

**„Analiza logarytmicznych szeregów czasowych i  
logarytmicznych stóp zwrotu cen kontraktu  
terminowego oraz ceny natychmiastowej platyny za  
pomocą poznanych metod statystycznych i  
ekonometrycznych”**



**Kasper Kurzyński**

**252932**

**S52-11**

# 1. Wstęp

Metale szlachetne są grupą metali, które są wyjątkowo odporne chemicznie. Zwykle do grupy metali szlachetnych zalicza się między innymi złoto, srebro, platynę, rod i pallad. Charakteryzują się bardzo słabym reagowaniem z innymi pierwiastkami, co skutecznie zapobiega procesowi korozji, nieroztwarzaniu się w większości kwasów oraz brakiem reakcji z wodą i gorącą parą wodną. Dawniej, metale szlachetne były często wykorzystywane w handlu wymiennym, a następnie do produkcji monet i wyrobów jubilerskich. W obecnym czasie oprócz branży jubilerskiej, metale szlachetne znajdują zastosowanie w stomatologii, kosmetologii, onkologii, elektromechanice lub przemyśle chemicznym. Metale szlachetne posiadają również cechy związane z zastosowaniem inwestycyjnym. Na światowych giełdach przedmiotem takich inwestycji finansowych są srebro, złoto, platyna i pallad. Uważane są jako stabilna inwestycja, którego produkty są „niezniszczalne, ponadczasowe i ponadnarodowe” [Kasprzak-Czelej A., 2018]. Rynek metali szlachetnych dzieli się na trzy sektory: medali, sztabek i granulatu.

Praca poświęcona jest analizie cen kontaktu terminowego oraz ceny natychmiastowej platyny na giełdzie NYMEX. NYMEX (New York Mercantile Exchange) jest nowojorską giełdą zarządzaną przez CME Group of Chicago. Na giełdzie dokonuje się transakcji między innymi węglem, uranem, benzyną, palladem oraz platyną. Wielkość umowy na platynę obejmuje 50 uncji trojańskich (1 uncja trojańska = 31,1035 gramów). Wykorzystane w pracy szeregi obejmują cenę natychmiastową platyny oraz kontrakt terminowy o zapadalności 3 miesięcznej. Cena platyny na giełdzie NYMEX wyrażona jest w dolarach amerykańskich na uncję trojańską. Handel badanymi instrumentami polega na dostarczeniu towaru do strony kupującej, natomiast każdy handel kończy się zawsze trzeciego dnia roboczego miesiąca kontraktu.

W celu dokonania analizy powyższych instrumentów finansowych zostaną zastosowane poznane metody statystyczne i ekonometryczne. W pierwszej części pracy znajduje się krótka prezentacja danych, mająca na celu przedstawienie zakresu badanych zmiennych oraz transformacji ich w celu uzyskania logarytmicznych stóp zwrotu. Dane zostaną również przedstawione w częstotliwości dziennej, tygodniowej i miesięcznej. W kolejnej części projektu został zobrazowany przebieg szeregów czasowych za pomocą wykresów oraz kształtowanie się funkcji ACF i PACF dla wybranych szeregów. Taki zabieg pozwolił na wstępną weryfikację na temat stacjonarności zmiennych. Kolejnym etapem analizy była weryfikacja hipotez dotyczących stacjonarności. Do projektu w tym celu zostały wykorzystane testy ADF i KPSS. Następnie dla zmiennych został obliczony i przedstawiony statystyki opisowe, które pozwoliły na wstępne określenie rozkładów empirycznych badanych zmiennych. Ostatnim etapem w pracy było wykonanie testów dotyczących średniej, kurtozy, skośności, wariancji oraz normalności rozkładu. W tym celu zostały wykorzystane między innymi testy: Jarque-Bera, Kurskala-Wallisa i Browna-Forsythe'a. Dokonanie wszystkich powyższych zabiegów było wstępem do dalszej części projektu, poddającego analizie prawo jednej ceny między kontraktem terminowym a ceną natychmiastową platyny.

## 2. Prezentacja danych

Dane zostały pobrane ze strony stooq.pl. Wybrane do projektu szeregi składają się z obserwacji od 1 stycznia 2015 roku do 29 grudnia 2021 roku. Do wykonania potrzebnych analiz zostały wygenerowane na podstawie oryginalnych danych logarytmiczne szeregi czasowe o częstotliwości dziennej, tygodniowej i miesięcznej. Następnie, wykorzystując równanie  $r_t = \ln(p_t + d_t) - \ln(p_{t-1})$  szeregi zostały przekształcone tak, aby otrzymać z nich logarytmiczne stopy zwrotu. Ostatecznie, w dalszej części projektu znalazło się 12 szeregów czasowych utworzonych na podstawie dwóch instrumentów finansowych. W celu poprawienia czytelności projektu, każdej z częstotliwości danych został przypisany jeden kolor. Poniższa legenda wskazuje na kolor przypisany danej częstotliwości.

Częstotliwość dzienna
Częstotliwość tygodniowa
Częstotliwość miesięczna

Oznaczenie zmiennych:

- $\ln\_platf$  - zlogarytmowana cena kontraktu terminowego platyny
- $\ln\_platc$  - zlogarytmowana cena natychmiastowa platyny
- $d\_ln\_platf / \Delta \ln pl.f$  - logarytmiczna stopa zwrotu cen kontraktu terminowego platyny
- $d\_ln\_platc / \Delta \ln pl.c$  - logarytmiczna stopa zwrotu ceny natychmiastowej platyny

Tabele przedstawiają kilka początkowych oraz końcowych obserwacji dla każdego z szeregów.

**Tabela 1. Dane o częstotliwości dziennej.**

Data	$\ln\_platf$	$\ln\_platc$	$\Delta \ln\_platf$	$\Delta \ln\_platc$
2015-01-02	7,093	7,089		
2015-01-05	7,101	7,098	0,008	0,008
2015-01-06	7,108	7,105	0,008	0,007
2015-01-07	7,107	7,102	-0,002	-0,003
2015-01-08	7,107	7,102	0,000	0,001
2015-01-09	7,118	7,113	0,011	0,011
2015-01-12	7,125	7,121	0,007	0,008
2015-01-13	7,124	7,120	-0,001	-0,002
2015-01-14	7,118	7,112	-0,006	-0,007
2015-01-15	7,140	7,136	0,022	0,024
...	...	...	...	...
2021-10-20	6,959	6,956	0,005	0,009
2021-10-21	6,956	6,955	-0,002	0,000
2021-10-22	6,959	6,946	0,002	-0,009
2021-10-25	6,970	6,965	0,011	0,019
2021-10-26	6,940	6,936	-0,029	-0,029
2021-10-27	6,927	6,917	-0,013	-0,019
2021-10-28	6,931	6,927	0,005	0,010
2021-10-29	6,928	6,926	-0,003	-0,001

Dane o częstotliwości dziennej zlogarytmowanych szeregów czasowych oraz logarytmicznych stóp zwrotu zostały przekształcone z oryginalnych danych za pomocą logarytmu naturalnego. Liczba obserwacji danych o tej częstotliwości wyniosła 1761. Logarytmiczne stopy zwrotu natomiast pomniejszone są o jedną obserwację (początkową) i ich liczebność jest równa 1760.

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2. Dane o częstotliwości tygodniowej.**

<i>Data</i>	<i>ln_platf</i>	<i>ln_platc</i>	<i>Δln_platf</i>	<i>Δln_platc</i>
2015-01-02	7,093	7,089		
2015-01-09	7,118	7,113	0,025	0,024
2015-01-16	7,146	7,143	0,028	0,030
2015-01-23	7,146	7,143	0,000	0,000
2015-01-30	7,124	7,120	-0,022	-0,022
2015-02-06	7,110	7,106	-0,014	-0,015
2015-02-13	7,097	7,095	-0,013	-0,011
2015-02-20	7,060	7,057	-0,037	-0,038
2015-02-27	7,081	7,078	0,021	0,021
2015-03-06	7,057	7,054	-0,024	-0,025
...	...	...	...	...
2021-09-03	6,929	6,931	0,015	0,013
2021-09-10	6,863	6,860	-0,066	-0,071
2021-09-17	6,836	6,846	-0,027	-0,014
2021-09-24	6,887	6,890	0,052	0,045
2021-10-01	6,881	6,880	-0,006	-0,010
2021-10-08	6,936	6,933	0,055	0,053
2021-10-15	6,965	6,962	0,029	0,029
2021-10-22	6,959	6,946	-0,006	-0,016
2021-10-29	6,928	6,926	-0,030	-0,020

Dane o częstotliwości tygodniowej zlogarytmowanych szeregów czasowych oraz logarytmicznych stóp zwrotu zostały zagregowane za pomocą funkcji programu Gretl przy wykorzystaniu ostatniej obserwacji w okresie (tygodniu roboczym). Ostatnią obserwacją w tym wypadku był piątek. Liczba obserwacji dla danych tygodniowych wyniosła 357 (356 dla logarytmicznych stóp zwrotu).

Źródło: opracowanie własne

**Tabela 3. Dane o częstotliwości miesięcznej.**

<i>Data</i>	<i>ln_platf</i>	<i>ln_platc</i>	<i>Δln_platf</i>	<i>Δln_platc</i>
2015.01	7,114	7,111		
2015.02	7,080	7,077	-0,034	-0,033
2015.03	7,060	7,057	-0,020	-0,021
2015.04	7,031	7,028	-0,028	-0,028
2015.05	7,006	7,004	-0,025	-0,024
2015.06	6,988	6,984	-0,018	-0,021
2015.07	6,868	6,866	-0,120	-0,117
2015.08	6,911	6,908	0,043	0,042
2015.09	6,809	6,804	-0,102	-0,104
2015.10	6,886	6,881	0,078	0,077
...	...	...	...	...
2021.01	7,038	7,029	0,054	0,054
2021.02	7,083	7,078	0,045	0,049
2021.03	7,097	7,099	0,014	0,021
2021.04	7,115	7,114	0,018	0,015
2021.05	7,090	7,085	-0,025	-0,029
2021.06	6,986	6,989	-0,104	-0,096
2021.07	6,963	6,960	-0,023	-0,029
2021.08	6,907	6,909	-0,055	-0,051
2021.09	6,881	6,880	-0,026	-0,029

Dane o częstotliwości miesięcznej dla badanych szeregów również zostały zagregowane przy pomocy programu Gretl. W tym wypadku ostatnią obserwacją w danym miesiącu był ostatni dzień roboczy, który przypadał na ten miesiąc. Liczba obserwacji wyniosła 81 oraz 80 dla logarytmicznych stóp zwrotu.

Źródło: opracowanie własne

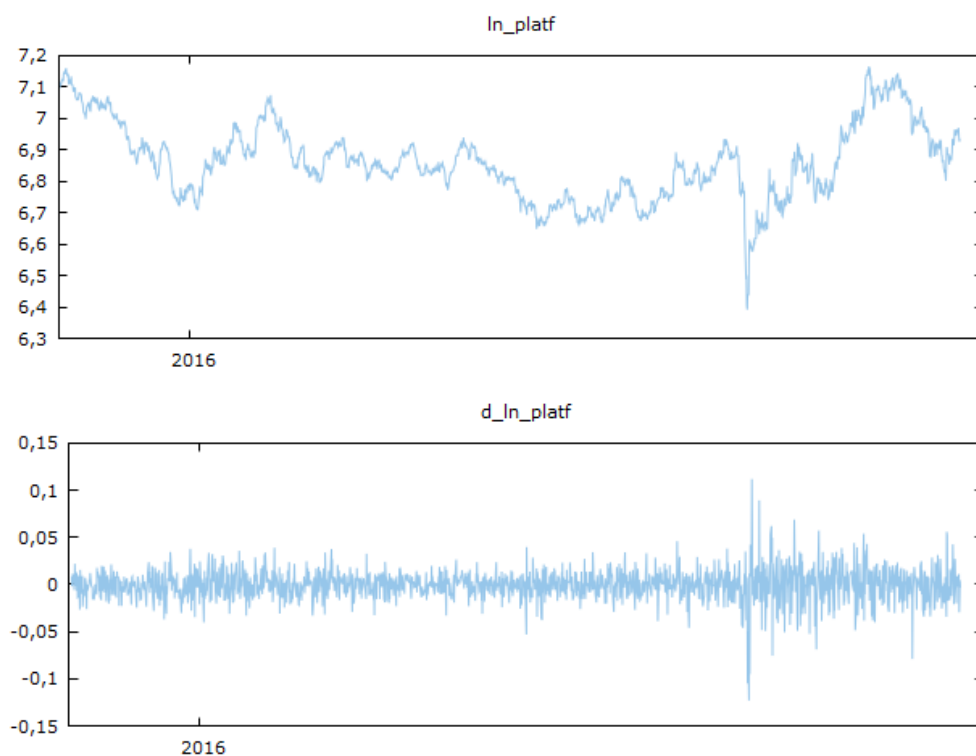
### 3. Opis i przedstawienie wykresów szeregów czasowych oraz kształtowanie się funkcji ACF i PACF dla wybranych procesów.

#### I. Wykresy szeregów czasowych

Przed analizą wykresów szeregów czasowych warto wspomnieć o założeniach dotyczących stacjonarności szeregów czasowych w szerszym sensie. Aby móc mówić o stacjonarności w szerszym sensie muszą być spełnione następujące warunki:

- $E(y_t) = \mu$
- $cov(y_t, y_t) = E(y_t - \mu)^2 = \gamma_0$
- $cov(y_t, y_{t-j}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = \gamma_j; \quad j = 1, 2, \dots, p.$

Założenia te mówią o tym, że średnia musi być stała w czasie, wariancja jest skończona dla każdej obserwacji w czasie oraz że każde opóźnienie posiada stałą wartość auto-kowariancji.

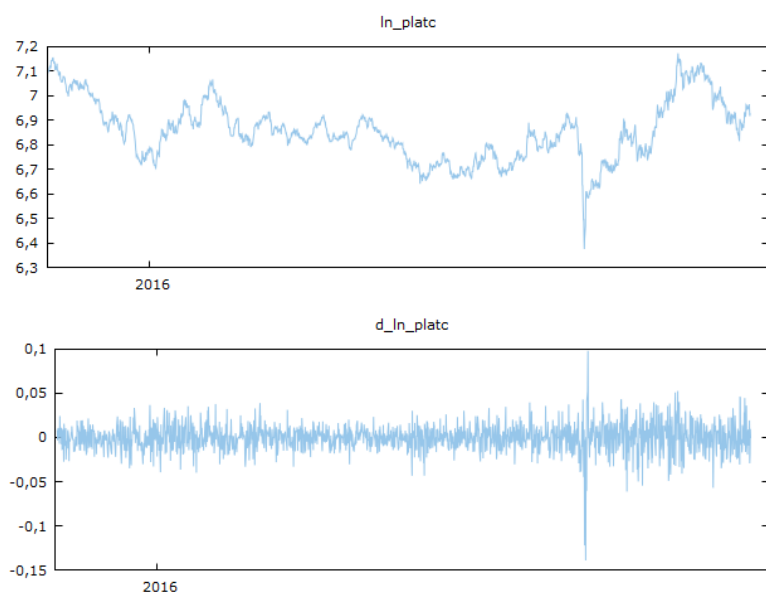


Rys. 1. Wykresy logarytmicznych szeregów czasowych (górny) i logarytmicznej stopy zwrotu cen kontraktu terminowego (dolny) o częstotliwości dziennej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Logarytmiczny szereg czasowy o częstotliwości dziennej cen kontraktu terminowego platyny prawdopodobnie może okazać się niestacjonarny. Na powyższym wykresie można zauważyć, że średnia nie jest stała w czasie, ponieważ w różnych okresach zwiększa się lub zmniejsza. Przykładowo do roku 2016 następował spadek na giełdzie, natomiast po 2016 roku sytuacja się odwróciła i wartości zanotowały wzrost.. Przeciwna sytuacja widoczna jest na wykresie dotyczącym logarytmicznej stopy zwrotu cen kontraktu

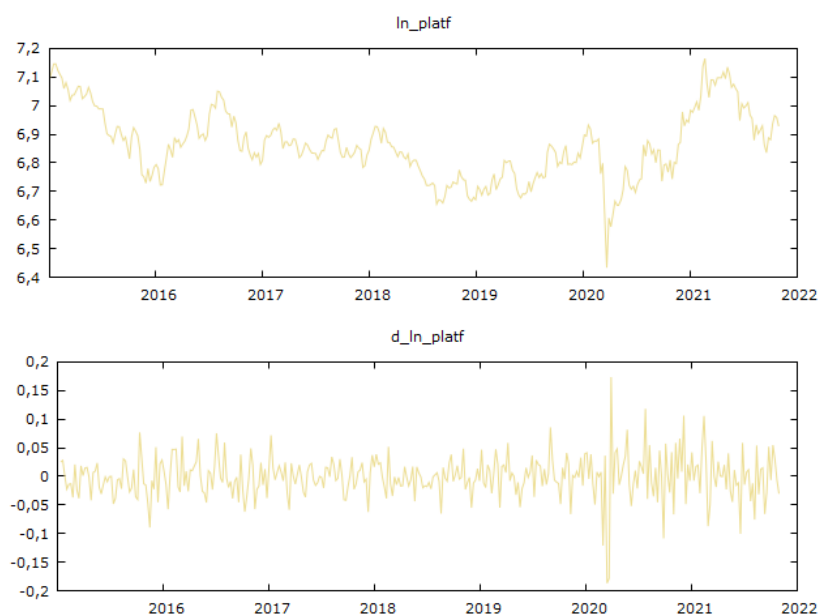
terminowego platyny. Szereg często przechodzi przez swoją średnią, dlatego daje to podstawę do uznania, że jest on stacjonarny.



Rys. 2. Wykresy logarytmicznych szeregów czasowych (górny) i logarytmicznej stopy zwrotu ceny natychmiastowej (dolny) o częstotliwości dziennej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

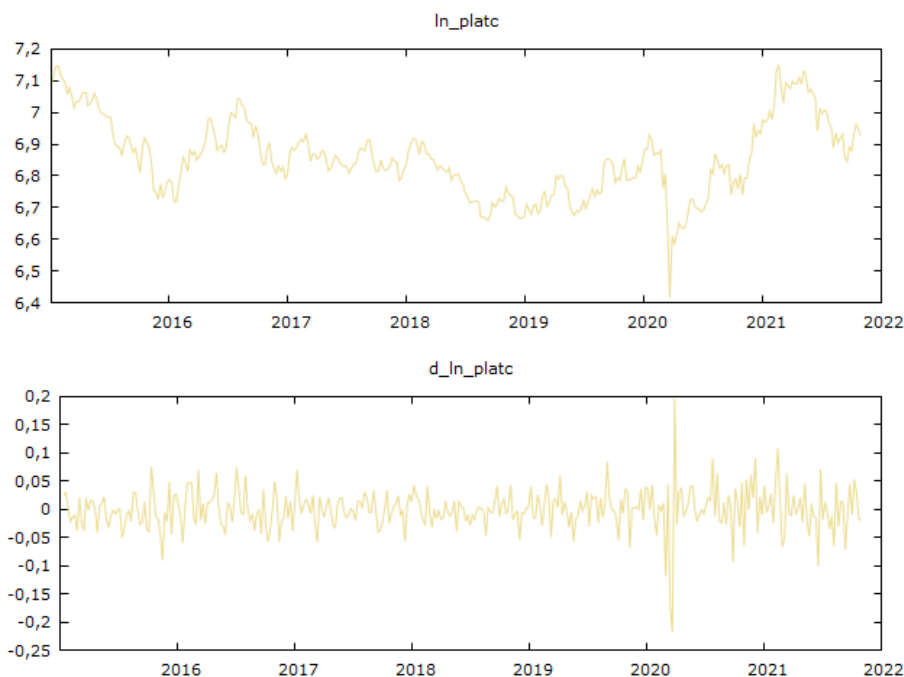
Wykresy szeregów logarytmicznej ceny natychmiastowej oraz logarytmicznej stopy zwrotu ceny natychmiastowej charakteryzują się podobnymi właściwościami, dlatego wnioski wyciągnięte na ich podstawie mogą być takie same.



Rys. 3. Wykresy logarytmicznych szeregów czasowych (górny) i logarytmicznej stopy zwrotu cen kontraktu terminowego (dolny) o częstotliwości tygodniowej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

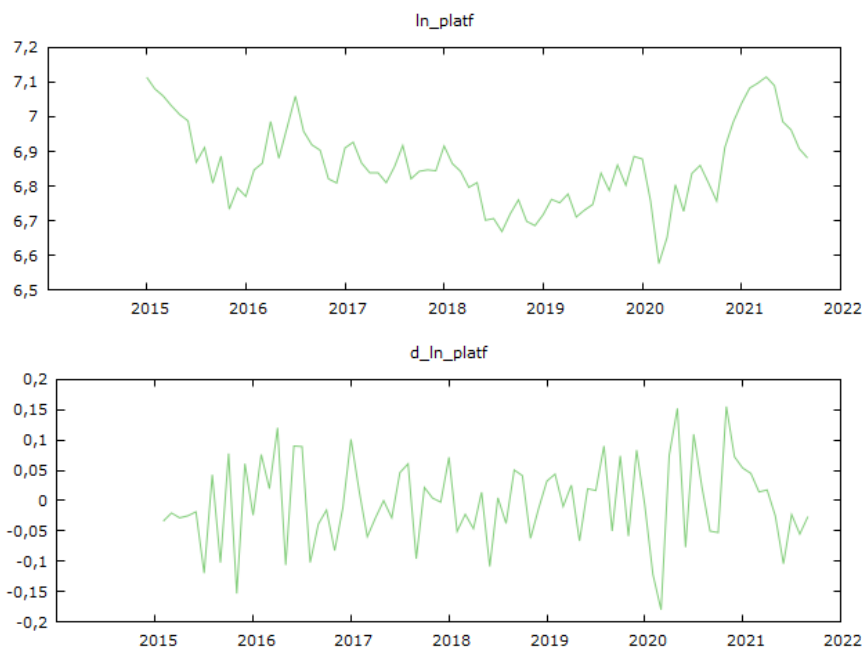
W przypadku danych o częstotliwości tygodniowej logarymiczna stopa zwrotu cen kontraktu terminowego podobnie jak dla szeregu o częstotliwości dziennej cechuje się średnią oraz wariancją stałą w czasie. Wzrosty oraz spadki w przypadku logarymicznego szeregu cen kontraktu terminowego można zauważyć w tym samych okresach, w których występowały one dla danych o częstotliwości dziennej. Z tego powodu należy uznać, że średnia nie jest stała w czasie, a sam szereg prawdopodobnie jest niestacjonarny.



Rys. 4. Wykresy logarymicznych szeregów czasowych (górny) i logarymicznej stopy zwrotu ceny natychmiastowej (dolny) o częstotliwości tygodniowej.

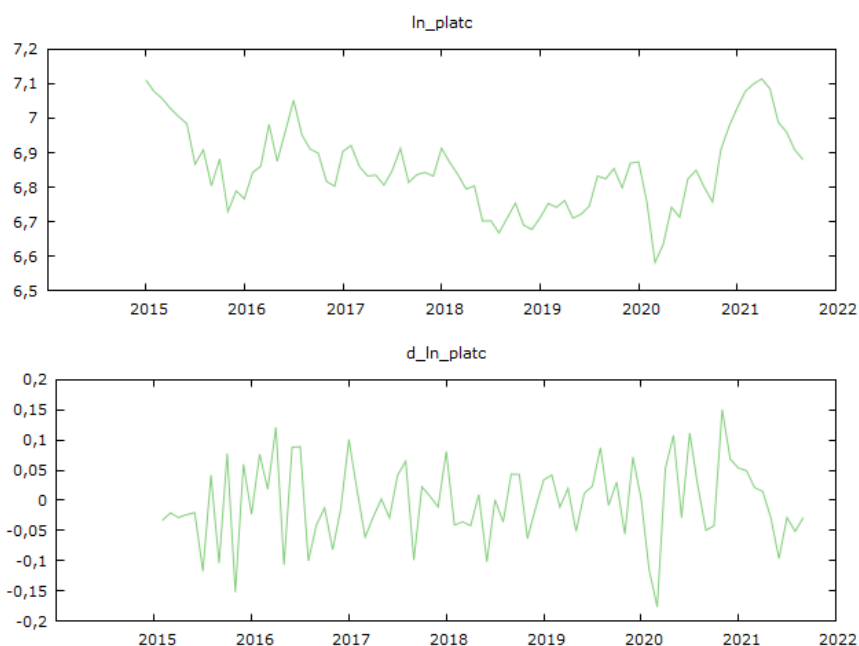
Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Logarymiczny szereg ceny natychmiastowej i logarymiczna stopa zwrotu tej ceny prezentuje podobny sposób kształtowania się szeregów. Wartości logarymicznego szeregu ceny natychmiastowej w pewnych okresach rosną i maleją. Podobnie jak w przypadku cen kontraktu terminowego oznacza to brak stałości średniej w czasie. Wartości logarymicznej stopy zwrotu ceny natychmiastowej kształtują się na wykresie w odwrotny sposób. W badanym okresie szereg ten często przechodzi przez swoją średnią – oznacza to stałość średniej w czasie i podstawę do uznania szeregu jako stacjonarnego.



Rys. 5. Wykresy logarytmicznych szeregów czasowych (górny) i logarytmicznej stopy zwrotu ceny kontraktu terminowego (dolny) o częstotliwości miesięcznej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.



Rys. 6. Wykresy logarytmicznych szeregów czasowych (górny) i logarytmicznej stopy zwrotu ceny natychmiastowej (dolny) o częstotliwości miesięcznej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

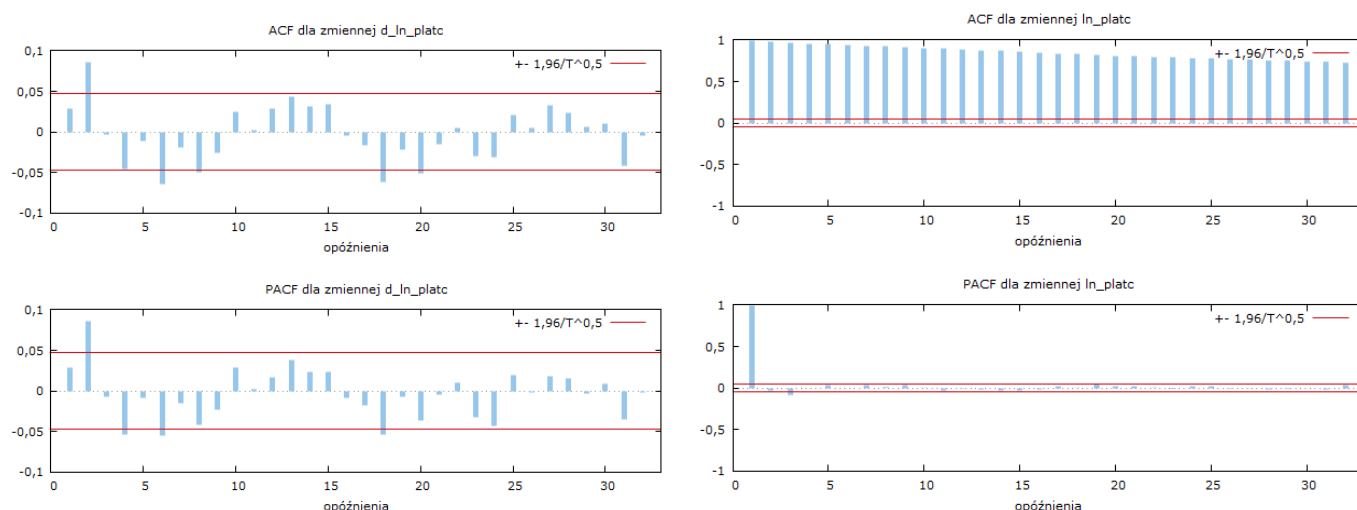
W przypadku danych o częstotliwości miesięcznej spadki oraz wzrosty wartości logarytmicznego szeregu cen kontraktu terminowego oraz ceny natychmiastowej pojawiają się w podobnych okresach. Z uwagi na mniejszą liczbę obserwacji samo graficzne zobrazowanie szeregu może powodować trudność w określeniu stacjonarności lub niestacjonarności szeregu. Pomimo pojawiających się trendów szeregi wydają się częściej przechodzić przez swoją średnią niż w przypadku danych o innych częstotliwościach. Do



dokładniejszej weryfikacji właściwości tych szeregów zostaną wykorzystane specjalne testy przedstawione na późniejszym etapie projektu. Logarytmiczne stopy zwrotu dla danych o częstotliwości miesięcznej posiadają średnią stałą w badanym okresie i dlatego istnieją podstawy do uznania tych szeregów za stacjonarne.

## II. Korelogramy funkcji ACF i PACF wybranych szeregów czasowych.

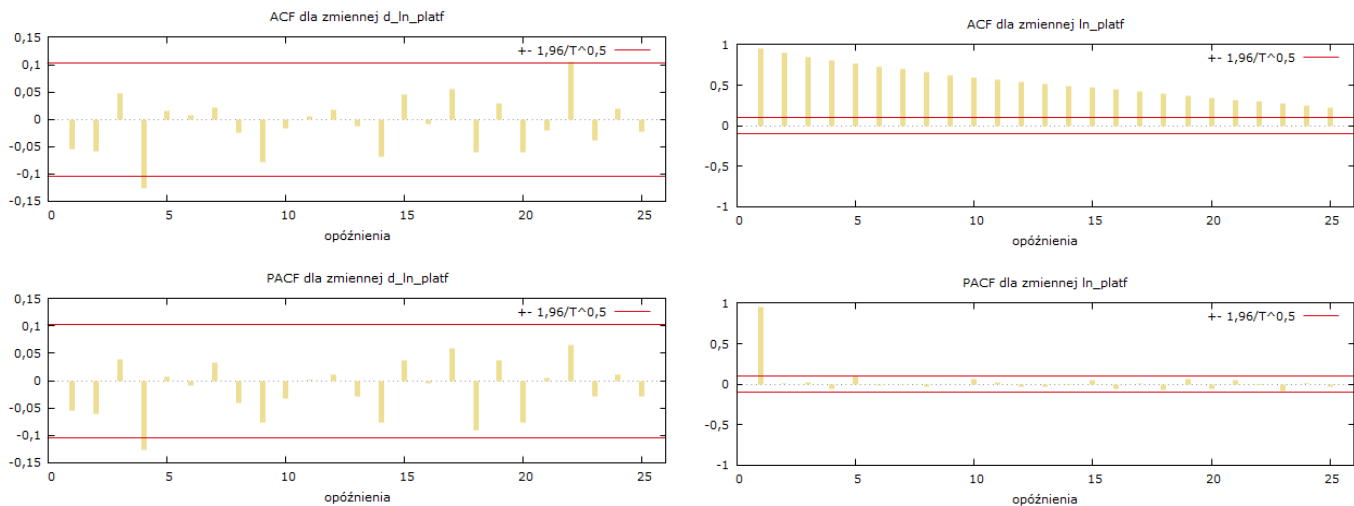
Funkcje ACF i PACF (odpowiednio: funkcja autokorelacji i funkcja autokorelacji cząstkowej) stosowane są w analizie szeregów czasowych w celu ustalenia odpowiedniej ilości opóźnień w modelach ARMA i ARIMA. Wykresy tych funkcji – korelogramy pozwalają na identyfikację istotnych korelacji oraz ich poziomu względem danego opóźnienia. Funkcja ACF mierzy korelację pomiędzy wszystkimi wartościami szeregu, natomiast PACF wskazuje na korelację pomiędzy dwoma wartościami w szeregu, nie zważając na opóźnienia pomiędzy nimi.



Rys. 7. Korelogram funkcji ACF i PACF dla logarytmicznej stopy zwrotu (po lewej stronie) i logarytmicznego szeregu czasowego ceny natychmiastowej (po prawej stronie) dla danych o częstotliwości dziennej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

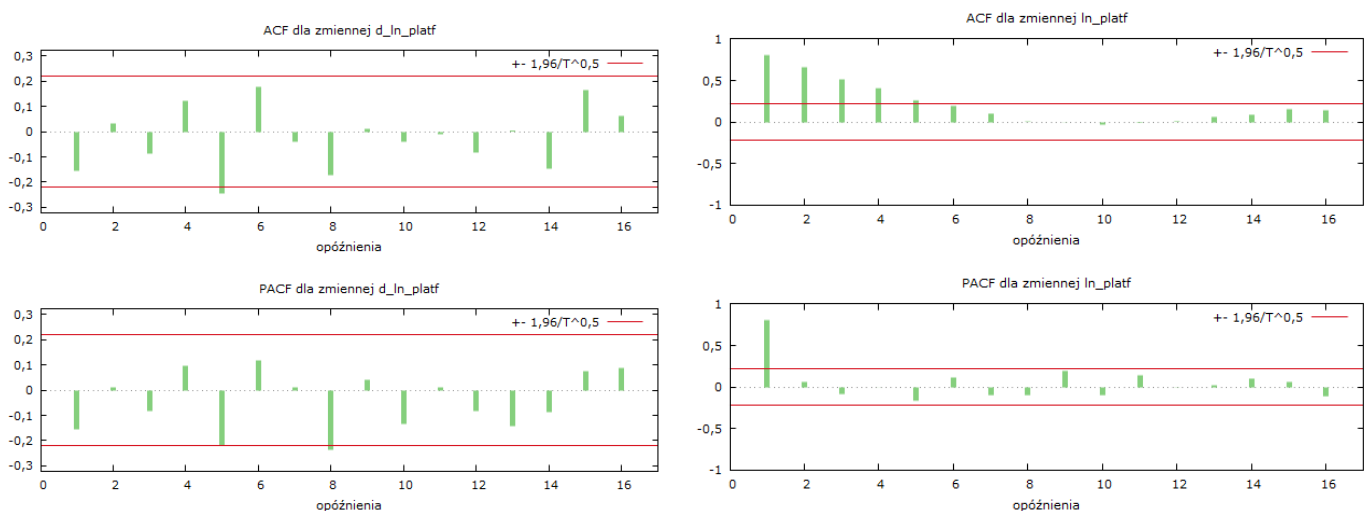
Dla logarytmicznej stopy zwrotu ceny natychmiastowej funkcja ACF wskazała na istotne korelacje dla: 2, 6, 8, 18 i 20 opóźnień, natomiast PACF istotne korelacje okazały się dla opóźnień: 2, 4, 6 i 18. Świadczy to o tym, że dany proces nie jest procesem białego szumu. Dla logarytmicznego szeregu ceny natychmiastowej funkcja ACF posiada istotne korelacje dla każdego opóźnienia i wygasa się powoli, co wskazuje na niestacjonarność szeregu. Funkcja PACF dla tego procesu wskazuje na istotną korelację dla 1 i 3 opóźnień, przy czym dla 1 opóźnienia jest ona najsilniejsza.



Rys. 8. Korelogram funkcji ACF i PACF dla logarytmicznej stopy zwrotu (po lewej stronie) i logarytmicznego szeregu czasowego cen kontraktu terminowego (po prawej stronie) dla danych o częstotliwości tygodniowej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Dla danych o częstotliwości tygodniowej zostały wygenerowane korelogramy dla logarytmicznej stopy zwrotu cen kontraktów terminowych oraz logarytmicznego szeregu tego instrumentu. W tym przypadku, dla logarytmicznej stopy zwrotu funkcja ACF oscyluje wokół zera i posiada istotne korelacje tylko dla 4 i 22 opóźnień. Proces ten może okazać się procesem białego szumu. PACF natomiast wskazuje na istnienie istotnej korelacji tylko dla 4 opóźnień. Dla logarytmicznego szeregu funkcje ACF i PACF wskazują na niestacjonarność procesu.



Rys. 9. Korelogram funkcji ACF i PACF dla logarytmicznej stopy zwrotu (po lewej stronie) i logarytmicznego szeregu czasowego cen kontraktu terminowego (po prawej stronie) dla danych o częstotliwości miesięcznej.

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

W przypadku danych o częstotliwości miesięcznej istotne korelacje funkcji ACF i PACF logarytmicznej stopy zwrotu cen kontraktu terminowego pojawiają się tylko dla jednego opóźnienia. Jest to

odpowiednio opóźnienie 5 oraz 8. Wartości funkcji ACF oscylują wokół zera, co może być podstawą testowania hipotezy o białoszumowości. Korelogram funkcji ACF i PACF logarytmicznego szeregu cen kontraktu terminowego zachowuje się podobnie jak w przypadku danych o pozostałych częstotliwościach. Funkcja ACF wygasa się w tempie wykładniczym, natomiast PACF posiada istotną korelację dla pierwszego opóźnienia.

## **4. Weryfikacja hipotez o stacjonarności i niestacjonarności szeregów czasowych przy wykorzystaniu testów ADF i KPSS.**

Do weryfikacji hipotez dotyczących stacjonarności i niestacjonarności szeregów czasowych wykorzystuje się testy DF, ADF i KPSS. Nazwa testu DF to inaczej test Dickeya-Fullera. Został on opracowany w 1979 roku przez D.A. Dickeya i W.A. Fullera. Za jego pomocą sprawdza się obecność pierwiastka jednostkowego w modelu autoregresyjnym. W przypadku występowania autokorelacji składników zakłócających stosuje się rozszerzoną wersję tego testu, jaką jest test ADF (Augmented Dickey-Fuller test). Test ten posiada kilka wariantów do sprawdzania obecności pierwiastka jednostkowego. Wśród tych wariantów wyróżnić można: test bez wyrazu wolnego; z wyrazem wolnym; z wyrazem wolnym i trendem liniowym oraz z wyrazem wolnym, trendem liniowym i trendem kwadratowym. Hipoteza zerowa w teście ADF zakłada istnienie pierwiastka jednostkowego i niestacjonarność szeregu, natomiast hipoteza alternatywna mówi o stacjonarności szeregu. Na potrzeby niniejszego projektu wykorzystane zostaną pierwsze trzy warianty. Kolejnym wykorzystywanym testem do sprawdzania stacjonarności szeregów czasowych jest ten KPSS. Jego nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk osób, które pracowały nad jego stworzeniem (Kwiatkowski, Philips, Schmidt, Shin). Układ hipotez w tym teście jest odwrotny do testu ADF, ponieważ, hipoteza zerowa zakłada stacjonarność szeregu, natomiast hipoteza alternatywna jego niestacjonarność. Występują dwie wersje testu KPSS. Pierwsza z nich sprawdza stacjonarność wokół trendu liniowego, natomiast druga sprawdza stacjonarność danego szeregu wokół średniej.

**Tabela 4. Wyniki testu ADF dla logarytmicznych szeregów cen kontaktu terminowego, ceny natychmiastowej oraz logarytmicznej stopy zwrotu badanych instrumentów**

Zmienna	ADF $\alpha = 5\%$								
	c = t = 0	p-value	op.	c $\neq$ 0, t = 0	p-value	op.	c $\neq$ 0, t $\neq$ 0	p-value	op.
<i>ln_platf</i>	-0,3978	0,5408	18	-3,17824	0,02131	18	-3,057450	0,11670	18
<i>ln_platc</i>	-0,354407	0,5575	6	-3,07562	0,02844	6	-2,955600	0,14500	6
$\Delta$ ln_platf	-10,6362	0,0000	17	-10,639	0,00000	17	-10,6846	0,00000	17
$\Delta$ ln_platc	-18,2671	0,0000	5	-18,2648	0,00000	5	-18,2886	0,00000	5
<i>ln_platf</i>	-0,392363	0,5429	4	-3,23950	0,01859	4	-3,1511	0,09625	4
<i>ln_platc</i>	-0,396678	0,5413	4	-3,14766	0,02409	4	-3,0509	0,12000	4
$\Delta$ ln_platf	-10,7036	0,0000	3	-10,6955	0,00000	3	-10,7441	0,00000	3
$\Delta$ ln_platc	-10,5943	0,0000	3	-10,5866	0,00000	3	-10,6403	0,00000	3
<i>ln_platf</i>	-0,428072	0,5256	0	-3,19763	0,02375	0	-3,09136	0,11550	0
<i>ln_platc</i>	-0,44361	0,5195	0	-3,04454	0,03507	0	-2,92723	0,15970	0
$\Delta$ ln_platf	-10,3108	0,0000	0	-10,2607	0,00000	0	-10,275	0,00000	0
$\Delta$ ln_platc	-9,7155	0,0000	0	-9,6686	0,00000	0	-4,07576	0,00677	0

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

W tabeli zawarte są wyniki dla zlogarytmowanych szeregów czasowych i logarytmicznych stóp zwrotu o częstotliwości dziennej, tygodniowej i miesięcznej. W pierwszej kolumnie znajduje się zmienna, dla której zostały obliczone odpowiednie wartości. Testowanymi wariantami testu ADF był test bez wyrazu wolnego (c = t = 0), test z wyrazem wolnym c  $\neq$  0, t = 0) oraz test z wyrazem wolnym i trendem liniowym (c  $\neq$  0, t  $\neq$  0). Wartość w takiej kolumnie odpowiada wartości statystyki dla danego wariantu. Następnie zostało podane p-value, czyli najniższy poziom istotności, na którym można odrzucić hipotezę zerową oraz rząd opóźnień dla którego testowany był dany wariant. Zgodnie z powszechnie obowiązującą zasadą, jeśli poziom p-value jest niższy od zakładanego poziomu istotności (w tym wypadku 5%), to należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Wartości jakie przyjęło p-value dla wszystkich zmiennych potwierdza wcześniejsze wnioski wyciągnięte na podstawie analizy wykresów szeregów czasowych oraz korelogramów. Zlogarytmowane szeregi czasowe dla danych o każdej częstotliwości posiadają dla wariantów testu bez wyrazu wolnego i z wyrazem wolnym i trendem liniowym p-value wyższe niż przyjęty 5% poziom istotności. Oznacza to, że szeregi te są niestacjonarne wskutek występowania pierwiastka jednostkowego. Wyjątek stanowi wariant z wyrazem wolnym. P-value w tym wypadku okazało się niższe niż ustalona wartość alpha. Jednakże, gdyby za poziom istotności przyjąć 1%, to w tym wariantcie testu szeregi również okazałyby się niestacjonarne. Do potwierdzenia hipotezy o niestacjonarności podanych szeregów zostaną wykorzystane jeszcze wyniki testu KPSS. Dla logarytmicznych stóp zwrotu sytuacja ukształtowała się jednoznacznie. Dla każdego z wariantu testu ADF p-value osiągnęło bardzo niską wartość i wyniki zostały zaokrąglone do zera. Oznacza to, że logarytmiczne stopy zwrotu zarówno ceny natychmiastowej jak i ceny kontraktu terminowego dla danych o każdej z badanej częstotliwości są stacjonarne, ponieważ nie występuje pierwiastek jednostkowy.

**Tabela 5. Wyniki testu KPSS dla logarytmicznych szeregów cen kontaktu terminowego, ceny natychmiastowej oraz logarytmicznej stopy zwrotu badanych instrumentów**

Zmienna	KPSS $\alpha = 5\%$			
	Średnia, wart. kryt.: 0,462	op.	Trend wart. kryt.: 0,148	op.
<i>ln_platf</i>	2,79291 > 0,462	8	2,1465 > 0,148	8
<i>ln_platc</i>	2,84317 > 0,462	8	2,15199 > 0,148	8
$\Delta \ln\_platf$	0,080763 < 0,462	8	0,0200189 < 0,148	8
$\Delta \ln\_platc$	0,089324 < 0,462	8	0,0215655 < 0,148	8
<i>ln_platf</i>	0,930165 > 0,462	5	0,701701 > 0,148	5
<i>ln_platc</i>	0,940967 > 0,462	5	0,700671 > 0,148	5
$\Delta \ln\_platf$	0,0955918 < 0,462	5	0,0237124 < 0,148	5
$\Delta \ln\_platc$	0,102999 < 0,462	5	0,0249326 < 0,148	5
<i>ln_platf</i>	0,345067 < 0,462	3	0,280076 > 0,148	3
<i>ln_platc</i>	0,342073 < 0,462	3	0,274827 > 0,148	3
$\Delta \ln\_platf$	0,123928 < 0,462	3	0,0397588 < 0,148	3
$\Delta \ln\_platc$	0,126179 < 0,462	3	0,039344 < 0,148	3

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Powyższa tabela zawiera wyniki testu KPSS dla logarytmicznych szeregów czasowych i logarytmicznych stóp zwrotu dla zmiennych o częstotliwości dziennej, tygodniowej i miesięcznej. Podobnie jak w przypadku testu ADF, dla testu KPSS przyjęty poziom istotności wynosi  $\alpha = 5\%$ . Wartość krytyczna dla przyjętego poziomu istotności wynosi odpowiednio: 0,462 dla wariantu testu wokół średniej i 0,148 dla wariantu testu wokół trendu. Reguła decyzyjna polega na obliczeniu statystyki testowej, a następnie porównaniu jej wartości z wartością krytyczną. Jeżeli wartość statystyki testowej jest większa od wartości krytycznej, to należy odrzucić hipotezę zerową o stacjonarności szeregu na korzyść hipotezy alternatywnej. W przypadku gdy wartość statystyki jest niższa niż wartość krytyczna, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej i szereg jest stacjonarny. Dla danych o częstotliwości dziennej niestacjonarne okazały się logarytmiczne szeregi czasowe zarówno cen kontraktu terminowego jak i ceny natychmiastowej, natomiast szeregami stacjonarnymi są logarytmiczne stopy zwrotu tych instrumentów. Taka sama sytuacja ukształtowała się w przypadku danych o częstotliwości tygodniowej. Dla danych o częstotliwości miesięcznej nie można odrzucić hipotezy zerowej o stacjonarności wokół średniej dla logarytmicznych szeregów cen kontraktu terminowego i ceny natychmiastowej. Statystyka testowa w tych przypadkach była niższa niż przyjęta wartość krytyczna. Z kolei wokół trendu statystyka testowa dla tych szeregów jest wyższa niż wartość krytyczna, wobec czego można uznać te szeregi za niestacjonarne. Logarytmiczne stopy zwrotu okazały się być szeregami stacjonarnymi.

## 5. Przedstawienie i analiza statystyk opisowych oraz współczynników korelacji liniowej Pearsona dla badanych zmiennych.

Tabela 6. Statystyki opisowe szeregów czasowych.

Zmienna	Statystyka						
	Min	Max	Średnia	Mediana	Od.stand.	Skośność	Kurtoza
<i>ln_platf</i>	6,39160	7,16480	6,86080	6,85300	0,11969	0,21940	0,02344
<i>ln_platc</i>	6,37460	7,17260	6,85510	6,84700	0,12091	0,22886	-0,04700
<i>Δln_platf</i>	-0,12316	0,11176	-0,00009	0,00021	0,01614	-0,33405	6,45060
<i>Δln_platc</i>	-0,13916	0,09795	-0,00009	0,00000	0,01517	-0,63466	7,86500
<i>ln_platf</i>	6,43370	7,16480	6,86080	6,85460	0,12008	0,20816	-0,05132
<i>ln_platc</i>	6,41550	7,14770	6,85520	6,84940	0,12118	0,20936	-0,05896
<i>Δln_platf</i>	-0,18648	0,17331	-0,00046	-0,00117	0,03703	-0,31872	4,40000
<i>Δln_platc</i>	-0,21799	0,19520	-0,00046	-0,00112	0,03614	-0,44951	6,91380
<i>ln_platf</i>	6,57620	7,11490	6,85950	6,84620	0,11847	0,31682	-0,31395
<i>ln_platc</i>	6,58120	7,11400	6,85430	6,84220	0,11947	0,33383	-0,35000
<i>Δln_platf</i>	-0,18004	0,15530	-0,00291	-0,00853	0,06928	-0,05722	-0,25195
<i>Δln_platc</i>	-0,17668	0,15023	-0,00288	-0,00956	0,06563	-0,14959	-0,15250

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Na podstawie statystyk opisowych można określić rozkłady empiryczne jakie charakteryzują dane szeregi czasowe. Dla logarytmicznych szeregów czasowych o częstotliwości dziennej kurtoza jest bliska **0**, natomiast miara skośności wynosi **~0.2**. Obydwa szeregi mogą zbiegać do rozkładu normalnego, jednakże są one prawostronne. Wartość średnia dla tych szeregów jest zbliżona i wynosi **~6.9**. Wartość mediany jest bardzo zbliżona do wartości średniej. Mimo, że obydwie miary są podobne, to różnica między nimi wskazuje na niewielką skośność prawostronną. W przypadku logarytmicznych stóp zwrotu dla danych o częstotliwości dziennej wartości średniej i mediany są bardzo bliskie **0**. Jednakże w tym wypadku współczynniki skośności są ujemne, a to oznacza, że rozkłady są lewostronne. Wysokie wartości współczynnika kurtozy dla obydwu szeregów świadczą o tym, że rozkłady te są również leptokurtyczne, czyli większość wartości koncentruje się wokół średniej. Dla logarytmicznych szeregów czasowych o częstotliwości tygodniowej oraz miesięcznej sytuacja kształtuje się w bardzo podobny sposób. Rozkłady te cechuje niewielka prawostronność oraz kurtoza bliska **0**. Wyjątek stanowią szeregi o częstotliwości miesięcznej, dla których współczynnik kurtozy wyniósł odpowiednio: **-0,31** dla logarytmicznego szeregu czasowego cen kontraktu terminowego i **-0,35** dla logarytmicznego szeregu czasowego ceny natychmiastowej co wskazuje na większe rozproszenie wartości wokół średniej. Logarytmiczne stopy zwrotu dla danych o częstotliwości tygodniowej cechują się podobnymi wartościami statystyk opisowych, które posiadały te szeregi dla danych o częstotliwości dziennej. Ciekawe wnioski można natomiast wysunąć po dokonaniu analizy powyższych miar dla danych o częstotliwości miesięcznej. Logarytmiczne stopy zwrotu o tej częstotliwości posiadają dużo niższe współczynniki kurtozy

oraz ujemne współczynniki skośności. Kurtoza dla tych szeregów jest ujemna i wynosi odpowiednio **-0,25** i **-0,15** co wskazuje na istnienie rozkładu platokurtycznego o niewielkiej skośności lewostronnej z powodu ujemnego współczynnika kurtozy oraz większej wartości mediany niż średniej.

**Tabela 7. Współczynniki korelacji Pearsona dla danych o częstotliwości dziennej.**

	LN_PLATF	LN_PLATC	ΔLN_PLATF	ΔLN_PLATC
LN_PLATF	1	0,998		
LN_PLATC	0,998	1		
ΔLN_PLATF			1	0,9070
ΔLN_PLATC			0,9070	1

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

Współczynniki korelacji Pearsona dla szeregów czasowych o częstotliwości dziennej okazały się bardzo wysokie. Oznacza to, że istnieje silna korelacja pomiędzy logarytmicznym szeregiem cen kontraktu terminowego i ceny natychmiastowej oraz pomiędzy logarytmicznymi stopami zwrotu tych szeregów.

**Tabela 8. Współczynniki korelacji Pearsona dla danych o częstotliwości tygodniowej.**

	LN_PLATF	LN_PLATC	ΔLN_PLATF	ΔLN_PLATC
LN_PLATF	1	0,999		
LN_PLATC	0,999	1		
ΔLN_PLATF			1	0,984
ΔLN_PLATC			0,984	1

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

W przypadku danych o częstotliwości tygodniowej korelacje również okazały się bardzo wysokie. W stosunku do danych o częstotliwości dziennej są one wyższe pomiędzy badanymi szeregami czasowymi.

**Tabela 9. Współczynniki korelacji Pearsona dla danych o częstotliwości miesięcznej.**

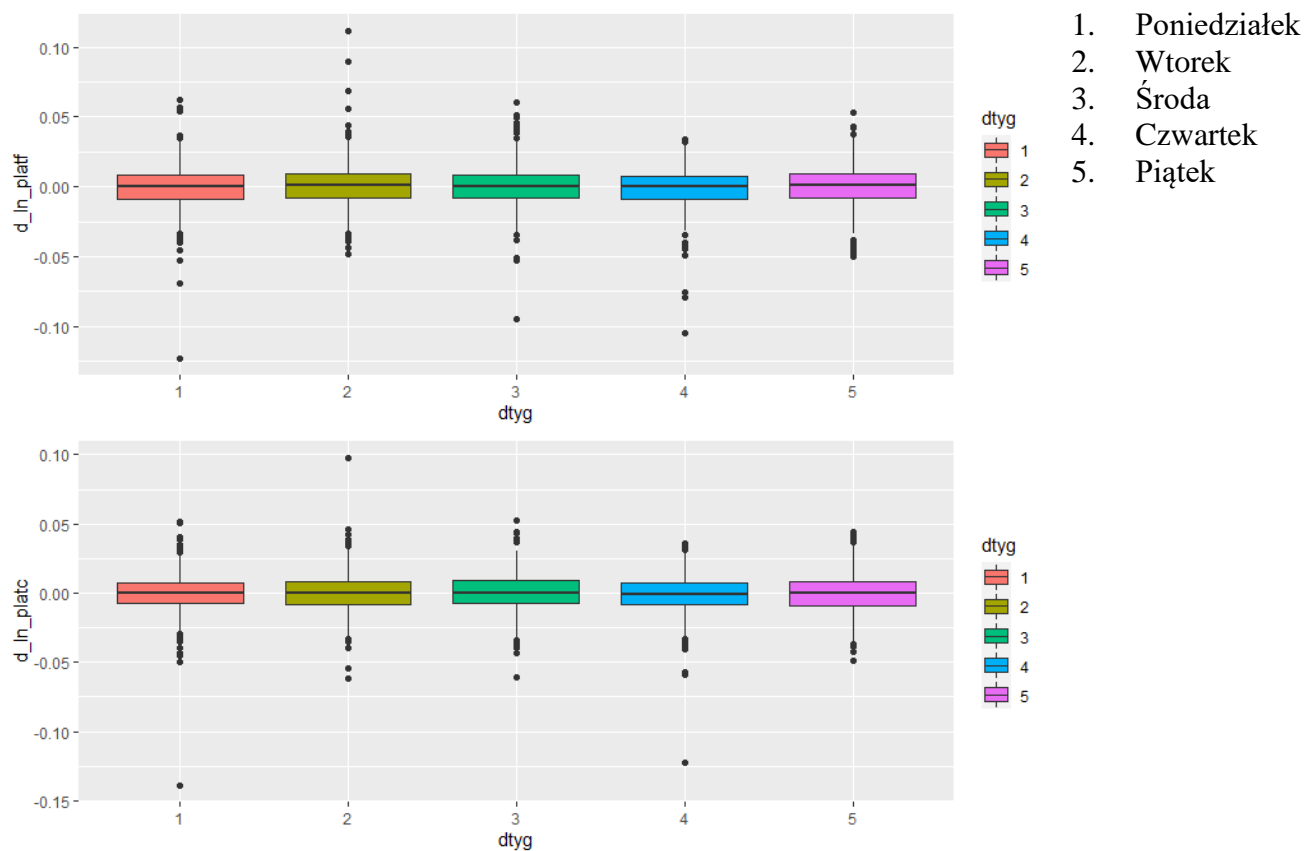
	LN_PLATF	LN_PLATC	ΔLN_PLATF	ΔLN_PLATC
LN_PLATF	1	0,997		
LN_PLATC	0,997	1		
ΔLN_PLATF			1	0,987
ΔLN_PLATC			0,987	1

Źródło: opracowanie własne za pomocą programu Gretl.

W ostatniej tabeli zaprezentowane zostały współczynniki korelacji liniowej Pearsona dla danych o częstotliwości miesięcznej. Ich wartości są bardzo zbliżone w stosunku do wartości tych współczynników dla danych o częstotliwości tygodniowej. Różnica istnieje jednak pomiędzy korelacją logarytmicznych stóp zwrotu dla danych o częstotliwości dziennej oraz miesięcznej. Korelacje pomiędzy logarytmicznymi stopami zwrotu o częstotliwości miesięcznej są wyższe w stosunku do szeregów czasowych o częstotliwości miesięcznej.

## 6. Weryfikacja hipotez dotyczących średniej, wariancji, skośności, kurtozy oraz normalności rozkładu dla logarytmicznych stóp zwrotu.

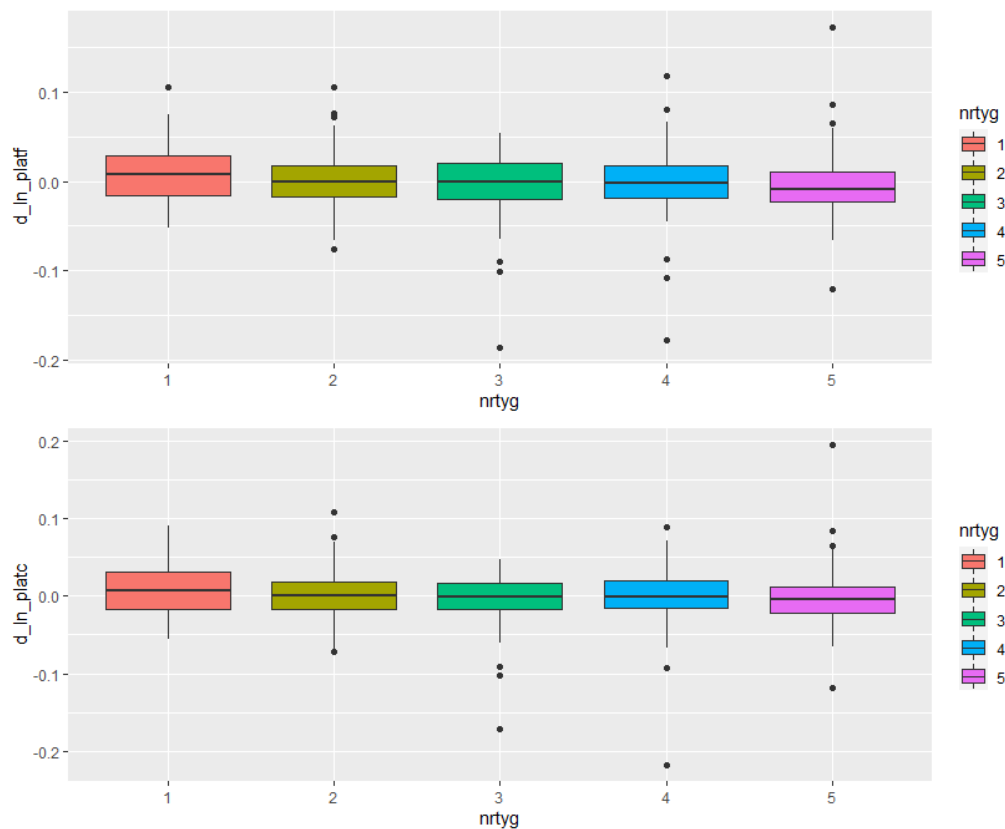
W celu dopełnienia powyższych analiz badanych instrumentów finansowych dodatkowo zostały wykonane testy weryfikujące hipotezy dotyczące średniej, skośności, kurtozy, normalności rozkładu oraz efektu dnia w średniej i wariancji. Do przetestowania hipotez dotyczących średniej, skośności oraz kurtozy test został przetestowany w trzech wariantach: dwustronny, lewostronny; prawostronny. Wariant dwustronny weryfikuje hipotezę zerową odnośnie, czy dana miara jest równa 0, względem hipotezy alternatywnej mówiącej o tym, że miara jest różna od zera. W teście lewo i prawo stronnym hipoteza zerowa pozostaje taka sama, natomiast hipoteza alternatywna zmienia się odpowiednio: mniejsza od 0 i większa od 0. Test na normalność rozkładu został przeprowadzony testem Jarque-Bera, który wykorzystuje miary skośności oraz kurtozy do obliczenia odpowiedniej statystyki. Weryfikacja hipotez odnoszących się do występowania efektu dnia, tygodnia i miesiąca w średniej i wariancji zostały wykonane odpowiednio testami: Kruskala-Wallisa i Browna-Forsythe'a. W celu lepszego zobrazowania rozkładów zmiennych, wykonanie odpowiednich testów zostało poprzedzone utworzeniem wykresów skrzynkowych.



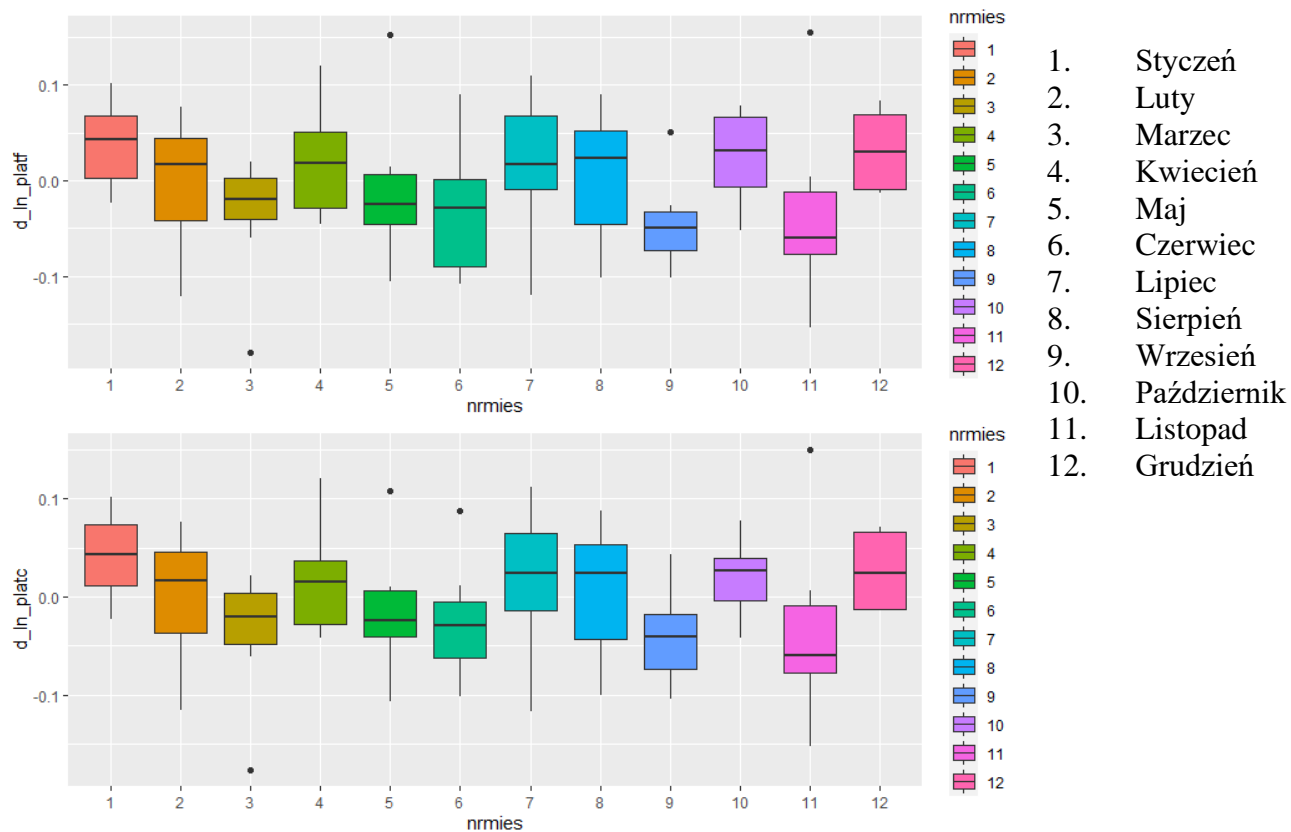
Rys. 10. Wykresy skrzynkowe dla logarytmicznych stóp zwrotu dla poszczególnych dni tygodnia.

Źródło: Opracowanie własne za pomocą RStudio i pakietu R „ggplot2”.





Rys. 11. Wykresy skrzynkowe dla logarytmicznych stóp zwrotu dla poszczególnych tygodni.  
Źródło: Opracowanie własne za pomocą RStudio i pakietu R „ggplot2”.



Rys. 12. Wykresy skrzynkowe dla logarytmicznych stóp zwrotu dla poszczególnych miesięcy.  
Źródło: Opracowanie własne za pomocą RStudio i pakietu R „ggplot2”.

**Tabela 10. Wartości krytyczne z tablicy T-studenta, rozkładu normalnego i chi-kwadrat wraz z poziomami istotności.**

$\alpha$ :	<b>0,025</b>	<b>0,05</b>
<i>T-student</i>	1,96	1,65
<i>R. Norm.</i>	1,96	1,64
<i>Chi<sup>2</sup>(k=2)</i>	-	5,9915

Źródło: Tablice statystyczne w programie Gretl

**Tabela 11. Statystyki testowe obliczone na podstawie odpowiednich miar.**

<i>Zmienna</i>	Statystyka testu:			
	średniej	skośności	kurtozy	JB
$\Delta \ln pl.f$	-0,242924	-5,72126659	55,23963818	3084,15
$\Delta \ln pl.c$	-0,256277	-10,8698071	67,35183615	4654,42
$\Delta \ln pl.f$	-0,235414	-2,45504067	16,94618935	293,20
$\Delta \ln pl.c$	-0,239170	-3,46249162	26,62785543	721,03
$\Delta \ln pl.f$	-0,375769	-0,20891964	-0,459995661	0,26
$\Delta \ln pl.c$	-0,393082	-0,54622545	-0,278425633	0,38

Źródło: Opracowanie własne z wykorzystaniem programu Excel.

Procedura testowa polega na porównaniu odpowiedniej statystyki z wartością krytyczną odczytaną z tablic t-studenta dla testów dotyczącej średniej, tablic rozkładu normalnego dla testów dotyczących skośności i kurtozy oraz tablic chi-kwadrat ( $k$ =liczba stopni swobody) dla testu dotyczącego normalności rozkładu. Dla wariantu testu dwustronnego poziom istotności przyjmuje 0.025, natomiast dla testów jednostronnych 0.05. Przy testach dwustronnych należy obliczyć wartość bezwzględną otrzymanej statystyki. W przypadku testów dwustronnego, lewostronnego, prawostronnego i testu Jarque-Bera, jeżeli wartość statystyki testowej jest mniejsza od wartości krytycznej, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. W odwrotnej sytuacji należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść odpowiedniej hipotezy alternatywnej. Poniżej zaprezentowano decyzje wyciągnięte na podstawie otrzymanych wyników.

**Tabela 12. Weryfikacja hipotez dla testów dotyczących skośności i kurtozy.**

<i>Zmienna</i>	Test					
	Sk=0			Kr=0		
	Lewostronny	Dwustronny	Prawostronny	Lewostronny	Dwustronny	Prawostronny
$\Delta \ln pl.f$	H1	H1	H0	H0	H1	H1
$\Delta \ln pl.c$	H1	H1	H0	H0	H1	H1
$\Delta \ln pl.f$	H1	H1	H0	H0	H1	H1
$\Delta \ln pl.c$	H1	H1	H0	H0	H1	H1
$\Delta \ln pl.f$	H0	H0	H0	H0	H0	H0
$\Delta \ln pl.c$	H0	H0	H0	H0	H0	H0

Źródło: Opracowanie własne.

Testy dotyczące miary skośności wykazały, że w przypadku logarytmicznych stóp zwrotu o częstotliwości dziennej i miesięcznej, należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Wariant dwustronny określa, że skośność jest różna od zera, natomiast wariant lewostronny ukierunkowuje to stwierdzenie i mówi, że rozkład tych zmiennych jest lewostronny. W przypadku logarytmicznych stóp zwrotu dla danych o częstotliwości miesięcznej nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej w każdym z badanych wariantów. Dla testów dotyczących kurtozy należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej dla danych o częstotliwości dziennej oraz tygodniowej dla wariantu testu dwustronnego i prawostronnego. Oznacza to, że kurtoza dla tych zmiennych posiada grube ogony. Ponownie, w przypadku danych o częstotliwości miesięcznej nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

**Tabela 13. Wartość statystyki testowej dla testu Kruskala-Wallisa**

Zmienna	KW	wart. kryt. Chi-kwadrat
$\Delta \ln pl.f$	2,95	9,49
$\Delta \ln pl.c$	-6,57	9,49
$\Delta \ln pl.f$	4,22	9,49
$\Delta \ln pl.c$	3,56	9,49
$\Delta \ln pl.f$	14,76	19,68
$\Delta \ln pl.c$	14,27	19,68

Źródło: Opracowanie własne.

**Tabela 14. Wartość statystyki testowej dla testu Browna-Forsythe'a**

Zmienna	BF	wart. kryt. F	P-value
$\Delta \ln pl.f$	1,82	2,38	0,12234
$\Delta \ln pl.c$	1,12	2,38	0,34514
$\Delta \ln pl.f$	1,01	2,40	0,40295
$\Delta \ln pl.c$	1,00	2,40	0,40869
$\Delta \ln pl.f$	1,17	1,93	0,32895
$\Delta \ln pl.c$	1,18	1,93	0,32705

Źródło: Opracowanie własne.

**Tabela 15. Weryfikacja hipotez dla testów dotyczących średniej, normalności rozkładu, efektu dnia w średniej i efektu dnia w wariancji.**

Zmienna	Test					
	$\bar{S}r=0$			Normalność	Ef dn $\bar{s}r$	Ef dn war
	Lewostronny	Dwustronny	Prawostronny			
$\Delta \ln pl.f$	H0	H0	H0	H1	H0	H0
$\Delta \ln pl.c$	H0	H0	H0	H1	H0	H0
$\Delta \ln pl.f$	H0	H0	H0	H1	H0	H0
$\Delta \ln pl.c$	H0	H0	H0	H1	H0	H0
$\Delta \ln pl.f$	H0	H0	H0	H0	H0	H0
$\Delta \ln pl.c$	H0	H0	H0	H0	H0	H0

Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku danych o każdej z badanych częstotliwości nie należy odrzucić hipotezy zerowej, która mówi o tym, że średnia jest równa 0. Oznacza to, że logarytmiczne stopy zwrotu posiadają średnią bliską zero, co dodatkowo postuluje za ich stacjonarnością. Wśród badanych zmiennych, tylko logarytmiczne stopy zwrotu o częstotliwości miesięcznej okazały się posiadać rozkład normalny. Mimo przeprowadzenia dla tych danych testu Kruskala-Wallisa, z powodzeniem można byłoby zastosować test ANOVA. Wartości logarytmicznych stóp zwrotu dla danych o częstotliwości dziennej i tygodniowej nie posiadają rozkładu normalnego. W przypadku testów dotyczących efektu dnia, tygodnia oraz miesiąca dla średniej i wariancji, nie należy odrzucić hipotezy zerowej w każdym badanym przypadku. Wszystkie analizowane logarytmiczne stopy zwrotu posiadają równe rozkłady (nie różnią się co do miary położenia) oraz wariancję dla grup przy badanych częstotliwościach. Innymi słowy, dla wszystkich zmiennych występuje brak efektów dnia, tygodnia i miesiąca w średniej oraz wariancji.

## **7. Zakończenie.**

Za pomocą powyższej analizy udało się dokonać wglądu w badane zmienne, a także zweryfikować istotne do dalszego badania hipotezy. Szereg czasowy ceny natychmiastowej platyny oraz ceny jej kontraktu terminowego nie różnią się znacznie między sobą. Różnią się natomiast własności tych szeregów w zależności od częstotliwości tych zmiennych. Przygotowana analiza jest podstawą do przejścia ku następnemu etapowi projektu jakim będzie weryfikacja prawa jednej ceny i modelowanie wektorowo-autoregresyjne.