立，而是受同一法则支配，为后续牛顿推导万有引力定律奠定了基础。

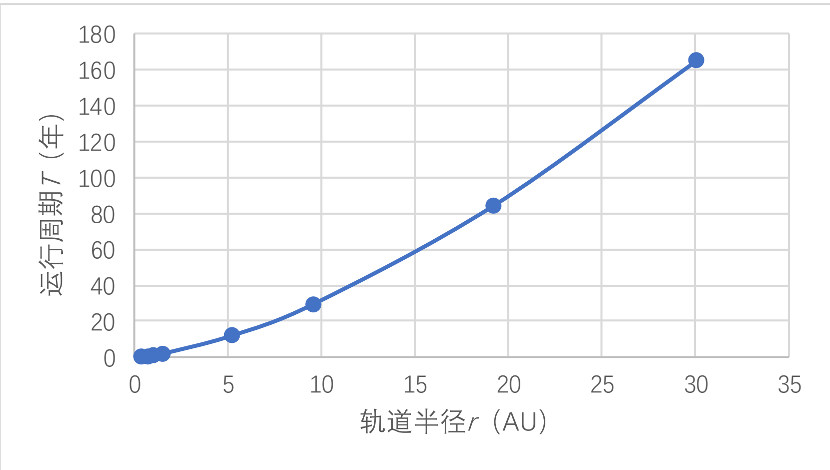
从古代的经验观测到开普勒的数学定律，人类对天体运行的探索，本质是“尊重数据、质疑权威、追求规律”的科学精神的体现。开普勒三定律不仅终结了地心说，更开启了“数学天文学”时代——它证明宇宙的运行并非随机，而是可以用简洁的数学语言描述，这一思想至今仍是天文学乃至整个近代科学的核心范式。

思考题 1：地心说被日心说取代，是否说明地心说是错的，日心说是对的？

【课堂小任务】

太阳系行星运行周期 T 与轨道半径 r 的关系：

行星	轨道半径 r (AU)	运行周期 T (年)
水星	0.387	0.241
金星	0.723	0.615
地球	1.000	1.000
火星	1.524	1.881
木星	5.204	11.86
土星	9.582	29.46
天王星	19.19	84.01
海王星	30.07	164.8



寻找绕转半径 r 和绕转周期 T 的关系：$T = kr^{\alpha}$

【数学工具】指数、对数

1、指数：

n为整数时，$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n个}$，其中$a$称为底数，$n$称为指数。

运算性质：$a^na^m=a^{n+m}$；$(a^n)^m=a^{nm}$；$(ab)^n=a^nb^n$

概念推广：指数为分数时，类比二次方根，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，称为$a$的$n$次方根。$a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$

运算规律同样推广：当s、t为有理数时，$a^sa^t=a^{s+t}$；$(a^s)^t=a^{st}$；$(ab)^s=a^sb^s$

思考题 2：在解决问题时，如果一个数学概念不能满足新的问题情境，这个时候数学家会考虑将旧的概念进行推广。进行概念推广时，应遵循什么原则？指数t为无理数时，你会怎样定义a^t？

2、对数

一般地，如果$a^x=N(a>0$ 且$a\neq 1)$，那么数x叫做以a为底N的对数，记作：$x=log_aN$，其中a叫做对数的底数，N叫做真数. 注：真数$N>0$.

牛刀小试：

(1)$\log_2 4=$________.　　(2)$\log_2 8=$________.　　(3)$\log_{10} 100=$________.

(4)$\log_3 3=$________.　　(5)$\log_3 81=$________.

常用对数：将以 10 为底的对数叫做常用对数，并把$log_{10}N$记做lgN。

对数的运算性质：　① $log_a(MN)=log_aM+log_aN$;

② $log_aM^n=nlog_aM$.

运算性质②的证明：

令$x=log_aM^n$，$y=log_aM$

则根据对数的定义，$a^x=M^n$，$a^y=M$

根据指数的运算性质，$a^x=(a^y)^n=a^{ny}$

所以$x=ny$，即$log_aM^n=nlog_aM$

思考题 3：仿照上述过程，证明上述对数的运算性质①：

【课堂小任务】

已知$T=kr^{\alpha}$，对等式两边同时取对数，得到

$$lg\,T=lg(kr^{\alpha})$$

利用对数的运算性质进行化简，得到

$$lg\,T=lg\,k+\alpha\,lg\,r$$

将$lg\,T$看作因变量y，$lg\,r$看作自变量x，则得到直线方程：

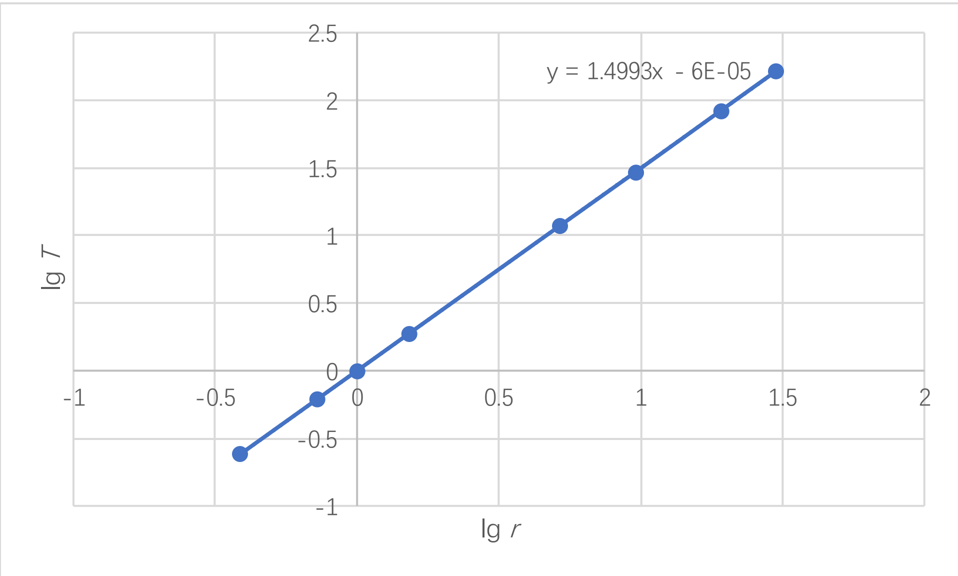
$$y=b+ax$$

斜率a即为$T=kr^{\alpha}$中的指数α

对太阳系行星运行周期 T 与轨道半径 r 数据取对数：

行星	轨道半径 r (AU)	运行周期 T (年)	lg$r$	lg$T$
水星	0.387	0.241	-0.41229	-0.61798
金星	0.723	0.615	-0.14086	-0.21112
地球	1.000	1.000	0	0
火星	1.524	1.881	0.182985	0.274389
木星	5.204	11.86	0.716337	1.074085
土星	9.582	29.46	0.981456	1.469233
天王星	19.19	84.01	1.283075	1.924331
海王星	30.07	164.8	1.478133	2.216957

画图：



得到 $lg\,T=lg\,k+\alpha\,lg\,r$ 直线及直线方程。

从图中可以得到指数α的值为：____________，非常接近理论值 1.5