

## Содержание

<b>1. Классификация структурных продуктов</b>	<b>2</b>
1.1. Параметры структурированных продуктов . . . . .	2
1.2. Технология конструирования структурированных про- дуктов на базе стандартных и бинарных опционов . . .	4
1.3. Структурированные продукты с гарантией возврата ка- питала . . . . .	6
1.3.1. Бинарные опционы (Binary options) . . . . .	7
1.3.2. Барьерные опционы (Barrier options) . . . . .	11
1.3.3. Азиатские опционы (Asian options) . . . . .	15
1.4. Структурированные продукты без гарантии возврата ка- питала . . . . .	21
<b>Библиография</b>	<b>22</b>

# 1. Классификация структурных продуктов

Европейская ассоциация структурных инвестиционных продуктов (EUSIPA), целью которой является создание единых стандартов и повышение прозрачности сегмента структурных продуктов Европы, а также защита интересов инвесторов, выпустила в 2009 году «карту» [2], в которую входят наиболее часто встречающиеся в Европе типы продуктов.

Классификация EUSIPA основана на трехуровневой модели.

- 1) Инвестиционные продукты (Investment Products) и продукты с «эффектом плеча» (Leverage Products).
- 2) Продуктов в зависимости от уровня риска: продукты с «защитой» капитала (Capital protection), продукты с повышенной доходностью (Yield Enhancement), продукты участия (Participation), продукты с «эффектом плеча» без «нокаута» (Leverage without knock-out) и продукты с «эффектом плеча» с «нокаутом» (Leverage with knock-out), продукты с постоянным «эффектом плеча» (Constant Leverage Products).
- 3) Продукты по различным механизмам участия в динамике цены базового актива.

В 2021 году Национальная ассоциация участников фондового рынка (НАУФОР) предложила карту деривативов для российского рынка [12]. Предложенная адаптация позволяет сопоставлять российские и европейские структурные продукты независимо от их названия по механизму действия, заложенному в продукт.

В России банки и брокеры выступают эмитентами структурных продуктов: ВТБ [10], Сбер [13], БКС [9], Открытие [11], среди иностранных компаний можно выделить [5, 8, 1, 3].

## 1.1. Параметры структурированных продуктов

Структурированные продукты моделируются под конкретные цели, позволяющие определить основные параметры продукта, а также их приемлемое соотношение.

Параметр структурированного продукта – это количественная характеристика его свойств.

Входные параметры продукта (выбирает клиент):

- 1) базовый актив (акции, облигации, производные инструменты),
- 2) срок (дней, лет),
- 3) цена начала участия (цена базового актива),
- 4) гарантия возврата капитала, %,
- 5) сценарий поведения базового актива – рост, падение, движение в диапазоне.

Выходные (расчетные) параметры:

- 1) коэффициент участия – доля от положительной динамики базового актива, которая будет выплачена по продукту,
- 2) максимальная доходность по продукту.

В расчетах используются рыночные данные и встроенная комиссия.

Рыночные данные – это исходные данные, необходимые для оценки параметров структурированного продукта:

- 1) текущее значение базового актива на момент создания продукта;
- 2) волатильность базового актива;
- 3) депозитная процентная ставка;
- 4) безрисковая процентная ставка.

Следует обратить внимание на то, что в расчетах выходных параметров используется два типа процентных ставок.

**Определение 1.** *Депозитная ставка,  $R_d$  – банковская процентная ставка, используемая для вычисления суммы, которую необходимо разместить на депозит (т. е. вложить в инструменты с фиксированной доходностью).*

**Определение 2.** *Номинальная цена, номинал (Notional,  $N$ ) – сумма денежных средств, инвестированных в структурный продукт.*

**Определение 3.** *Встроенная комиссия,  $fee$  – разница между справедливой стоимостью СП и ценой продажи. Ее еще называют скрытой, или неявной комиссией.*

**Определение 4.** *Коэффициент участия (КоУ, Participation Rate) – параметр, показывающий долю от положительной динамики базового актива, которая будет выплачена по продукту:*

$$PR = \frac{r_{SP}}{r_{BA}},$$

где  $r_{SP}$  – доходность СП,  $r_{BA}$  – доходность базового актива.

Например, значение КоУ в 60% говорит о том, что продукт генерирует 0,6% доходности на каждый 1% изменений по базовому активу.

Наличие КоУ как выходного параметра характерно для структурированных продуктов, рассчитанных на рост или падение, или одновременно на рост и падение базового актива, т.е. для продуктов, имеющих наклонные графики конечных выплат.

**Определение 5.** *Максимальная доходность – максимальное значение, ограничивающее доходность по структурированному продукту. За срок продукта:*

$$r_{SP\max}^{за\ срок} = \frac{Payoff_{SP}^{\max}}{N}.$$

*В процентах годовых (простые проценты):*

$$r_{SP\max}^{nn} = \frac{Payoff_{SP}^{\max}}{N \times T},$$

*В непрерывно начисляемых процентах годовых:*

$$r_{SP\max}^{nn} = \frac{\ln(1 + r_{SP\max}^{за\ срок})}{T}.$$

Здесь  $T$  – срок продукта в годах,  $Payoff_{SP}^{\max}$  – максимальная выплата по продукту.

**Определение 6.** *Максимальная выплата по продукту  $Payoff_{SP}^{\max}$  определяется по-разному, в зависимости от внутреннего устройства продукта. В общем виде ее можно представить как:*

$$Payoff_{SP}^{\max} = Q \times CF_{\max, 1 \times option}$$

где  $Q$  – это количество встроенных опционов или опционных стратегий,  $CF_{\max, 1 \times option}$  – выплата по одному опциону или по одной встроенной опционной стратегии.

## 1.2. Технология конструирования структурированных продуктов на базе стандартных и бинарных опционов

Производные финансовые инструменты, такие как европейские и американские опционы колл и пут, представляют собой так называемые *ванильные* продукты. Такие продукты имеют стандартные и четко определенные свойства и активно торгуются, их цены или подразумеваемая волатильность котируются биржами на постоянной основе.

Одним из интересных аспектов рынка деривативов является нестандартные продукты, созданные финансовыми инженерами. Эти продукты называются *экзотические опционы* или просто *экзотика*. Хотя такие инструменты обычно составляют относительно небольшую, но важную часть портфеля, потому что эти инструменты могут быть гораздо более прибыльными, чем простые ванильные продукты.

Экзотические опционы можно классифицировать по зависимости от динамики цены базового актива.

*Независимые от динамики цены базового актива экзотические опционы* (path-independent, non path-dependent). Доходность зависит только от конечного значения цены базового актива. Примеры таких опционов:

- 1) Опцион на опцион (compound options),
- 2) Бинарные опционы (binary options, gap option, digital options),
- 3) Опцион обмена одного актива на другой (exchange options),
- 4) Опционы на максимальную и минимальную цену (maxima and minima option),

*Зависимые от динамики цены базового актива экзотические опционы* (path-dependent). Доходность зависит не только от конечной цены базового актива в дату истечения продукта, но и от цен в некоторые промежуточные моменты времени в течение срока жизни продукта или среднего значения цены. Примеры таких опционов:

- 1) Опцион с правом выбора (chooser).
- 2) Forward start.
- 3) Азиатский (asian).
- 4) Барьерный (barrier).
- 5) Опцион с последствием (lookback).
- 6) Опцион выкрик (shout options).

Придерживаясь приведенной классификации по зависимости от динамики цены базового актива рассмотрим алгоритмы конструирования продуктов, зависящих и независимых от ценового пути базового актива.

### 1.3. Структурированные продукты с гарантией возврата капитала

Структурированный продукт, привязанный к фондовому рынку (Equity-Linked Note).

**Задача 1.** Имеется 0,1 млн рублей, которые клиент готов инвестировать на 1 год. Ожидается рост цен на акции «А» и клиент готов отказаться от части дохода, путем неполного участия в положительной динамике цен на акции. Текущая цена акции 100 руб., волатильность – 30%, депозитная процентная ставка и безрисковая процентная ставка – 7%. Постройте структурный продукт с полной защитой капитала и вычислите коэффициент участия.

**Решение.**

Входные параметры продукта:

- 1) базовый актив – акции,
- 2) срок –  $T = 1$  год,
- 3) цена начала участия –  $P_0 = 100$  рублей,
- 4) гарантия возврата капитала – 100%,
- 5) сценарий поведения базового актива – рост.

Выходной параметр продукта: коэффициент участия на рост базового актива.

Разделим 0,1 млн рублей на две части. Для того чтобы гарантировать клиенту возврат 100% вложенных средств: 90% вложим в инструменты со стабильной фиксированной доходностью – депозит под 7% годовых (deposit amount, dep). Для участия клиента в динамике базового актива на 10% приобретем – европейские опционы call на акцию «А».

Вычислим коэффициент участия

$$PR = \frac{r_{SP}}{r_{BA}} = \frac{\frac{(P_1 - S) \cdot Q}{N}}{\frac{P_1 - S}{S}} = \frac{K \cdot Q}{N},$$

где  $P_1$  – значение базового актива в момент истечения срока продукта,  $S$  – цена начала участия (страйк встроенных опционов). Определим количество встроенных опционов

$$Q = \frac{N(1 - fee) - dep}{c},$$

здесь  $c$  – стоимость опциона call, рассчитанная по формуле Блэка-Шоулза и сумму вложений на депозит

$$da = e^{-r_d T} \times N \times \%,$$

здесь  $r_d = \ln(1 + R_d)^T$  – непрерывная начисляемая ставка по банковскому депозиту (в процентах годовых), % – процент гарантии возврата капитала.

Листинг 1: Equity-Linked Note

```
from scipy.stats import norm
import numpy as np

def call_price(S, K, T, r, q, sigma):
    d1=(np.log(S/K)+(r+sigma**2/2)*(T))/(sigma*np.sqrt(T))
    d2=d1 - sigma*np.sqrt(T)
    return S*np.exp(-q*(T))*norm.cdf(d1) - K*np.exp(-r*(T))
    ↪ *norm.cdf(d2)

S=100
K=100
T=1
r=0.07
q=0
sigma=0.3
N=100000

c=call_price(S, K, T, r, q, sigma)
# 15.210500635727158

risk_part = N - N*np.exp(-r*T)
PR = S*round(risk_part/c)/N
# 0.444
```

### 1.3.1. Бинарные опционы (Binary options)

**Определение 7.** *Бинарный опцион – это опцион, по которому выплачивается определенная сумма  $A$ , либо не выплачивается ничего:*

$$\begin{cases} A, & \text{если } S_T > K \\ 0, & \text{если } S_T \leq K, \end{cases}$$

где  $S_T$  – спот цена базового актива.

**Пример 1.** Рассмотрим пример бинарного опциона *call* со страйком 100 рублей и платежом 20 рублей. Если цена базового актива на дату исполнения окажется больше 100 рублей, держатель такого опциона получит выплату в размере 20 рублей, в противном случае он получит 0. Для опциона *put* справедливо обратное.

В зависимости от вида выплаты различают следующие типы бинарных опционов:

- 1) Деньги или ничего (*cash-or-nothing*) – выплата производится в денежном выражении. Премии опционов *call* и *put* равны дисконтированной под ставку без риска стоимости ожидаемого дохода по опциону.

$$c = e^{-rT} N(d_2), \quad p = e^{-rT} N(-d_2).$$

- 2) Актив или ничего (*asset-or-nothing*) – выплата осуществляется поставкой базового актива. Премии опционов *call* и *put* равны дисконтированной под ставку дивидендной доходности стоимости ожидаемого дохода по опциону:

$$c = Se^{-qT} N(d_1), \quad p = Se^{-qT} N(-d_1).$$

К бинарным опционам относятся гэп опционы (*gap options*).

**Определение 8.** Гэп опцион колл (*пут*) – это европейский опцион колл (*пут*) с функцией выплаты:

$$S_T - K_1, \quad \text{если } S_T > K_2 \quad (K_1 - S_T, \quad \text{если } S_T < K_2),$$

где  $K_1$  – цена исполнения гэп опциона колл (*пут*), определяет фактическую сумму выплаты,  $K_2$  – триггер цена, определяет будет ли опцион иметь ненулевую выплату.

Разница со стандартным опционом колл с ценой исполнения  $K_2$  заключается в том, при  $S_T > K_2$  выплата увеличивается на  $K_2 - K_1$  (положительная выплата). Заметим, что доход может быть и отрицательным, если  $K_2 < K_1$ .

Гэп опцион колл (*пут*) можно оценить путем небольшой модификации формулы Блека-Шоулза-Мертона:

$$c_g = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K_1 e^{-rT} N(d_2),$$



$$p_g = K_1 e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Для гэп опциона колл выплата всегда будет ненулевой (положительной или отрицательной), пока  $S_T > K_2$ . Для гэп опциона пут выплаты всегда будут ненулевыми, пока  $S_T < K_2$ . Если  $K_1 = K_2$ , то гэп опцион будет аналогичен стандартному опциону и его называют pay-later опционом [4].

Для гэп опционов паритет выглядит следующим образом:

$$Payoff(c_g) - Payoff(p_g) = S_0 e^{-qT} - K_1 e^{-rT}.$$

В бинарных опционах значение имеет только направление изменения цены актива, но не величина этого изменения, поэтому все потенциальные риски и прибыли известны инвестору заранее. Отличительная черта структурированных продуктов со встроенными бинарными опционами – это наличие «разрывов» в графиках доходности.

**Задача 2.** *Имеется 0,1 млн рублей, которые клиент готов инвестировать на 1 год. Ожидается, что текущая цена акции, равная 100 руб., не изменится более чем на 10%. Волатильность акции – 30%, депозитная процентная ставка и безрисковая процентная ставка – 7%. Постройте структурный продукт с полной защитой капитала и использованием опционной стратегии бинарный диапазон (binary range).*

### **Решение.**

Входные параметры продукта:

- 1) базовый актив – акции,
- 2) срок –  $T = 1$  год,
- 3) цена начала участия –  $P_0 = 100$  руб.,
- 4) ширина диапазона доходности базового актива –  $[90, 110]$  руб.,
- 5) гарантия возврата капитала – 100%,
- 6) сценарий поведения базового актива – боковое движение.

Выходной параметр продукта: максимальная доходность.

Разделите 0,1 млн рублей на две части. Для того чтобы гарантировать клиенту возврат 100% вложенных средств: 90% положите на депозит под 7% годовых (deposit amount). Для участия клиента в динамике базового актива примените – опционную стратегию бинарный диапазон (binary range).

Оцените стоимость покупаемого бинарного опциона call со страком 90 и стоимость продаваемого бинарного опциона call со страком 110.

Найдите разницу между оценками и определите количество встраиваемых опционных стратегий.

Вычислите максимальную доходность в процентах годовых и непрерывно начисляемых процентах. Сравните доходность структурного продукта с депозитом.

Листинг 2: Binary range

```
def binary_option_call(t, S, K, T, r, q, sigma):

    d1 = (np.log(S/K) + (r+sigma**2/2)*(T))/(sigma*np.sqrt(
        ↪ T))
    d2 = d1 - sigma*np.sqrt(T)

    if t == 'cash-or-nothing':
        return np.exp(-r*T)*norm.cdf(d2)
    if t == 'asset-or-nothing':
        return S*np.exp(-q*T)*norm.cdf(d1)

K=90
b90 = binary_option_call('cash-or-nothing', S, K, T, r, q,
    ↪ sigma)
K=110
b110 = binary_option_call('cash-or-nothing', S, K, T, r, q,
    ↪ sigma)
print('digital_range=', b90-b110)

risk_part = N - N*np.exp(-r*T)
Q = round(risk_part/(b90-b110))
print('number_options_strategies', Q)
# 27813
print('maximum_profitability_discretly=', (N+Q)/(N*T)-1)
# 0.27813
print('maximum_profitability_continuously=', np.log((N+Q)
    ↪ /(N*T)))
# 0.24539807222181784
```

Таблица 1: Виды барьерных опционов

Класс	обычные		обратные	
	knock-out	knock-in	knock-out	knock-in
call	down-and-out call	down-and-in call	up-and-out call	up-and-in call
put	up-and-out put	up-and-in put	down-and-out put	down-and-in put

### 1.3.2. Барьерные опционы (Barrier options)

**Определение 9.** Барьерными называются опционы, выигрыш по которым зависит от того, превысит ли цена базового актива за определенный период времени заранее установленный уровень,  $H$ .

Уровень  $H$  рассматривается как барьер (trigger), который либо а) «включает» (активизирует) опцион, либо б) «выключает» (деактивирует) опцион, т. е. опцион перестает существовать и его владелец теряет все связанные с ним права.

Первому случаю соответствует класс барьерных опционов knock-in (включаемые), второму – knock-out (выключаемые). Каждый из этих видов подразделяется еще на два подтипа в зависимости от направления пробития – up (вверх) или down (вниз). Все варианты применимы к опционам call и put. В результате возникает восемь возможных комбинаций, которые подразделяются на обычные (normal) и обратные (reverse) барьерные опционы (Таб. 1).

**Определение 10.** У барьерных опционов существует дополнительное свойство, которое называется компенсационная выплата или компенсация (rebate),  $R$  – фиксированная сумма, которая выплачивается клиенту в случае, если барьер не был достигнут (для knock-in) или, наоборот, был пробит (для knock-out).

Отметим, что барьерные опционы дешевле стандартных, т. к. размер выплаты по ним одинаков, а вероятность ее получения меньше.

Наблюдение за барьером может осуществляться в любой момент в течение срока действия опциона (американский стиль) или только при наступлении срока погашения (европейский стиль).

Существуют различные подходы к оценке барьерных опционов. В частности, можно выделить методы, основанные на модели Блэка-Шоулза, метод Монте-Карло, адаптации биномиальных деревьев и конечно-разностных методов.

## Модификация модели Блэка-Шоулза-Мертон [4]

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 A &= \phi S e^{(b-r)T} N(\phi x_1) - \phi K e^{-rT} N(\phi x_1 - \phi \sigma \sqrt{T}), \\
 B &= \phi S e^{(b-r)T} N(\phi x_2) - \phi K e^{-rT} N(\phi x_2 - \phi \sigma \sqrt{T}), \\
 C &= \phi S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(\eta y_1) - \phi K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{T}), \\
 D &= \phi S e^{(b-r)T} (H/S)^{2(\mu+1)} N(\eta y_2) - \phi K e^{-rT} (H/S)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta \sigma \sqrt{T}), \\
 E &= R \cdot e^{(b-r)T} [N(\eta x_2 - \eta \sigma \sqrt{T}) - (H/S)^{2\mu} N(\eta y_2 - \eta \sigma \sqrt{T})], \\
 F &= R[(H/S)^{\mu+\lambda} N(\eta z) + (H/S)^{\mu-\lambda} N(\eta z - 2\eta \lambda \sigma \sqrt{T})],
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\ln(S/K)}{\sigma \sqrt{T}} + (1 + \mu) \sigma \sqrt{T}, & x_2 &= \frac{\ln(S/H)}{\sigma \sqrt{T}} + (1 + \mu) \sigma \sqrt{T}, \\
 y_1 &= \frac{\ln(H^2/(SK))}{\sigma \sqrt{T}} + (1 + \mu) \sigma \sqrt{T}, & y_2 &= \frac{\ln(H/S)}{\sigma \sqrt{T}} + (1 + \mu) \sigma \sqrt{T}, \\
 z &= \frac{\ln(H/S)}{\sigma \sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T}, & \mu &= \frac{b - \sigma^2/2}{\sigma^2}, & \lambda &= \sqrt{\mu^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}.
 \end{aligned}$$

Опционы «-in» активируются, если цена актива  $S$  достигает барьера  $H$  до истечения срока действия.

Опционы «-out» деактивируются, если цена актива  $S$  достигает барьера  $H$  до истечения срока действия.

Приведем формулы для европейских барьерных опционов, по которым выплачивается компенсация  $R$  и цена акции базового актива которых отслеживается *непрерывно*.

- 1) Опцион «колл» down-and-in ( $S > H$ ) – включаемый опцион «колл», активирующийся при падении цены акции ниже определенного уровня.

$$\text{Payoff} = \begin{cases} \max(S - K, 0), & S \leq H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{в момент исполнения.} \end{cases}$$

$$c_{di}(K > H) = C + E, \quad \eta = 1, \phi = 1,$$

$$c_{di}(K < H) = A - B + D + E, \quad \eta = 1, \phi = 1,$$

- 2) Опцион «колл» up-and-in ( $S < H$ ) – включаемый опцион «колл», активирующийся при превышении ценой акции определенного уровня.

$$Payoff = \begin{cases} \max(S - K, 0), & S \geq H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{в момент исполнения.} \end{cases}$$

$$c_{ui}(K > H) = A + E, \quad \eta = -1, \phi = 1,$$

$$c_{ui}(K < H) = B - C + D + E, \quad \eta = -1, \phi = 1,$$

- 3) Опцион «пут» down-and-in ( $S > H$ ) – включаемый опцион «пут», активирующийся при падении цены акции ниже определенного уровня.

$$Payoff = \begin{cases} \max(K - S, 0), & S \leq H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{в момент исполнения.} \end{cases}$$

$$p_{di}(K > H) = B - C + D + E, \quad \eta = 1, \phi = -1,$$

$$p_{di}(K < H) = A + E, \quad \eta = 1, \phi = -1,$$

- 4) Опцион «пут» up-and-in ( $S < H$ ) – включаемый опцион «пут», активирующийся при превышении ценой акции определенного уровня.

$$Payoff = \begin{cases} \max(K - S, 0), & S \geq H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{в момент исполнения.} \end{cases}$$

$$p_{ui}(K > H) = A - B + D + E, \quad \eta = -1, \phi = -1,$$

$$p_{ui}(K < H) = C + E, \quad \eta = -1, \phi = -1,$$

- 5) Опцион «колл» down-and-out ( $S > H$ ) – выключаемый опцион на покупку, который перестает действовать, если цена акции падает ниже определенного уровня.

$$Payoff = \begin{cases} \max(S - K, 0), & S > H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{при выключении.} \end{cases}$$

$$c_{do}(K > H) = A - C + F, \quad \eta = 1, \phi = 1,$$

$$c_{do}(K < H) = B - D + F, \quad \eta = 1, \phi = 1,$$

- 6) Опцион «колл» *up-and-out* ( $S < H$ ) – выключаемый опцион «колл», который перестает действовать, если цена акции вырастает выше определенного уровня.

$$Payoff = \begin{cases} \max(S - K, 0), & S < H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{при выключении.} \end{cases}$$

$$c_{uo}(K > H) = F, \quad \eta = -1, \phi = 1,$$

$$c_{uo}(K < H) = A - B + C - D + F, \quad \eta = -1, \phi = 1,$$

- 7) Опцион «пут» *down-and-out* ( $S > H$ ) – выключаемый опцион на продажу, который перестает действовать, если цена акции падает ниже определенного уровня.

$$Payoff = \begin{cases} \max(K - S, 0), & S > H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{при выключении.} \end{cases}$$

$$p_{do}(K > H) = A - B + C - D + F, \quad \eta = 1, \phi = -1,$$

$$p_{do}(K < H) = F, \quad \eta = 1, \phi = -1,$$

- 8) Опцион «пут» *up-and-out* ( $S < H$ ) – выключаемый опцион «пут», который перестает действовать, если цена акции вырастает выше определенного уровня.

$$Payoff = \begin{cases} \max(K - S, 0), & S < H, \text{ до момента исполнения,} \\ R, & \text{при выключении.} \end{cases}$$

$$p_{uo}(K > H) = B - D + F, \quad \eta = -1, \phi = -1,$$

$$p_{uo}(K < H) = A - C + F, \quad \eta = -1, \phi = -1,$$

Непрерывное наблюдение выполняется далеко не всегда. Поэтому были предложены методы дискретизации, которые учитывают периодичность регистрации цены акции. В частности, предлагается заменить  $H$  на  $H^{0,5826\sqrt{T/m}}$  для опционов типа *up-and-in* и *up-and-out* и на  $H^{-0,5826\sqrt{T/m}}$  для опционов типа *down-and-in* и *down-and-out*, где  $T/m$  – длина временного промежутка между двумя последовательными наблюдениями цены акции.

### Паритет in-out

Для барьерных опционов существует свой аналог колл-пут паритета, называемый in-out паритет. Так как вместе два абсолютно одинаковых европейских опциона на включение и выключение образуют аналог стандартного опциона, очевидно, что:

$$c = c_{do} + c_{di} = c_{uo} + c_{ui}, \quad p = p_{do} + p_{di} = p_{uo} + p_{ui}.$$

**Задача 3.** Имеется 0,1 млн рублей, которые клиент готов инвестировать на 1 год. Текущая цена акции 100 руб., прогнозируется рост акции. Постройте структурный продукт с полной гарантией возврата инвестированного капитала и использованием барьерных опционов:

- а) включаемый (knock-in) барьер 110 рублей, цена акции через год – 105 руб.,
- б) выключаемый (knock-out) барьер 90 рублей, цена акции через год – 120 руб.

Волатильность акции – 30%, депозитная процентная ставка и безрисковая процентная ставка – 7%. Периодичность наблюдения – 1 день. Сравните полученные результаты с результатами Задачи 1 и подкрепите выводы иллюстративными графиками.

Для расчетов результатов от инвестирования использовать следующую формулу выплаты:

$$r_{SP} = \begin{cases} r_{SP\min}, & \text{если опцион деактивирован,} \\ \max\left(r_{SP\min}, r_{SP\min} + PR \times \frac{P_1 - S}{S}\right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

#### 1.3.3. Азиатские опционы (Asian options)

**Определение 11.** Азиатский опцион – это опцион, выплаты по которому зависят от средней (арифметической, геометрической, взвешанной) цены базового актива  $S_{ave}$ .

Существует два основных вида азиатских опционов:

- 1) опционы по средней цене;
- 2) опционы по средней цене исполнения.

Опционы по средней цене гарантируют, что средняя цена акции не упадет ниже заранее заданного уровня. Выплаты в момент исполнения для азиатских опционов колл и пут по средней цене выглядят

следующим образом:

$$\max(0, S_{ave} - K), \quad \max(0, K - S_{ave}).$$

Опционы по средней цене исполнения дают своему владельцу гарантии, что средняя цена базового актива за определенный временной промежуток будет не выше (для опционов пут) или не ниже (опционов колл) его окончательной цены. Данные контракты по сути своей предоставляют инвестору возможность купить или продать акцию по средней цене. Выплаты в момент исполнения для опционов колл и пут соответственно будут следующими:

$$\max(0, S_T - S_{ave}), \quad \max(0, S_{ave} - S_T).$$

Среднее значение переменной всегда имеет меньшую дисперсию, чем сама переменная, поэтому азиатские опционы дешевле стандартных. Для азиатских опционов, поскольку они являются зависимыми от пути, крайне важно, в какие моменты времени фиксируется цена базового актива. Поэтому частота и время регистрации цен должны фиксироваться контрактом. Также стоимость азиатского опциона зависит от типа усреднения цены акции.

Различают два основных типа усреднения:

- 1) по среднему арифметическому, дискретное наблюдение

$$S_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i), \quad t_i = i \frac{T}{n},$$

непрерывное наблюдение

$$S_{ave} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt.$$

- 2) по среднему геометрическому, дискретное наблюдение

$$S_{ave} = \left( \prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n}.$$

непрерывное наблюдение

$$S_{ave} = \exp \left( \frac{1}{T} \int_0^T \ln S(t) dt \right).$$



Если предположить, что  $S_{ave}$  является логарифмически нормальным, то азиатский опцион можно оценить с использованием классической модели Блэка-Шоулза.

Из литературы [7] известны различные методы аппроксимации азиатских опционов, а также нахождение оценок с использованием метода Монте-Карло.

#### **Геометрическое среднее. Непрерывное наблюдение [4]**

Азиатский опцион можно оценить с использованием классической формулы:

$$\begin{aligned} c &= Se^{(b_a-r)T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \\ p &= Ke^{-rT} N(-d_2) - Se^{(b_a-r)T} N(-d_1), \end{aligned}$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (b_a + \sigma_a^2/2)T}{\sigma_a \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_a \sqrt{T},$$

скорректированная волатильность

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

и скорректированная стоимость переноса (cost of carry) позиции

$$b_a = \frac{1}{2} \left( b - \frac{\sigma^2}{6} \right).$$

**Геометрическое среднее. Дискретное наблюдение.** На практике мониторинг среднего значения азиатского опциона осуществляется дискретно. Предположим, что процесс спот цены и имеет постоянную волатильность, зависящую от времени:

$$dS_t = \mu S_t dt + v_t S_t dz_t,$$

тогда волатильность можно вычислить как

$$\sigma_G^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 v_i^2, \quad (1)$$

где  $v_i = v_{t_i}$  – локальная волатильность между наблюдениями, которую нужно вычислять на каждом временном шагу:

$$v_i = \sqrt{\frac{\sigma_i^2 t_i - \sigma_{i-1}^2}{t_i - t_{i-1}}},$$

где  $\sigma_i, \sigma_{i-1}$  – реализованная глобальная волатильность (implied global volatility) для опционов с эсипирацией в моменты времени  $t_i$  и  $t_{i-1}$  соответственно.

В качестве альтернативы можно использовать глобальную волатильность стандартного опциона

$$\sigma_G^2 = \frac{1}{n^2 T} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 t_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \sigma_i^2 t_i. \quad (2)$$

Оценка стоимости азиатского опциона колл может быть вычислена:

$$c = S e^{(b_G - r)T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (b_G + \sigma_G^2/2)T}{\sigma_G \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_G \sqrt{T}.$$

и

$$b_G = \frac{\sigma_G^2}{2} + \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^n (b - \sigma_i^2/2) t_i.$$

**Арифметическое среднее** [6].

Обозначим  $b = r - q$  и подставим скорректированное среднее значение  $b_a$  и дисперсию  $\sigma_a$  в формулу:

$$\begin{aligned} c &\approx S e^{(b_a - r)T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \\ p &\approx K e^{-rT} N(d_2) - S e^{(b_a - r)T} N(d_1), \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (b_a + \sigma_a^2/2)T}{\sigma_a \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_a \sqrt{T}, \end{aligned}$$

здесь

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\ln(M_2)}{T} - 2b_a}, \quad b_a = \frac{\ln(M_1)}{T},$$

где  $M_1$  и  $M_2$  первые два момента для  $S_{ave}$ :

$$M_1 = \frac{e^{bT} - e^{bt_1}}{b(T - t_1)},$$

$$M_2 = \frac{2e^{(2b+\sigma^2)T}}{(b + \sigma^2)(2b + \sigma^2)(T - t_1)^2} + \frac{2e^{(2b+\sigma^2)t_1}}{b(T - t_1)^2} \left( \frac{1}{2b + \sigma^2} - \frac{e^{b(T-t_1)}}{b + \sigma^2} \right),$$

если  $b = 0$ , то

$$M_1 = 1$$

и

$$M_2 = \frac{2e^{\sigma^2 T} - 2e^{\sigma^2 t_1}(1 + \sigma^2(T - t_1))}{\sigma^4(T - t_1)^2},$$

где  $t_1$  – время с начала периода усреднения.

Для того, чтобы аппроксимация выполнялась для случая когда в качестве базового актива используются фьючерсы. Нужно дополнительно выполнить проверку. Если опцион находится в периоде усреднения, то нужно скорректировать страйк

$$\hat{K} = \frac{T_2}{T}K - \frac{\tau}{T}S_{ave},$$

где  $\tau = T_2 - T$  – оставшееся время в периоде усреднения,  $T_2$  – исходное время в периоде усреднения (константа).

Если  $\tau > 0$  и  $\frac{T_2}{T}K - \frac{\tau}{T}S_{ave} < 0$ , тогда опцион колл будет наверняка исполнен и его стоимость будет равна:

$$e^{-rT}(\mathbb{E}(S_{ave}) - K),$$

где

$$\mathbb{E}(S_{ave}) = S_{ave} \frac{T_2 - T}{T_2} + S \cdot M_1 \frac{T}{T_2}.$$

Заметим, что в этом случае азиатский опцион пут будет наверняка вне денег и будет иметь нулевую стоимость.

**Задача 4.** Имеется 0,1 млн рублей, которые клиент готов инвестировать на 1 год. Текущая цена акции 100 руб., прогнозируется рост акции. Волатильность акции – 30%, депозитная процентная ставка и безрисковая процентная ставка – 7%. Периодичность наблюдения – 1 день.

Постройте структурный продукт с полной гарантией возврата инвестированного капитала и азиатского опциона call и вычислите коэффициент участия.

Входные параметры:

- 1) базовый актив – акции,
- 2) срок продукта –  $T = 1$  год,

- 3) цена начала участия (страйк продукта)  $K = 100$  руб.,
- 4) частота наблюдений – ежедневно,
- 5) тип средней – геометрическая,
- 6) степень гарантии возврата капитала: 100%,
- 7) сценарий поведения базового актива: рост.

Выходной параметр: коэффициент участия.

Листинг 3: Asian option

```
def Geometric_Average_Rate_Call(S, K, T, r, b, sigma):
    sigmaA = sigma/np.sqrt(3)
    bA = (b - sigma**2/6)/2
    d1 = (np.log(S/K)+(bA+sigmaA**2/2)*T)/(sigmaA*np.sqrt(T)
    ↪ )
    d2 = d1 - sigmaA*np.sqrt(T)
    return S*np.exp((bA-r)*T)*norm.cdf(d1) - K*np.exp(-r*T)
    ↪ *norm.cdf(d2)

S = 100
K = 100
T = 1
r = 0.07
q = 0.0
sigma = 0.3

print('Geometric average rate call =',
    ↪ Geometric_Average_Rate_Call(S, K, T, r, r-q, sigma))
# 7.906075677449117
# PR = 85.5%
```

### Алгоритм Монте-Карло для оценки стоимости азиатского опциона

- 1) Сгенерируйте логарифм цены базового актива

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Delta t + \sigma Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta t). \quad (3)$$

- 2) Усредните цену базового актива для каждой симуляции (геометрически или арифметически),  $S_i$ .
- 3) Вычислите дисконтированные выплаты по азиатским опционам и усредните их:

$$\text{Payoff}_i = e^{-r(T-t)} \max(S_i - K, 0)$$

и

$$\text{Average} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Payoff}_i.$$

- 4) Вычислите стандартную ошибку оценки и постройте доверительный интервал. Пусть оценка дисперсии

$$\text{Variance} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\text{Payoff}_i - \text{Average})^2, \quad (4)$$

тогда стандартная ошибка

$$\text{Standard Error} = \sqrt{\frac{\text{Variance}}{N}}. \quad (5)$$

#### 1.4. Структурированные продукты без гарантии возврата капитала

**Задача 5.** *Имеется 0,1 млн рублей, которые клиент готов инвестировать на 1 год. Ожидается рост цен на акции «А». Клиент готов нести 30% потери в случае падении цены акции «А» (меньше чем при прямой покупке акции) в обмен на увеличение коэффициента участия. Текущая цена акции 100 руб.*

Входные параметры продукта:

- 1) базовый актив – акции,
- 2) срок –  $T = 1$  год,
- 3) цена начала участия –  $P_0 = 100$  рублей,
- 4) барьерная цена –
- 5) Тип барьера «включаемый» (knock-in) и «выключаемый» (knock-out),
- 6) Условия наблюдения с целью определения пробития барьера – частота наблюдений, длина периода наблюдений, расположение периода наблюдений в случае, если оно частичное – в начале, середине, конце срока продукта;
- 7) сценарий поведения базового актива – рост.

Выходной параметр продукта: коэффициент участия.

## Список литературы

- [1] National Bank of Canada Structured Solutions. *List of Products*. Дата обращения: 15.11.2024. URL: <https://nbcstructuredsolutions.ca/listeProduits.aspx?mode=all&structure=1>.
- [2] *EUSIPA derivative map*. 2016. URL: [https://eusipa.org/wp-content/uploads/European\\_map\\_20160530\\_2016.pdf](https://eusipa.org/wp-content/uploads/European_map_20160530_2016.pdf).
- [3] Best Price FS. *Structured Products*. URL: <https://bestpricefs.co.uk/structured-products/>.
- [4] Espen G. Haug. *The Complete Guide To Option Pricing Formulas*. McGraw Hill, 2007.
- [5] Hong Kong Exchanges and Clearing Limited (HKEX). *Structured Products Overview*. Дата обращения: 15.11.2024. URL: [https://www.hkex.com.hk/Products/Securities/Structured-Products/Overview?sc\\_lang=en#cbbc](https://www.hkex.com.hk/Products/Securities/Structured-Products/Overview?sc_lang=en#cbbc).
- [6] John Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education Limited, 2021.
- [7] Nielsen Lars. “Pricing asian options”. Дис. ... док. 2001.
- [8] SRP. *Structured Retail Products*. Дата обращения: 15.11.2024. URL: <https://www.structuredretailproducts.com/product>.
- [9] БКС Мир инвестиций. *Структурные продукты*. <https://bcs.ru/foryou/sp>. Доступ свободно. Заглавие с экрана. Дата обращения: 15.11.2024.
- [10] ВТБ. *Структурные ноты*. <https://private.vtb.ru/investment-services/strukturnie-noty/>. Доступ свободно. Заглавие с экрана. Дата обращения: 15.11.2024.
- [11] Открытый брокер. *Презентация: OTC-опционы типа Autocallable*. [https://www.open-broker.com/files/Presentation\\_OTC-Option\\_Autocallable.pdf](https://www.open-broker.com/files/Presentation_OTC-Option_Autocallable.pdf). Доступ свободно. Заглавие с экрана. Дата обращения: 15.11.2024.
- [12] Национальная ассоциация участников фондового рынка. *Карта деривативов*. <https://naufor.ru/tree.asp?n=22890>. Дата обращения: 30.11.2024.
- [13] Сбербанк. *Структурные продукты*. [https://www.sberbank.ru/ru/credit\\_org/investments/structured-products](https://www.sberbank.ru/ru/credit_org/investments/structured-products). Доступ свободно. Заглавие с экрана. Дата обращения: 15.11.2024.