Sprawozdanie - laboratorium 2

Dekompozycja LU, odwracanie macierzy

Katarzyna Such, 12.03.2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Rozkład LU macierzy

Dekompozycja LU to rozłożenie macierzy A na macierze L i U:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & 1 & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{32} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & ... & u_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie:
macierz A - macierz współczynników układu,
macierz L - macierz dolna z jedynkami na diagonali,
macierz U - macierz górna z niezerowymi elementami na diagonli.

Macierz LU otrzymujemy poprzez zastosowanie metody eliminacji Gaussa. Do macierzy A dopisujemy macierz jednostkową. Wykonując elementarne operacje na wierszach otrzymamy macierz LU.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} \\ l_{21} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & u_{22} & u_{32} & ... & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{33} & ... & u_{3n} \\ ... & ... & ... & 1 & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{bmatrix}$$

1.2 Rozwiązanie układu równań za pomocą metody LU

Rozwiązanie układu równań:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \tag{2}$$

po przekształceniu:

$$LU \cdot \vec{x} = \vec{b}, \tag{3}$$

znajdziemy rozwiązując kolejno dwa układy:

$$L \cdot \vec{y} = \vec{b}, \tag{4}$$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{y}. \tag{5}$$

1.3 Macierz odwrotna

Macierz odwrotna (A^{-1}) do macierzy (A), spełnia równanie:

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A \tag{6}$$

I - macierz jednostkowa
Macierz A^{-1}, znajdujemy rozwiązując n układów równań liniowych, za pomocą metody LU:

$$A \cdot \vec{x_i} = \vec{b_i} \tag{7}$$

gdzie:
$\vec{x_i}$ to kolejne kolumny macierzy A^{-1},
$\vec{b_i}$ to kolejne kolumny macierzy jednostkowej.

1.4 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

to wielkość, która określa wpływ zaburzeń danych, na błąd rozwiązania. Wskaźnik uwarunkowania macierzy, liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\kappa(A) = \|A\|_{1,\infty} \cdot \left\|A^{-1}\right\|, \tag{8}$$

gdzie norma macierzy to:

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \tag{9}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Mamy zdefiniowane dwie macierze A i B, które różnią się od siebie, jedynie wartością a_{11}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1.1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Pierwszym zadaniem było wyznaczenie rozkładu LU macierzy A i B. W tym celu użyliśmy procedury *ludcmp(A, n, indx, d)*, gdzie A to macierz kwadratowa (n x n), która jest nadpisywana macierzą LU, indx - wektor permutacji, d - zmienna, której znak określa, czy ilość permutacji jest liczbą parzystą czy nieparzystą.

Następnie wyznaczyliśmy macierze odwrotne A^{-1} i B^{-1}, rozwiązując, dla każdej macierzy, trzy układy równań dla wektorów wyrazów wolnych:

$$\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vec{b_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \vec{b_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Układy równań rozwiązywaliśmy za pomocą procedury *lubksb(LU, n, indx,x)*, gdzie LU, indx otrzymujemy z procedury *ludcmp*, a x to wektor wyrazów wolnych, nadpisywany przez rozwiązanie.
Po wywołaniu *lubksb*, dla wektorów $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{b_3}$, otrzymujemy kolejne kolumny macierzy odwrotnej.

Trzecim zadaniem było obliczenie wskaźnika uwarunkowania macierzy A i B, który wyznaczyliśmy ze wzoru (8).
Dalej obliczyliśmy iloczyny macierzy A i A^{-1} oraz B i B^{-1}:

$$C = A \cdot B, \tag{10}$$

gdzie kolejne wartości macierzy C:

$$c_{ij} = \sum a_{ij} \cdot b_{ij} \tag{11}$$

2.2 Wyniki

Otrzymane macierze L i U,
dla macierzy A:

$$L_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.142857 & 1 & 0 \\ 0.571429 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, U_A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0.857143 & 1.71429 \\ 0 & 0 & 1e-20 \end{bmatrix}$$

dla macierzy B:

$$L_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.157143 & 1 & 0 \\ 0.571429 & 0.576923 & 1 \end{bmatrix}, U_B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0.742857 & 1.58571 \\ 0 & 0 & -0.0576923 \end{bmatrix}$$

Po odwróceniu macierzy A i B, macierze A^{-1} i B^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5e+19 & 1e+20 & -5e+19 \\ 1e+20 & -2e+20 & 1e+20 \\ -5e+19 & 1e+20 & -5e+19 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 10 \\ -20 & 37 & -18 \\ 10 & -17.3333 & 8.33334 \end{bmatrix}$$

Normy macierzy:
$\|A\| = 9$, $\|A^{-1}\| = 2e+20$
$\|B\| = 9$, $\|B^{-1}\| = 37$

Wskaźniki uwarunkowania macierzy:
$\kappa(A) = 1.8e+21$
$\kappa(B) = 333$
$\kappa(A)$ jest zdecydowanie większy od $\kappa(B)$. W macierzy A, błąd reprezentacji danych wejściowych będzie miał duży wpływ na błąd wyniku. W macierzy B, z racji tego, że wskaźnik jest zdecydowanie mniejszy, zmiana wartości współczynników macierzy, będzie mieć mniejszy, lecz nadal zauważalny wpływ na rozwiązanie.
Iloczyny macierzy:
iloczyn macierzy A i macierzy A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.51844e+13 & -7.03687e+13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iloczyn macierzy B i macierzy B^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.90735e-06 \\ -3.8147e-06 & 1 & 3.8147e-06 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Powyższe macierze nie przedstawiają wyników jakich moglibyśmy się spodziewać. W przypadku obu iloczynów oczekiwaliśmy w wyniku macierzy jednostkowej. Iloczyn BB^{-1} jest dużo bliższy przewidywaniom niż AA^{-1}, na diagonali mamy jedynki, a wartości poza diagonalą są niemal równe zero. Otrzymane wyniki są zgodne ze wskaźnikami uwarunkowania macierzy: $\kappa(A)$ i $\kappa(B)$.

3 Wnioski

To, że nie otrzymaliśmy podczas mnożenie AA^{-1} macierzy jednostkowej, wynika z tego, że macierz A jest macierzą osobliwą (wyznacznik jest równy zero), a macierze osobliwe są nieodwracalne. Z tego też wynika duża wartość wskaźnika uwarunkowania macierzy A. Wyznacznik macierzy B jest równy det(B) = -0.3, jest to wartość stosunkowo bliska zeru, więc wskaźnik uwarunkowania macierzy B, jest względnie wysoki. Jednak jest znacznie mniejszy niż $\kappa(A)$, gdyż det(B) jest różne od zera więc ta macierz jest odwracalna.

Analizując powyższe, łatwo zauważyć, że im wyznacznik macierzy bliższy zeru, tym większe może być zaburzenie wyniku.
Podsumowując można stwierdzić, że błąd rozwiązania (szczególnie dla macierzy A) wynika głównie z niepoprawnych danych wejściowych. Można przeciwdziałać takim sytuacjom zwracając uwagę na wartość wskaźnika uwarunkowania macierzy, ponieważ gdy jest duży, błędy mogą być ogromne.
Metoda LU jest metodą szybką, ma dobrą wydajność dla dużych układów równań, oprócz tego działa w miejscu, macierz wejściowa jest nadpisywana przez macierze U i L, co zaoszczędza pamięć. Jednak ma też swoje wady: dane wejściowe mogą mieć ogromny wpływ na błąd rozwiązania.