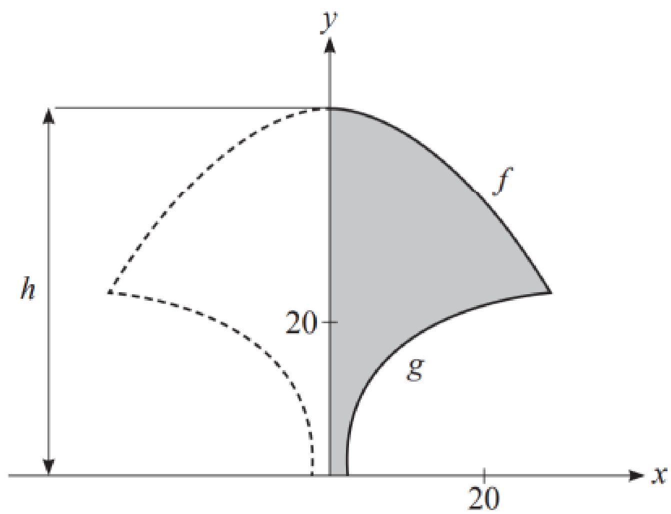
Matematik A skriftlig eksamen
Delprøve 2

Opgave 5

Billedet viser en gadelampe. På figur 4 er et tværsnit midt gennem lampen indlagt i et koordinatsystem.



Figur 4

Den tonede del på figuren afgrænses af graferne for funktionerne f og g samt koordinatakserne. De to funktioner er givet ved forskrifterne

$$f(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 50 \quad x \in [0;30]$$

$$g(x) = 25 \cdot \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{3}x\right)}{\ln(10)}} \quad x \in [3;30]$$

Alle mål er i centimeter.

$restart:$
$with(Gym):$
$f(x) := -\frac{1}{36} \cdot x^2 + 50:$
$g(x) := 25 \cdot \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)}{\ln(10)}}:$

a) Bestem lampens højde h, se figur 4.

Vi kan i illustrationen se at lampens højde er ved $x = 0$ dermed kan vi få højden ved at finde y-værdien for dette punkt i funktionen $f(x)$

$$f(0) = -\frac{1}{36} \cdot 0^2 + 50 = 50 = 50$$

Vi har dermed fundet ud af, at lamnpens højde er 50.

b) Bestem i hvilket punkt grafen for f har en tangent med hældningen $-\frac{1}{2}$.

Hældningen for en tangent kan findes ved brug af den diffrantierede funktion

$$f'(x) = -\frac{x}{18}$$

vi kan så finde et bestemt punkts hældning ved at finde hvilken værdi x skal være når man sætter $f'(x) = a$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} = -\frac{x}{18} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{solve -1/18*x = -1/2}} [[x = 9]]$$

Vi ved så at funktionen $f(x)$ har hældningen $-\frac{1}{2}$ ved $x = 9$, dog så bliver der spurgt om punktet og dermed skal vi også finde y-værdien for dette punkt.

$$y = f(9) = y = \frac{191}{4} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} y = 47.750$$

Vi ved så at hældningen er $-\frac{1}{2}$, ved $x = 9$ og $y = \frac{191}{4}$, altså i punktet $(9, 47.750)$.

Lampen kan beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere det tonede område $360°$ omkring y-aksen.

c) Bestem lampens rumfang.

Vi kan bestemme dette ved at udregne rumfanget af omdrejningslegmet for $f(x)$ i intervallet $x \in [0, 30]$ og $g(x)$ i intervallet $x \in [3, 30]$
Formlen for rumfang af graf roteret om y-aksen er:

$$V_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot x \, dx :$$

$$V_{lampe} = V_{y\,af\,f(x)} + V_{y\,af\,g(x)} :$$

$$x_1 := 0 :$$
$$x_2 := 30 :$$

$$V_{yaf\,f(x)} := 2\cdot\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = 33750\,\pi \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 106030.$$

$x_1 := 3 :$

$x_2 := 30 :$

$$V_{yaf\,g(x)} := 2\cdot\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} g(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = 2\,\pi \int_3^{30} 25\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{\ln(10)}}\;x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 61672.$$

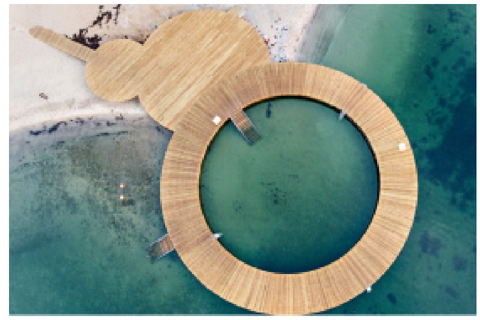
$$V_{lampe} = V_{yaf\,f(x)} + V_{yaf\,g(x)} = V_{lampe} = 33750\,\pi + 2\,\pi\left(\int_3^{30} 25\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{\ln(10)}}\;x\,\mathrm{d}x\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

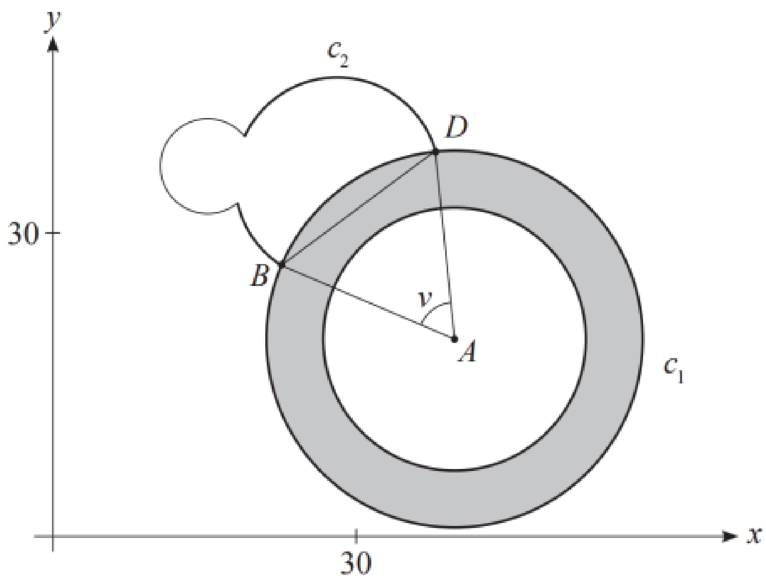
$V_{lampe} = 167700.$

Dermed er rumfanget af lampen 167700 $\mathbf{cm^2}$.

Opgave 6

Ved *Østerstrand* i Fredericia står en cirkelbro. Cirkelbroens gangareal kan betragtes som en cirkelring samt to dele af cirkelskiver. Figur 5 viser en model af gangbroen indlagt i et koordinatsystem. Alle mål er i meter.





Figur 5

Cirkelringen, vist tonet på figur 5, har en ydre radius $r_y = 17{,}5$ og en indre radius $r_i = 12{,}5$.

restart :
with(*Gym*) :

a) Bestem arealet af cirkelringen.

Areal af en cirkel er givet ved:

$A_{cirkel} = \pi \cdot r^2$

Dermed kan arealet af cirkelringen regnes ved:

$A_{cirkelring} = A_{ydre\,cirkel} - A_{indre\,cirkel}$

Vi ved også at den inde radius er $r_i := 12.5$: samt at den ydre radius er $r_y := 17.5$:

Dermed kan vi udregne arealet af de to cirkler:

$A_{ydre\,cirkel} := \pi \cdot r_y^{\,2} = 962.1127503$

og

$A_{indre\,cirkel} := \pi \cdot r_i^2 = 490.8738522$

Dermed kan vi udregne arealet af cirkelringen:
$A_{cirkelring} = A_{ydre\ cirkel} - A_{indre\ cirkel} = A_{cirkelring} = 471.2388981$

Arealet af cirkelringen er dermed $\approx$ 471

Cirkelringen har centrum i $A(38;18)$.

b) Vis at den ydre cirkel c_1 kan beskrives ved ligningen $(x-38)^2+(y-18)^2=17{,}5^2$.

Cirklens ligning er givet ved:
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
Hvor a og b er cirklens centrum (a, b) og hvor r er cirklens radius.
Ved at indsætte de kendte værdie for vores ydre cirkel, kan vi så se om vores formel er den samme som den vi skal bevise.

$(a, b) = (38, 18)$:
$r = 17.5$:
$\mathbf{(x-38)^2+(y-18)^2=17.5^2}$
Eftersom at vores formel og den vi skal bevise dermed er ens, så kan vi bevise at cirklen kan beskrives med ligningen.

Cirklen c_2 har ligningen $(x-27)^2+(y-33)^2=9{,}4^2$. Cirklerne c_1 og c_2 skærer hinanden i punkterne B og $D(36{,}1;35{,}4)$.

c) Vis at B har koordinaterne $(22{,}0;25{,}1)$, når resultatet angives med en decimals nøjagtighed.

Vi kan finde punkterne B og D ved at finde skæringspunkterne imellem c_1 og c_2.
Vi gør dette ved at isolere x og y i hver af de to cirklersligninger, dette resultere dog i 4 x- og y-værdier for hver ligning.
vi kalder disse $c_{1x1}, c_{1x2}, c_{1y1}, c_{1y2}$ og $c_{2x1}, c_{2x2}, c_{2y1}, c_{2y2}$

$c_1 := (x-38)^2+(y-18)^2=17.5^2$:
$(x-38)^2+(y-18)^2=17.5^2 \xrightarrow{\text{solutions for x}}$
$38. + 0.5000000000\sqrt{-4.\,y^2+144.\,y-71.}, 38. - 0.5000000000\sqrt{-4.\,y^2+144.\,y-71.}$
$c_{1x1}(y) := 38. + 0.5000000000\sqrt{-4.\,y^2+144.\,y-71.}$:
$c_{1x2}(y) := 38. - 0.5000000000\sqrt{-4.\,y^2+144.\,y-71.}$:

$$(x-38)^2+(y-18)^2=17.5^2 \xrightarrow{\text{solutions for y}}$$
$$18.+0.5000000000\sqrt{-4.x^2+304.x-4551.},\ 18.-0.5000000000\sqrt{-4.x^2+304.x-4551.}$$

$$c_{1y1}(x) := 18.+0.5000000000\sqrt{-4.x^2+304.x-4551.}:$$
$$c_{1y2}(x) := 18.-0.5000000000\sqrt{-4.x^2+304.x-4551.}:$$

$$c_2 := (x-27)^2+(y-33)^2=9.4^2:$$
$$(x-27)^2+(y-33)^2=9.4^2 \xrightarrow{\text{solutions for x}}$$
$$27.+0.2000000000\sqrt{-25.y^2+1650.y-25016.},\ 27.-0.2000000000\sqrt{-25.y^2+1650.y-25016.}$$
$$c_{2x1}(y) := 27.+0.2000000000\sqrt{-25.y^2+1650.y-25016.}:$$
$$c_{2x2}(y) := 27.-0.2000000000\sqrt{-25.y^2+1650.y-25016.}:$$
$$(x-27)^2+(y-33)^2=9.4^2 \xrightarrow{\text{solutions for y}}$$
$$33.+0.2000000000\sqrt{-25.x^2+1350.x-16016.},\ 33.-0.2000000000\sqrt{-25.x^2+1350.x-16016.}$$

$$c_{2y1}(x) := 33.+0.2000000000\sqrt{-25.x^2+1350.x-16016.}:$$

$$c_{2y2}(x) := 33.-0.2000000000\sqrt{-25.x^2+1350.x-16016.}:$$

ved så at sætte c_{1y2} ind i c_{2x2} vil vi få x-kordinattet for B

$$B_x = c_{2x2}(c_{1y1}) =$$
$$x=27.-0.2000000000\left(-25.\cdot\left(18.+0.5000000000\sqrt{-4.x^2+304.x-4551.}\right)^2+1650.\cdot\left(18.+0.5000000000\sqrt{-4.x^2+304.x-4551.}\right)-25016.\right)^{1/2}$$
$$\xrightarrow{\text{solutions for x}} 21.98319865 \xrightarrow{afrund} 22.0$$

Vi gør det samme men med c_{1x2} ind i c_{2y2} for at få y-kordinattet for B

$$B_y = c_{2y2}(c_{1x2})$$
$$y=33.-0.2000000000\left(-25.\cdot\left(38.-0.5000000000\sqrt{-4.y^2+144.y-71.}\right)^2+1350.\cdot\left(38.\right.\right.$$

$$-0.5000000000\sqrt{-4.\,y^2+144.\,y-71.}\,\big)-16016.\Big)^{1/2}$$

$$\xrightarrow{\text{solutions for y}} 25.05067901 \xrightarrow{afrund} 25.1$$

Eftersom at B er ved skæringen af de to cirkler, og da vi har fundet et af de to skærings punkter, kan vi antage eftersom at vores punkt og det vi skal bevise, er ens, dermed er dette kordinattet for B.

Dermed ved vi at punktet B har kordinaterne $(\mathbf{22.0},\, \mathbf{25.1})$

(Ved at anvende c_1 kan man også få skæringen for de to cirkler ved punktet D.)

d) Bestem vinklen v, se figur 5.

Vi kan gøre dette ved at først at udregne længden af alle siderne udfra de vektorere siderne udspænder, derefter ved at bruge cosinusrelationerne.

$A=(38,\,18)$

$B=(22,\,25.1)$

$\mathrm{D}=(36.1,\,35.4)$

$BD=\sqrt{(36.1-22)^2+(35.4-25.1)^2}\;=BD=17.46138597$

$DA=\sqrt{(38-36.1)^2+(35.4-18)^2}\;=DA=17.50342824$

$BA=\sqrt{(38-22)^2+(25.1-18)^2}\;=BA=17.50457083$

Vi kan så bruge cosinusrelationen til at udregne vinklen.

$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)$

$BD^2=DA^2+BA^2-2\cdot DA\cdot BA\cdot\cos(v)$

$17.46138597^2=17.50342824^2+17.50457083^2-2\cdot 17.50342824\cdot 17.50457083\cdot Cos(v)\;=$

$304.9000000=612.7800001-612.7799988\cos(0.01745329252\,v)$

$$\xrightarrow{\text{solve 304.9000000 = 612.7800001-612.7799988*cos(.1745329252e-1*v)}} [[v=59.83899962]]$$

Dermed ved vi at vinkel v er ≈ 60°

Opgave 7

På figur 6 ses Euklids algoritme benyttet på input $a = 1008$ og $b = 210$.

$$1008 = 4 \cdot 210 + 168$$
$$210 = 1 \cdot 168 + 42$$
$$168 = 4 \cdot 42 + 0$$

Figur 6

restart :
with(*Gym*) :

a) Angiv sfd(1008, 210) ud fra figur 6.

Ud fra figur 6 så har vi i det nederste trin hvor $r = 0$, at $b = 42$, som der definere vores største fælles divisor. Altså er $sfd(1008, 210) = 42$

b) Gør rede for hvordan tallene 4 og 168 i øverste linje fremkommer.

Tallet 4, er divisibiletten imellem 1008 og 210, altså hvor mange gange 210 går op i 1008 uden rest.
Tallet 168, er resten efter divisibiletten altså at $168 = 1008 - 4 \cdot 210$.

c) Benyt sætning 2 og sætning 3 i forberedelsesmaterialet til at forklare hvorfor sfd(1008, 210) = sfd(210, 168) = sfd(168, 42) = sfd(42, 0) = 42.

Sætning 2. *Lad $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, og sæt r til resten ved heltalsdivision af a med b. Så gælder* $\mathrm{sfd}(a, b) = \mathrm{sfd}(b, r)$.

Sætning 3. *Euklids algoritme stopper i endelig mange trin, og den sidste rest r_n vi finder før divisionen går op, opfylder* $r_n = \mathrm{sfd}(a, b)$.

Sætning 2 forklarer os at $sfd(a, b) = sfd(b, r)$, hvor r er resten, altså for at visualisere dette så kan man sige at b og r flytter sig til venstre efter hvert trin.
Dette ser vi også i eksemplet med
$sfd(1008, 210)$, $sfd(210, 168) = sfd(168, 42) = sfd(42, 0) = 42$.
Sætning 3 fortæller os at r_n for det næst sidste trin i euklids algoritme, er løsningen på algoritmen, dette ses også i eksemplet, hvor ved det næste sidste trin $sfd(168, 42)$ der kan resten ses til at være 42, som der også ender med at være vores afsluttende resultat.

Opgave 8

Kilde: colourbox

En undersøgelse har vist, at udviklingen i vægt for en labradorhund kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = N \cdot (0{,}48 - 0{,}016N)$$

hvor N er labradorens vægt målt i kg, og t er tiden målt i måneder efter fødslen.

$restart:$
$with(Gym):$
$\frac{dN}{dt} := N \cdot (0.48 - 0.016 \cdot N):$

a) Bestem væksthastigheden for en labrador, der vejer 6 kg.

Vi indsætter 6, som N i differentioalligningen, da dette vil give os væksthastigheden.
$N := 6 = 6$
$N \cdot (0.48 - 0.016 \cdot N) = 2.304$
Væksthastigheden på en labrador der vejer 6kg er dermed 2.304.

Funktionen N med forskriften $N(t) = \dfrac{30}{1+59 \cdot e^{-0,48t}}$ er en løsning til differentialligningen, og beskriver vægten af en bestemt labrador.

b) Hvor gammel er labradoren, når den vejer 25 kg ifølge modellen?

Ved at sætte den løste differentialligning lig 25, kan vi isolere for t og finde ud af hvor mange måneder en labrador på 25kg er.

$N(t) := \dfrac{30}{1 + 59 \cdot e^{-0.48 \cdot t}} = t \rightarrow \dfrac{30}{1 + 59\, e^{-0.48\, t}}$

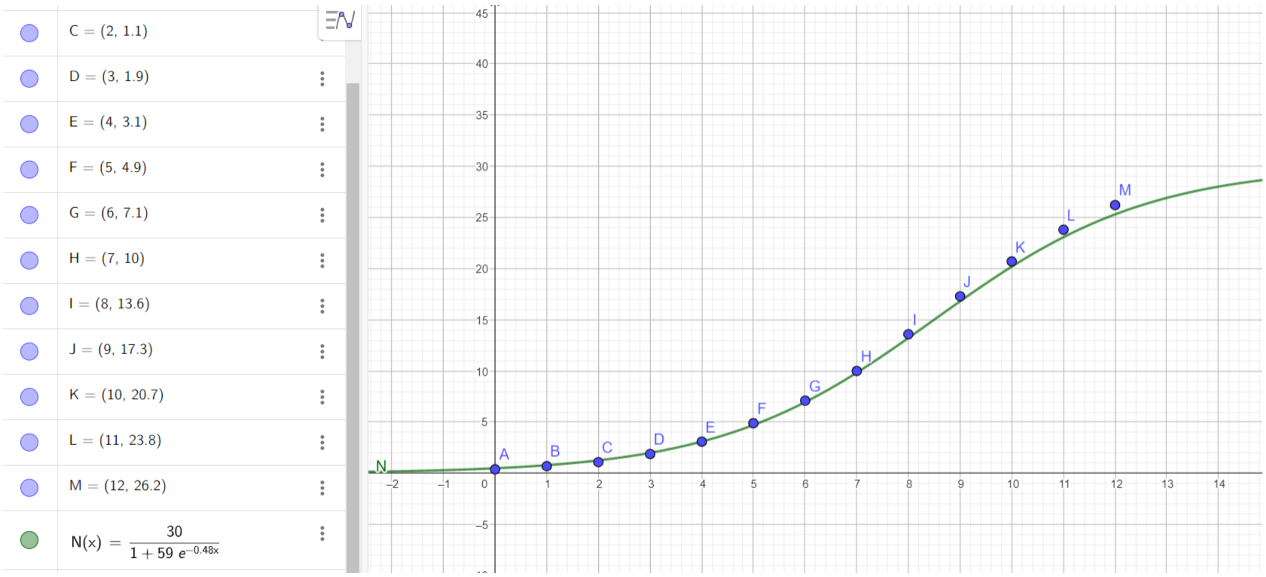
$N(t) = 25 = \dfrac{30}{1 + 59\, e^{-0.48\, t}} = 25 \xrightarrow{\text{solve 30/(1+59*exp(-.48*t)) = 25}} [[t = 11.84786533]]$

$\dfrac{11.84786533}{12} \cdot 365 = 360.3725704$

Vi ved så at en labrador der vejer 25kg, vil være 11 måneder gammel eller 360 dage gammel (og dermed snart have fødselsdag).

Under hundens opvækst registreres sammenhørende værdier af tid og vægt. I filen *Labrador* findes et datasæt som viser resultatet af disse målinger.

c) Tegn grafen for N sammen med datasættet og kommentér.



Grafen N og punkterne for vægten af en labrador igennem alderen fra 0-12 måneder passer relativt meget godt, dog så kan der ses at der er større afvigelse fra funktionen og dataen jo ældre labradoren bliver.

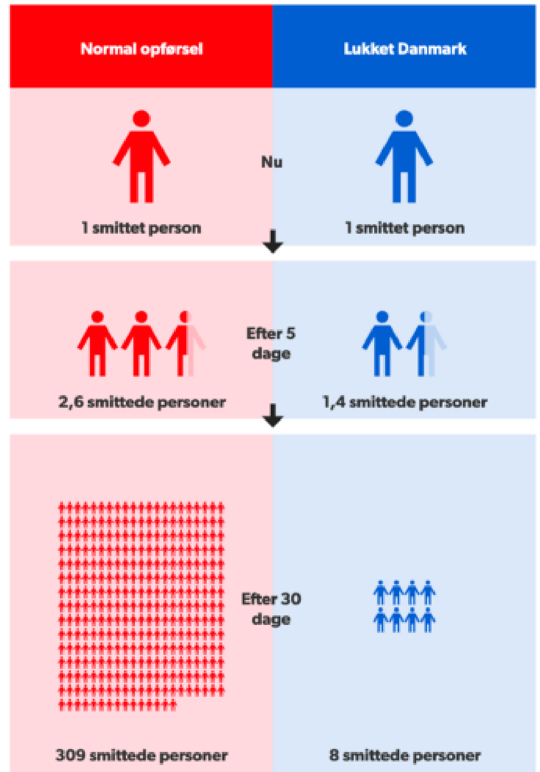
Opgave 9

I forbindelse med Coronapandemien i 2020 blev der lavet forskellige scenarier for, hvordan antallet af smittede kunne udvikle sig under forskellige forhold. Billedet viser et scenarie for udviklingen af antal smittede ved normal opførsel og ved et lukket Danmark.

Ved normal opførsel kan udviklingen beskrives som en talfølge, der er løsning til rekursionsligningen

$$y_{n+1} = 2{,}6 \cdot y_n \quad \text{med } y_0 = 1$$

hvor n angiver tiden målt i perioder af 5 dage.



Kilde: dr.dk

restart :
with(*Gym*) :

a) Undersøg påstanden om at der efter 30 dage med normal opførsel vil være 309 smittede personer fra 1 smittet person.

Dette kan vi gøre ved at sætte n=0 og udregne fremad indtil at n=6 eller hvis antallet syge overstiger 309.

$y_0 := 1$:

$n := 0$:

$y_1 := 2.6 \cdot y_0 = 2.6$

$y_2 := 2.6 \cdot y_1 = 6.76$

$y_3 := 2.6 \cdot y_2 = 17.576$

$y_4 := 2.6 \cdot y_3 = 45.6976$

$y_5 := 2.6 \cdot y_4 = 118.81376$

$y_6 := 2.6 \cdot y_5 = 308.915776$

$y_6 = 308.915776$ smittet efter $6 \cdot 5 = 30$ dage

Der kan tilnærmelsesvis estimeres at efter 30 dage, så vil der være 309 mennesker syge, dermed er påstanden rigtig.

b) Opstil den tilsvarende rekursionsligning for et lukket Danmark og bestem hvor mange smittede personer 1 smittet person kan føre til efter 30 dage og efter 60 dage.

$\boldsymbol{y_{n+1} = 1.4 \cdot y_n}$

$y_0 = 1$

$y_1 := 1.4 \cdot y_0 = 1.4$

$y_2 := 1.4 \cdot y_1 = 1.96$

$y_3 := 1.4 \cdot y_2 = 2.744$

$y_4 := 1.4 \cdot y_3 = 3.8416$

$y_5 := 1.4 \cdot y_4 = 5.37824$

$y_6 := 1.4 \cdot y_5 = 7.529536$

$\boldsymbol{y_6} = 7.529536$ **smittet efter** $\boldsymbol{6 \cdot 5} = 30$ **dage**

$y_7 := 1.4 \cdot y_6 = 10.5413504$

$y_8 := 1.4 \cdot y_7 = 14.75789056$

$y_9 := 1.4 \cdot y_8 = 20.66104678$

$y_{10} := 1.4 \cdot y_9 = 28.92546549$

$y_{11} := 1.4 \cdot y_{10} = 40.49565169$

$y_{12} := 1.4 \cdot y_{11} = 56.69391237$

$\boldsymbol{y_{12}} = 56.69391237$ **smittet efter** $\boldsymbol{12 \cdot 5} = 60$ **dage**

restart :