

**„Weryfikacja prawa jednej ceny na podstawie
logarytmicznych szeregów czasowych i
logarytmicznych stóp zwrotu cen kontraktu
terminowego oraz ceny natychmiastowej platyny za
pomocą odpowiednich modeli i procedur
ekonometrycznych”**



Kasper Kurzyński

252932

S52-11

1. Wstęp

Prawo jednej ceny (ang. *Law of One Price*) jest pojęciem i teorią wywodzącą się z ekonomii, mówiącą o tym, że cena identycznego aktywu lub towaru powinna posiadać taką samą cenę na całym świecie, bez względu na lokalizację rynku, na którym dane dobro się znajduje¹. Koncepcja ta uwzględnia rynek, na którym nie występują określone zakłócenia. Przykładowymi zakłóceniami, które mogą wpływać na działanie prawa jednej ceny są: koszty transportu (związane z przemieszczeniem towaru z rynku na rynek), koszty transakcyjne, restrykcje prawne lub sama struktura rynku (jego koncentracja lub efekty skali). Istnienie tego prawa podyktowane jest również faktem, iż różnice między cenami aktywów lub towarów w różnych lokalizacjach mogłyby zostać ostatecznie wyeliminowane dzięki zastosowaniu arbitrażu². W literaturze można znaleźć wiele przykładów działania prawa jednej ceny. Wśród nich, prawo jednej ceny można zaobserwować przykładowo jako: zależność pomiędzy ceną natychmiastową, a ceną terminową, cenami na rynkach geograficznie oddalonych, hipoteza oczekiwania struktury terminowej stóp procentowych, parytet stóp procentowych lub parytet siły nabywczej. Do weryfikacji prawa jednej ceny często stosuje się zmienną „spread”, która jest różnicą pomiędzy cenami towaru z jednego rynku lub kontraktu o określonej zapadalności, a cenami tego samego towaru na innym rynku lub kontraktu o innej zapadalności. Do zbadania kointegrujących³ własności spreadu wykorzystuje się między innymi testy pierwiastka jednostkowego i stacjonarności oraz procedurę Johansena i Engle’a – Grangera⁴.

Praca poświęcona jest weryfikacji prawa jednej ceny w oparciu o szeregi czasowe cen kontaktu terminowego oraz ceny natychmiastowej platyny na giełdzie NYMEX. NYMEX (New York Mercantile Exchange) jest nowojorską giełdą zarządzaną przez CME Group of Chicago. Na giełdzie dokonuje się transakcji między innymi węglem, uranem, benzyną, palladem oraz platyną. Wielkość umowy na platynę obejmuje 50 uncji trojańskich (1 uncja trojańska = 31,1035 gramów). Wykorzystane w pracy szeregi obejmują cenę natychmiastową platyny oraz kontrakt terminowy o zapadalności 3 miesięcznej. Cena platyny na giełdzie NYMEX wyrażona jest w dolarach amerykańskich na uncję trojańską. Handel badanymi instrumentami polega na dostarczeniu towaru do strony kupującej, natomiast każdy handel kończy się zawsze trzeciego dnia roboczego miesiąca kontraktu.

Czynności służące do weryfikacji prawa jednej ceny zostaną krok po kroku przedstawione w dalszej części projektu. Do tego zabiegu zostanie wykorzystana między innymi procedura Johansena oraz wektorowy model korekty błędem (VECM). Procedura Johansena pozwoli na wyznaczenie liczby wektorów kointegrujących za pomocą dwóch statystyk: statystyki śladu macierzy oraz statystyki maksymalnej wartości

¹ Potters Ch., *Law of One Price*, September 29, 2020, <https://www.investopedia.com/terms/l/law-one-price.asp>

² Garlak Ł., Seremet K., *Teoria arbitrażu cenowego*, https://mfiles.pl/pl/index.php/Teoria_arbitra%C5%BCu_cenowego

³ **Kointegracja** - własność szeregów czasowych wykorzystywana w ekonometrii, która ma miejsce wówczas, jeżeli dwa szeregi czasowe nie są stacjonarne, ale ich kombinacja liniowa jest stacjonarna.

⁴ Chylińska M. (2013), *Uwagi o działaniu prawa jednej ceny na londyńskiej giełdzie metali*, s. 130 – 133.

własnej macierzy. Model VECM z kolei pozwoli na uzupełnienie modelu VAR o składnik korekty błędem, który opisuje relację długookresową (równowagę) pomiędzy zmiennymi niestacjonarnymi.

2. Opis danych.

Dane zostały pobrane ze strony stooq.pl. Wybrane do projektu szeregi składają się z obserwacji od 1 stycznia 2015 roku do 29 grudnia 2021 roku. Do wykonania potrzebnych analiz zostały wygenerowane na podstawie oryginalnych danych logarytmiczne szeregi czasowe o częstotliwości dziennej, tygodniowej i miesięcznej. Następnie, wykorzystując równanie $r_t = \ln(p_t + d_t) - \ln(p_{t-1})$ szeregi zostały przekształcone tak, aby otrzymać z nich logarytmiczne stopy zwrotu. Dodatkowo, aby zweryfikować działanie prawa jednej ceny utworzono zmienną „**spread**”, która jest różnicą pomiędzy wartościami \ln_platf , a \ln_platc . Ostatecznie, w dalszej części projektu znalazło się 15 szeregów czasowych utworzonych na podstawie dwóch instrumentów finansowych. W celu poprawienia czytelności projektu, każdej z częstotliwości danych został przypisany jeden kolor. Poniższa legenda wskazuje na kolor przypisany danej częstotliwości. Na potrzeby niniejszej pracy została również stworzona zmienną „**covid**”, przyjmująca wartość „1” dla miesięcy, w których gospodarka najbardziej ucierpiała z powodu pandemii i wartość „0” dla pozostałych miesięcy.

Częstotliwość dzienna
Częstotliwość tygodniowa
Częstotliwość miesięczna

Oznaczenie zmiennych:

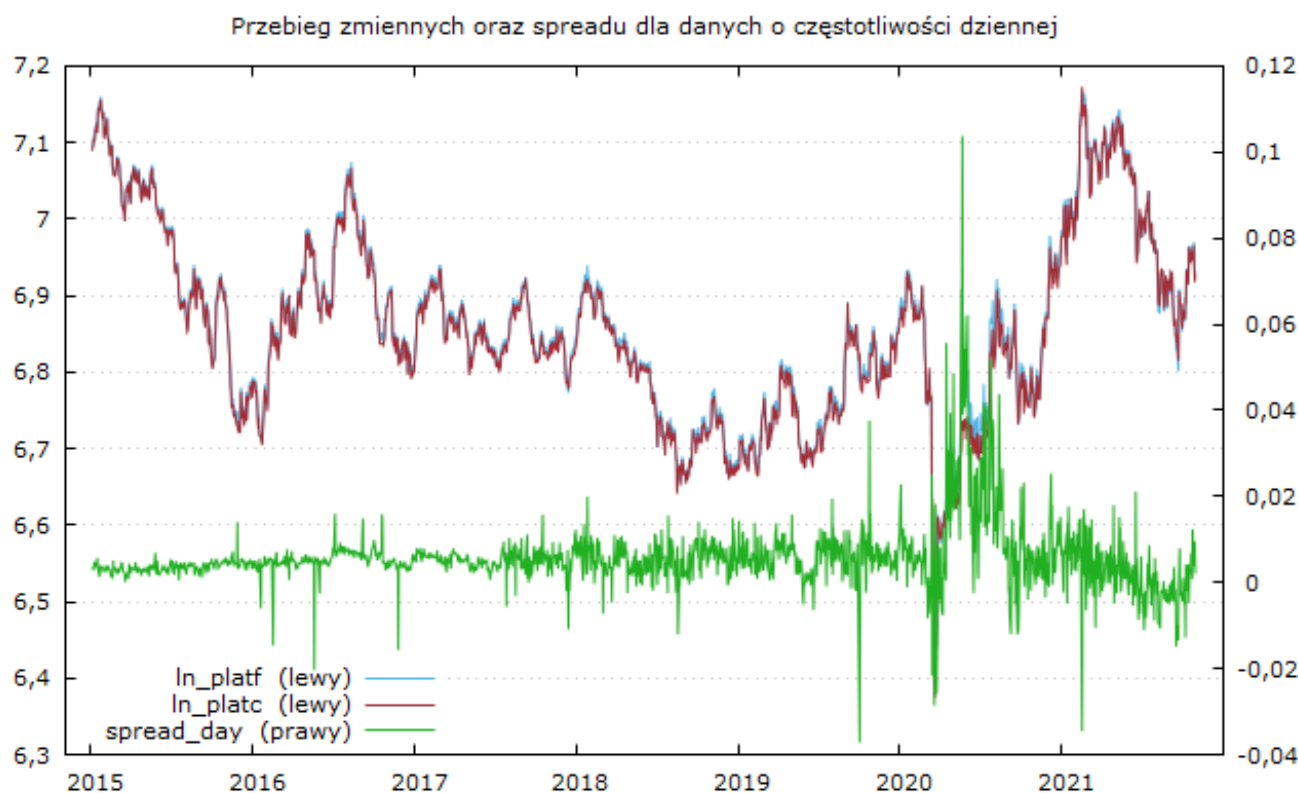
- \ln_platf - zlogarytmowana cena kontraktu terminowego platyny
- \ln_platc - zlogarytmowana cena natychmiastowa platyny
- $d_ln_platf / \Delta \ln pl.f$ - logarytmiczna stopa zwrotu cen kontraktu terminowego platyny
- $d_ln_platc / \Delta \ln pl.c$ - logarytmiczna stopa zwrotu ceny natychmiastowej platyny
- $spread$ – różnica pomiędzy \ln_platf , a \ln_platc
- $covid$ – zmienna przyjmująca wartość „1” dla okresu 03:2020 – 11:2020 oraz „0” w pozostałych miesiącach

Tabela 1. Dane o częstotliwości dziennej.

Data	ln_platf	ln_platc	$\Delta \ln_platf$	$\Delta \ln_platc$
2015-01-02	7,093	7,089		
2015-01-05	7,101	7,098	0,008	0,008
2015-01-06	7,108	7,105	0,008	0,007
2015-01-07	7,107	7,102	-0,002	-0,003
2015-01-08	7,107	7,102	0,000	0,001
2015-01-09	7,118	7,113	0,011	0,011
...
2021-10-21	6,956	6,955	-0,002	0,000
2021-10-22	6,959	6,946	0,002	-0,009
2021-10-25	6,970	6,965	0,011	0,019
2021-10-26	6,940	6,936	-0,029	-0,029
2021-10-27	6,927	6,917	-0,013	-0,019
2021-10-28	6,931	6,927	0,005	0,010
2021-10-29	6,928	6,926	-0,003	-0,001

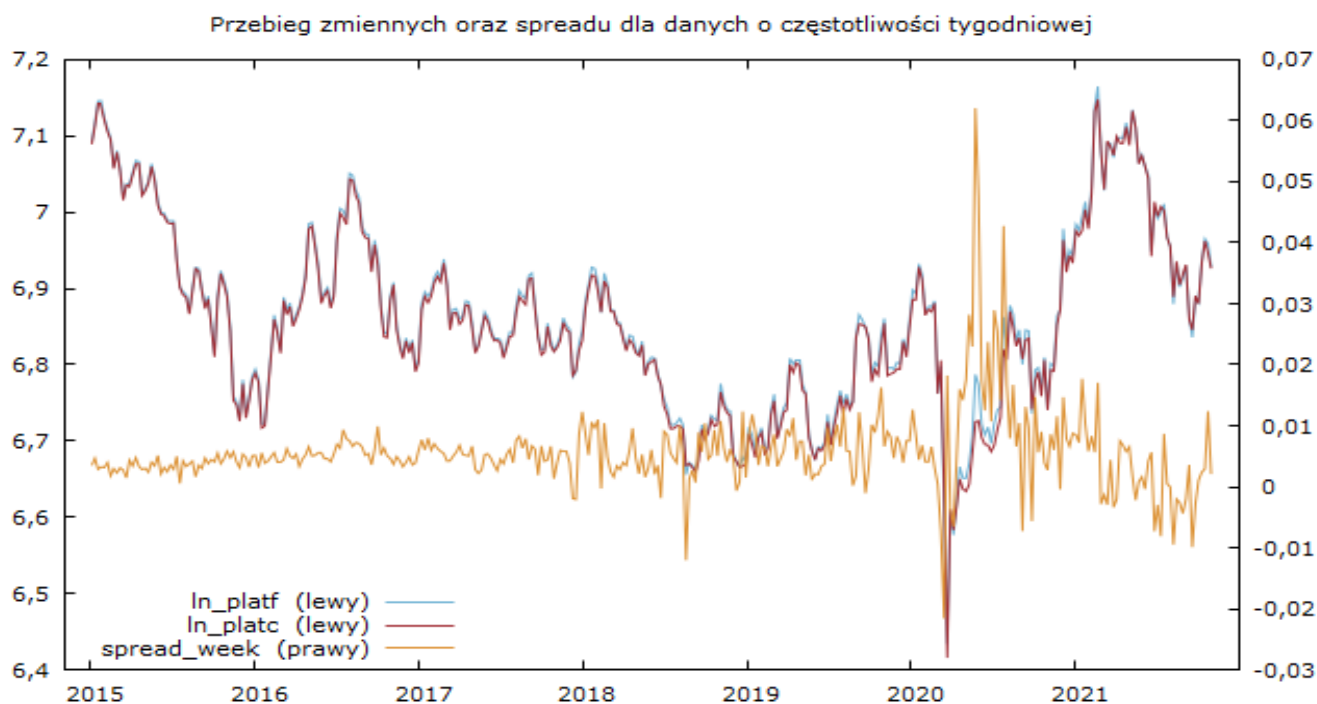
Dane o częstotliwości dziennej zlogarytmowanych szeregów czasowych oraz logarymicznych stóp zwrotu zostały przekształcone z oryginalnych danych za pomocą logarytmu naturalnego. Liczba obserwacji danych o tej częstotliwości wyniosła 1761. Logarymiczne stopy zwrotu natomiast pomniejszone są o jedną obserwację (początkową) i ich liczebność jest równa 1760. Dane dla pozostałych częstotliwości zostały przedstawione w pierwszej części projektu.

3. Przedstawienie za pomocą wykresów i weryfikacja hipotez o stacjonarności i niestacjonarności badanych szeregów czasowych.

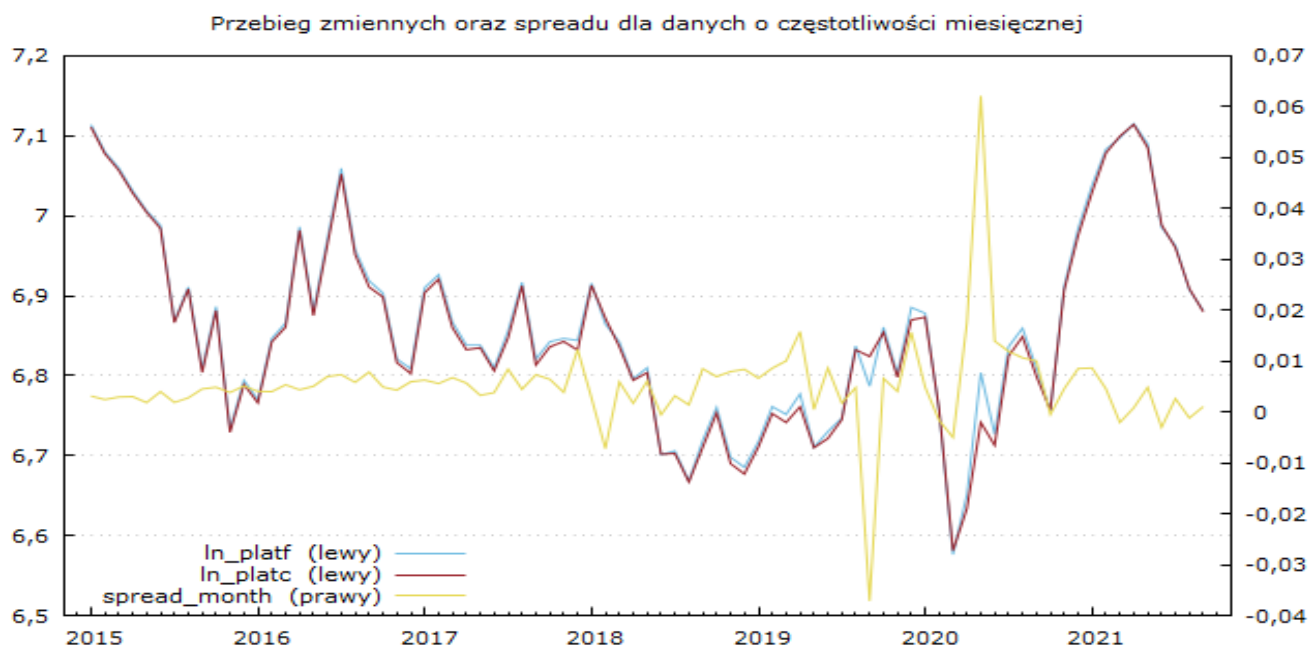


Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Wykres na stronie 3. przedstawia kształtowanie się logarymicznych szeregów czasowych badanych instrumentów oraz ich spreadu. Szereg czasowy ceny kontraktu terminowego platyny oraz jej ceny natychmiastowej rzadko przechodzi przez swoją średnią. Taka sytuacja może wskazywać na niestacjonarność tych szeregów. Z kolei ich spread pozbawiony jest trendów i często przechodzi przez swoją średnią. Anomalia występuje jednak w połowie roku 2020 i widać wyraźnie pewne załamanie na rynku, które może być związane z czynnikami zewnętrznymi.

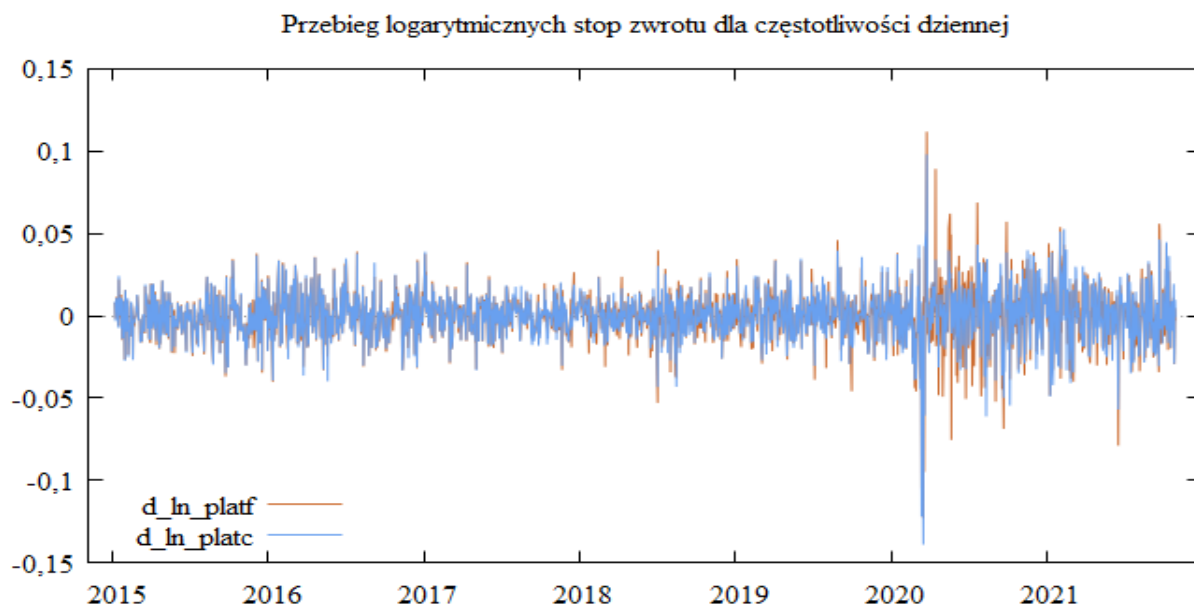


Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

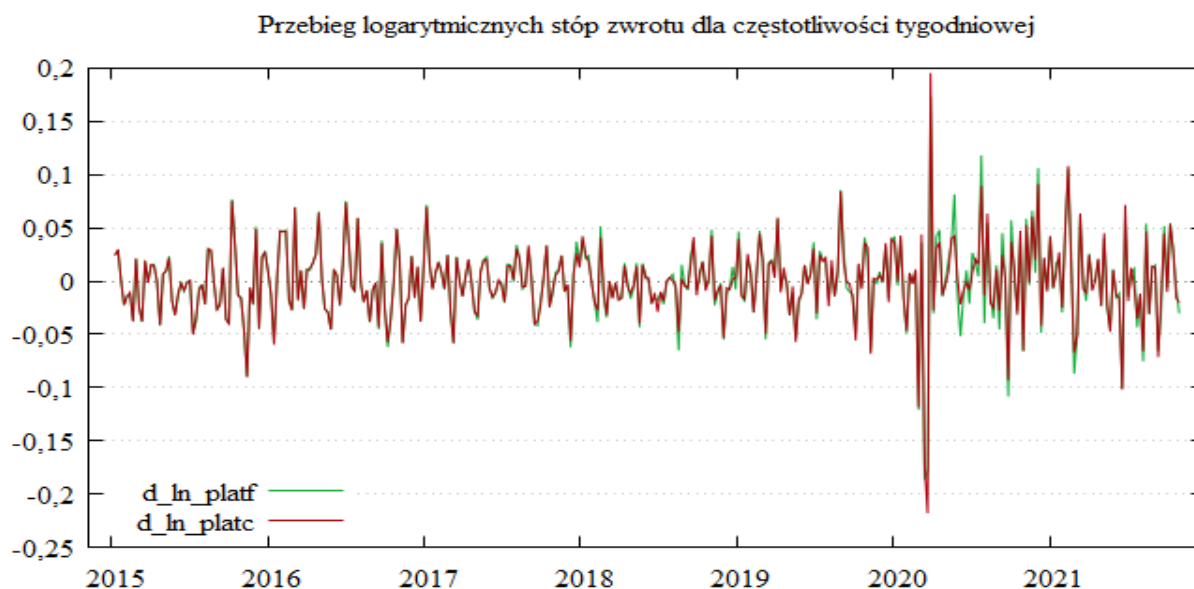


Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Dane o częstotliwości tygodniowej oraz miesięcznej prezentują zbliżone zachowanie w kontekście przebiegu szeregów czasowych jak dane o częstotliwości dziennej. Na powyższych wykresach można zauważyć, że średnia logarytmicznych szeregów czasowych badanych instrumentów nie jest stała w czasie, ponieważ w zależności od okresu, zwiększa się lub zmniejsza. Przykładowo do roku 2016 następował spadek cen na giełdzie, natomiast po 2016 roku sytuacja się odwróciła i wartości zanotowały wzrost. Może to być podstawą do stwierdzenia, iż te szeregi są niestacjonarne. W przypadku spreadu, na powyższych wykresach kształtuje się on w podobny sposób. Często przechodzi przez swoją średnią co może wskazywać na stacjonarność.

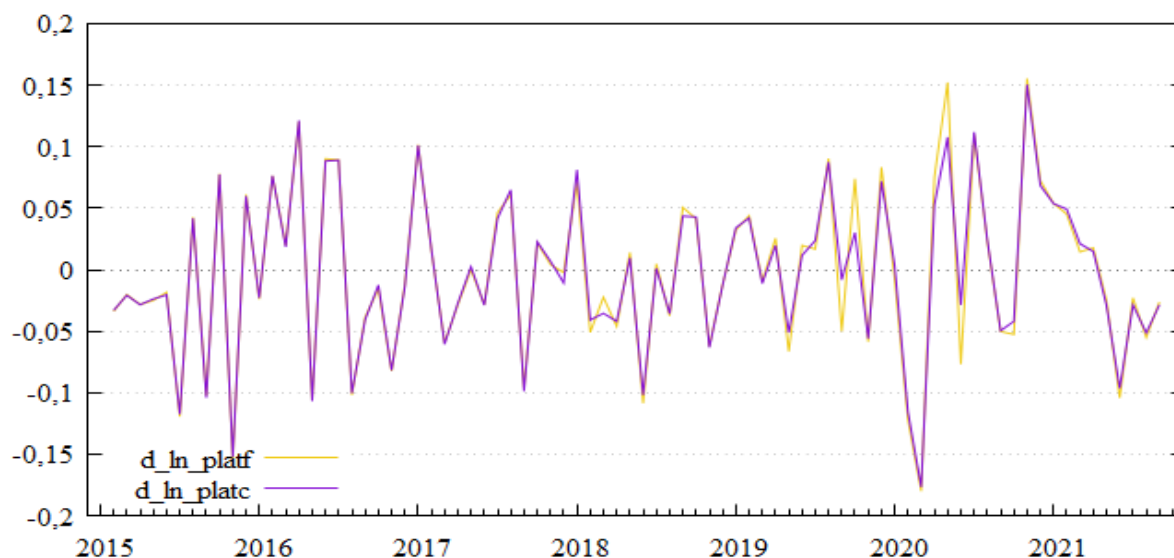


Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.



Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Przebieg logarytmicznych stóp zwrotu dla częstotliwości miesięcznej



Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Przebieg i kształtowanie się szeregów czasowych logarytmicznych stóp zwrotu cen kontraktu terminowego platyny oraz logarytmicznych stóp zwrotu ceny natychmiastowej platyny jest podobny dla danych o częstotliwości dziennej, tygodniowej oraz miesięcznej. Przez większość badanego okresu szeregi nachodzą na siebie oraz przebiegają przez swoje średnie. Brak jest widocznych trendów, natomiast widoczna jest stałość wariancji tych danych. Również dla każdej częstotliwości można zauważyć wystąpienie pewnej anomalii w okolicy roku 2020. Tak duże wahania cen mogą być następstwem nasilenia się pandemii na świecie.

Tabela 2. Wyniki testu ADF dla logarytmicznych szeregów cen kontraktu terminowego, ceny natychmiastowej oraz logarytmicznej stopy zwrotu badanych instrumentów

Zmienna	ADF $\alpha = 5\%$								
	c = t = 0	p-value:	op.	c \neq 0, t = 0	p-value:	op.	c \neq 0, t \neq 0	p-value:	op.
lpl.f	-0,3978	0,5408	18	-3,17824	0,02131	18	-3,057450	0,11670	18
lpl.c	-0,354407	0,5575	6	-3,07562	0,02844	6	-2,955600	0,14500	6
Δ lpl.f	-10,6362	0,0000	17	-10,639	0,00000	17	-10,6846	0,00000	17
Δ lpl.c	-18,2671	0,0000	5	-18,2648	0,00000	5	-18,2886	0,00000	5
spread	-2,8167	0,0047	23	-4,1103	0,00093	23	-4,1383	0,00546	23
lpl.f	-0,392363	0,5429	4	-3,23950	0,01859	4	-3,1511	0,09625	4
lpl.c	-0,396678	0,5413	4	-3,14766	0,02409	4	-3,0509	0,12000	4
Δ lpl.f	-10,7036	0,0000	3	-10,6955	0,00000	3	-10,7441	0,00000	3
Δ lpl.c	-10,5943	0,0000	3	-10,5866	0,00000	3	-10,6403	0,00000	3
spread	-3,6169	0,0003	2	-5,3562	0,00000	2	-5,3947	0,00000	2
lpl.f	-0,428072	0,5256	0	-3,19763	0,02375	0	-3,09136	0,11550	0
lpl.c	-0,44361	0,5195	0	-3,04454	0,03507	0	-2,92723	0,15970	0
Δ lpl.f	-10,3108	0,0000	0	-10,2607	0,00000	0	-10,275	0,00000	0
Δ lpl.c	-9,7155	0,0000	0	-9,6686	0,00000	0	-4,07576	0,00677	0
spread	-2,48298	0,01262	3	-7,13154	0,00000	0	-4,15849	0,005095	0

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

W tabeli 2. zawarte są wyniki dla zlogarytmowanych szeregów czasowych, logarytmicznych stóp zwrotu i spreadu o częstotliwości dziennej, tygodniowej i miesięcznej. W pierwszej kolumnie znajduje się zmienna, dla której zostały obliczone odpowiednie wartości. Testowanymi wariantami testu ADF był test bez wyrazu wolnego ($c = t = 0$), test z wyrazem wolnym $c \neq 0, t = 0$ oraz test z wyrazem wolnym i trendem liniowym ($c \neq 0, t \neq 0$). Zgodnie z powszechnie obowiązującą zasadą, jeśli poziom p-value jest niższy od zakładanego poziomu istotności (w tym wypadku 5%), to należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Wartości jakie przyjęło p-value dla wszystkich zmiennych potwierdza wcześniejsze wnioski wyciągnięte na podstawie analizy wykresów szeregów czasowych. Zlogarytmowane szeregi czasowe dla danych o każdej częstotliwości posiadają dla wariantów testu bez wyrazu wolnego i z wyrazem wolnym i trendem liniowym p-value wyższe niż przyjęty 5% poziom istotności. Oznacza to, że szeregi te są niestacjonarne wskutek występowania pierwiastka jednostkowego. Wyjątek stanowi wariant z wyrazem wolnym. P-value w tym wypadku okazało się niższe niż ustalona wartość alpha. Jednakże, gdyby za poziom istotności przyjąć 1%, to w tym wariancie testu szeregi również okazałyby się niestacjonarne. Dla logarytmicznych stóp zwrotu sytuacja ukształtowała się jednoznacznie. Dla każdego z wariantu testu ADF p-value osiągnęło bardzo niską wartość, więc została ona zaokrąglona do zera. Oznacza to, że logarytmiczne stopy zwrotu zarówno ceny natychmiastowej jak i ceny kontraktu terminowego dla danych o każdej z badanej częstotliwości są stacjonarne, ponieważ nie występuje pierwiastek jednostkowy. W przypadku spreadu również sytuacja kształtuje się w podobny sposób jak w przypadku logarytmicznych stóp zwrotu. Zgodnie z testem ADF, spread dla danych o każdej częstotliwości okazał się stacjonarny. W celu potwierdzenia tego założenia należy również przeprowadzić test KPSS.

Tabela 3. Wyniki testu KPSS dla logarytmicznych szeregów cen kontaktu terminowego, ceny natychmiastowej oraz logarytmicznej stopy zwrotu badanych instrumentów

Zmienna	KPSS $\alpha = 5\%$			
	Stała, wart. kryt: 0,462	op.	Trend wart. kryt.: 0,148	op.
lpl.f	2,79291 > 0,462	8	2,1465 > 0,148	8
lpl.c	2,84317 > 0,462	8	2,15199 > 0,148	8
Δ lpl.f	0,080763 < 0,462	8	0,0200189 < 0,148	8
Δ lpl.c	0,089324 < 0,462	8	0,0215655 < 0,148	8
spread	0,972366 > 0,462	8	0,408577 > 0,148	8
lpl.f	0,930165 > 0,462	5	0,701701 > 0,148	5
lpl.c	0,940967 > 0,462	5	0,700671 > 0,148	5
Δ lpl.f	0,0955918 < 0,462	5	0,0237124 < 0,148	5
Δ lpl.c	0,102999 < 0,462	5	0,0249326 < 0,148	5
spread	0,343675 < 0,462	5	0,149 > 0,148 (p-value = 0,050)	5
lpl.f	0,345067 < 0,462	3	0,280076 > 0,148	3
lpl.c	0,342073 < 0,462	3	0,274827 > 0,148	3
Δ lpl.f	0,123928 < 0,462	3	0,0397588 < 0,148	3
Δ lpl.c	0,126179 < 0,462	3	0,039344 < 0,148	3
spread	0,0800854 < 0,462	3	0,0460575 < 0,148	3

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Tabela 3. zawiera wyniki testu KPSS dla logarytmicznych szeregów czasowych, logarytmicznych stóp zwrotu oraz spreadu dla zmiennych o częstotliwości dziennej, tygodniowej i miesięcznej. Podobnie jak w przypadku testu ADF, dla testu KPSS przyjęty poziom istotności wynosi α wynosi 5%. Wartość krytyczna dla przyjętego poziomu istotności wynosi odpowiednio: 0,462 dla wariantu testu wokół średniej i 0,148 dla wariantu testu wokół trendu. Reguła decyzyjna polega na obliczeniu statystyki testowej, a następnie porównaniu jej wartości z wartością krytyczną. Jeżeli wartość statystyki testowej jest większa od wartości krytycznej, to należy odrzucić hipotezę zerową o stacjonarności szeregu na korzyść hipotezy alternatywnej. W przypadku gdy wartość statystyki jest niższa niż wartość krytyczna, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej i szereg jest stacjonarny. Na tej podstawie można stwierdzić, że logarytmiczne szeregi czasowe badanych instrumentów o każdej częstotliwości okazały się niestacjonarne. Z kolei logarytmiczne stopy zwrotu są stacjonarne, niezależnie od częstotliwości. Ciekawa sytuacja występuje w przypadku spreadu. Mimo, że test ADF wykazał, że spread jest stacjonarny, to przy teście KPSS wnioski są już inne. Spread dla danych o częstotliwości dziennej okazał się szeregiem czasowym niestacjonarnym. Stacjonarne natomiast okazały się spready dla danych o częstotliwości tygodniowej i miesięcznej. Statystyka testowa dla wariantu wokół trendu dla danych o częstotliwości tygodniowej jest minimalnie wyższa od wartości krytycznej, a wartość p-value jest zbliżona do 0,05. Z tego powodu do dalszej części pracy, która dotyczyć będzie weryfikacji prawa jednej ceny zostaną wykorzystane dane o częstotliwości miesięcznej, ponieważ spread dla tych danych okazał się stacjonarny na podstawie obydwu testów. Oznacza to tym samym, że stacjonarny spread, dla danych o zapadalności miesięcznej ma własności kointegrujące. Tym samym, ceny są skointegrowane co oznacza, że znajdują się w relacji równowagi długookresowej. Jest to konieczny warunek do zweryfikowania prawa jednej ceny i ten proces będzie przedmiotem dalszych etapów projektu.

4. Weryfikacja prawa jednej ceny oraz szacowanie wektorowego modelu korekty błędem za pomocą procedury Johansena.

4.1. Ustalenie rzędu opóźnienia p w modelu VAR.

Pierwszym krokiem w procedurze Johansena jest ustalenie stopnia integracji zmiennych za pomocą testów ADF i KPSS. Krok ten został wykonany powyżej i zostało wykazane, że zmienne są zintegrowane w stopniu pierwszym, ponieważ logarytmiczne stopy zwrotów badanych instrumentów okazały się szeregami stacjonarnymi. Kolejnym etapem rozważanego problemu jest ustalenie odpowiedniego rzędu opóźnienia p w modelu VAR. W tym celu zostanie wykorzystany ponownie program Gretl.

Tabela 4. System VAR, maksymalny rząd opóźnienia 12.

opóźnienia	loglik	p(LR)	AIC	BIC	HQC
1	325,08453		9,248827*	9,054557*	9,171754*
2	326,47757	0,59424	-9,173263	-8,849479	-9,044807
3	327,63726	0,67724	-9,090935	-8,637638	-8,911097
4	329,66113	0,39958	-9,033656	-8,450846	-8,802436
5	330,73457	0,70877	-8,948828	-8,236504	-8,666225
6	339,32981	0,00177	-9,082023	-8,240186	-8,748038
7	342,38498	0,19106	-9,054637	-8,083286	-8,66927
8	345,67225	0,16015	-9,033978	-7,933114	-8,597229
9	349,68555	0,09061	-9,034364	-7,803986	-8,546232
10	352,91768	0,16706	-9,012107	-7,652216	-8,472593
11	355,68629	0,23648	-8,976414	-7,48701	-8,385518
12	357,04087	0,60761	-8,899735	-7,280818	-8,257457

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Tabela 5. System VAR, maksymalny rząd opóźnienia 6.

opóźnienia	loglik	p(LR)	AIC	BIC	HQC
1	352,57025		9,241873*	9,056474*	9,167846*
2	353,46584	0,7741	-9,159089	-8,850091	-9,035709
3	354,79698	0,61583	-9,087919	-8,655322	-8,915188
4	356,44782	0,50866	-9,025275	-8,469078	-8,803192
5	358,44831	0,40587	-8,971955	-8,292158	-8,70052
6	365,71809	0,00576	-9,059149	-8,255753	-8,738362

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Maksymalny rząd opóźnienia, został na początku ustalony na 12, a następnie zmniejszony do 6. Na podstawie powyższych wyników, kierując się wartością kryterium Akaike rząd opóźnienia został ustalony jako $p = 1$.

Relacja kointegrująca ma postać:

$$\ln Plat_{F_t} = \varphi_0 + \varphi_1 \ln Plat_{C_t} + e_t$$

Kolejnym etapem jest ustalenie liczby wektorów kointegrujących w teście maksymalnej wartości własnej oraz w teście śladu macierzy. Do ustalenia równowagi relacji długookresowej zgodnie z modelem premii za ryzyko oraz zweryfikowania działania prawa jednej ceny, należy wybrać postać wektora z ograniczoną stałą i bez trendu w teście kointegracji Johansena. Dodatkowo, należy do zmiennych egzogenicznych włączyć wspomnianą wcześniej zmienną „**covid**”, przyjmującą wartość „1” dla miesięcy, w których gospodarka najbardziej odczuła skutki pandemii koronawirusa.

4.2. Ustalenie liczby wektorów kointegrujących – test maksymalnej wartości własnej i test śladu macierzy.

Test Johansena:

Liczba równań = 2

Rząd opóźnienia: = 1

Estymowany okres: 2015:02 – 2021:09 (T = 80)

Przypadek 2: **Ograniczony wyraz wolny (const)**

Zmienne egzogeniczne: **covid**

Logarytm wiarygodności = 610,084 (włączony wyraz wolny: 383,053)

Tabela 4. Wyniki testu maksymalnej wartości własnej oraz testu śladu macierzy dla rzędu opóźnienia $p = 1$, wybranego za pomocą programu Gretl.

Test maksymalnej wartości własnej				Test śladu macierzy			
Hipoteza				Hipoteza			
H0	H1	Stat. Testowa	p-value	H0	H1	Stat. Testowa	p-value
$r = 0$	$r = 1$	52,763	0,0000	$r = 0$	$r \geq 1$	61,025	0,0000
$r \leq 1$	$r = 2$	8,2622	0,0745	$r \leq 1$	$r \geq 2$	8,2622	0,0746

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

W teście maksymalnej wartości własnej na 5% poziomie istotności należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej, zgodnie z którą należy uznać, że występuje 1 wektor kointegrujący. Nie ma z kolei podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, która mówi o tym, że jest jeden lub mniej wektorów kointegrujących. Na podstawie wyników testu śladu macierzy należy na poziomie istotności 5% odrzucić hipotezę zerową na korzyść alternatywnej, która również potwierdza występowanie 1 wektora kointegrującego. Nie ma natomiast podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o tym, że jest 1 lub mniej wektorów kointegrujących. Dla podsumowania należy stwierdzić, że występuje 1 wektor kointegrujący oraz ceny kontraktu terminowego i ceny natychmiastowej platyny znajdują się w relacji równowagi długookresowej. Następnym krokiem, który należy wykonać jest ustalenie postaci relacji kointegrującej i w do tego celu należy nałożyć odpowiednie restrykcje na parametry relacji długookresowej.

4.3. Wyznaczenie postaci relacji kointegrującej poprzez nałożenie restrykcji na parametry relacji długookresowej.

Restrykcje zostały nałożone na parametry:

- $b[1] = 1$
- $b[2] = -1$

Wektory kointegrujące prezentują się w następujący sposób:

- $\ln_plاتف$ 1,0000 (0,00000)
- \ln_plac -1,0000 (0,0000)
- $const$ -0,0043875 (0,0010898)

Wartość statystyki testowej wyniosła **1,97841**, natomiast wartość p-value **0,159558**. Takie wyniki oznaczają brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Oznacza to, że nie można odrzucić restrykcji nałożonych na wektor kointegrujący i tym samym należy stwierdzić, że prawo jednej ceny zostało zweryfikowane pomyślnie i w przypadku badanych szeregów czasowych prawo to zachodzi. Tym samym potwierdziły się wcześniejsze wnioski na temat właściwości kointegrujących spreadu, który okazał się szeregiem stacjonarnym.

4.4. Szacowanie wektorowego modelu korekty błędem (VECM).

Tabela 5. Oszacowane parametry modelu VECM dla pierwszego równania dotyczącego zmiennej $d_ln_plاتف$.

Zmienna	Współczynnik	Błąd	Stat. t-studenta	p-value
covid	0,0276815	0,023798	1,163	0,2483
EC1	-1,46238	0,893234	-1,637	0,1057

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Powyższa tabela zawiera wyniki oszacowania modelu VECM dla pierwszego równania. W pierwszym równaniu została uwzględniona zmienna „ $d_ln_plاتف$ ”, która oznacza logarytmiczną stopę zwrotu cen kontraktu terminowego platyny. Zgodnie z powyższymi wynikami, p-value dla parametru **EC1**, które oznacza odchylenie od relacji równowagi okresowej wynosi **0,1057**. Oznacza to, że ta zmienna jest nieistotna statystycznie.

Tabela 6. Oszacowane parametry modelu VECM dla pierwszego równania dotyczącego zmiennej d_ln_platc .

Zmienna	Współczynnik	Błąd	Stat. t-studenta	p-value
covid	0,0205534	0,022872	0,8986	0,3716
EC1	-0,558128	0,858476	-0,6501	0,5175

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Druga tabela zawiera wyniki oszacowania modelu VECM dla drugiego równania. W drugim równaniu została uwzględniona zmienna „ d_ln_platc ”, która oznacza logarytmiczną stopę zwrotu ceny natychmiastowej platyny. Zgodnie z powyższymi wynikami, p-value dla parametru **EC1**, które oznacza odchylenie od relacji równowagi okresowej wynosi **0,5175**. Oznacza to, że ta zmienna również jest nieistotna statystycznie.

Do dalszej weryfikacji modelu został przeprowadzony również test efektu ARCH (Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity), który polega na sprawdzeniu czy w opóźnieniach modelu występuje efekt ARCH.

Tabela 7. Test efektu ARCH dla opóźnienia rzędu 12.

Opóźnienie	LM	df	p-value
1	1,766	9	0,9947
2	31,315	18	0,0265
3	34,623	27	0,1487
4	46,017	36	0,1224
5	53,162	45	0,1887
6	97,811	54	0,0002
7	103,655	63	0,001
8	122,78	72	0,0002
9	126,065	81	0,001
10	129,916	90	0,0038
11	136,661	99	0,0073
12	141,661	108	0,0165

Analizując tabelę 7. można zauważyć, że do opóźnienia rzędu 5 nie stwierdzono występowania efektu ARCH. Jednakże w przypadku opóźnień rzędów 6 – 12, należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej, zgodnie z którą efekt ARCH występuje.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

5. Podsumowanie

Za pomocą odpowiednich testów weryfikujących stacjonarność szeregów czasowych, udało się wykazać, że spread, będący różnicą pomiędzy cenami kontraktu terminowego a ceną natychmiastową platyny dla danych o częstotliwości miesięcznej jest szeregiem stacjonarnym i tym samym posiada właściwości kointegrujące. Dla danych o częstotliwości dziennej oraz tygodniowej decyzja na podstawie testów KPSS i ADF pozostawała niejednoznaczna. Do dalszych etapów pracy wykorzystano również zmienną „**covid**”, która okazała się kluczowa, aby móc potwierdzić działanie prawa jednej ceny pomiędzy badanymi instrumentami

finansowymi. Po nałożeniu odpowiednich restrykcji na parametry relacji długookresowej uzyskany wynik p-value wyniósł **0,159558**, co potwierdziło hipotezę o tym, że ceny kontraktu terminowego oraz ceny natychmiastowej platyny są ze sobą skointegrowane i prawo jednej ceny zachodzi. Wcześniej podjęto próby zweryfikowania prawa jednej ceny bez włączania dodatkowych zmiennych egzogenicznych oraz przy wykorzystaniu wariantów testu kointegracji Johansena z ograniczonym trendem oraz nieograniczonym wyrazem wolnym. Niestety wszystkie one zakończyły się niepowodzeniem i dopiero przy wykorzystaniu wspomnianej wyżej zmiennej udało się udowodnić to prawo. Kolejny krok polegał na oszacowaniu wektorowego modelu korekty błędem (VECM). Niestety w tym wypadku, pomimo kierowania się kryterium Akaike przy doborze odpowiedniej ilości opóźnień oraz przy założeniu istnienia jednego wektora kointegrującego zmienne oznaczające odchylenie od relacji równowagi okresowej okazały się nieistotne statystycznie. W model od opóźnienia 6 występował efekt ARCH, co dodatkowo powinno być podstawą do poszukania lepszego modelu, który byłby w stanie dokładniej zobrazować badany problem.

6. Bibliografia

1. Potters Ch., *Law of One Price*, September 29, 2020, <https://www.investopedia.com/terms/l/law-one-price.asp>
2. Garlak Ł., Seremet K., *Teoria arbitrażu cenowego*,
https://mfiles.pl/pl/index.php/Teoria_arbitra%C5%BCu_cenowego
3. Chylińska M. (2013), *Uwagi o działaniu prawa jednej ceny na londyńskiej giełdzie metali*