Sprawozdanie - laboratorium 1

Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Katarzyna Such, 06.03.2021

1 Wstęp teoretyczny

Tematem laboratorium było rozwiązywanie, matodami bezpośrednimi, układów algebraicznych równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1 1 x_1 + a_1 2 x_2 + ... + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_2 1 x_1 + a_2 2 x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2 \\ .... = ... \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nn} x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Każdy taki układ możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_1 1 & a_1 2 & ... & a_{1n} \\ a_2 1 & a_2 2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

A - macierz współczynników układu
$\vec{x}$ - szukany wektor rozwiązań
$\vec{b}$ - wektor wyrazów wolnych

W czasie laboratorium, do rozwiązywanie układu, stosowaliśmy metodę Gaussa-Jordana. Metoda ta polega na sprowadzeniu macierzy odwzorowującej układ(**A**) do macierzy jednostkowej za pomocą elementarnych działań matematycznych wykonywanych na elementach macierzy roszerzonej, która powstała z macierzy **A** i wektora $\vec{b}$.

Macierz rozszerzona:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1 1 & a_1 2 & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_2 1 & a_2 2 & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_3 \end{array}\right] \tag{3}$$

Wykonując działania: dodawania, odejmowania wierszy, oraz mnożenia wiersza przez stałą, otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & ... & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & c_2 \\ ... & ... & 1 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & c_n \end{array}\right] \tag{4}$$

Po doprowadzeniu macierzy do takiej postaci, rozwiązanie układu to:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ ... \\ x_n = c_n \end{cases} \tag{5}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Przy rozwiązywaniu równań różniczkowych czasami istnieje potrzeba rozwiązania układów algebraicznych równań liniowych. Dla prostego oscylatora harmonicznego znamy zależność różniczkową, która wynika z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{6}$$

Z powyższego wzoru możemy wyznaczyć iteracyjny wzór, który pozwala znaleźć wychylenie x_{i+1} przy pomocy x_i i x_{i-1}

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{7}$$

Zatem gdy znamy dwie kolejne wartości wychylenia x_{i-1}, x_i możemy wyznaczyć następną wartość x_{i+1}. Następnie z x_i i x_{i+1} wyliczamy x_{i+2} itd. W ten sposób możliwe będzie rozwiązanie problemu. Wartości x_0 i x_1 otrzymamy z warunków początkowych: $x_0 = A$ - początkowe wychylenie z równowagi, $(x_1$-$x_1)/h = v_0$ - początkowa prędkość ciała.

Przy takich warunkach początkowych równanie (7), dla pierwszych 7 kroków czasowych, w postaci macierzowej:

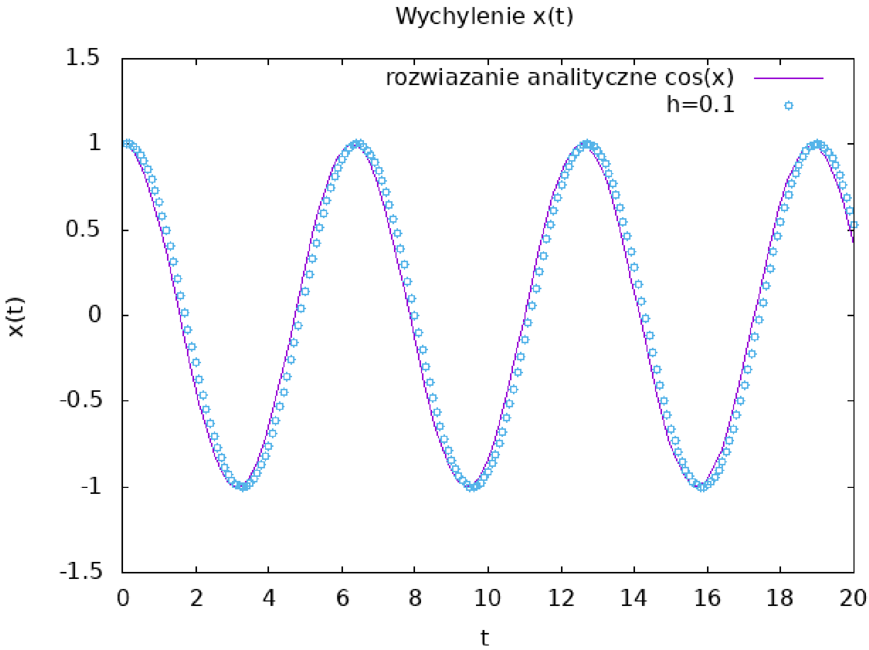
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

W trakcie laboratorium mieliśmy rozwiązać układ (8) metodą Gaussa-Jordana, oraz narysować zależność wychylenia z położenia równowagi dla tego układu na przestrzeni kilku okresów drgań. Przyjęliśmy $k/m = 1$, $v_0 = 0$, A=1, N = 200 (wielkość macierzy) oraz h = 0.1 (krok całkowania).

2.2 Wyniki

Po stworzeniu macierzy kwadratowej, w celu rozwiązania układu metodą Gaussa-Jordana, korzystaliśmy z procedury gaussj.c.
Uzyskane wyniki przedstawiliśmy na wykresie, wraz z analitycznym rozwiązaniem oscylatora harmonicznego: $x(t) = A\cos(\omega t)$, dla naszych warunków początkowych $x(t) = \cos(t)$,

Dane obliczone metodą Gaussa-Jordana i wykres funkcji $x(t) = \cos(t)$ niemal pokrywają się ze sobą.



Rysunek 1: Wychylenie x(t) uzyskane metodą eliminacji Gaussa-Jordana

3 Wnioski

Korzystając z metod bezpośrednich możemy z dużą dokładnością rozwiązać równanie liniowie. Dzięki ustaleniu dużej częstości pomiarów (h) oraz znacznej ilości obliczeń (N) otrzymaliśmy satysfakcjonujący wynik. Jeśli jednak zwiększylibyśmy którąś z tych wartości wynik byłby bardziej dokładny. Metoda z której korzystaliśmy może wykonywać obliczenia dla dużych macierzy, jednak zwiększając parametry, moglibyśmy zmniejszyć wydajność programu.