Sprawozdanie - laboratorium 11

Odszumianie sygnału przy użyciu FFT - splot funkcji

Katarzyna Such, 22.05.2021

1 Wstęp teoretyczny

Szybka transformacja Fouriera (FFT)
Jest to algorytm pozwalający wyznaczyć dyskretną transformatę Fouriera oraz transformatę do niej odwrotną.

Najprostszym algorytmem FFT jest algorytm radix-2 (Cooley - Tukey), opracowany w celu szybkiej analizy danych sejsmologicznych. Obliczamy współczynniki transformaty Fouriera (DFT) c_k wykonując jak najmniej obliczeń.

Zakładamy, że całkowita liczba węzłów jest potęgą dwójki:

$$N = 2^k, \qquad k \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Węzły:

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j, \qquad j = 0, 1, 2, ..., N-1. \tag{2}$$

Współczynniki c_k:

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \; exp(-I\frac{2\pi}{N} jk). \tag{3}$$

Po zgrupowaniu składników osobno parzystych (j = 2m) i nieparzystych (j = 2m+1):

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \; exp(-I\frac{2\pi}{N/2} mk) + exp(-I\frac{2\pi}{N}k) \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \; exp(-I\frac{2\pi}{N/2} mk). \tag{4}$$

Jeżeli przyjmiemy:

$$p_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \; exp(-I\frac{2\pi}{N/2} mk), \tag{5}$$

$$q_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \; exp(-I\frac{2\pi}{N/2} mk), \tag{6}$$

$$\varphi = exp(-I\frac{2\pi}{N}k) \tag{7}$$

c_k możemy zapisać w postaci:

$$c_k = p_k + \varphi q_k \tag{8}$$

Po korzystaniu z okresowości ($p_{k+N/2} = p_k$, $q_{k+N/2} = q_k$, $\varphi_{k+N/2} = -q_k$), wyznaczamy tylko połowę współczynników p_k i q_k, obliczamy je za pomocą DFT, ponieważ:

$$c_k = \begin{cases} p_k + \varphi_k q_k, & k < \frac{N}{2} \\ p_{k-\frac{N}{2}} - \varphi_k q_{k-\frac{N}{2}}, & k \leqslant \frac{N}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Kolejno dzielimy sumy p_k i q_k na sumy zawierające tylko elementy parzyste i nieparzyste. Po podziale liczba elementów w dwóch pozostałych sumach jest dwukrotnie mniejsza niż w oryginale. Rekurencyjny proces podziału kończymy gdy liczba elementów jest równa 1.

Splot dwóch funkcji:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{10}$$

Gdy funkcje f(t) traktujemy jako sygnał, a g(t) jako wagę to splot tych funkcji można potraktować jako uśrednienie funkcji f funkcją wagową g. Dzięki temu można wygładzić zaszumiony sygnał.

$$FFTf(t) * g(t) = FFTf \cdot FFTg = f(k) \cdot g(k), \tag{11}$$

$$f * g = FFT^{-1} f(k) \cdot g(k) \tag{12}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

W trakcie laboratorium stosowaliśmy FFT w celu wygładzenia zaszumionego sygnału. Jako sygnał przyjęliśmy:

$$f(t) = f_0(t) + \Delta \tag{13}$$

gdzie niezaszumiony sygnał:

$$f_0(t) = sin(1 \cdot \omega t) + sin(2 \cdot \omega t) + sin(3 \cdot \omega t), \tag{14}$$

Za szum przyjęliśmy pseudolosową liczbę z zakresu [-1/2, 1/2]:

$$\Delta = \texttt{(float) rand() / RAND\_MAX - 0.5} \tag{15}$$

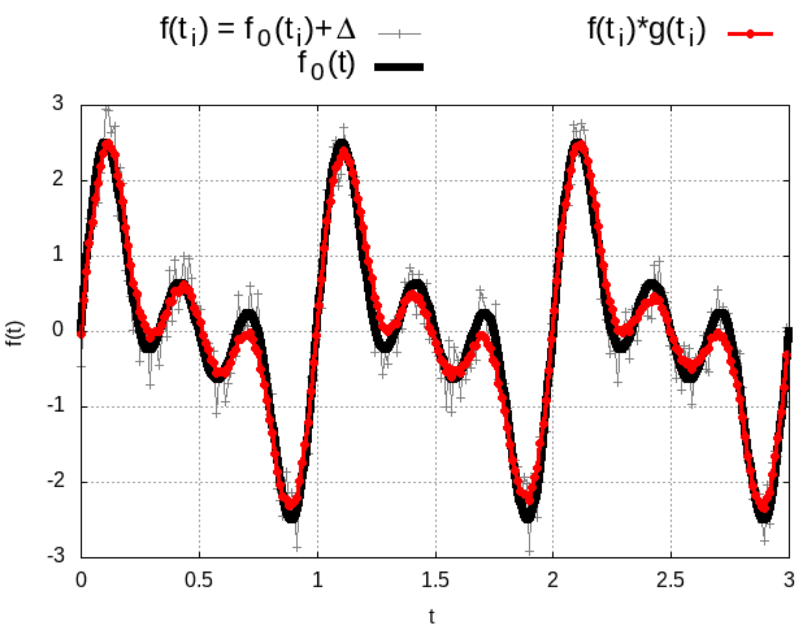
Jako funkcję wagową przyjęliśmy:

$$g(t) = \frac{q}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(\frac{t^2}{2\sigma^2}) \tag{16}$$

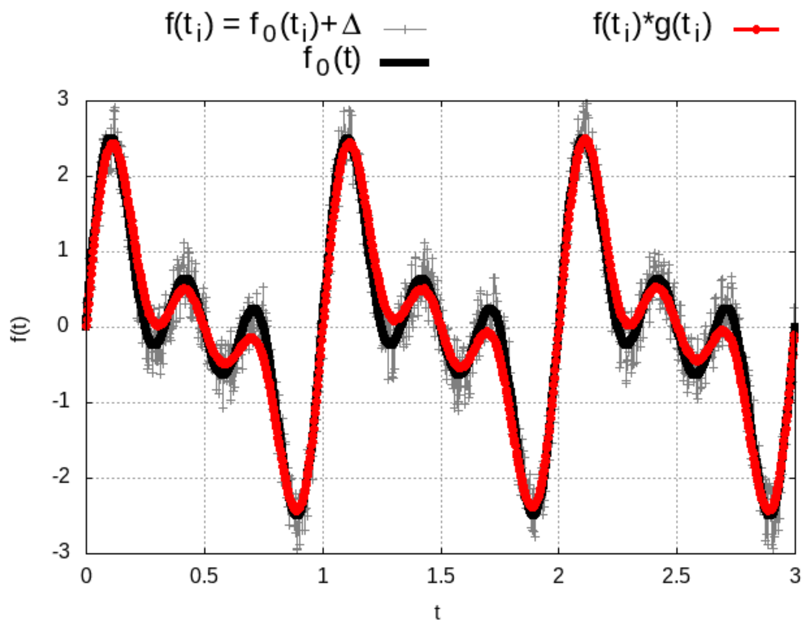
W celu wyznaczenia transformaty użyliśmy procedury `four1(float dane[ ],int n, isign)` z biblioteki Numerical Recipes.
Przyjęliśmy parametry: $N_k = 2^k$, k = 8, 10, 12, T = 1.0, $t_{max} = 3T$, $dt = t_{max}/N_k$, $\sigma = T/20$, $\omega = 2\pi/T$. Dla każdego k zrobiliśmy wykresy przedstawiające sygnał niezaburzony i znormalizowany splotu.

2.2 Wyniki

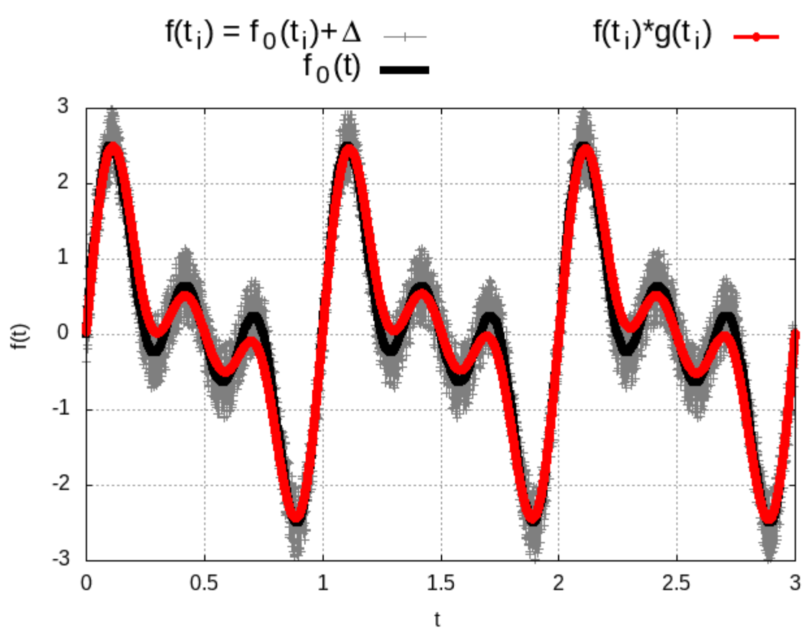
Wyniki odszumiania sygnału przy użyciu FFT: $f_0(t)$ - sygnał niezaburzony, f(t) = $f_0(t) + \Delta$ - sygnał zaburzony, f(t)*g(t) - sygnał wygładzony (splot funkcji), kolejno dla k = 8, k = 10, k = 12:



Rysunek 1: k = 8



Rysunek 2: k = 10



Rysunek 3: k = 12

Na rysunku (1) (k=8) łatwo zauważyć że funkcja splotu nie jest gładka. Największe różnice między funkcją splotu oraz funkcją oryginalną możemy zaobserwować w ekstremach. Generalnie funkcja wygładzona kształtem przypomina funkcję niezaburzoną. Dla k = 10, splot jest gładszy niż wcześniej, dopasowanie jest lepsze. Dla k = 12 funkcja splotu jest jeszcze gładsza niż dla k = 10, dopasowanie również jest lepsze, jednak nadal nie jest idealne. Nie wszystkie ekstrema się pokrywają.

3 Wnioski

Stosowana podczas laboratorium metoda nie pozwala na uzyskanie dokładnego odwzorowania funkcji niezaburzonej, uzyskaliśmy jedynie przybliżenie. Zwiększenie k, spowodowało większe wygładzenie funkcji. Dla k = 8 funkcja nie była gładka. W każdym z rozważanych przypadków wykres funkcji odszumionej był zbliżony do wykresu funkcji niezaburzonej.

Zastosowanie szybkiej transformacji Fouriera pozwoliło nam wygładzić sygnał zaszumiony, dzięki temu otrzymaliśmy przybliżenie funkcji niezaburzonej.