

# SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM 10

## Poszukiwanie minimum wartości funkcji metodą symulowanego wyżarzania

Katarzyna Such, 15.05.2021

### 1 Wstęp teoretyczny

Metoda symulowanego wyżarzania pozwala znaleźć ekstremum lokalne funkcji, jest to metoda typu Monte Carlo. Polega na wielokrotnym losowaniu przesunięć wędrowców w celu znalezienia lepszego rozwiązania.

Szukając minimum funkcji, sprawdzamy czy w nowym położeniu wędrowca funkcja  $f$  przyjmuje mniejszą wartość:

$$f(x_i + \Delta x) \leq f(x_i), \quad (1)$$

gdy powyższy warunek jest spełniony przesuwamy wędrowca:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x. \quad (2)$$

W przeciwnym wypadku określamy prawdopodobieństwo, zadane przez rozkład Boltzmanna, akceptacji gorszego rozwiązania:

$$P = \exp\left(-\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{T}\right). \quad (3)$$

Losujemy liczbę:

$$X \in U(0, 1), \quad (4)$$

przyjmujemy nowe położenie gdy  $X < P$ .

Lokalnie gorsze rozwiązania akceptujemy aby wędrowiec nie został zamknięty w obrębie lokalnego minimum funkcji.

### 2 Zadanie do wykonania

#### 2.1 Opis problemu

Celem zajęć było znalezienie minimum funkcji:

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y) - \exp\left(-\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) \quad (5)$$

przy pomocy metody symulowanego wyżarzania ze zmienną temperaturą  $T$ .

Minimum szukaliśmy w obszarze  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] = [-10, 10] \times [-10, 10]$ . Jako położenie początkowe przyjęliśmy  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (5, 5)$ . Dla każdego z  $N = 200$  wędrowców, wykonywaliśmy 100 kroków błądzenia dla każdej z temperatur:

$$T = \frac{10}{2^{it}} \quad (6)$$

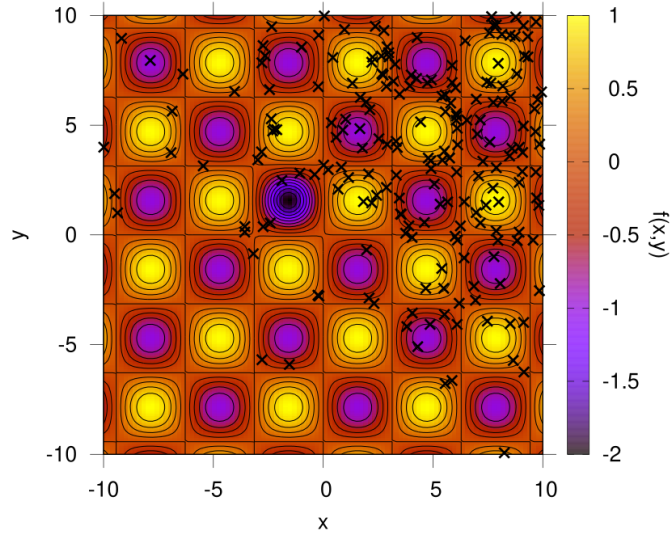
Zmianę temperatury przeprowadzaliśmy dla każdego  $it = 0, 1, \dots, 20$ .

Dla  $it = 0$ ,  $it = 7$  oraz  $it = 20$  zapisaliśmy do pliku położenia wszystkich wędrowców, aby przestawić je na wykresie konturowym funkcji (5).

Dla pierwszego wędrowca do pliku zapisaliśmy wszystkie jego położenia w trakcie działania całego algorytmu oraz narysowaliśmy wartości funkcji  $f(x_i, y_i)$  dla wszystkich jego położań.

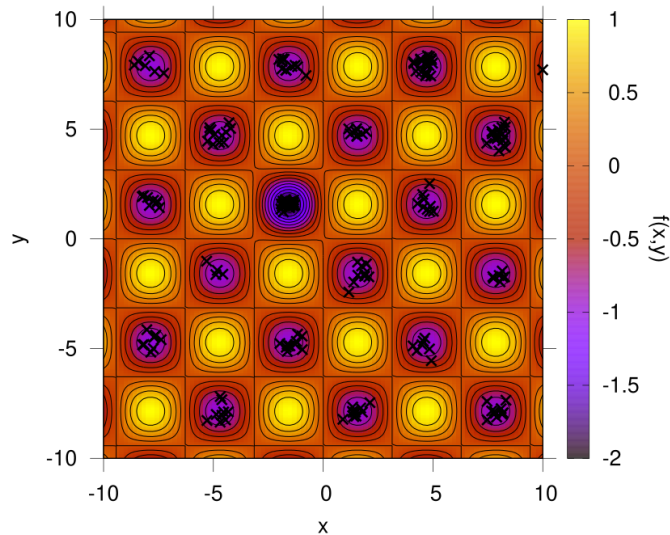
## 2.2 Wyniki

Znaleziono minimum globalne funkcji  $f(x_{min}, y_{min}) = -1.99999$ , dla punktu  $(x_{min}, y_{min}) = (-1.57235, 1.57315)$ . Wynik ten jest zgodny z wynikami teoretycznymi.



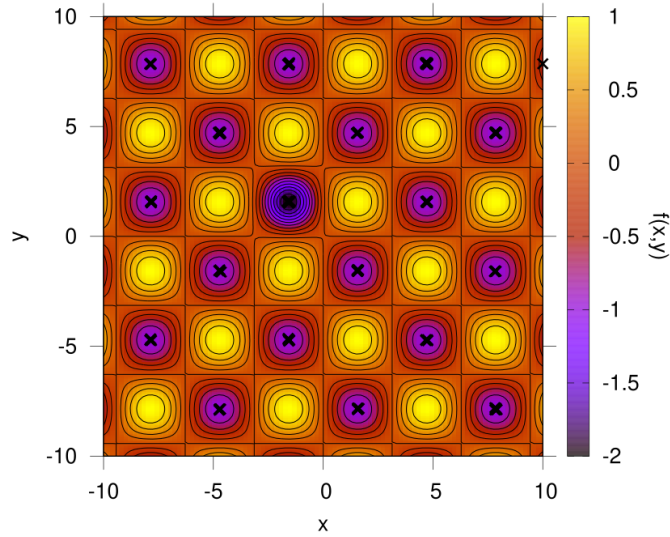
Rysunek 1: Położenia wszystkich wędrowców w trakcie działania algorytmu po zakończeniu błędzenia dla  $it = 0$

Na powyższym wykresie widzimy, że wędrowcy są bardzo rozsiani po badanym obszarze, co wynika z wysokiego prawdopodobieństwa wybrania gorszego wyniku dla tak dużego  $T$ .



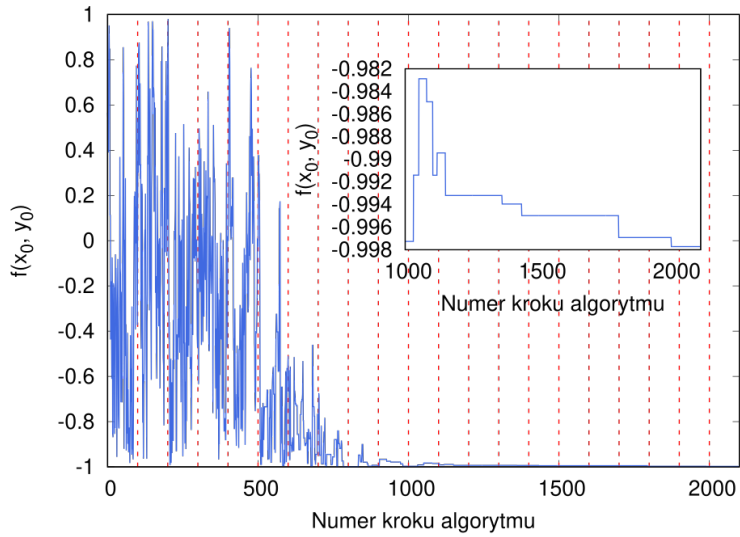
Rysunek 2: Położenia wszystkich wędrowców w trakcie działania algorytmu po zakończeniu błędzenia  $it = 7$

Dla  $it = 7$  widzimy, że wędrowcy są skupieni głównie w obszarach minimów lokalnych funkcji. Temperatura jest mniejsza, prawdopodobieństwo wybrania gorszego wyniku również.



Rysunek 3: Położenia wszystkich wędrowców w trakcie działania algorytmu po zakończeniu błędzenia dla  $it = 20$

Dla  $it = 20$  obserwujemy wędrowców położonych w minimach lokalnych funkcji.



Rysunek 4: Wartości funkcji  $f(x, y)$  dla wszystkich położń pierwszego wędrowca w trakcie trwania algorytmu.

Dla dużych  $T$ , na początku działania algorytmu, widać znaczne różnice pomiędzy wartościami funkcji. Jest to spowodowane tym, że prawdopodobieństwo  $P$ , dla dużych  $T$ , jest bliskie 1, więc istnieje duże prawdopodobieństwo przyjęcia wyniku gorszego. Wraz ze zmniejszaniem się wartości  $T$ , prawdopodobieństwo  $P$  maleje, więc przesunięcia wykonywane są częściej w stronę minimum. Dla pierwszego wędrowca znalezione zostało minimum lokalne, równe w przybliżeniu -1.

### 3 Wnioski

Znaleźliśmy minimum globalne, więc algorytm dla tak dobranych parametrów, dla tej funkcji, zadziałał poprawnie.

Prawdopodobieństwo  $P$ , wybrania wyniku gorszego, zależy od temperatury  $T$ . Na początku działania programu, dla dużego  $T$ , prawdopodobieństwo jest bliskie 1, wędrowcy poruszają się dość losowo. Dla mniejszych  $T$ , wędrowcy zmierzają w stronę minimum lokalnego. Dla temperatury bliskiej zeru, wędrowcy znajdują się w przybliżeniu w miejscu minimum lokalnego.

Ilość wędrowców znacząco wpływa na działanie algorytmu. Mogliśmy zaobserwować na rysunku (4), że uruchomienie programu dla jednego wędrowcy nie dałoby nam satysfakcjonującego wyniku, znalezione zostało jedynie minimum lokalne, nie globalne. Zwiększenie liczby wędrowców zwiększa szansę na znalezienie minimum globalnego.

Zastosowana podczas laboratorium metoda symulowanego wyżarzania jest stosunkowo prosta w implementacji, jest dobrym, wygodnym narzędziem do znajdowania ekstremów funkcji. Jednak dla źle dobranych parametrów, ze względu na losowość, możemy nie otrzymać poprawnego wyniku.