Sprawozdanie - laboratorium 7

Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Katarzyna Such, 26.04.2021

1 Wstęp teoretyczny

Podczas laboratorium przeprowadziliśmy interpolację wielomianową Newtona. Interpolacja pozwala na znalezienie przybliżonych wartości pewnej funkcji oraz błędu oszacowania tych wartości.

Interpolacja Newtona:
Przy założeniu, że odległości międzywęzłowe mogą być różne:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

szukamy wielomianu interpolacyjnego postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n)} \tag{2}$$

który w węzłach interpolacji spełnia warunek:

$$W_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{3}$$

Po wykonaniu przekształceń wielomian możemy zapisać w postaci:

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)\omega_0(x) + ... + f(x_0; x1; ...; x_n)\omega_{n-1}(x) \tag{4}$$

jest to formuła, która opisuje n-ty iloraz różnicowy.

Ilorazy różnicowe definiujemy w następujący sposób:

- pierwszego rzędu:
$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{5}$$
- drugiego rzędu:
$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \tag{6}$$

- n-tego rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; ...; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i} \tag{7}$$

Przy założeniu że i=0, iloraz różnicowy n-tego rzędu możemy zapisać w postaci:

$$f(x_0; x_1; ...; x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'_n(x_j)} \tag{8}$$

Optymalizacja położeń węzłów:
Optymalne położenia węzłów: zera wielomianów Czebyszewa.
Wielomiany Czebyszewa:

$$T_n(x) = cos[n \cdot arccos(x)], \qquad x \in [-1, 1] \tag{9}$$

rekurencyjnie (wzór 9):

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = cos[arccos(x)] = x$$
$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geqslant 2$$

Zera wielomianu Czebyszewa:

$$x_m = cos(\frac{2m+1}{2n+2}\pi), \quad m = 0, 1, 2, ..., n \tag{10}$$

Efekt Rungego
Początkowo wraz ze wzrostem liczby węzłów przybliżenie poprawia się. Po dalszym wzroście n zaczyna się pogarszać, co można zaobserwować na końcach przedziałów.

Jest to zjawisko typowe dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopnii, przy stałej odległości węzłów.

Można uniknąć tego efektu, stosując interpolację gdzie na krańcach przedziału znajduje się więcej węzłów: np gdy za węzły przyjmiemy zera wielomianu Czebyszewa.

W trakcie laboratorium sprawdzaliśmy, czy lepsze przybliżenie uzyskamy dla węzłów zooptymalizowanych zerami Czebyszewa, czy dla węzłów równoodległych.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Przeprowadzaliśmy interpolację wielomianową Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{11}$$

Stosowaliśmy wzór interpolacyjny:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \tag{12}$$

gdzie:
x_i - położenia węzłów,
$f^{(j)}(x_0)$ - iloraz różnicowy rzędu j liczony dla węzła x_0.

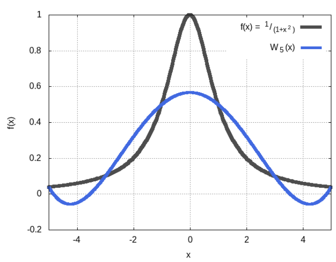
Wykonaliśmy interpolację dla węzłów równoległych i = 0, 1, 2, ..., n. Kolejno dla n = 5, 10, 15, 20. Badany przedział $x \in [-5, 5]$, krok $\Delta x = \frac{10}{n}$.

Następnie wykonaliśmy interpolacji dla węzłów przybliżonych zerami wielomianu Czebyszewa, korzystając ze wzoru:

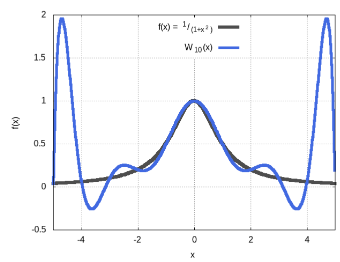
$$x_i = \frac{1}{2}[(x_{min} - x_{max})cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi) + (x_{min} + x_{max})], \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{13}$$

Wyniki przedstawiliśmy na wykresach, na każdym wykres funkcji f(x) oraz wielomina $W_n(x)$.

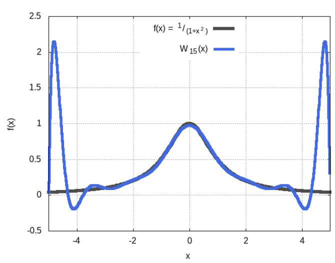
2.2 Wyniki



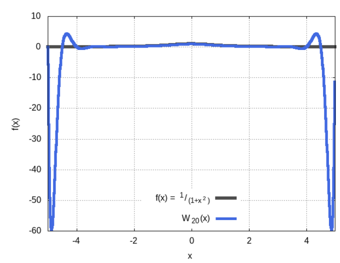
(a) n=5



(b) n=10



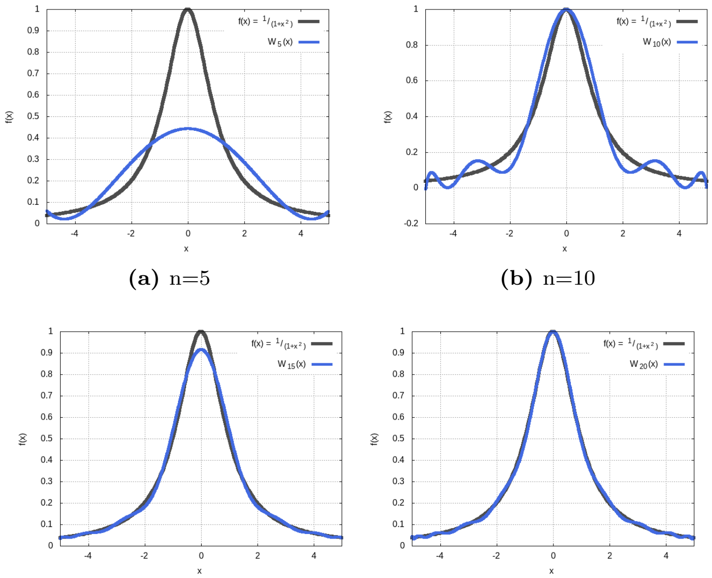
(c) n=15



(d) n=20

Rysunek 1: Wykresy interpolacji funkcji f(x) wielomianem Newtona $W_n(x)$ z równoodległymi węzłami.

Możemy zaobserwować, że zwiększanie liczby węzłów sprawia, iż przybliżenie w środku wykresu poprawia się. Jednak na krańcach przedziałów zauważamy że im większe n tym większe zaburzenia. Spodziewaliśmy się tego, wiedząc o efekcie Rungego.



(a) n=5 **(b)** n=10

(c) n=15 **(d)** n=20

Rysunek 2: Wykresy interpolacji funkcji f(x) wielomianem Newtona $W_n(x)$ z węzłami wyznaczonymi przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa.

Porównując wyniki dla węzłów równoodległych oraz dla zooptymalizowanych położeń węzłów możemy zauważyć, że druga metoda lepiej przybliża funkcje f(x) - o wiele mniejsze zaburzenia spowodowane efektem Rungego. Różnicę widać wyraźnie dla większej ilości węzłów. Dla n = 20 kształty wykresu funkcji interpolującej i wykresu funkcji oryginalnej f(x) są bardzo podobne.

3 Wnioski

Dla węzłów równoodległych jak i dla węzłów które są zerami wielomianów Czebyszewa wykresy $W_5(x)$ (n=5) znacznie odbiegają od funkcji f(x).

Zwiększenie ilości węzłów nie zawsze prowadzi do polepszenia jakości interpolacji wielomianowej. Możemy to zaobserwować dla interpolacji Newtona z równoodległymi węzłąmi. Dla n =10, 15, 20, wykresy $W_n(x)$ oraz f(x) w środku przedziału są bardzo zbliżone, jednak na krańcach przedziału dochodzi do bardzo dużych oscylacji (efekt Rungego). Im większe n tym lepsze dopasowanie w środku, ale również większe oscylacje.

Przyjmując jako węzły zera wielomianów Czebyszewa udało nam się znacznie zmniejszyć efekt Rudgego. Dla n = 20 otrzymaliśmy zadowalające odwzorowanie, na którego krańcach możemy zauważych jedynie nieznaczne zaburzenia względem funkcji f(x).

Interpolacja wielomianowa Newtona, przy odpowiednim dobraniu węzłów interpolacji, może być bardzo efektywna.