Sprawozdanie - laboratorium nr 4

Macierzowy (niesymetryczny) problem własny -wyznaczanie modów własnych niejednorodnej struny w 1D

Katarzyna Such, 31.04.2021

1 Wstęp teoretyczny

W trakcie laboratorium wyznaczaliśmy częstość drgań własnych struny, które opisane są funkcją: $\psi = \psi(x,t)$.
Dynamikę struny opisuje równanie:

$$\frac{N}{\rho(x)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1}$$

N - naciąg struny
$\rho(x)$ - liniowy rozkład gęstości

Po dokonaniu separacji zmiennych, otrzymujemy równanie różniczkowe zależne tylko od położenia:

$$\frac{N}{\rho(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u \tag{2}$$

$\lambda = \omega^2$, ω - częstość własna drgań.

Po wprowadzeniu siatki równoodległych węzłów: $x = x_i$, $u(x) = u_i$, $\rho(x) = \rho_i$, można dokonać dyskretyzacji równania (2), poprzez podstawienie trójpunktowego ilorazu różnicowego centralnego za drugą pochodną:

$$-\frac{N}{\rho_i}\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda u_i \tag{3}$$

gdzie:
odległość między węzłami - $\Delta x = \frac{L}{n+1}$
położenie w przestrzeni - $x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1)$.

Równanie (3) można zapisać jako problem własny:

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \tag{4}$$

A - macierz, $\vec{u}$ - wektor

Elementy macierzy A to:

$$A_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) \cdot \frac{N}{\rho_i \Delta x^2} \tag{5}$$

gdzie:
delta Kroneckera - $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

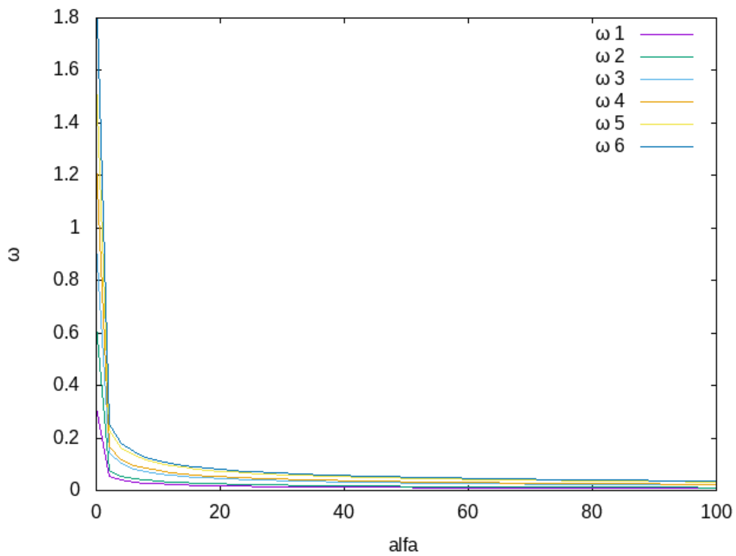
W celu rozwiązania problemu własnego macierzy A, korzystaliśmy z funkcji **gsl_eigen_nonsymmv(gsl_matrix *A, gsl_vector_complex *eval, gsl_matrix_complex *evec, gsl_eigen_nonsymmv_workspace *w)** znajdującej się w bibliotece GSL. Gdzie A - macierz wejściowa, eval - wektor wyjściowy, evec - macierz wyjściowa, w - pomocnicza przestrzeń tej metody.

Rozwiązywaliśmy równanie (4), 50 razy, dla parametru $\alpha \in [0, 100]$, z krokiem $\Delta\alpha = 2$.
Przyjęliśmy parametry: L=10, n=200, $\rho = 1 + 4\alpha x^2$, N=1.

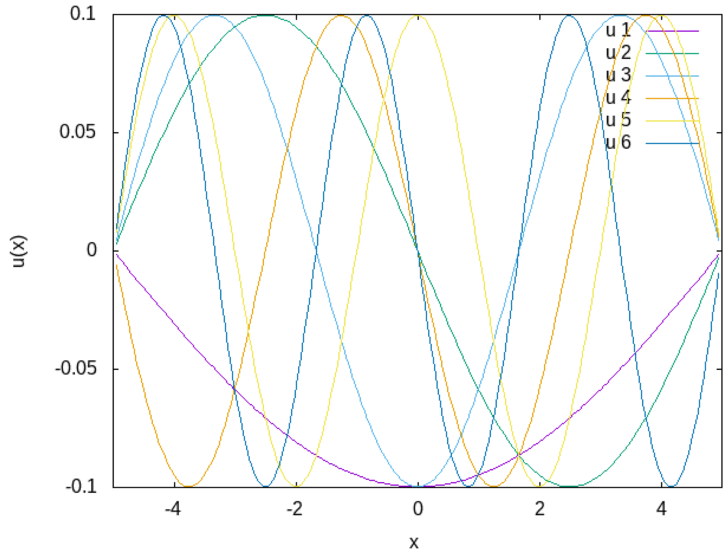
Dla wszystkich wartości α, zapisaliśmy do pliku wartości pierwiastków z 6 najmniejszych wartości własnych. Dla $\alpha = 100$ i $\alpha = 0$, do pliku zapisaliśmy, wektory własne odpowiadające 6 najmniejszym wartościom własnym.

Sporządziliśmy wykresy wektorów własnych dla $\alpha = 100$, $\alpha = 0$ i wykres $\omega = \sqrt{\lambda} = f(a)$

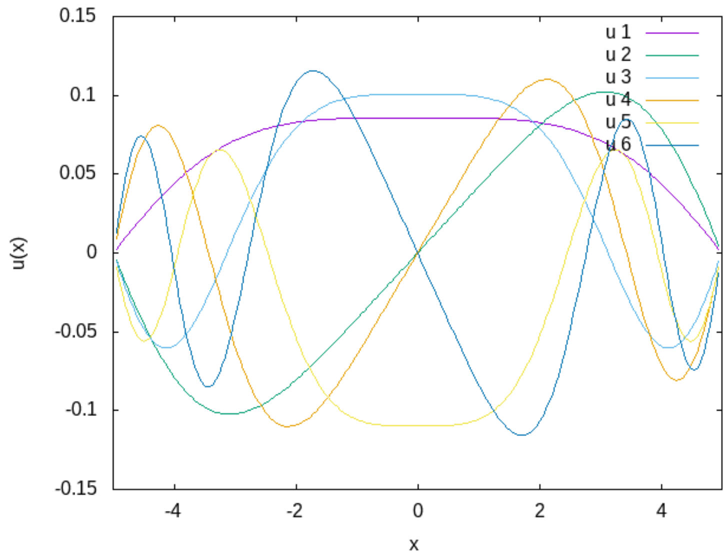
2.2 Wyniki



Rysunek 1: wykres wartości pierwiastków z 6 kolejnych najmniejszych wartości własnych dla każdej wartości parametru α



Rysunek 2: wykres wektorów własnych, $\alpha = 0$



Rysunek 3: wykres wektorów własnych, $\alpha = 100$

3 Wnioski

Wyniki dla wartości pierwiastków z wartości własnych zgadzają się z oczekiwanymi. Wykresy dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 100$ są odbite w przeciwną stronę względem osi x, najprawdopodobniej wynika to z błędnego kodu.

Znalezienie rozwiązania problemu własnego macierzy niesymetrycznej jest bardzo skomplikowane. Zastosowane metody pozwoliły na rozwiązanie tego problemu na komputerze osobistym, co pokazuje, że używane metody są wydajne.

Na rysunkach (2) i (3) można zauważyć, że parametr α wpływa na liniowy rozkład gęstości ($\alpha = 0$ -

jednorodna gęstość , $\alpha = 100$, niejednorodna gęstość, częstości własne maleją) , co powoduje zmiany kształtu wykresów.