Sprawozdanie - laboratorium 9

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama

Katarzyna Such, 09.05.2021

1 Wstęp teoretyczny

Aproksymacja liniowa
Aproksymacja liniowa funkcji polega na wyznaczeniu współczynników a_0, a_1, ..., a_m funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x) \tag{1}$$

takich, żeby spełniony był warunek:

$$||f(x) - F(x)|| = minimum \tag{2}$$

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych
Funkcje f(x) i g(x):

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) = 0 \tag{3}$$

są ortogonalne na dyskretnym zbiorze punktów x_1, x_2, ..., x_n gdy spełnione są waunki:

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0 \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{n} [g(x_i)]^2 > 0 \tag{5}$$

Bazę ortogonalną dla węzłów x_1, x_2, ..., x_n stanowi ciąg funkcyjny:

$$\varphi_m(x) = \varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x) \tag{6}$$

jeżeli nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i) > 0 \tag{7}$$

oraz gdy:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0, \qquad j \neq k \tag{8}$$

Po przyjęciu powyższych warunków macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną.

Macierz układu posiada jedno rozwiązanie.
Żeby znaleźć wektory ortogonalne na siatce, przyjmujemy, że węzły są równoodległe:

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{9}$$

po wykonaniu przekształcenia:

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \qquad x_i \rightarrow q_i \tag{10}$$

Szukamy ciągu wielomianów:

$$F_i^{(n)}(q) = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), ..., F_n^{(n)}(q) \tag{11}$$

postaci:

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) + ... + a_k q(q-1)...(q-k+1) \tag{12}$$

które spełniają warunek ortogonalności:

$$\sum_{i=0}^{n} F_j^{(n)}(i) F_k^{(n)}(i) = 0 \Leftrightarrow j \neq k \tag{13}$$

Korzystamy z postaci wielomianu czynnikowego:

$$q^{[k]} = q(q-1)...(q-k+1) \tag{14}$$

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + ... + a_k q^{[k]} \tag{15}$$

Dodatkowo normujemy wielomiany do 1:

$$\widehat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \qquad k = 0, 1, 2, .., m \tag{16}$$

$$\widehat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + ... + b_k q^{[k]} \tag{17}$$

Szukane wielomiany są wielomianami Grama:

$$\widehat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}} \tag{18}$$

Mając zdefiniowaną bazę, możemy określić funkcję aproksymującą F(x):

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \widehat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \widehat{F}_k^{(n)}(\frac{x - x_0}{h}), \qquad m \leqslant n \tag{19}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i \widehat{F}_k^{(n)}(x_i) \tag{20}$$

$$s_k = \sum_{q=0}^{n} [\widehat{F}_k^{(n)}(q)]^2 \tag{21}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Podczas laboratorium wykonywaliśmy aproksymacje funkcji:

$$f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x) \tag{22}$$

przy użyciu wielomianów Grama w przedziale $x \in [x_{min}, x_{max}]$ na siatce równoodległych węzłów, gdzie f(x):

$$f(x) = sin(\frac{14\pi x}{x_{min} - x_{max}})(exp(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}) + exp(-\frac{(x + x_0)^2}{2\sigma^2})) \tag{23}$$

a C_{rand}:

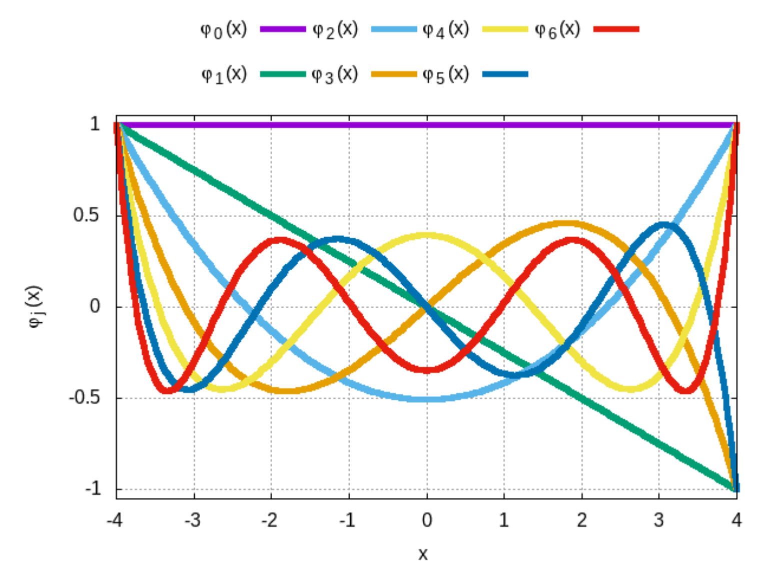
$$C_{rand} = \frac{Y - 0.5}{5} \tag{24}$$

gdzie $Y \in [0,1]$ jest liczbą pseudolosową o rozkładzie równomiernym, generowaną przez makro:
`define frand() ((double)rand())/(RAND_MAX+1.0)`
Wtedy: `Y = frand();`

Przeprowadziliśmy aproksymacje funkcji przy użyciu m = 10, 30, 50 wielomianów. Przyjęliśmy paramtery: $x_{min} = -4$, $x_{max} = 4.0$, $\sigma = \frac{x_{max}-x_{min}}{16}$, $x_0 = 2.0$, liczbę węzłów N = 201, wagę w(x) = 1.0. Dla każdego m sporządziliśmy rysunek z wartością funkcji $f_{szum}(x)$, f(x) oraz funkcją aproksymującą F(x). Aby porównać wyniki wykonano również aproksymacje funkcji f(x) bez szumu.

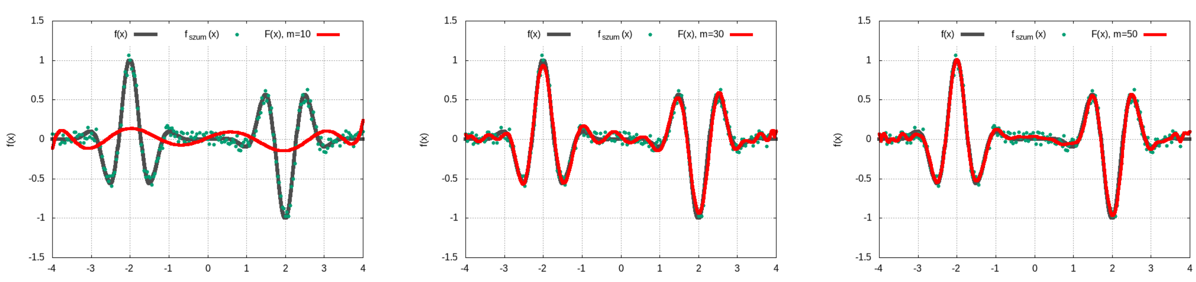
2.2 Wyniki

Siedem pierwszych wielomianów Grama:



Rysunek 1: Pierwsze 7 wielomianów Grama.

Wyniki aproksymacji dla $f_{szum}(x)$:

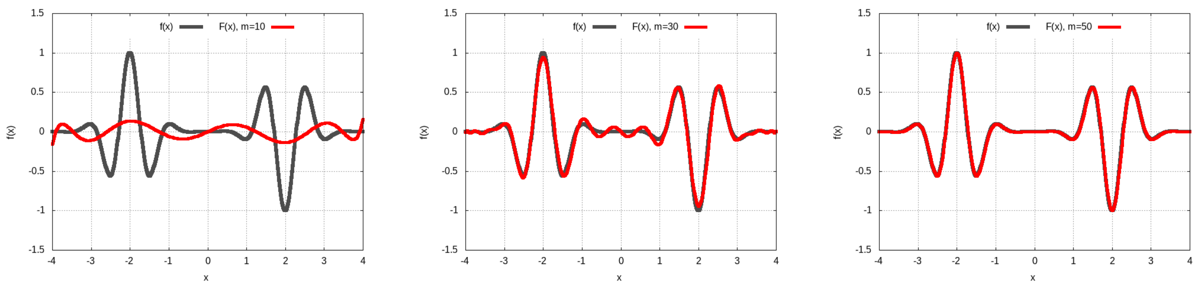


(a) m = 10 (b) m = 30 (c) m = 50

Rysunek 2: Wyniki aproksymacji dla $f_{szum}(x)$, dla N= 201, z użyciem m+1 wielomianów Grama.

Z obserwacji powyższych rysunków wynika, że zwiększenie liczby wielomianów zwiększa jakość aproksymacji: zmniejszają się oscylacje, wykresy ulegają wygładzeniu. Dla m = 10 wykres funkcji aproksymującej F(x) jest znacząco różny od oczekiwań. Dla m = 30 wykres funkcji F(x) lepiej oddaje funkcję oryginalną, lecz występują pewne oscylacje. Dla m = 50 wykres F(x) jest jeszcze bardziej zbliżony do oryginału, jednak nadal zauważamy oscylacje (mniejsze niż dla m = 30). Oscylacje te są spowodowane występowaniem szumu.

Wyniki aproksymacji dla $f(x)$ (bez szumu):



(a) m = 10 (b) m = 30 (c) m = 50

Rysunek 3: Wyniki aproksymacji dla $f(x)$, dla N= 201, z użyciem m+1 wielomianów Grama.

Możemy zauważyć, że podobnie jak we wcześniejszym przypadku zwiększenie liczby wielomianów poprawia aproksymację: zmniejszają się oscylacje, wykresy ulegają wygładzeniu. Dla m = 10 wykres znacznie odbiega od oczekiwań, dla m = 30 wykres funkcji aproksymującej F(x) przypomina funkcję oryginalną, można jednak zauważyć pewne oscylacje. Dla m = 50 wykresy funkcji aproksymującej i aproksymowanej praktycznie się pokrywają. Pokazuje to, że aproksymacja została wykonana poprawnie.

3 Wnioski

Obserwując rysunki łatwo zauważyc, że wraz ze wzrostem liczby wielomianów poprawia się jakość aproksymacji.

Dzięki metodzie aproksymacji w bazie wielomianów Grama uzyskaliśmy funkcję aproksymującą F(x) zbliżoną do oryginalnej, pomimo występującego szumu. Warto jednak zauważyć, że nawet dla m = 50 wielomianów wykresy nie pokrywały się idealnie, taki efekt uzyskaliśmy dopiero dla funkcji niezaszumionej.

Metoda aproksymacji funkcji pozwala uzyskać dobre przybliżenie funkcji aproksymowanej. Jest skuteczną metodą aproksymacji.