Sprawozdanie - laboratorium 5

Diagonalizacja macierzy metodą potegową.

Katarzyna Such, 09.04.2021

1 Wstęp teoretyczny

W trakcie laboratorium rozwiązywaliśmy problem własny macierzy przy pomocy metody iteracyjnej.

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \qquad \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\},\ \{x_1, x_2, ..., x_n\} \tag{1}$$

Przy założeniu, że macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną stosowaliśmy metodę potęgową. Jest to metoda wielokrotnych przybliżeń, która pozwala wyznaczyć największą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny. Żeby rozwiązać powyższy problem, należy, pewną liczbę razy, wykonać kolejne kroki:

- wybranie dowolnego wektora: $\vec{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{x}_i$
- pomnożeniu wybranego wektora przez macierz $\mathbf{A}$:
  - $\mathbf{A}\vec{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i\vec{x}_i$
  - $\vec{v}_m = \mathbf{A}^m\vec{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i^m\vec{x}_i$
- wyznaczenie wektora (np. x_1):
  - ponieważ $\vec{v}_m \approx a_1\lambda_1^m\vec{x}_1$
  - $\vec{x}_1 = \frac{\vec{v}_m}{\|\vec{v}_m\|}$ - znormalizowany wektor własny.

Kolejne przybliżenia wektora $\vec{x}$:

$$\vec{x}_0^{\,i+1} = \frac{\mathbf{A}\ \vec{x}_0^{\,i}}{\left\|\mathbf{A}\ \vec{x}_0^{\,i}\right\|} \tag{2}$$

Dzięki redukcji Hotellinga, możemy wyznaczyć kolejne wektory własne (i-te przybliżenie k-tej wartości własnej):

$$\mathbf{W}_{k+1} = \ \mathbf{W}_k - \lambda_k\vec{x}_k^{\,i}(\vec{x}_k^{\,i})^T \tag{3}$$

gdzie:

$$\lambda_k = \frac{(\vec{x}_k^{\,i+1})^T\ \vec{x}_k^{\,i}}{(\vec{x}_k^{\,i})^T\ \vec{x}_k^{\,i}} \tag{4}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Utorzyliśmy symetryczną macierz $\mathbf{A}$ (n = 7) gdzie:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 + |i-j|}} \tag{5}$$

Przy użyciu metody potęgowej wyznaczyliśmy wartości własne. Stosowaliśmy poniższy algorytm:

$\mathbf{W}_0 = \mathbf{A}$ *(inicjalizacja macierzy iterującej)*
for (int k=0; $k < K_{val}$; k++) {
    $\vec{x}_k^0$= [1,1, ..., 1] *(inicjalizacja wektora startowego)*
    for(int i= 1; $i <= IT\_MAX$; i++){
        $\vec{x}_k^{\,i+1} = \mathbf{W}_k \vec{x}_k^{\,i}$
        $\lambda_k^i = \frac{(\vec{x}_k^{\,i+1})^T\ \vec{x}_k^{\,i}}{(\vec{x}_k^{\,i})^T\ \vec{x}_k^{\,i}}$
        $\vec{x}_k^i = \frac{\vec{x}_k^{\,i+1}}{\left\|\vec{x}_k^{\,i+1}\right\|_2}$
    }
    $\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \lambda_k \vec{x}_k^{\,i} (\vec{x}_k^{\,i})^T$ *(iloczyn tensorowy)*
}

gdzie:

- k - numer wyznaczanej wartości własnej,
- i - numer iteracji dla określonego k,
- **A** - macierz pierwotna,
- $\mathbf{W}_k$ - macierz iteracji,
- λ_k^i - przybliżenie k-tej wartości własnej w i-tej iteracji,
- $\vec{x}_k^{\,i}$ - i-te przybliżenie k-tego wektora własnego,
- K_{val} = n = 7 - ilość wartości własnych do wyznaczenia,
- IT_MAX = 12 - ilość iteracji

Wyznaczyliśmy macierz $\mathbf{X} = [\ \vec{x}_0, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_{n-1}\ ]$, która przechowuje wektory własne.
Na podstawie macierzy **X**, znaleźliśmy macierz **D**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\ \mathbf{A}\ \mathbf{X} \tag{6}$$

2.2 Wyniki

Kolejne wektory własne:

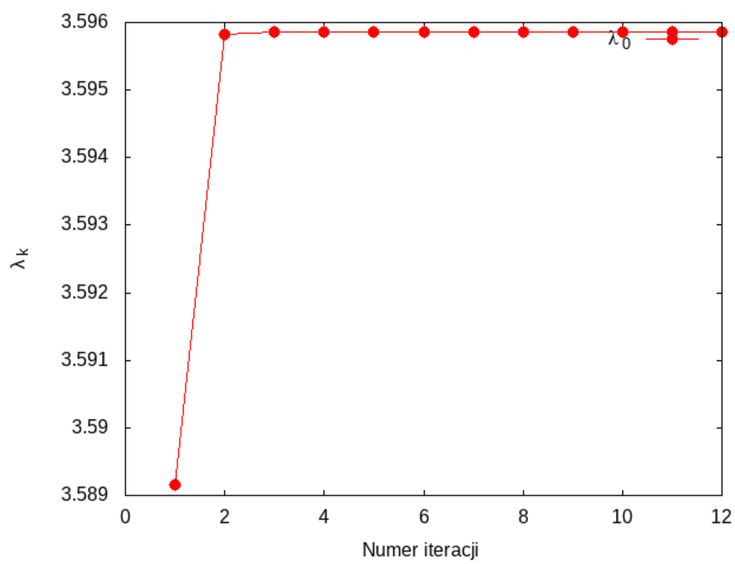
$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.352941 \\ 0.377935 \\ 0.392221 \\ 0.396889 \\ 0.392221 \\ 0.377935 \\ 0.352941 \end{bmatrix} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.477239 \\ 0.164774 \\ -0.314852 \\ -0.540298 \\ -0.314852 \\ 0.164774 \\ 0.477239 \end{bmatrix} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.361191 \\ -0.463966 \\ -0.14042 \\ 0.518765 \\ -0.14042 \\ -0.463967 \\ 0.36119 \end{bmatrix} \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.479159 \\ -0.446634 \\ -0.266307 \\ -3.98951 \cdot 10^{-5} \\ 0.266379 \\ 0.446583 \\ 0.479179 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.130873 \\ -0.337792 \\ 0.477129 \\ -0.531332 \\ 0.476855 \\ -0.338251 \\ 0.130381 \end{bmatrix} \vec{x}_5 = \begin{bmatrix} -0.449005 \\ 0.172676 \\ 0.518245 \\ -5.19045 \cdot 10^{-10} \\ -0.518245 \\ -0.172676 \\ 0.449005 \end{bmatrix} \vec{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.262282 \\ -0.520312 \\ 0.400604 \\ -9.77221 \cdot 10^{-14} \\ -0.400604 \\ 0.520312 \\ -0.262282 \end{bmatrix}$$

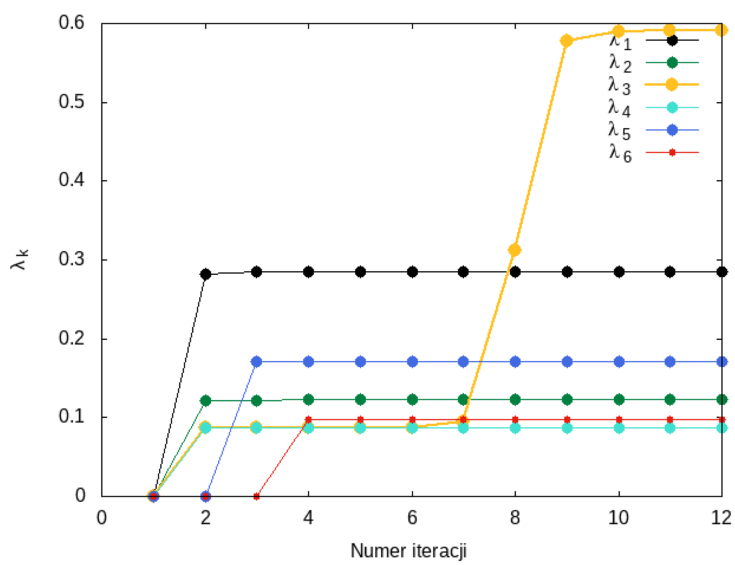
Macierz $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\ \mathbf{A}\ \mathbf{X}$:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{3.59586} & -1.18905 \cdot 10^{-13} & 2.16493 \cdot 10^{-15} & 2.22045 \cdot 10^{-16} & -2.22045e \cdot 10^{-15} & 2.22045 \cdot 10^{-16} & -2.22045 \cdot 10^{-16} \\
-1.18898 \cdot 10^{-13} & \mathbf{0.284988} & -6.25267 \cdot 10^{-06} & -2.28247 \cdot 10^{-12} & -3.81662 \cdot 10^{-09} & -1.38778 \cdot 10^{-17} & 6.93889 \cdot 10^{-17} \\
2.25861 \cdot 10^{-15} & -6.25267 \cdot 10^{-06} & \mathbf{0.122786} & -8.92259 \cdot 10^{-07} & -0.000329107 & -3.06873 \cdot 10^{-13} & -2.25514 \cdot 10^{-17} \\
-2.77556 \cdot 10^{-17} & -2.28245 \cdot 10^{-12} & -8.92259 \cdot 10^{-07} & \mathbf{0.59039} & -0.000296956 & -3.70259 \cdot 10^{-14} & 1.38778 \cdot 10^{-17} \\
-2.12417 \cdot 10^{-15} & -3.81662 \cdot 10^{-09} & -0.000329107 & -0.000296956 & \mathbf{0.0865959} & -2.45141 \cdot 10^{-10} & -4.52416 \cdot 10^{-15} \\
1.66533 \cdot 10^{-16} & -6.93889 \cdot 10^{-18} & -3.06897 \cdot 10^{-13} & -3.69496 \cdot 10^{-14} & -2.45141 \cdot 10^{-10} & \mathbf{0.170974} & -3.62189 \cdot 10^{-08} \\
-2.84495 \cdot 10^{-16} & 2.08167 \cdot 10^{-17} & 1.73472 \cdot 10^{-18} & -9.19403 \cdot 10^{-17} & -4.48426 \cdot 10^{-15} & -3.62189 \cdot 10^{-08} & \mathbf{0.0981544}
\end{bmatrix}$$

Kolejne przybliżenia znalezionych wartości własnych λ_k, dla 12 iteracji (Rysunek 1, Rysunek 2):

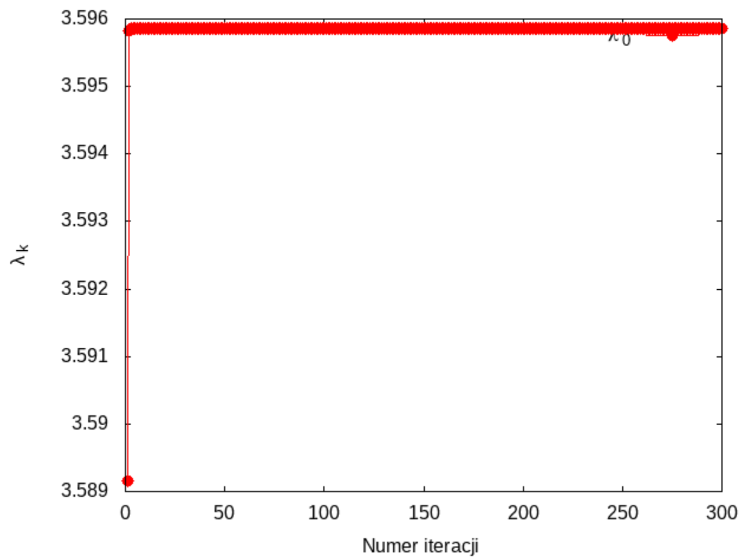


Rysunek 1: Przybliżenie znalezionej wartości własnej λ_0 w zależności od numeru iteracji.

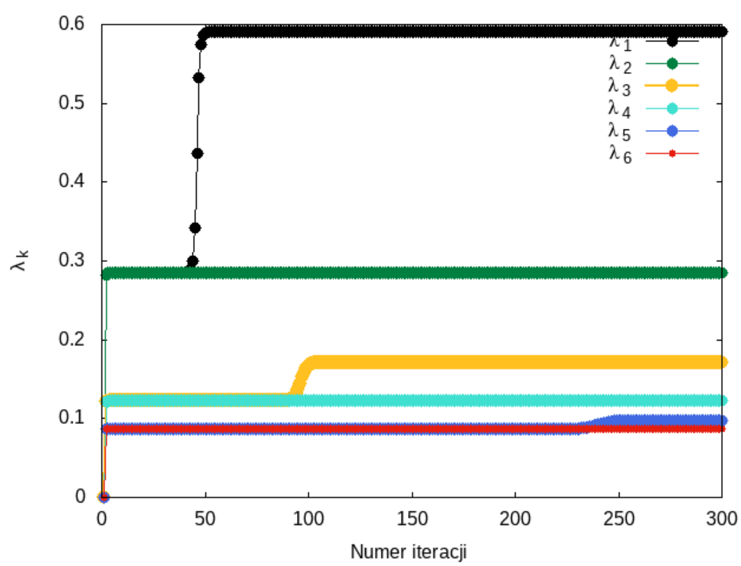


Rysunek 2: Przybliżenia znalezionych wartości własnych λ_i, ($i \in [1, 6]$) w zależności od numeru iteracji.

Dla IT_MAX = 300 przybliżenia znalezionych wartości własnej λ_k, dla 300 iteracji (Rysunek 3, Rysunek 4):



Rysunek 3: Przybliżenie znalezionej wartości własnych λ_0 w zależności od numeru iteracji.



Rysunek 4: Przybliżenia znalezionych wartości własnych λ_i, $(i \in [1, 6])$ w zależności od numeru iteracji.

3 Wnioski

Teoretycznie dla metody potęgowej wartości własne λ_k dla kolejnych iteracji powinny maleć. Dla 12 iteracji, które przyjęliśmy w tym zadaniu, to założenie nie jest spełnione. Po zwiększeniu liczby iteracji do 300 jesteśmy w stanie zauważyć tę zależność.

Obliczone przez nas wartości własne są wartościami przybliżonymi. Macierz $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\ \mathbf{A}\ \mathbf{X}$ nie jest macierzą diagonalną, poza diagonalą znajdują się wartości rzędu 10^{-6} - 10^{-18}.

Z wykresów możemy odczytać, że dla różnych wartości własnych, potrzebna była inna ilość iteracji, aby wyniki w kolejnych iteracjach się pokrywały, np. dla λ_0 osiągnięto taki stan po 3 iteracjach, z drugiej strony dla λ_5 po około 250.

Metoda potęgowa jest dość szybka i prosta w implementacji dla macierzy niewielkich oraz symetrycznych. Dla małej macierzy, którą rozważaliśmy, zwiększenie ilości iteracji z 12 na 300, nie zmienia istotnie czasu działania programu.