Содержание

Введение

Финансовая экономика характеризуется широким набором как классических рыночных инструментов, так и производных ценных бумаг, комбинируя которые можно получать структурированные и гибридные продукты. Эти продукты востребованы в качестве привлекательного инструмента инвестирования, а также как возможность гибкого перераспределения рисков [4].

Рис. 1. Классификация финансовых инструментов

Конвертируемой называется облигация, которую инвестор может обменять (проконвертировать) на обыкновенные акции. Основые характиристики таких облигаций: номинальная стоимость, купонная ставка, срок обращения, коэффициент конвертации и цена конвертации.

Структурные продукты – финансовые инструменты с оговоренными сроками обращения, включающие в себя несколько других финансовых инструментов, которые являются базисными активами: депозиты, облигации, акции, фьючерсы, опционы и т. д.. Доход по структурным продуктам заранее не определен и зависит от изменения цен базисных активов либо кредитных событий по данным активам.

Структурные продукты предлагают банки и финансовые институты (брокеры, управляющие компании). Юридически структурный продукт может быть оформлен в виде депозита, договора доверительного управления, ноты (облигации), сертификата, варранта. Структурные продукты, выпущенные в форме ценных бумаг, могут обращаться на биржевом и внебиржевом рынках.

Все структурные продукты несут в себе кредитный риск, то есть риск того, что продавец структурного продукта не сможет выполнить свои обязательства перед инвестором. Обычно государство не страхует обязательства банков по структурным продуктам перед частными инвесторами – в отличие от депозитов. Вторым встроенным риском является риск ликвидности. Структурные продукты гораздо менее ликвидны, чем акции «голубых фишек». Наименьший риск ликвидности у структурных нот (сертификатов и варрантов), поскольку их можно продать на бирже или на внебиржевом рынке, однако чем сложнее структурный продукт, тем сложнее его продать и тем больший дисконт к текущей цене нужно предлагать при продаже, чтобы его немедленно реализовать. Прочие виды структурных продуктов реализовать досрочно нельзя, однако эмитент продукта может прописать в условиях договора опцию досрочного погашения.

1. Основные определения

Определение 1. *Структурированный финансовый продукт – комплексный финансовый продукт, выпускаемый преимущественно коммерческими и инвестиционными банками и конструируемый для удовлетворения специфических потребностей клиентов, обладающий нестандартными характеристиками (соотношением риска и доходности, структурой потоков), достигаемыми за счет комбинирования в структуре продукта постоянных и переменных потоков активов (денежных и неденежных), дополненных различными дополнительными условиями (например, правом отмены потока, правом изменения параметра потока, и т. д.).*

Структурированный финансовый продукт может иметь форму традиционного финансового инструмента - облигации, векселя, депозита, пая фонда - или набора связанных инструментов [3].

Укажем на важные черты структурированных продуктов.

- **Финансовый продукт.** Прежде всего, структурированный продукт является финансовым продуктом.
- **Нестандартные характеристики.** Структурированный продукт является финансовым продуктом, обладающим нестандартными, не свойственными традиционным инструментам (в том числе производным финансовым инструментам), характеристиками. Данную особенность структурированных продуктов необходимо отметить для того, в частности, чтобы более четко разграничить структурированные продукты и производные финансовые инструменты (деривативы).
- **Комплексность.** Структурированные продукты – продукты комплексные, составные, и обычно могут быть представлены в виде подчиненных, более простых компонентов, из которых они состоят.
- **Потоки активов** – основа структурированных продуктов. Потоки могут быть денежными и потоками неденежных активов. Потоки могут также быть разделены на постоянные и переменные. Поток актива – передача одной стороной другой стороне некоторого количества актива в определенную дату. Чаще всего актив является денежным – в этом случае речь идет о денежных потоках.

Пример 1. *Активом потока может также быть, например, некоторая акция – передача 10 акций Газпрома 5 мая 2024 года является примером потока актива.*

Постоянный поток актива – поток, у которого все параметры (дата, актив, количество) фиксируются заранее. У переменного потока актива один или несколько параметров привязываются к внешним величинам. Например, сумма денежного потока может определяться как произведение цен двух определенных акций через 1 год.

- **Преобладание коммерческих и инвестиционных банков среди эмитентов структурированных продуктов.** Важной чертой структурированных продуктов является то, что они выпускаются прежде всего коммерческими и инвестиционными банками Банки выпускают данные продукты не ради привлечения капитала, а ради получения прибыли.
- **Конструирование для достижения поставленных целей.** Структурированный продукт является результатом анализа потребностей пользователя продукта и основанного на этом анализе конструирования.
- **Ориентированность на удовлетворение специфических потребностей пользователей.** Структурированный продукт конструируется таким образом, чтобы удовлетворить специфические потребности потребителя этого продукта. Важно отметить, что акцент делается на удовлетворении потребностей инвестора, а не эмитента.
- **Различные внешние формы.** Второй абзац определения говорит о том, что структурированный продукт может иметь различные внешние формы. Этот факт очень важно подчеркнуть, поскольку очень часто структурированные продукты скрываются под видом стандартных финансовых инструментов – например, векселей или паев фондов. Сущность структурированного продукта, однако, определяется не его внешней формой, а его экономической сутью, набором генерируемых потоков и другими условиями.

Задачи, решаемые с помощью структурных продуктов.

- Создание инвестиционных продуктов с нестандартным соотношением риска и доходности.

- Достижение нестандартной зависимости от рыночных переменных.
- Гарантирование возврата инвестиционного капитала.
- Выход на другие рынки.
- Выбор оптимального времени для открытия и закрытия позиции.
- Управление рисками.
- Дешевый способ решения традиционных финансовых задач.
- Покупка ценных бумаг с рычагом и короткая продажа.
- Изменение структуры инвестиционного портфеля.
- Репликация фондового индекса или другого портфеля.
- Снижение стоимости заимствования денежных средств.

Пример 2. *В день окончания срока структурного продукта банк обязуется вернуть вложенные средства инвестору, а доход инвестор получит, если акция, например, Сбербанка не будет опускаться ниже 275 руб. в течение срока действия структурного продукта. Предложенный доход будет больше, чем доход по депозиту.*

Определение 2. *Спот контракт – соглашение о покупке или продаже актива в текущий момент времени.*

Определение 3. *Форвардный контракт – это соглашение о покупке или продаже актива в определенный момент в будущем по определенной цене. Форвардный контракт торгуется на внебиржевом рынке (over-the-counter, OTC) – обычно между двумя финансовыми учреждениями или между финансовым учреждением и одним из его клиентов.*

Одна из сторон форвардного контракта предполагает *длинную позицию* и соглашается купить базовый актив в определенную дату в будущем по определенной цене. Другая сторона занимает *короткую позицию* и соглашается продать актив в тот же день по той же цене.

В общем виде *выплата* (payoff) по длинной и короткой позициям в форвардном контракте на одну единицу актива определяется соответственно

$$S_T - K \quad \text{и} \quad K - S_T,$$

где K – цена поставки, S_T — спот-цена актива на момент погашения контракта. Заметим, что выплаты могут быть положительными или отрицательными.

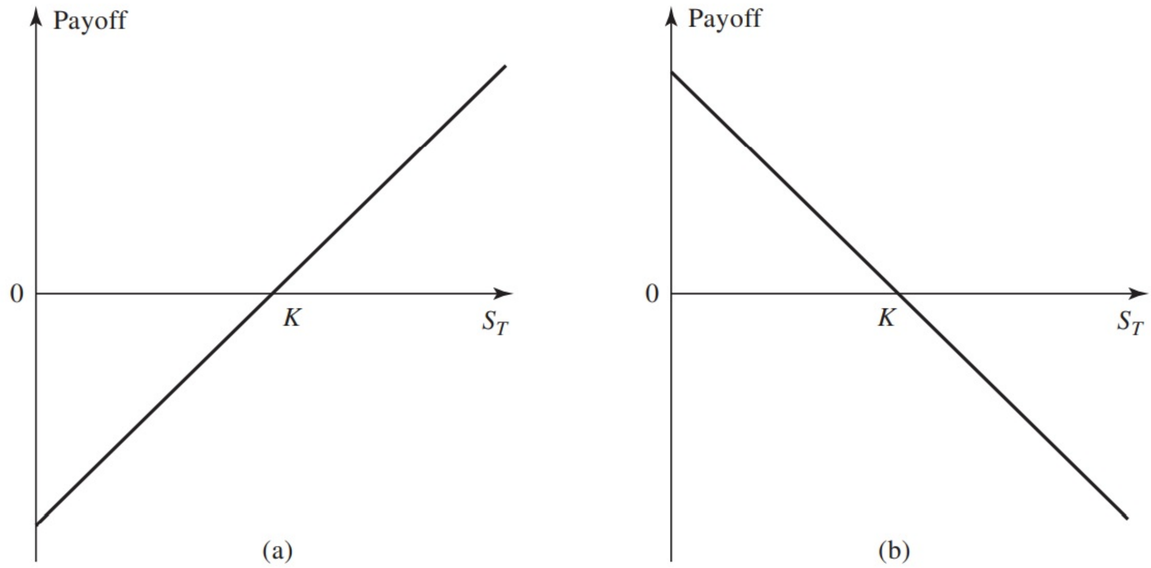

Рис. 2. Выплаты по форвардным контрактам:
a) длинная позиция, b) короткая позиция.

Определение 4. *Фьючерсный контракт – это соглашение между двумя сторонами о покупке или продаже актива в определенный момент в будущем по определенной цене.*

В отличие от форвардных контрактов фьючерсные контракты обычно торгуются на бирже, которая определяет стандартизированные характеристики контракта.

Определение 5. *Опцион – это срочный контракт, который дает право одному из его участников отказаться от исполнения сделки.*

В опционном контракте участвуют два лица. Одно лицо покупает опцион, т. е. приобретает право выбора исполнить или не исполнить контракт. Другое лицо продает (выписывает) опцион, т. е. предоставляет право выбора. Покупатель опциона уплачивает продавцу вознаграждение, называемое *премией*. Премия уплачивается в момент заключения контракта. Продавец опциона обязан исполнить свои контрактные обязательства, если покупатель (держателем) опциона решает его исполнить. Если покупатель не исполняет опцион, то контракт истекает для продавца без наступления обязательств. Покупатель имеет право исполнить опцион, т. е. купить или продать базисный актив по цене, которая указана в контракте. Она называется ценой исполнения.

С точки зрения сроков исполнения контрактов опционы подразделяются на три типа: американские, европейские и бермудские. *Американский опцион* можно исполнить в любой день до истечения срока действия контракта, *европейский* – только в день истечения контракта. *Бермудский опцион* дает право исполнить его в определенные моменты времени в течение действия контракта.

Определение 6. *Класс опционов – совокупность всех опционов одного типа (например, колл) с одинаковым базисным активом.*

Определение 7. *Серия опционов – совокупность опционов из одного класса с одинаковой ценой и сроками исполнения.*

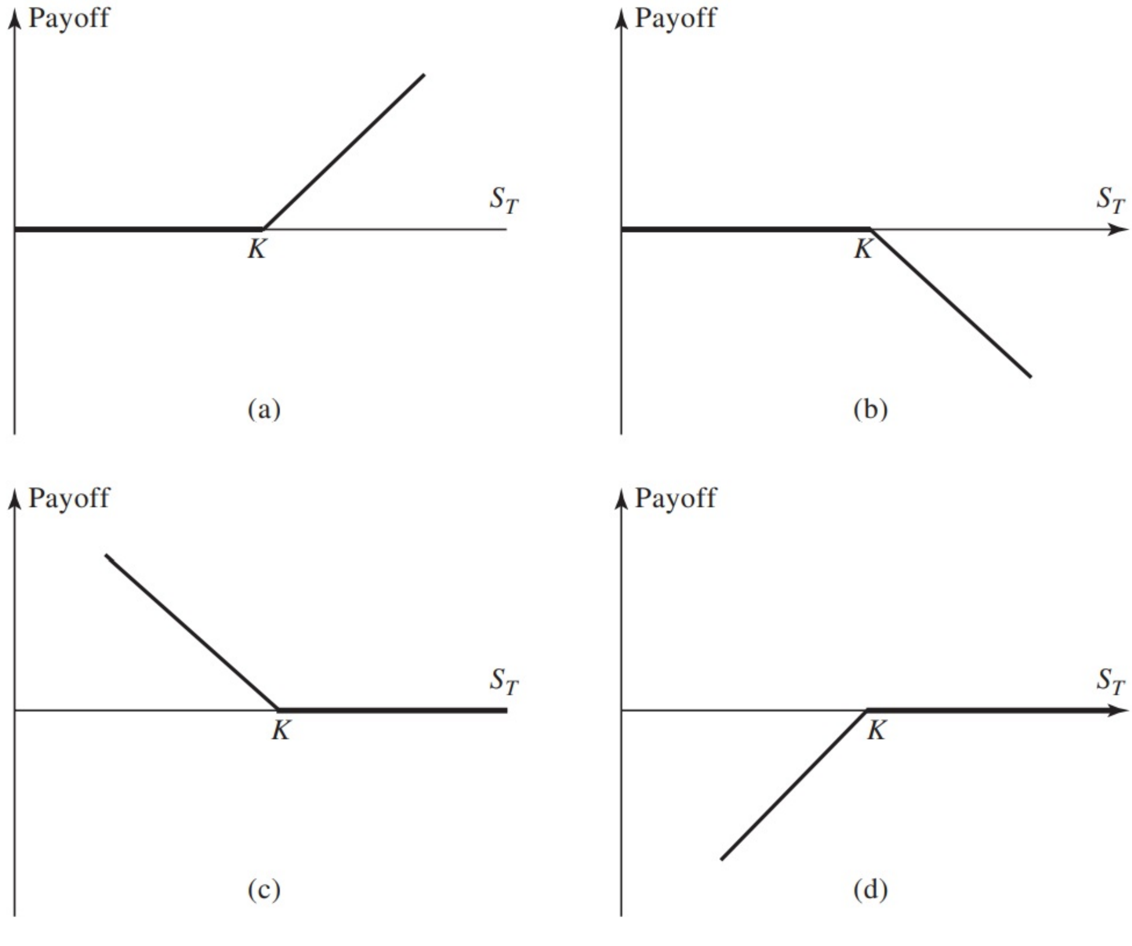

Рис. 3. Выплаты по европейским опционам: a) покупка call; b) продажа call; c) покупка put; d) продажа put. K – страйк, S_T – цена базового актива в момент исполнения контракта.

Если K – цена страйк, S_T – цена базового актива в момент исполнения контракта, то выплата по длинной позиции на европейский опцион колл:

$$\max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+.$$

Функция выплаты отражает факт, что опцион будет исполнен, если $S_T > K$ и не будет исполнен, если $S_T \leq K$.

Выплата держателю короткой позиции по европейскому опциону колл равна

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0).$$

Выплата держателю длинной позиции по европейскому опциону пут равна

$$\max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$$

и выплата держателю короткой позиции по европейскому опциону пут равна

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0).$$

На рис. 5 приведены функции выплат для различных типов европейских опционов.

Если S – спот цена базового актива, K – цена страйк, то для опциона call справедливы следующие определения:

1) $S > K$ – в деньгах (in the money, ITM),
2) $S = K$ – около денег (at the money, ATM),
3) $S < K$ – вне денег (out of the money, OTM).

Аналогично для опциона put справедливы следующие определения:

1) $S < K$ – в деньгах (in the money),
2) $S = K$ – около денег (at the money),
3) $S > K$ – вне денег (out of the money).

Очевидно, что опцион будет исполнен, если он в деньгах.

Определение 8. *Внутренняя стоимость опциона – это текущая разница между страйком и ценой базового актива, т. е. это доход, который покупатель опциона мог бы получить, если бы исполнил его прямо сейчас (без учёта уплаченной премии).*

В Таблице 1 знак «+» указывает, что увеличение переменной приводит к увеличению или сохранению цены опциона неизменной; знак «–» указывает на то, что увеличение переменной приводит к тому, что

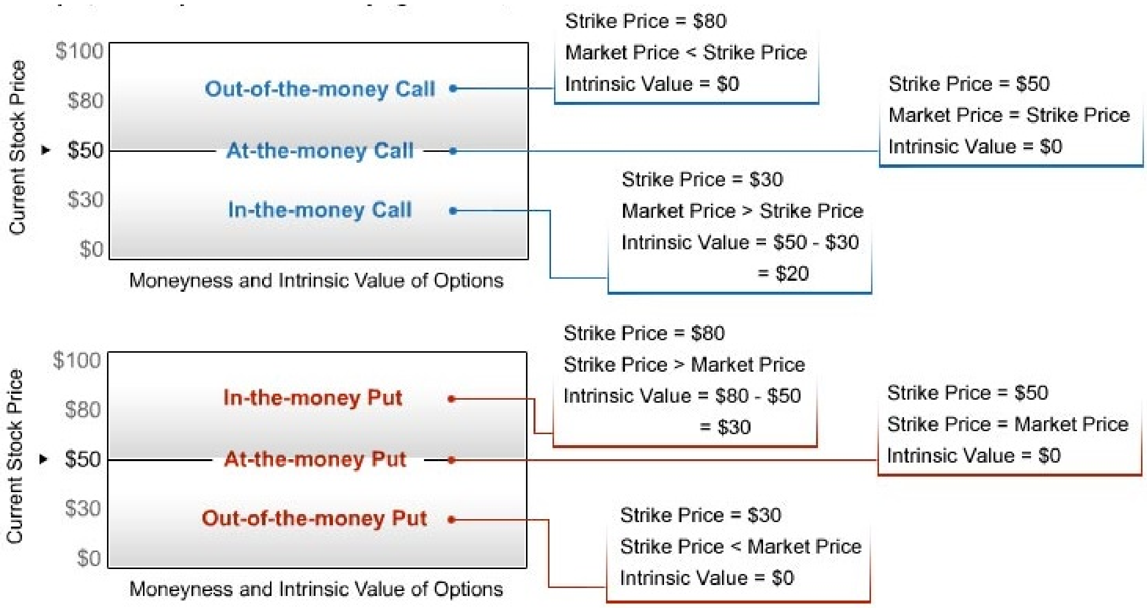

Рис. 4. Денежность и внутренняя стоимость для опционов при стоимости базового актива 50 USD

Таблица 1: Влияния на цену опциона увеличения одной переменной при фиксированных значениях других

Переменная	Европейский		Американский	
	call	put	call	put
Цена базового актива, S	+	−	+	−
Цена страйк, K	−	+	−	+
Время до исполнения, T	?	?	+	+
Волатильность, σ	+	+	+	+
Безрисковая ставка, r	+	−	+	−
Девидентная доходность, q	−	+	−	+

цена опциона уменьшается или остается неизменной; знак «?» указывает на то, что связь неопределенна.

Далее мы будем придерживаться следующих обозначений:

- S_0 – текущая цена базового актива (current stock price),
- K – цена страйк опциона (strike price of option),
- T – время до экспирации опциона, в годах (time to expiration of option),
- S_T – цена базового актива на дату исполнения (stock price on the expiration date),
- r – непрерывно начисляемая безрисковая ставка (continuously compounded risk-free rate of interest for an investment maturing in time T),
- q – ставка дивиденда, как непрерывно начисляемый процент (continuously compounded asset yield),
- C – стоимость американского опциона колл (Value of American call option to buy one share),
- P – стоимость американского опциона пут (Value of American put option to sell one share),
- c – стоимость европейского опциона колл (Value of European call option to buy one share),
- p – стоимость европейского опциона пут (Value of European put option to sell one share),
- $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp^{-u^2/2} du$ – одномерная функция распределения случайной нормальной величины (Cumulative probability distribution function for a variable with a standard normal distribution),
- $M(a, b; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} \exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dxdy$ – двумумерная функция распределения нормальных случайных величин $x < a$ и $y < b$, ρ – коэффициент корреляции,
- $F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$ – форвардная цена контракта с экспирацией T.

Для европейских опционов справедливо равенство, которое называется паритет put-call:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

Для американских опционов на бездивидендный актив справедливо соотношение

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}.$$

1.1. Модель Блека-Шоулза-Мертона

В основе ценообразования опционов лежит принцип оценки нейтральный к риску, который соотносит ожидаемую стоимость финансового продукта в будущем с его текущей ценой. Стандартные (ванильные) опционы имеют теоретическую цену, которую можно определить с помощью формулы Блэка-Шоулза.

Модель Блэка-Шоулза-Мертона (Black-Scholes-Merton, BSM) построена на основе предположения, что цена актива следует геометрическому броуновскому движению с постоянным дрейфом (drift) и волатильностью (volatility):

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sigma dW,$$

где S – цена актива, r – непрерывно начисляемая безрисковая ставка, σ – стандартное отклонение доходности базового актива (annualized volatility), dW – Винеровский процесс.

Также при выводе формул ценообразования для европейских опционов колл и пут были сделаны следующие предположения:

- возможна короткая продажа актива;
- транзакционные издержки не учитываются;
- ценные бумаги совершенно делимы и торговля непрерывна;
- не существует безрисковых арбитражных возможностей;
- безрисковая процентная ставка является постоянной для всех сроков погашения и по этой ставке можно брать и выдавать кредит.

Приведем уравнение Black-Scholes-Merton в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial f^2}{\partial S^2} = rf. \qquad (1)$$

Если мы определим граничные условия

$$\begin{cases} f(S,T) = \max(S - K, 0), & t = T, \\ f(S,t) \to S, & t \to \infty, \\ f(0,t) = 0, & \forall t. \end{cases}$$

Решением уравнения (1) является оценка стоимости опциона колл в начальный момент времени

$$c = Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),$$

где
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

На премию ванильного опциона влияет ряд факторов, таких как волатильность, цена исполнения, время до погашения и т. д. В теории ценообразования опционов Блэка-Шоулза на цену опциона влияют следующие факторы:

- S_t – текущая цена базового актива;
- K – цена исполнения (страйк);
- T – время до погашения (time to maturity);
- σ – волатильность базового актива;
- r – процентная ставка (interest rate);
- q – дивидендная доходность.

Формулы Блэка-Шоулза позволяют аналитически оценить стоимость опционов европейского типа, стоимость американских опционов можно только аппроксимировать.

1.2. Модель Блека для оценки опционов на фьючерсы

Предполагая, что цена фьючерса также как и цена базового актива следует лог-нормальному закону можно записать оценки стоимости европейских опционов кол и пут на фьючерсы в следующем виде:
$$c = e^{-rT}(F_0 N(d_1) - KN(d_2)), \quad p = e^{-rT}(KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)),$$
где
$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma_2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$
σ – волатильность цены фьючерса. Фьючерская цена равна цене спот к моменту истечения срока действия контракта. Поэтому премии двух опционов – опциона на фьючерс и опцион на актив, лежащий в основе фьючерса, будут одинаковыми, если фьючерс и опцион имеют одну и ту же цену исполнения и дату исполнения.

Для обобщения модели Блэка-Шоулза будем учитывать стоимость переноса (cost of carry) позиции b:
$$c_{BSM} = Se^{(b-r)T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),$$
$$p_{BSM} = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{(b-r)T}N(-d_1),$$

где при
$b = r$ получаем модель Блека-Шоулза (1973) для опционов,
$b = r - q$ – модель Мертона (1973) для акций с непрерывно начисляемыми процентами,
$b = 0$ – модель Блека (1976) для опционов на фьючерсы,
$b = 0$ и $r = 0$ – модель Asay (1982) для опционов на фьючерсы, где премии являются маржинальными,
$b = r - r_f$ – модель Garman-Kohlhagen (1983) для валютных опционов.

1.3. Биномиальная модель

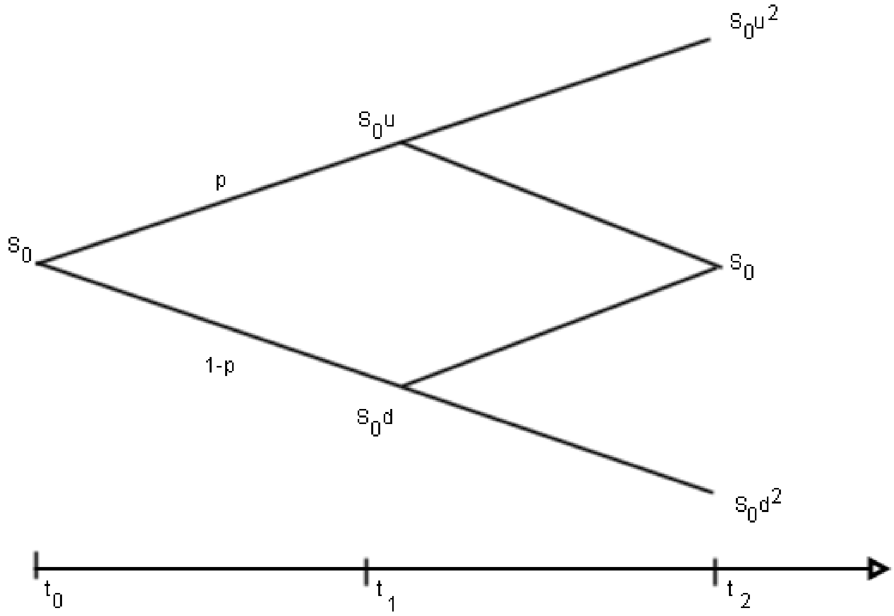

Рис. 5. Биномиальное дерево.

Пусть начальная цена акции равна S_0 в момент t_0 и имеет возможность перейти в S_0u или S_0d в момент t_1. Обозначим p – риск-нейтральная вероятность того, что цена вырастет с S_0 до S_0u. Определим ожидаемую доходность акций в момент времени t_1 с использованием нейтральной к риску оценки:

$$\mathbf{E}(S_{t_1}) = pS_0u + (1-p)S_0d = S_0e^{r(t_1-t_0)},$$

тогда $p = \frac{e^{r(t_1-t_0)}-d}{u-d}$.

Для нахождения значений параметров u и d используем дисперсию доходности цены актива, которую приравняем к $\sigma^2\Delta t$:

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2\Delta t.$$

Ограничимся членами до порядка Δt^2 и используем $ud = 1$, получим

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Приведенное рассуждение применим для оценки опциона. Пусть f – текущая стоимость опциона на акцию. Пусть выигрыш опциона после одного шага (в нашем случае это время T) равен f_u и f_d для движения акций вверх и вниз соответственно, тогда стоимость опциона запишем в виде:

$$f = e^{-rT}(pf_u + (1-p)f_d).$$

Рассуждения выше можно обобщить на n временных промежутков, на каждом из них стоимость акции может расти с коэффициентом u или убывать с коэффициентом d:

$$c = S_0 \left(\sum_{j=k_0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right) - \frac{k}{r^n} \sum_{j=k_0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Здесь j – количество периодов роста стоимости акции; $(n-j)$ – количество периодов убывания стоимости акции; k_0 – минимальное количество переходов стоимости акции вверх, необходимое для исполнения опциона call, r – безрисковая процентная ставка за один период. Данные параметры удовлетворяют неравенству

$$S_0 u^{k_0} d^{n-k_0} > K,$$

$p = \frac{r-d}{u-d}$ – риск-нейтральная вероятность роста стоимости акции на каждом промежутке $0 < d < r < u$.

1.4. Коэффициенты чувствительности премии опционов

Определение 9. *Дельта опциона, Δ – это характеристика опциона, которая показывает, насколько изменится стоимость опциона по сравнению с изменением базового контракта.*

Когда опцион колл глубоко в деньгах, то 1 пункт изменения цены приводит к изменению цены опциона на 1 пункт ($\Delta = 100$).

Когда опцион далеко вне денег, даже большое изменение цены базового актива приводит к минимальным изменениям цены опциона ($0 < \Delta \ll 100$).

Дельта опциона пут отрицательная, поскольку при снижении базового актива, цена опциона пут растет.

Дельта опциона колл и пут может быть вычислена как

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S}, \quad \Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S}.$$

В модели Блека-Шоулза $\Delta_c = N(d_1)$, $\Delta_p = N(d_1) - 1$. Для дельт опционов выполняется $\Delta_c - \Delta_p = 1$.

Определение 10. *Гамма, γ – это характеристика опциона, которая показывает в какой мере изменится значение дельты опциона при изменении цены базового актива на один пункт.*

То есть изменение цены опциона не только зависит от изменения цены базового актива, но и происходит с определенным ускорением. Гамма у опционов с одним и тем же страйком одинакова в момент времени. Чем ближе опцион к деньгам и дата его экспирации, тем выше его гамма.

Гамма опциона колл и пут равны и могут быть вычислены как [1]

$$\gamma_c = \gamma_p = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)e^{(b-r)T}}{S\sigma\sqrt{T}} > 0.$$

Определение 11. *Вега опциона, v – это характеристика опциона, которая определяет зависимость теоретической цены опциона от волатильности базового актива. Вегу выражают через число пунктов изменение стоимости опциона на каждый процентный пункт изменения волатильности.*

Вега опциона колл и пут равны и могут быть вычислены как

$$v_c = \frac{\partial c}{\partial \sigma}, \quad v_p = \frac{\partial p}{\partial \sigma}.$$

В модели Блека-Шоулза $v_c = v_p = S\sqrt{T}N'(d_1)$.

Определение 12. *Тета, θ – это характеристика опциона, которая измеряет чувствительность цены опциона ко времени при прочих равных параметрах.*

Тета, как правило, имеет отрицательное значение, если трейдер владеет опционами, и положительное – если трейдер имеет короткую опционную позицию.

Тета опциона колл и пут равны и могут быть вычислены как

$$\theta_c = -\frac{\partial c}{\partial T}, \quad \theta_p = -\frac{\partial p}{\partial T}.$$

В модели Блека-Шоулза

$$\theta_c = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2),$$

$$\theta_p = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2).$$

Определение 13. *Ро, ρ – это характеристика опциона, которая измеряет чувствительность цены опциона к изменению процентной ставки на один процентный пункт.*

Ро опциона колл и пут равны и могут быть вычислены как

$$\rho_c = -\frac{\partial c}{\partial r}, \quad \rho_p = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

В модели Блека-Шоулза

$$\rho_c = KTe^{-rT}N(d_2), \quad \rho_p = -KTe^{-rT}N(-d_2).$$

Задача 1. *Допустим, что условия модели Блека-Шоулза выполнены. Текущая цена бездивидентных акций равна 100, волатальность 30%, цена страйк 100, время до экспирации один год, безрисковая ставка 7%. Оцените справедливую стоимость опциона колл и вычислите дельту опциона колл.*

Листинг 1: Option Call

```
from scipy.stats import norm
import numpy as np

def call_price(S, K, T, r, q, sigma):
    d1=(np.log(S/K)+(r+sigma**2/2)*(T))/(sigma*np.sqrt(T))
    d2=d1 - sigma*np.sqrt(T)
    return S*np.exp(-q*(T))*norm.cdf(d1) - K*np.exp(-r*(T))
      ↪ *norm.cdf(d2)
```

```python
def call_delta(S, K, T, r, b, sigma):
    d1 = (np.log(S/K) + (b + sigma ** 2 / 2) * T) / (sigma
      ↪ * np.sqrt(T))
    return np.exp((b-r)*T) * norm.cdf(d1)

S=100
K=100
T=1
r=0.07
q=0
sigma=0.3

call_price(S, K, T, r, q, sigma)
# 15.210500635727158

call_delta(S, K, T, r, r-q, sigma)
# 0.6492636865167812
```

1.5. Опционные стратегии

Стратегий работы на рынке опционов за долгие годы было разработано множество, и все они довольно хорошо описаны в литературе [2].

Опционные стратегии делятся на три типа:

1) Стратегии на рост базового актива. Они подойдут тем, кто ждет ралли в акциях и хочет на этом заработать больше, чем это возможно при покупке акций;
2) Стратегии на снижение для тех, кто ждет коррекции на рынке акций и хочет застраховать действующий портфель от снижения стоимости либо заработать на снижении рынка;
3) Нейтральные стратегии для тех, кто не знает, куда пойдет рынок акций, но ожидает резкого роста или снижения волатильности и хочет на этом заработать.

Пусть $K_c = \{k_c^i \in \mathbb{Z}_{>0}, i \in I\}$ и $K_p = \{k_p^i \in \mathbb{Z}_{>0}, i \in I\}$ – страйки опционов колл и пут, $K = \{K_c \cup K_p\}$ – множество уникальных страйков, $\mathbb{Z}_{>0} = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$ – множество положительных целых чисел.

Обозначим

$$X_c = \{x_i^c \in \mathbb{Z} : L \leq x_i^c \leq U, L < 0, U > 0, i \in I\},$$

$$X_p = \{x_i^p \in \mathbb{Z} : L \leq x_i^p \leq U, L < 0, U > 0, i \in I\},$$

где $x_i^c,\, x_i^p > 0$ – количество опционов колл и пут для покупки, $x_i^c,\, x_i^p < 0$ – для продажи. Если $x_i^c = 0$ или $x_i^p = 0$, то i-ый контракт не входит в портфель, L и U – нижняя и верхняя границы количества контрактов в портфеле соответственно, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ – набор индексов.

Для поиска оптимального набора $X^* = \{X_c^*,\, X_p^*\}$ мы предлагаем следующее:

- покупки и продажи опционов можно осуществлять по ask- и bid-ценам,
- можно занимать короткие и длинные позиции с учетом ликвидности, L и U,
- стратегия должна иметь защиту от падения и роста цен страйк,
- максимальный убыток стратегии ограничен величиной $\mathcal{L}$,
- стратегия имеет определенную начальную стоимость $C(t, X)$ в момент времени $t = 0$.

Обозначим выплаты по стратегии

$$V(t, X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^c (S_t - k_c^i)^+ + x_i^p (k_p^i - S_t)^+, \tag{2}$$

первое слагаемое – выплаты по опционам колл, второе – выплаты по опционам пут, здесь $X^+ = \max(X, 0)$.

Обозначим цены ask и bid опционов колл и пут в момент времени $t = 0$ через

$$A_c = \{a_c^i \in \mathbb{R}_{>0}, i \in I\}, \quad B_c = \{b_c^i \in \mathbb{R}_{>0}, i \in I\},$$
$$A_p = \{a_p^i \in \mathbb{R}_{>0}, i \in I\}, \quad B_p = \{b_p^i \in \mathbb{R}_{>0}, i \in I\},$$

которые мы будем называть *входными константами* и для них справедливо:

$$b_c^i < a_c^i, \quad b_p^i < a_p^i, \quad i \in I$$

и

$$a_c^i > a_c^{i+1}, \quad a_p^i < a_p^{i+1}, \quad b_c^i > b_c^{i+1}, \quad b_p^i < b_p^{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Тогда первоначальная стоимость портфеля в момент времени $t = 0$ может быть выражена как

$$C(t, X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^c \cdot g_c(x_i^c) + x_i^p \cdot g_p(x_i^p), \tag{3}$$

где

$$g_c(x_i^c) = \begin{cases} a_c^i \in A_c, & \text{если } x_i^c > 0, \\ b_c^i \in B_c, & \text{если } x_i^c \leq 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$g_p(x_i^p) = \begin{cases} a_p^i \in A_p, & \text{если } x_i^p > 0, \\ b_p^i \in B_p, & \text{если } x_i^p \leq 0, \end{cases} \tag{5}$$

$i \in I$.

Комбинируя выражения (2) и (3) запишем целевую функцию в виде

$$\begin{aligned} F(X) = V(T, X) - C(t, X) = \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i^c((\hat{S}_T - k_c^i)^+ - g_c(x_i^c)) + \\ +x_i^p((k_p^i - \hat{S}_T)^+ - g_p(x_i^p)), \end{aligned} \tag{6}$$

которая является линейной относительно $X = \{X_c, X_p\}$ здесь $\hat{S}_T$ – прогнозная цена базового актива в момент времени T.

Вид функций $g_c(\cdot)$ и $g_p(\cdot)$ в выражениях (4) и (5) приводит нас к решению последовательности задач оптимизации. Для каждого опциона колл и пут имеется четыре входных параметра: (A_c или B_c) и (A_p или B_p). В этом случае количество перестановок, основанных на выборе между ценами (ask или bid) и возможными контрактами (колл или пут), равно

$$N = 2^n \times 2^n = 2^{2n}.$$

Пусть $\mathcal{C}$ обозначает множество всех $2 \times n$-кортежей элементов заданных упорядоченных множеств ask- и bid-цен A_c:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) : x_i = a_c^i \vee b_c^i, y_i = a_p^i \vee b_p^i, i \in I\}. \tag{7}$$

Запишем в векторной форме целевую функцию задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} \max_X \{F_{\mathcal{C}}(X)\} = \\ = \max_X \{X_c^\top((\hat{S}_T - K_c)^+ - G_c(X_c)) + \\ + X_p^\top((K_p - \hat{S}_T)^+ - G_p(X_p))\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $G_c(X_c)$, $G_p(X_p)$ – векторное представление функций (4) и (5).

Каждая целевая функция $F_{\mathcal{C}}(X)$ из набора (8) является кусочно-линейной функцией. Требуется определить наклон целевой функции (8) в интервале из двух соседних страйков:

$$0 \le S_T \le k_1, \quad k_2 \le S_T \le k_3, \quad \dots, \quad k_m \le S_T < +\infty,$$

здесь $k_1 = \min(K_c, K_p)$ – наименьший страйк, а $k_m = \max(K_c, K_p)$ – наибольший страйк.

Знак наклона (положительный, отрицательный) функции (8) во внутренних интервалах $[k_q, k_{q+1}]$ определяется следующим образом:

$$\sum_{i:k_c^i \le k_q} x_i^c - \sum_{j:k_p^j \ge k_{q+1}} x_j^p \text{ есть } \begin{cases} \ge 0, & \text{если } k_q \le k, \\ \le 0, & \text{если } k_q > k, \end{cases} \tag{9}$$

где $k \in K$ – точка перегиба функции (8). На крайних интервалах $[0, k_1]$ и $[k_m, +\infty)$ имеет место горизонтальный (нулевой) наклон функции (8):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^c = 0, \text{ если } S_T \in [0, k_1], \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 0, \text{ если } S_T \in [k_m, +\infty). \tag{11}$$

Следующее ограничение баланса определяет границу риска убытков с максимальным убытком, $\mathcal{L}$:

$$V(t, X) = -\mathcal{L}, \quad 0 \le t \le T \tag{12}$$

Значение целевой функции (8) во время T должно быть положительным:

$$V(T, X) > 0, \quad S_T = \hat{S}_T. \tag{13}$$

Модель имеет ограничения по ликвидности, мы предполагаем, что инвестор может купить не менее U и продать не менее L контрактов по каждой цене исполнения $k_c^i, k_p^i \in K$:

$$L \le x_i^c, \quad x_i^p \le U, \quad L < 0, \quad U > 0, \quad i \in I. \tag{14}$$

1.6. Самостоятельная работа

1) Постройте графики функции выплат для опционов колл (покупка, продажа) и пут (покупка, продажа).
2) Оцените справедливую стоимость опциона колл и пут, вычислите греческие коэффициенты как функцию от стоимости базового актива.
3) Вычислите греческие коэффициенты численно и сравните результаты.

Листинг 2: Derivatives

```
def first_derivative(f, x, h=0.001):
    return (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)

def second_derivative(f, x, h=0.001):
    return (f(x + h) - 2 * f(x) + f(x - h)) / (h * h)
```

4) Постройте график трехмерной поверхности для описания зависимости греческих коэффициентов опциона а) кол и б) пут от стоимости базового актива и количества дней до экспирации.

Список литературы

[1] Espen G. Haug. *The Complete Guide To Option Pricing Formulas*. McGraw Hill, 2007.

[2] А.Н. Буренин. *Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические и погодные производные*. 2-е изд., доп. Москва: НТО им. академика С.И. Вавилова, 2008, с. 511.

[3] Михаил Юрьевич Глухов. “Структурированные финансовые продукты в системе финансового инжиниринга”. Дис. ... док. Финансовая академия при правительстве Российской федерации, 2007.

[4] А.В. Мельников. *Курс математических финансов*. М.: РАН, 2019, с. 225.