Sprawozdanie - laboratorium 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Katarzyna Such, 03.05.2021

1 Wstęp teoretyczny

Interpolacja funkcjami sklejanymi:
Przedział [a,b] dzielimy na n podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Funkcję s(x) nazywamy funkcją sklejaną stopnia m jeżeli:

- s(x) jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale (x_i, x_{i+1}).
- s(x) $\in$ C^m

Punkty x_i nazywami węzłami funkcji sklejanej. Funkcja s(x) w każdym przedziale jest wielomianem stopnia co najwyżej m.

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + ... + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i, x_{i+1}) \tag{2}$$

Funkcja interpolująca to kombinacja liniowa elementów bazy $s_i(x)$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \qquad x \in [a, b] \tag{3}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia:
Interpolacyjna funkcja sklejana trzeciego stopnia dla funkcji f(x):

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n, \;\; n \geqslant 2 \tag{4}$$

Do określenia s(x) potrzebujemy n+3 parametrów. Ilość węzłów to n+1, więc musimy nałożyć dwa dodatkowe warunki.

- 1 rodzaj warunków (1 pochodna):
$$\begin{aligned} s^{(1)}(a+0) = \alpha_1 \\ s^{(1)}(b-0) = \beta_1 \end{aligned} \tag{5}$$
$\alpha_1, \;\; \beta_1$ - ustalone liczby.
- 2 rodzaj warunków (2 pochodna):
$$\begin{aligned} s^{(2)}(a+0) = \alpha_2 \\ s^{(2)}(b-0) = \beta_2 \end{aligned} \tag{6}$$
$\alpha_2, \;\; \beta_2$ - ustalone liczby.
- 3 rodzaj warunków, stosuje się dla funkcji okresowych (warunek na 1 i 2 pochodną):
$$s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0), \qquad i = 1, 2 \tag{7}$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach:
Funkcja s(x) jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów. Oznaczmy $M_i = s^{(2)}(x_i)$, i=0,1,2,..,n.

$$s_{i-1}^{(2)}(x) = M_{i-1}\tfrac{x_i - x}{h_i} + M_i\tfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{8}$$

Odległości międzywęzłowe:

$$h_i = x_i - x_{i-1} \tag{9}$$

Po dwukrotnym scałkowaniu:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{10}$$

W nierówności brakuje nam 4 wartości: M_{i-1}, M_i, A_i, B_i. Stałe A_i, B_i wyznaczamy korzystając z warunku interpolacji.

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \tag{11}$$

$$B_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \tag{12}$$

Żeby znaleźć wartości M_{i-1}, M_i rozwiązujemy układ równań liniowych:

$$\mathbf{A}\vec{m} = \vec{d} \tag{13}$$

którego generatorem jest:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \qquad i = 1, 2, .., n-1 \tag{14}$$

gdzie:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \tag{15}$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i \tag{16}$$

Elementy wektora wyrazów wolnych:

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}) \tag{17}$$

Warunki brzegowe:

$$M_0 = \alpha_2, \qquad M_n = \beta_2 \tag{18}$$

Ostatecznie otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix} \tag{19}$$

Po rozwiązaniu układu równań wyznaczamy funkcje sklejaną według wzoru (10).

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

W trakcie laboratorium tworzyliśmy program przeprowadzający interpolację funkcjami sklejanymi, będącymi wielomianami 3 stopnia, poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach. Interpolacje przeprowadziliśmy dla dwóch funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{20}$$

$$f_2(x) = cos(2x) \tag{21}$$

Napisaliśmy procedury:

- `void wyzM(float *xw,float *yw, float *w, int n, float alfa, float beta)` - wyznacza wartości drugich pochodnych w węzłach, gdzie:
  - xw - wektor z położeniami węzłów,
  - yw - wektor z wartościami funkcji,
  - n - liczba węzłów,
  - m - wektor do którego funkcja zapisuje wartości drugich pochodnych,
  - alfa, beta - wartości na brzegach.

  Układ równań $\mathbf{A}\vec{m} = \vec{d}$ rozwiązywaliśmy stosując metodę eliminacji Gaussa-Jordana. Korzystaliśmy z biblioteki Numerical Recipes, z funkcji `gaussj(A, n, d, 1)`.

- `float wyzSx(float *xw,float *yw, float *m, int n, float x)` - wyznacza wartość funkcji interpolującej w położeniu międzywęzłowym x. Argumenty xw, yw, m, n jak w funkcji `wyzM`, dodajemy aktualną wartość argumentu x.

Interpolacje przeprowadzaliśmy dla równoodległych węzłów:

$$x_w[i] = x_{min} + \Delta x \cdot i, \qquad \Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n-1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{22}$$

w przedziele $x \in [-5, 5]$. Kolejno przyjmowaliśmy ilość węzłów n = 5, 8, 21. Wartości na krańcach przedziału $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

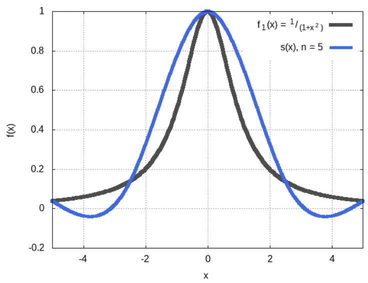
Dla funkcji $f_1(x)$ wyznaczyliśmy wartości pochodnych zgodnie ze wzorem:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}, \tag{23}$$

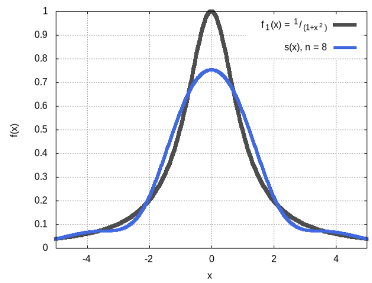
gdzie $\Delta x = 0.01$.
Wyniki porównaliśmy z wartościamy wyliczonymi przez naszą procedurę dla n = 10. Wykonaliśmy wykres wartości drugich pochodnych w zależności od położenia węzłów porównujący sposoby obliczenia drugich pochodnych.

Dla każdej funkcji $f_1(x)$, $f_2(x)$, oraz każdej ilości węzłów n = 5, 8, 21 wykonaliśmy wykresy funkcji interpolowanej i interpolującej na jednym rysunku.

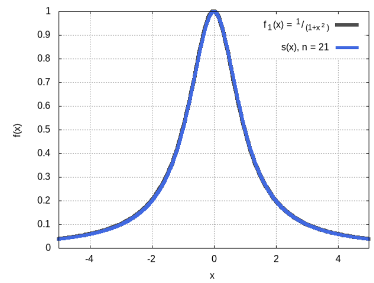
2.2 Wyniki



(a) n = 5



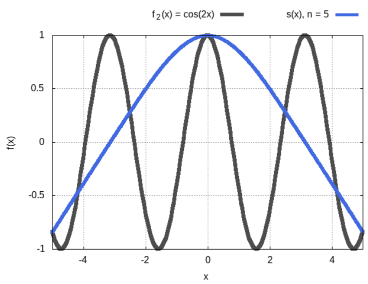
(b) n = 8



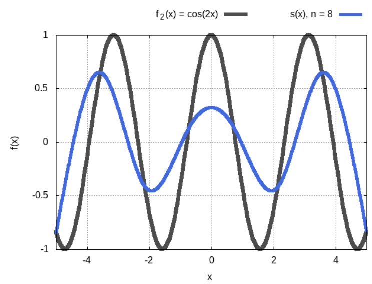
(c) n = 10

Rysunek 1: Wykresy funkcji $f_1(x)$ oraz interpolacji funkcji $f_1(x)$ funkcjami sklejanymi dla n węzłów.

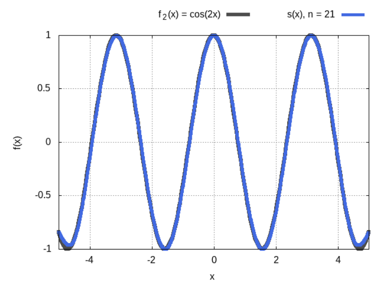
Możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby węzłów, zwiększa się dokładność interpolacji, brak efektu Rungego (brak oscylacji na krańcach przedziału).



(a) n = 5



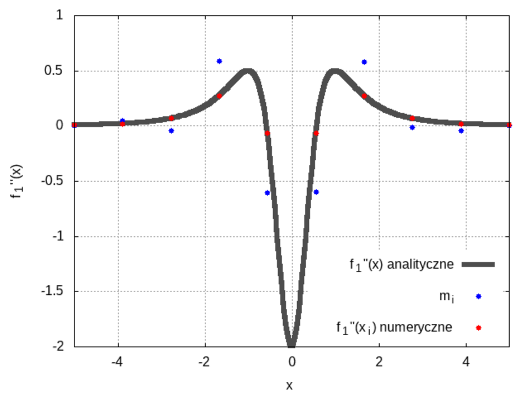
(b) n = 8



(c) n = 10

Rysunek 2: Wykresy funkcji $f_2(x)$ oraz interpolacji funkcji $f_2(x)$ funkcjami sklejanymi dla n węzłów.

Dla funkcji $f_2(x)$ również wraz ze wzrostem liczby węzłów zwiększa się dokładność oszacowania.



Rysunek 3: Wartości drugich pochodnych wyznaczone analitycznie oraz numerycznie (n = 10)

3 Wnioski

Dla obydwu funkcji $f_1(x)$, $f_2(x)$ wraz ze wzrostem ilości węzłów poprawia się jakość dopasowania. Dla n = 5 nie uzyskaliśmy oczekiwanego efektu, dla n = 8 efekt jest lepszy, lecz nadal niezadowalający, dla n = 21 dopasowanie funkcji interpolującej s(x) i interpolowanej f(x) jest prawie idealne. Dla funkcji $f_2(x)$ na krańcach można zauważyć małe odchylenia. Można więc wywnioskować, że wraz ze wzrostem liczby węzłów otrzymujemy bardziej dokładne wyniki.

Porównując interpolacje funkcjami sklejanymi z interpolacją Newtona zauważamy pewną przewagę wykorzystanej w trakcie laboratorium metody. Stosując metodę Newtona, żeby uzyskać satysfakcjonujące wyniki, jako węzły przyjmowaliśmy zera wielomianów Czebyszewa, ponieważ dla węzłów równoodległych występował efekt Rungego. Dla stosowanej metody, wystarczy zwiększyć ilość węzłów aby uzyskać lepsze wyniki.

Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi jest dość szybką, wydajną oraz nietrudną w implementacji metodą interpolacji.