Управление Финансовыми Портфелями - Лекции

Kasymkhan Khubiev

September 2023

Лектор Шнурников Игорь Николаевич

1 Введение

Курс состоит из трех частей:
1. Алгоритмические торговые стратегии (альфы или АТС)
2. Потроение портфелей на основе альф
3. Математические модели

Цель курса: какая математическая модель нужна?

Куда идти если хорошо освоил курс -> квант в хедж-фонде.

1.1 Алгоритмические торговые стратегии (АТС)

Программа на вход получает какие-то данные и на выходе возвращает вектор позиций по инструментам.

Мы будем работать на акциях Нью-Йоркской биржи. АТС хорошо работают на акциях крупных бирж и крипто валютах. Не работа/т на долговых бумагах.

Будем решать задачи: получаем датасет - строим АТС.

Определение: Инструмент - это акция/монета.

Пусть у нас есть N инструментов и позиция x:
Если $x > 0$, имеем длинную позицию = покупаем на x денег.
Если $x < 0$, имеем короткую позицию = продаем на x денег.

Обычно позицию считают в деньгах.
Ну и стараются брать значение позиии много больше единицы, т.е. достаточно большим, чтобы пренебречь остатком. Например, если цена акции 100, то х должно быть хотябы 10-20 тысяч.

Если разделить позицию на цену инструмента $price$, то получим кол-во актива в штуках, которыйм нужно проторговать. Например если d - это день, то $x(d) - x(d-1) \leq 2\%$

АТС работают хорошо, если имеется много ликвидных инструментов (высокочастотная торговля это другое, в ней применяются други подходы).

Пример:
Пусть у нас имеются следующие инструменты: Sber, Vtb, Alpha. Тогда:

$$\alpha = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, = \frac{1}{4})$$

,

$$\Sigma\alpha = 0; \Sigma|\alpha| = 1$$

Обычно происходит так: утром до начала торгов альфа должна выдать вектор позиций, который передается исполнительному отделу. Там специалисты должны правильно распределить торги в течение дня, чтобы обеспечить к концу торгов позицию $\alpha(d), d$ - день.

Что такое влияние на рынок и влияем ли мы на него? Обычно вводят ограничения ну и какой-то разумный порог по продаже активов, чтобы не справоцировать обвал. Если у нас есть какой-то инструмент и мы хотим выкупить некоторое количество акций этого инструмента для того, чтобы обеспечить позицию, то мы можем сами инициировать небольшой рост цены, но это краткосрочное колебание непосредственно не повлияет на рынок, ведь через "пару минут"после окончания наших сделок цена снова придет в исходное состояние.

По терминологии и заданию:
1. open - цена открытия (на начало торгов)
2. close - цена закрытия (на конец торгов)
3. high - наивысшая цена за весь день торгов
4. low - низшая цена за весь день торгов
5. volume - объем торгов в денежном эквиваленте

На вход альфа получает матрицу из пяти элементов по каждому инструменту по открытию торгов на каждый день. Выход - это позиция по каждлму инструменту.

2 Альфы

2.1 Reverse alpha

Пример альфы:

$$\alpha_i = -\frac{close_i(d-1)}{close_i(d-6)} + 1,$$

это недельная доходность за 5 дней, т.к. учитываются только рабочие дни.

Определение: Доходность i-го инструменты равна:

$$Return_i(d) = \frac{close_i(d)}{close_i(d-1)} - 1$$

Пример: Имеем вектор позиций $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ - всего N инструментов, и сделаем из него альфу. Нужно чтобы выполнялось условие нейтральности $\Sigma x_i = 0$ и нормальности $\Sigma |x_i| = 1$. Сделаем это в два шага:
1. Нейтразизация: $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{N}$, $x'_i = x_i - \overline{x}$
Проверка:

$$\Sigma x'_i = \Sigma x_i - \overline{x} = \Sigma x_i - N\overline{x} = \Sigma x_i - N\frac{\Sigma x_i}{N}$$

2. Нормализация: $x^* = \Sigma |x_i|, x'_i = \frac{x_i}{x^*}$
Проверка:

$$\Sigma |x'_i| = \Sigma |\frac{x'_i}{x^*}| = \frac{\Sigma |x_i|}{x^*} = 1$$

Здесь важна последовательность операций, которыми мы действуем на альфу: сначала нейтрализуем, потом делаем нормализация. Нормализация не портит нейтрализацию, т.к. мы просто разделили вектор на положительно число.

Пример альфы: $\vec{\alpha} : \vec{\alpha_i}(d) = -\frac{close_i(d)}{close_i(d-1)} + 1$, но это пока сырой сигнал. Его нужно преобразовать в подходящий, тогда итоговый альфа:

$$\alpha = normalize(neutrolize(\alpha))$$

Конечно могут быть еще какие-нибудь промежуточные манипуляции.

Мы считаем доходность за неделю и делаем прогноз, но с предположение, если цена выросла, то она упадет и наоборот. Альфы этого типа называются Reversion (возврат). Они очень просто пишутся, но их главный минус в том, что такие альфы требуют большого количества торгов для получения профита.

2.2 Доходность

Пусть в день d имеем $\vec{\alpha}(d)$, который зависит от данных до $(d-1)$ включительно. Как рассчитать доходность всей альфы?

Для начала договоримся, что все доходы и убытки переводим на отдельный счет, что обеспечит постоянное значение плеча. Откуда получается доход? Прибыль = количество инструмента, который мы купили или продали, помножить на цену сделки.
Пример:
Пусть количество i-го инструмента такое, что $N(d-1) = \frac{\alpha_i(d-1)}{close(d-1)}$ и $N(d) = \frac{\alpha_i(d)}{close_i(d)}$,
тогда разница в количестве ценных бумаг равна $\delta N = N(d) - N(d-1)$ откуда рассчитаем доход:

$$Income_i = -\delta N * price_i(d),$$

где $price_i(d)$ - цена сделки, ее можно положить равно средне взвешенной цене.

Рассмотрим основные случаи:
1. если покупаем long => тратимся.
2. если продаем long => зарабатываем
3. если увеличиваем short => зарабатываем
4. если уменьшаем (закрываем) short => тратимся

Определение: Средне взвешенная цена сделки равна:

$$vwap_i = \Sigma_k \frac{price_{ik} - volume_{ik}}{\Sigma_k volume_i k}$$

Утверждение 1: Итоговая прибыль альфы $\vec{\alpha}(d)$ равна:

$$Income(\alpha(d)) = \Sigma_i^N Income(\alpha_i(d)) = \Sigma_i^N -(\frac{\alpha_i(d)}{close_i(d)} - \frac{\alpha_i(d-1)}{close_i(d-1)}) * vwap_i(\alpha)$$

При этом было сделано несколько предположений:
1.Нет комиссий.
2.Средняя цена сделки равна $vwap_i(\alpha)$

Утверждение 2:

$$\Sigma_i^N - (\frac{\alpha_i(d)}{close_i(d)} - \frac{\alpha_i(d-1)}{close_i(d-1)}) * vwap_i(\alpha) = holding_{pnl} + trading_{pnl},$$

где

$$holding_{pnl} = \Sigma_i^N \alpha_i(d-1) * return_i(d) = (\vec{\alpha}(d-1), \vec{r}(d))$$

$$trading_{pnl} = \Sigma_{i=0}^N (\frac{\alpha_i(d)}{close_i(d)} - \frac{\alpha_i(d-1)}{close_i(d-1)})(close_i(d) - vwap_i(\alpha))$$

$$\vec{r}(d) = (return_1(d), return_2(d), ..., return_N(d) - Income - vector$$

Доказательство:

$$\Sigma_i^N - (\frac{\alpha_i(d)}{close_i(d)} - \frac{\alpha_i(d-1)}{close_i(d-1)}) * vwap_i(\alpha)$$

$$= \Sigma_i^N (\frac{\alpha_i(d)}{close_i(d)} - \frac{\alpha_i(d-1)}{close_i(d-1)}) * (close_i(d) - close_i(d) - vwap_i(\alpha)) =$$

$$\Sigma_i^N - (\alpha_i(d) + \alpha_i(d-1)\frac{close_i(d)}{close_i(d-1)}) + holding_{pnl} =$$

$$\Sigma_i^N - (\alpha_i(d) + \alpha_i(d-1)(\frac{close_i(d)}{close_i(d-1)} + 1 - 1)) + holding_{pnl} =$$

$$\Sigma_i^N - \alpha_i(d) + \Sigma_i^N \alpha_i(d-1) + holding_{pnl} + trading_{pnl} = holding_{pnl} + trading_{pnl}$$

Замечание: Обычно при проектировании альф учитывается только $holding_{pnl}$, т.к. $trading_{pnl}$ составляет только 15% от совокупной доходности при обороте в 15-20%, т.е. им последним можно пренебречь.

Будем считать, что Доходность (от владения) $\alpha\vec{(d)}$ - это $pnl(\alpha)$ - 'profit and loss'.

Определение: Накопленная доходность равна:

$$cumpnl(k) = \Sigma_{\alpha=1}^k pnl(\alpha)$$

Далее для каждой альфы нужно будет рисовать график накопленной доходности. Но не стоит забывать про $bias$ - систематическую ошибку. Поэтому важно считать прибыль за день d только в день d+1.

2.3 Оборот

Определение: Оборот $\vec{\alpha}(d)$ равен:

$$turnover(\alpha) = \Sigma_{i=1}^N |\alpha_i(d) - \alpha_i(d-1)|$$

Иными словами оборот - это та часть портфеля, которая была задействована в торгах.

Определения: Коэффициент Шарпа для известного вектора доходности альфы $\vec{pnl} = (pnl_1, pnl_2, ..., pnl_T)$ за T дней:

$$Sharpe = \frac{mean(pnl)}{std(pnl)}\sqrt{T},$$

где $mean(pnl) = \frac{1}{T}\Sigma_{i=1}^T pnl_i$ - выборочное среднее,
$std(pnl) = \sqrt{\frac{1}{T-1}\Sigma_{i=1}^T (pnl_i - mean(pnl))^2}$ - выборочная дисперсия

Коэффициент Шарпа показывает гладкость графика кумулятивной доходности - чем больше шарп - тем плавнее график - медленный, но стабильный доход.

Рассмотрим несколько вариантов:
1. sharpe $>$ 1.5 $=>$ очень хорошо
2. sharpe $>$ 1. $=>$ хорошо
3. 0.7 $<$ sharpe $<$ 1. $=>$ нормально
4. sharpe $<$ 0.7 $=>$ плохо

Теперь обсудим чему равны максимальное и минимальное значения оборота:

$$max = 2, min = 0$$

При этом $turnover = 0$ означает, что позиции не были изменены, ну и $turnover = 2$ достигается тогда и только тогда, когда $\alpha_i(d-1) * \alpha_i(d) \leq 0$ - т.е. разных знаков.

Как оптимизировать оборот? Слишком большой оборот это плохо, т.к. чем больше оборот, тем больше комиссии заплатим. Потому хотим платить как можно меньше.

Определение: Decay (Замедление) - операция уменьшения оборота. Выполняется в несколько шагов:
Шаг 1. получаем альфы за весь период: $\alpha(d), \alpha(d-1), ..., \alpha(d-t)$
Шаг 2. составляем их линейную комбинацию: $\overline{\alpha}(d) = \Sigma \lambda_i \alpha(d-i) = \alpha(d) + \frac{t}{t+1}\alpha(d-1) + \frac{t-1}{t+1}\alpha(d-2) + ... + \frac{1}{t+1}\alpha(d-t)$ - коэффициенты арифметической прогрессии. Полученная альфа нейтральная, так как каждая альфа в сумме нейтральна по отдельности.
Шаг 3. Нормализуем и получаем финальную альфу $\alpha_* = normalize(\overline{\alpha})$

2.4 Виды Альф

1. Reversion (возврат) - много и легко пишутся.
2. Momentum (тренд) - трудно сделать хорошее решение.
3. fundamental (используются финансовые отчеты) - income statement, balance sheet, cash flow, etc.
4. news, social (новостные) - долго и сложно делать.
5. merges (сделки) -
6. analysis (аналитики) - хороший

В чем разница между Reversion и Momentum и почему эти две разные (почти противоположные) модели живут одновременно? Reversion предполагает, что за ростом цены обязательно следует падение, но рассматривает короткий интервал времени 1-20 дней, когда Momentum предполагает, что в среднем цена будет только расти, но рассматривает более длительный период времени 6-12 месяцев.

2.5 Максимальная просадка

Определение: Выборочная просадка равна:

$$drawdown(T) = max_{0<t_1<t_2<T}(cumpnl(t_1) - cumpnl(t_2))$$

Хотим оптимизировать, чтобы подсчет максимальной просадки выполнился за линейной (один цикл) время. Для этого надо понимать, что просадка происходит в моменты падения функции, т.е. если идет рост функции, то и просадку искать нет смысла. Тогда алгоритм будет таким:
1. Содздаем две переменные для хранения значения максимальной просадки и максимальной накопленной доходности.
2. Начинаем бежать по элементам вектора накопленной доходности.
–2.1.Если в текущий момент времени доходность больше максимальной - перезаписываем и идем в следующий шаг цикла так как идет рост и ловить нечего,
–2.2.иначе проверяем просадку, если она больше макисмальной - перезаписываем и идем в следующий шаг цикла,
–2.3.если ни одно из условий не выполнено, просто делаем следующий шаг по циклу.

Итак для каждой альфы необходимо привести следующие данные:
1. график cumpnl,
2. pnl по каждому году за 5 лет,
3. turnover по каждому году за 5 лет,
4. drawdown по каждому году за 5 лет.

2.6 Усечка/Truncate

Иногда альфы могут давать не самые корректные значения, например, попытаются вложить 90% всех денег в один инструмент. Но такой дисбаланс в портфеле может вызвать сильные колебания. Для этого применяется метод учечки, когда слишком большие значения урезаются и перераспределяют капитал между остальными.

Есть какое-то пороговое значение treshold, и необходимо чтобы на каждый инструмент приходилось не более пороговой доли от всего портфеля. Т.е. $|\alpha_i| \leq treshols$

Действуем в несколько шагов:
1. все интсрументы для которых $|\alpha_i| > treshold$ заменяем на $treshold \times sign(\alpha_i)$
2. все длинные позиции растягиваем в 0.5 и все короткии позиции растягиваем в -0.5:

$$sum_{long} = \Sigma_{\alpha_i>0}, \overline{\alpha_i} = \frac{\alpha_i}{2sum_{long}}$$

$$sum_{short} = -\Sigma_{\alpha_i<0}, \overline{\alpha_i} = \frac{\alpha_i}{2sum_{short}}$$

Иногда получается так, что некоторые позиции даже полсле учечки получаются немного больше, чем пороговое значение. Чтобы с этим справится нужно взять заранее немного меньше чем заявленное пороговое значение и проделать несколько итераций, пока не получим удовлетворительный результат.

2.7 Допустимые вектора значений альфы

Вопрос: Какие вектора может давать альфа в качестве вектора позиций?

Из определения вектор допустимых позиций $\alpha \in R^N | \Sigma\alpha_i = 0 and \Sigma|\alpha_i| = 1$.

Чем является множество векторов допустимых позиций?

Отвечать на этот вопрос будем постепенно переходя из частного случая к общему.

В случае $N = 2$ это две точки $(1/2, -1/2)$ и $(-1/2, 1/2)$.

В случае $N = 3$ имеем более сложное решение. $\Sigma\alpha_i = 0$ соответствует уравнению плоскости, а $\Sigma|\alpha_i| = 1$ - это октаэдр. Тогда решением системы является пересечение октаэдра и плоскости. Чтобы найти пересечение плоскости с фигурой будем пересекать каждую грань с плоскостью отдельно. В результате пересечения получается шестигранник.

В случае $N > 3$ имеем гиперплоскость и N-мерный октаэдр, каждая грань которого является симплексом. Множество допустимых векторов A_N является многогранником, т.к. задается конечным числом линейных векторов - 2^N неравенств типа $(\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, ..., \pm\alpha_N)$.

Хотим посчитать число вершин у многогранника A_N

Утверждение: Ребра у октаэдра $\Sigma|\alpha+i| = 1$ имеют вид: $[0, 0, ..., 0, x, 0, ..., 0, y, 0..., 0, 0]$ - вектор длины N, такие что удовлетворяют равенству $|x| + |y| = 1$

Для этого равенства имеется четыре случая:
1. $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 1$
2. $x > 0$, $y < 0$, $x - y = 1$
3. $x < 0$, $y > 0$, $-x + y = 1$
4. $x < 0$, $y < 0$, $x + y = -1$

При этом множество значений x и y пересекает $\Sigma\alpha_i = 0$ только в случае, когда x и y имеют равные знаки - т.е. ровно половина граней пересекается.

Утверждение: У множества допустимых векторов A_N всего $2C_N^2$ вершин.

Определение: Вершина многогранника это точка x для которой не существует интервала (a, b): $x \in (a, b)$ и $(a, b) \in P$ - многогранник.

2.8 Операции для потсроения альф

1. rank: такая операция переводит вектор $\alpha \in R^N$ в вектор $\overline{\alpha} \in R^N$ с координатами $(0, \frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1}, ..., 1)$ с сохранением упорядоченности координат: самое большое заменяется на 1, самое маленькое на 0.

Пример: пусть есть вектор $\alpha = (-6, 10, 125, -8, 0) => N = 5$

тогда новый вектор равен:

$$\overline{\alpha} = rank(\alpha) = (1/4, 3/4, 1, 0, 2/4)$$

По-другому эта операция называется операцией ранжирования.

2. Cut Middle (обрезание средних):

берем вектор $\alpha \in R^N$ и число $n \in N$, упорядочиваем координаты вектора, и середнечков заменяем нулями.

Пример:

Пусть $\alpha = (-1, -6, -3, -2, -10, 0, 126, 8, 13, 5)$

Тогда упорядоченный вектор имеет вид: $(-10, -6, -3, -2, -1, 0, 5, 8, 13, 126)$

Будем уберать 4 штуки середнечков, это -2, -1, 0, 5.

Тогда получаем вектор: $(-10, -6, -3, 0, 0, 0, 0, 8, 13, 126)$

Восстановим порядок и получим конечный вектор: $(0, -6, -3, 0, -10, 0, 126, 8, 13, 0)$

В чем смысл? Мысль следующая: если вчера доходность росла, то сегодня будет падать и наоборот, если доходность существенно не изменялась, то это шум, его можно выбросить.

{Идея для написания кода: для каждого числа нужно понять на каком месте оно будет стоять в упорядоченном массиве.}

3. Cut Outlayers (Вырезание средних):

Берем вектор $\alpha \in R^N$ и число $n \in N$, упорядочиваем вектор, заменяем n самых больших и n самых маленьких значений нулями, восстанавливаем порядок исходного вектора.

Пример:

Пусть $\alpha = (-1, -6, -3, -2, -10, 0, 126, 8, 13, 5)$

Тогда упорядоченный вектор имеет вид: $(-10, -6, -3, -2, -1, 0, 5, 8, 13, 126)$

Будем уберать по 2 самых больших и маленьких числа, это -10, -6, 13. 126.

Тогда получаем вектор: $(0, 0, -3, -2, -1, 0, 5, 8, 0, 0)$

Восстановим исходный порядок и получаем итоговый вектор:

$$(-1, 0, -3, -2, 0, 0, 0, 8, 0, 5)$$

Смысл такой: мы выполняем фильтрацию выбросов, чтобы у нас не было сильных скачков в альфе.

2.9 Сравнение альф

Допустим у нас есть две альфы, как их сравнить на схожесть? Лучше всего сравнивать альфы по корреляции между ними.

Пусть имеем вектора обычных (не кумулятивных) доходностей альф $\vec{x} = (x_1, ..., x_T)$ и $\vec{y} = (y_1, ..., y_T)$ за T дней.

Несмещенная оценка ковариации двух векторов доходностей равна:

$$cov_*(x, y) = \frac{1}{T-1} \Sigma_{i=0}^{T} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}),$$

где $\overline{x} = \frac{1}{T} \Sigma x_i$ и $\overline{y} = \frac{1}{T} \Sigma y_i$

Дисперсия: $D_*(x) = \frac{1}{T-1} \Sigma (x_i - \overline{x})^2$ и $D_*(y) = \frac{1}{T-1} \Sigma (y_i - \overline{y})^2$
Тогда корреляция выражается следующим выражением:

$$corr_*(x, y) = \frac{cov_*(x, y)}{\sqrt{D_*(x)} \sqrt{D_*(y)}}$$

2.10 Риск и ковариация

Риски считаются через ковариацию - для большого количества активов работает квадратичная ковариация, для маленькой выборки можно использовать и что-то другое.

Пусть ξ и η - случайные величина, тогда $cov(\xi,\eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta))$

Замечание:

$$D(\xi) = cov(\xi,\xi)$$

$$corr(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}$$

Геометрический смысл: Пусть $\vec{x} = \xi - M\xi$ и $\vec{y} = \eta - M\eta$ - "вектора тогда

$$cov(\xi, eta) = (\vec{x}, \vec{y})$$

$$D(\xi) = |\vec{x}|^2, \quad D(\eta) = |\vec{y}|^2$$

Замечание: если ξ и η - независимые, то $cov(\xi,\eta) = 0$ и $corr(\xi,\eta) = 0$

Утверждение: cov_* является несмещенной оценкой ковариации:

$$Mcov_*(\xi,\eta) = cov(\xi,\eta)$$

Доказательство:

Будем считать, что $M\xi = M\eta = 0, \quad else \;\; \tilde{\xi} = \xi - M\xi, \; \tilde{\eta} = \eta - M\eta.$

Тогда:

$$M(cov_*(\xi,\eta)) = M\frac{1}{T-1}\Sigma_{i=1}^{T}(\xi_i - \overline{\xi})(\eta_i - \overline{\eta}) = \frac{1}{T-1}M\Sigma_{i=1}^{T}(\xi_i\eta_i - \xi_i\overline{\eta} - \eta_i\overline{\xi} + \overline{\xi}\overline{\eta}) =$$

$$\frac{1}{T-1}\Sigma_{i=1}^{T}(cov(\xi,\eta) - \frac{1}{T}(cov(\xi_i,\eta_i)) - \frac{1}{T}cov(\xi,\eta) + \frac{1}{T^2}(\Sigma_{i=1}^{T}cov(\xi,\eta))) =$$

$$\frac{1}{T-1}\Sigma_{i=1}^{T}(cov(\xi,\eta) - \frac{1}{T}cov(\xi,\eta)) = \frac{1}{T-1}\Sigma_{i=0}^{T}(1 - \frac{1}{T})cov(\xi,\eta) =$$

$$\frac{1}{T-1}\frac{T-1}{T}Tcov(\xi,\eta) = cov(\xi,\eta)$$

Как понять похожесть по корреляции?

Пусть у нас есть два вектора α_1 и α_2, тогда:
1. $corr(\alpha_1,\alpha_2) > 0.7$ - почти одно и то же
2. $0.5 \le corr(\alpha_1,\alpha_2) \le 0.7$ - похожи, но есть отличие
3. $0.3 \le corr(\alpha_1,\alpha_2) < 0.5$ - норм, лежат внутри одного класса
4. $0 \le corr(\alpha_1,\alpha_2) < 0.3$ - отлично, разные типы альф
5. $corr(\alpha_1,\alpha_2) < 0$ - очень хорошо!

Что если альфа не одна? При сложении альф меняется их sharpe.

Если $corr(\alpha_1, \alpha_2) > 0.7, \quad sharpe(\alpha_1 + \alpha 2) = sharpe(\alpha_1),$

Если $0 < corr(\alpha_1, \alpha_2) < 0.5, \quad sharpe(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{2} sharpe(\alpha_1)$

Как получили коэффициент $\sqrt{2}$?

Пусть ξ и η - независимы и $D(\xi) = D(\eta) = 1$ - риски $\alpha_1 = 1$, $M\xi = M\eta = a$, тогда

$$D(\frac{\xi + \eta}{2}) = \frac{1}{4}D(\xi + \eta) = \frac{1}{4}(D(\xi) + D(\eta)) = 1/2,$$

тогда риск равен $\sqrt{(D(\frac{\xi+\eta}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Пример: Пусть $corr(\xi, \eta) = \rho, \quad D(\xi) = D(\eta) = 1$, Тогда

$$D(\frac{\xi + \eta}{2}) = \frac{1}{4}D(\xi+\eta) = \frac{1}{4}cov(\xi+\eta, \xi+\eta) = \frac{1}{4}(cov(\xi, \xi)+cov(\xi, \eta)+cov(\eta, \xi)+cov(\eta, \eta)) = \frac{1}{4}(2+2\rho) = \frac{1 + rho}{2},$$

тогда риск $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}$

Комментарий: хорошо делать много маленьких альф с маленьким коэф корреляции.

Пример: Fama & Franch (1993) - одна из альф SMB - small minus big - акции на маленькие компании растут быстрее, чем на большие, получается достичь прибыли при очень маленьком обороте примерно равном 0.01 от портфеля.