Ecuaciones Diferenciales
Ejercicios

MATERIA: La Transformada de Laplace

*Estudiar fracciones parciales

1. Defina la transformada de Laplace para una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.
   ¿ Qué condiciones debe cumplir f para que $\mathcal{L}[f(t)]$ exista ?

2. Determine $\mathcal{L}[f(t)]$ en cada uno de los siguientes casos;

   a) $f(t) = e^{at-b}$ b) $f(t) = b \operatorname{sen} at$ c) $f(t) = \cos^2 t$
   d) $f(t) = 3e^{-t} + 5\cos 3t$ e) $f(t) = (1 + te^{-t})^2$

3. Señale el primer Teorema de traslación y dé un ejemplo.

4. Pruebe que si $\mathcal{L}[f(t)] = \varphi(s)$ entonces $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{s}{a}\right)$

5. Basándose en lo anterior, determine $\mathcal{L}[f(2t)]$ si $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{s^2 - s + 1}{(2s+1)^2(s-1)}$.

6. Como se sabe, $\cosh at = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$. Determine $\mathcal{L}[\cosh at]$ y con este resultado y los anteriores, determine $\mathcal{L}[e^{4t}\cosh 5t]$ Determine $\mathcal{L}[e^{-t}\operatorname{senh} at]$.

7. Del primer Teorema de traslación, se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}[\varphi(s-a)] = e^{at} f(t) \quad \text{donde} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\varphi(s)]$$

   Aprovechando este resultado, determine;

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right]$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right]$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{s^2-4s+18}\right]$

8. Mediante inducción, se prueba que si $\mathcal{L}[f(t)] = \varphi(s)$, entonces $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n\varphi}{ds^n}$.
   Utilizando este resultado, determine

   a) $\mathcal{L}[t^n]$ b) $\mathcal{L}[t^2\cos at]$ c) $\mathcal{L}[te^{-3t}]$

9. Determine una expresión para $\mathcal{L}^{-1}\left[(-1)^n \dfrac{d^n\varphi}{ds^n}\right]$ y según esto, determine

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right]$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s^2-2s+2}{s^3}\right]$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{(s-1)^3}\right]$

10. Demuestre que $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$. Calcule $\mathcal{L}[f''(t)]$ si $f(t) = e^{2t}\operatorname{sen} 3t$. Generalice estos resultados para $\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]$