HF1006.

FORMELBLAD

Data-, Elektro-, Medicinsk teknik

Version augusti 2024

ALGEBRA

Algebraiska formler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Potenser

För reella x och y, $a, b > 0$

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad a^x b^x = (ab)^x$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad a^{1/n} = \sqrt[n]{a},\ n \text{ heltal } \geq 2$$
$$a^0 = 1 \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Kvadratkomplettering

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Logaritmer

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$
$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$$
$$10^x = a \Leftrightarrow x = \lg a$$

Logaritmlagar

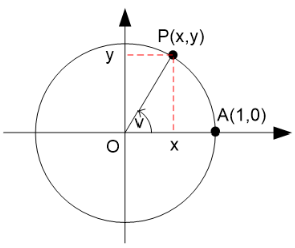
För $A, B, a, b, p > 0$

$$\log_a AB = \lg A + \lg B$$
$$\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$
$$\log_a A^p = p \log_a A$$

TRIGONOMETRI

Enhetscirkeln

$$\cos(v) = x$$
$$\sin(v) = y$$



Grundekvationer

$$\cos\theta = x \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pm\arccos x + n \cdot 2\pi$$

$$\sin\theta = x \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \arcsin x + n \cdot 2\pi \\ \theta_2 = \pi - \arcsin x + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\tan\theta = x \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arctan x + n \cdot \pi$$

Vinkel v		sin v	cos v	tan v
Grader	Radianer			
0	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-

$\sin\theta = \sin(\theta + n\cdot 2\pi)$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
$\cos\theta = \cos(\theta + n\cdot 2\pi)$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
$\tan\theta = \tan(\theta + n\cdot \pi)$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$\sin^2\theta + \cos^2\theta \quad = 1$	$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

DERIVATOR

Definition $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Beteckningar $\quad f'(x),\ y',\ y'(x),\ Df(x),\ \dfrac{dy}{dx},\ f''(x),\ y'',\ y''(x),\ D^2 f(x),\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

Funktion	Derivata
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$a^x,\ a > 0$	$a^x \ln a$
$\ln x,\ x > 0$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Funktion	Derivata
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

DERIVERINGSREGLER

$(af+bg)' = af' + bg', \qquad a, b$ konstanter

$f = f(x), \quad g = g(x)$

Produktregeln: $(fg)' = f'g + fg'$

Kvotregeln: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Kedjeregeln: Om *f* och *g* är deriverbara så är också $f\left(g(x)\right)$ deriverbar då gäller

$$\frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) \quad \text{dvs} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

då $y = f(z)$ och $z = g(x)$.

TANGENT OCH NORMAL

Räta linjens ekvation: $y = kx + m$

Tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $\left(a, f(a)\right)$ med $k = f'(x)$:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Mellan tangentens och normalens *k*-värde gäller sambandet: $k_{\text{normal}} = -\dfrac{1}{k_{\text{tangent}}}$

INTEGRALER

Funktion	Primitiv funktion
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
e^{kx}	$\dfrac{e^{kx}}{k} + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$
$\cos kx$	$\dfrac{\sin kx}{k} + C$
$\sin kx$	$\dfrac{-\cos kx}{k} + C$
$\dfrac{1}{x+a}$	$\ln\lvert x+a \rvert + C \quad x \neq -a$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

REGLER FÖR INTEGRATION

Partiell integration

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \left[F(x) g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx$$

Integration genom substitution

$$\int f\left[g(x)\right] \cdot g'(x) dx = \left\{ \begin{matrix} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{matrix} \right\} = \int f(t) dt$$

$$\int_a^b f\left[g(x)\right] \cdot g'(x) dx = \left\{ \begin{matrix} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \\ x = a \Rightarrow t = g(a) \\ x = b \Rightarrow t = g(b) \end{matrix} \right\} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

ROTATIONSVOLYMER

Skivmetod: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ eller $V = \pi \int_c^d x^2 dy$

Skalmetod: $V = 2\pi \int_a^b xy dx$ eller $V = 2\pi \int_c^d xy dy$

Längden av en kurva: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$

TAYLOR FORMELN

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R$$

där $R=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$ och c är ett tal som ligger mellan a och x.

l'HOSPITALS REGEL $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\ g'(x)\neq 0$

STANDARDGRÄNSVSÄRDEN

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x}=0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^p}=0,\ p>0$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

DIFFERENTIALEKVATIONER

Separabla Differentialekvationer $g(y)y'=f(x)\Rightarrow\int g(y)dy=\int f(x)dx$

Linjära ekvationer av första ordningen:

$y'+ay=0\Rightarrow y=Ce^{-ax}$ där C är en godtycklig konstant.

$y'+f(x)y=g(x)\Rightarrow y(x)=\left(\int g(x)e^{F(x)}dx+C\right)e^{-F(x)}$.

Linjära ekvationer av andra ordningen: $y''+ay'+by=f(x)$ där *a* och *b* är konstanter, har lösningen

$y=y_h+y_p$.

Homogena ekvationen $y''+ay'+by=0$ har karakteristisk ekvation: $r^2+ar+b=0$ med rötterna r_1 och r_2.

1. r_1 och r_2 är reella och $r_1\neq r_2$: $y_h=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

2. r_1 och r_2 är reella och $r_1=r_2=r$: $y_h=(A+Bx)e^{rx}$

3. r_1 och r_2 är komplexa och $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$: $y_h=e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right)$

Partikulär lösning y_p

$f(x)$ är polynom, $f(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots$ $y_p=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$

$f(x)$ är trigonometrisk funktion, $f(x)=B_1\sin kx+B_2\cos kx$ $y_p=C\sin kx+D\cos kx$

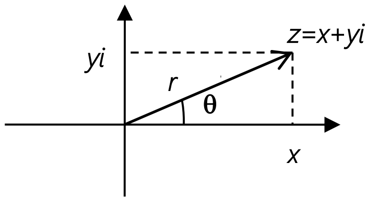
$f(x)$ är exponential funktion, $f(x)=Ce^{kx}$

- ✓ *k* är inte en rot till karakteristiska ekvationen, $y_p=Ae^{kx}$.
- ✓ *k* är en rot till karakteristiska ekvationen, $y_p=Axe^{kx}$.
- ✓ *k* är en dubbelrot till karakteristiska ekvationen, $y_p=Ax^2e^{kx}$.

KOMPLEXA TAL

Låt $z = x + yi$ vara ett komplext tal. $\operatorname{Re} z = x$ och $\operatorname{Im} z = y$

$i^2 = -1$



Absolutbelopp av z	Argumentet av z	Konjugatet till z: $\bar{z} = x - yi$
$\lvert z \rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\theta = \arg z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$	De Moivre: $z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
$\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert$	$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$	Rektangulär form: $z = x + yi$ Polär form: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$\left\lvert \dfrac{z_1}{z_2} \right\rvert = \dfrac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$	$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$	Potens form: $z = re^{i\theta}$
$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$	$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

VEKTORER I ETT TREDIMENSIONELLT ORTONORMERAT SYSTEM

Två punkter, $A = (x_1, y_1, z_1)$ och $B = (x_2, y_2, z_2)$, ger vektorn $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

Vektorlängd: $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$.

Avståndsformeln: $d = \lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Mittpunktens koordinater: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Låt vektorerna $\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ och $\vec{w} = (w_1,\ w_2,\ w_3)$.

Skalärprodukt: $\vec{u} \circ \vec{v} = \lvert \vec{u} \rvert \lvert \vec{v} \rvert \cos\theta$ där θ är vinkeln mellan vektorerna.

Vektorprodukt (kryssprodukt): $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ eller $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

Vektorprodukt: $\lvert \vec{u} \times \vec{v} \rvert = \lvert \vec{u} \rvert \lvert \vec{v} \rvert \sin\theta$ där θ är vinkeln mellan vektorerna.

Vektorprojektion av $\vec{F}$ på vektorn $\vec{a}$: $proj_{\vec{a}}(\vec{F}) = (\vec{F} \circ \overrightarrow{a_e})\overrightarrow{a_e}$ där $\overrightarrow{a_e} = \dfrac{\vec{a}}{\lvert \vec{a} \rvert}$.

Skalär trippelprodukt: $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$.

Volymen av en parallellepiped som spänns upp av $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$: $V = \lvert (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} \rvert$.

Ekvationen för en linje genom punkten $P=(x_1,y_1,z_1)$ och har riktningsvektorn $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\neq\vec{0}$:

vektorform: $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\vec{v}$ där R är en godtycklig punkt på linjen och $O=(0,0,0)$.

parameterform: $(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t(v_1,v_2,v_3)$ eller $\begin{cases} x=x_1+t\cdot v_1 \\ y=y_1+t\cdot v_2 \\ z=z_1+t\cdot v_3 \end{cases}$

Linjer på parameterfriform: $\dfrac{x-x_1}{v_1}=\dfrac{y-y_1}{v_2}=\dfrac{z-z_1}{v_3}$

Ekvationen för ett plan med normalvektorn $\vec{n}=(A,B,C)$: $Ax+By+Cz+D=0$

Ekvationen för en sfär med medelpunkten (x_0,y_0,z_0) och radien r: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

MATRISER

Låt A, B och C vara godtyckliga matriser:

Identitetsmatris (enhetsmatris): $I=diag(1,1,\ldots,1)$ $AI=IA=I$	Multiplikation med tal: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
Addition: $(A+B)+C=A+(B+C)$ $A+B=B+A$	Multiplikation: $(AB)C=A(BC)$ $(A+B)C=AC+BC$ $A(B+C)=AB+AC$
Matrisinvers: $A^{-1}A=AA^{-1}=I$ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ $A^{-n}=(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$	Transponering: $(A+B)^T=A^T+B^T$ $(AB)^T=B^TA^T$ $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

Låt $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Determinanten av A: $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Egenvärden och egenvektorer: $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ där λ är egenvärde och $\vec{x}$ egenvektor.