Серия 1.

В задачах 1.1 и 1.4 процесс $S(t)$ —это геометрическое броуновское движение на отрезке $[0,T]$ с параметрами $r>0, \sigma>0, S(0)=1$. В графиках задач 1.2 и 1.3 число $e^{-r(T-t)}K$ должно находиться около середины отрезка, из которого берется x. Функция $c(t,x)$ (или $c(t,S(t))$) обозначает цену европейского колл опциона, посчитанного по формуле Блэка-Шоулза-Мертона.

Задача 1.1 Смоделировать процесс $S(t)$. Проверить экспериментально формулу для математического ожидания $MS(T)$. Увидеть зависимость скорости сходимости к математическому ожиданию от σ (т.е. зафиксировать число случайных траекторий N, увеличивать σ и следить за отклонением среднего от $MS(T)$).

Задача 1.2 Нарисовать графики $c(t,x)$ как функции от x при $t=0, 0.5T, 0.8T, 0.99T$.

Задача 1.3 Нарисовать графики греческих параметров $\delta, \gamma, \theta, \kappa, vega, \rho$ как функций от x.

Задача 1.4 Рассмотрите портфель

$$X(t)=c(t,S(t))-c_x(t,S(t))S(t),$$

где $c_x(t,S(t))$ — частная производная по x. Разделите отрезок $[0,T]$ точками $t_i=\frac{iT}{n}$, смоделируйте процесс $S(t)$ и постройте график портфеля $X(t)$ как функции от t в точках t_i. Постройте в том же окне график $e^{rt}X(0)$ как функции от t.

Серия 2. Опционы барьерные и с переменным страйком.

Задача 2.1 Запрограммировать формулу точной цены барьерного up-and-out call и сравнить с точным решением европейского call при барьере $B \to \infty$, $B \to K$, $B = 2K, B = 10K$, где K — страйк.

$$\begin{aligned}
v(t,x) = x &\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
&-e^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
&-B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&+e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right], \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le t < T,\ 0 < x \le B. \quad (7.3.20)
\end{aligned}$$

где $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ — функция нормального распределения и

$$\delta_\pm(\tau, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log s + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]$$

Задача 2.2 Найти цену барьерного up-and-out call методом Монте-Карло и сравнить с точной ценой. Задача засчитывается, если относительная погрешность будет не более 0.001 (средняя на нескольких запусках).

Задача 2.3 Решить численно уравнение Блэка-Шоулза для барьерного up-and-out call и сравнить с точной ценой. Задача засчитывается, если относительная погрешность будет не более 0.01 для почти всех узлов сетки.

Задача 2.4 Запрограммировать формулу цены lookback опциона с переменным страйком после понижения размерности. Нарисовать ее график по $z = \frac{x}{y}$.

$$\begin{aligned}
u(t,z) = &\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) zN\big(\delta_+(\tau, z)\big) + e^{-r\tau}N\big(-\delta_-(\tau, z)\big) \\
&-\frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N\big(-\delta_-(\tau, z^{-1})\big) - z,\ 0 \le t < T,\ 0 < z \le 1.
\end{aligned}$$

Задачи 2.5 и 2.6 Аналогично задачам 2.2 и 2.3 для lookback опциона с переменным страйком после понижения размерности.

Серия 3. Волатильность.

Задача 3.1 По датасету цен опционов на AAPL, найдите локальную волатильность $\sigma_{loc}(K,T)$. Постройте график $\sigma_{loc}(K,T)$ как функции двух переменных.

Задача 3.2 Посчитайте методом Монте-Карло цену азиатского опциона на AAPl, используя (переменную) локальную волатильность из задачи 3.1. Сравните с ценой, полученной методом Монте-Карло для постоянной волатильности (оцените по цене underlying из датасета).

Задача 3.3 Нарисуйте двумерные графики подразумеваемой волатильности $\sigma(K,T)$ по датасету цен опционов на AAPL (отдельно для колл и пут опционов). При фиксированном $T = T_0$ нарисуйте в одном окне два графика (для колл и пут опционов) подразумеваемой волатильности $\sigma(K,T_0)$ как функции от K.

Задача 3.4 Найдите цену европейского колл опциона в модели Хестона с помощью метода Монте-Карло, используя дискретизации Эйлера и Мильштейна и оценив дисперсии получаемых ответов (т.е. для каждой дискретизации запустить 100 блоков по 1000 траекторий и в каждом блоке подсчитать ответ).