

Лабораторная работа №1

Численное решение задачи Коши для ОДУ

Написать программу, реализующую метод, указанный в варианте с автоматическим выбором шага интегрирования (используя правило Рунге). Экспериментально сравнить эффективность использованного метода с явным методом Эйлера.

Входные данные:

- tol – требуемая точность
- h_0 – величина начального шага
- T – конечная точка интегрирования

Выходные данные:

- N_{tot} – общее количество шагов по времени
- N_A – количество принятых шагов
- N_R – количество отброшенных шагов
- время работы программы

Результаты оформить в виде отчета, в который включить графики компонент численного решения (если иное не указано в вашем варианте). Кроме того, включить в отчет результаты сравнения используемых методов, оформленные в виде таблицы (провести численные эксперименты с точностью $tol = 0.000001$):

tol	Метод	N_{tot}	N_A	N_R	t
0.000001	Метод из варианта				
	Метод Эйлера				

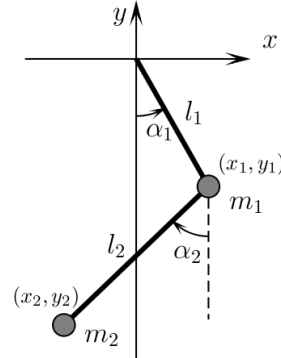
Принцип оценки (подразумевается, что отчет содержит графики и частично таблицу, оценки указаны за сданную в срок работу):

- 1. Реализация метода Эйлера – 4 балла.
- 2. Реализация пункта 1. и метода из варианта – 7 баллов.
- 3. Реализация пунктов 1 и 2 и автоматического выбора шага численного интегрирования - 10 баллов.

Задачи

0.1 Двойной маятник

Рассмотрим двойной маятник, состоящий из двух невесомых жёстких стержней длин l_1 и l_2 и точечных масс m_1 и m_2 , как изображено на рисунке. Движение системы полностью описывается двумя функциями, определяющими изменение во времени углов α_1 и α_2 . Эти функции удовлетворяют следующей системе ОДУ второго порядка.



$$\begin{cases} \alpha_1'' = \frac{-g(2m_1+m_2)\sin\alpha_1 - m_2g\sin(\alpha_1-2\alpha_2) - 2m_2(l_1(\alpha_1')^2\cos\alpha + l_2(\alpha_2')^2)\sin\alpha}{l_1(2m_1+m_2-m_2\cos 2\alpha)} \\ \alpha_2'' = \frac{2\sin\alpha(l_1m(\alpha_1')^2 + gm\cos\alpha_1 + l_2m_2(\alpha_2')^2\cos\alpha)}{l_2(2m_1+m_2-m_2\cos 2\alpha)} \end{cases}$$

Здесь g — ускорение свободного падения, и использованы также следующие сокращения:

$$m = m_1 + m_2 \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

При отрисовке графиков решения произвести преобразование координат таким образом, чтобы траектории совпадали с реальными координатами маятника. Интегрирование проводить на отрезке $[0, T]$, T взять достаточно большим так, чтобы маятник успевал сделать несколько колебаний. Начальные условия (α_i — угол отклонения маятника и α_i' — скорость маятника) выбрать такими, чтобы второй маятник сделал как минимум один полный оборот вокруг точки подвеса.

0.2 Орбита Аренсторфа

Рассмотрим плоское движение тела пренебрежимо малой массы (спутника) в поле тяготения, создаваемом двумя телами, находящимися в точках $(0,0)$ (Земля) и $(1,0)$ (Луна). Координаты тела в момент времени t задаются векторной функцией $x = (x_1, x_2)^T$, которая удовлетворяет следующей системе ОДУ второго порядка:

$$\begin{cases} x_1'' = x_1 + 2x_2' - (1-\mu)\frac{x_1+\mu}{D_1} - \mu\frac{x_1-(1-\mu)}{D_2} \\ x_2'' = x_2 - 2x_1' - (1-\mu)\frac{x_2}{D_1} - \mu\frac{x_2}{D_2} \end{cases}$$

где

$$D_1 = ((x_1 + \mu)^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}, \quad D_2 = ((x_1 - (1 - \mu))^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\mu = 0.012277471$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned}x(0) &= (0.994, 0)^T, \\x'(0) &= (0, -2.00158510637908252240537862224)^T, \\t_{max} &= 17.0652165601579625588917206249.\end{aligned}$$

0.3 Аттрактор Лоренца

Данная система ОДУ появилась в результате попыток математического моделирования климата. При определённом выборе параметров траектория любого решения этой системы стремится при $t \rightarrow \infty$ к асимптотически устойчивому непериодическому решению — так называемому «странному аттрактору».

$$\begin{cases} y_1' = -\sigma(y_1 - y_2) \\ y_2' = -y_1y_3 + ry_1 - y_2 \\ y_3' = y_1y_2 - by_3 \end{cases}$$
$$y(0) = (-8, 8, r - 1)^T$$

Упомянутое хаотичное поведение решения достигается, например, при следующих значениях параметров:

$$\sigma = 10, b = 8/3, r = 28.$$

Немного измените начальные данные. Что получилось при этом? Приведите соответствующие графики.

Графики: x_1 и x_2 здесь — координаты точки в двумерном пространстве. В итоге должен получиться некоторый путь.

0.4 Улучшенная модель «хищник—жертва»

Пусть $H(t)$ — численность популяции жертв, $P(t)$ — численность популяции хищников. Динамика численности этих двух популяций описывается следующей системой ОДУ:

$$\begin{cases} H'(t) = r_H \left(1 - \frac{H(t)}{H_{max}}\right) H(t) - \frac{aH(t)}{1+aT_0H(t)} P(t), \\ P'(t) = r_P \left(1 - \frac{P(t)}{kH(t)}\right) P(t). \end{cases}$$

Здесь:

- r_H, r_P — коэффициенты роста популяций жертв и хищников соответственно,

- H_{max} — критическое значение численности жертв,
- a — эффективность поиска жертвы,
- T_0 — время «обработки» одним хищником одной жертвы,
- k — коэффициент зависимости критической численности хищников от численности жертв.

В зависимости от выбора коэффициента a система демонстрирует качественно разное поведение. Зафиксируем $r_P = 0.1$, $r_H = 0.2$, $T_0 = 0.5$, $k = 0.2$, $H_{max} = 500$. Тогда при $a = 0.001$ система выходит на стационарное положение равновесия без осцилляций; при $a = 0.1$ появляются затухающие осцилляции; при $a = 0.3$ наблюдается предельный цикл. Задача: получить совмещенные графики численного решения для всех указанных выше наборов параметров.

0.5 Простейшая модель эпидемии SIR

Во время эпидемии какой-либо болезни (для простоты - не летальной, но жутко заразной :)) популяцию можно разбить условно на три группы, численность которых будет изменяться с течением времени. А именно: восприимчивые особи (Susceptible, $S(t)$), инфицированные (Infected, $I(t)$) и выздоровевшие (Recovered, $R(t)$). Также для простоты предполагаем, что новых особей в популяции за время моделирования не появилось. Тогда, очевидно, $S(t) + I(t) + R(t) = N$, где N – постоянная величина. Можно связать эти величины и получить систему ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta I(t)S(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

Здесь β и γ – некоторые коэффициенты, характеризующие склонность популяции к заболеванию (β) и скорость выздоравливания (γ).

Статья с подробным выводом может быть найдена здесь: [kermack1927.pdf](#)

Сами уравнения можно посмотреть на Википедии [goToWiki](#)

Задача: исследовать различные сценарии развития эпидемии в зависимости от γ и β (случай, когда популяция вся переболела и выздоровела, переболела и не выздоровела совсем и когда не произошло полного поражения популяции). Начальные условия: $S(0) = 499$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$

Далее небольшая и совсем не точная интерпретация этой системы.
Для начала предполагаем, что число выздоравливающих особей увеличивается пропорционально количеству инфицированных (чем больше больных, тем больше в перспективе будет выздоровевших). Величину $\frac{dR(t)}{dt}$ можно трактовать как скорость выздоравливания:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

Далее нужно отметить, что чем больше инфицированных особей в популяции имеется, тем большая вероятность заболевания восприимчивых особей. Также, скорость заболеваемости будет зависеть от количества восприимчивых особей. Кроме того, можно предположить, что чем больше популяция, тем медленнее она будет заболевать. Величину $\frac{dS(t)}{dt}$ можно трактовать как скорость уменьшения количества здоровых особей. Получим следующее уравнение:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta I(t)S(t)}{N}$$

Последнее уравнение в системе можно получить так: поскольку $S(t) + I(t) + R(t) = N$, то $\frac{d(S(t)+I(t)+R(t))}{dt} = 0$. Отсюда получаем:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} - \frac{dS(t)}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t)$$

Таким образом, получили систему ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta I(t)S(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

0.6 Модель эпидемии SIR с учетом демографических факторов

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \lambda - \mu S(t) - \beta I(t)S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - (\gamma + \mu)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

Здесь β и γ – некоторые коэффициенты, характеризующие склонность популяции к заболеванию (β) и скорость выздоровления (α). λ – некоторый коэффициент, отвечающий за рождаемость, μ – коэффициент смертности (по причинам, не связанным с болезнью). Болезнь по-прежнему не летальная. Задача: исследовать варианты развития эпидемии при разных параметрах β и γ , построить соответствующие графики. Могут ли наблюдаться ситуации, когда не болевших больше, чем больных и выздоровевших? При каких параметрах? Начальные условия: $S(0) = 499$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$. Параметры $\lambda = 10$, $\mu = 0.005$

0.7 Задача о химической реакции (HIRES)

HIRES — эта химическая реакция с участием восьми реагентов была предложена Шефером для объяснения роста и дифференциации растительной ткани независимо от фотосинтеза при высоких уровнях светового облучения. Уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} y_1' = -1.71y_1 + 0.43y_2 + 8.32y_3 + 0.0007, \\ y_2' = 1.71y_1 - 8.75y_2, \\ y_3' = -10.03y_3 + 0.43y_4 + 0.035y_5, \\ y_4' = 8.32y_2 + 1.71y_3 - 1.12y_4, \\ y_5' = -1.745y_5 + 0.43y_6 + 0.43y_7, \\ y_6' = -280y_6y_8 + 0.69y_4 + 1.71y_5 - 0.43y_6 + 0.69y_7, \\ y_7' = 280y_6y_8 - 1.81y_7, \\ y_8' = -y_7'; \end{cases}$$

В качестве начальных условий взять следующие:

$$y(0) = 1, y_2(0) = y_3(0) = \dots = y_7(0) = 0, y_8(0) = 0.0057.$$

Интервал интегрирования:

$$t_0 = 0, t_{end} = 321.8122$$

Методы

1. Предиктор-корректор (явный метод трапеций)

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n^{[3]} + \tau f_n^{[3]}$$

$$y_{n+1}^{[3]} = y_n^{[3]} + \frac{\tau}{2}(f_n^{[3]} + f_{n+1}^{[2]})$$

2. Явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. Метод последовательного повышения порядка точности с 4-ым порядком локальной ошибки

$$y_{n+\frac{1}{4}}^{[2]} = y_n + \frac{h}{4}f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}}^{[3]} = y_n + \frac{h}{2}f(x_{n+\frac{1}{4}}, y_{n+\frac{1}{4}}^{[2]})$$

$$y_{n+1}^{[3]} = y_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}^{[3]})$$

$$y_{n+1}^{[4]} = y_n + \frac{h}{6}(f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}^{[3]}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[3]}))$$

Варианты

В колонке “задача” указан порядковый номер задачи для решения. В колонке “метод” указан порядковый номер метода, при помощи которого нужно решать указанную задачу.

№	Фамилия	Задача	Метод
1.	Артюшкевич С.	1	1
2.	Бакевич А.	2	2
3.	Ганкович Е.	3	3
4.	Диброва Е.	4	1
5.	Казаков А.	5	2
6.	Керножицкий А.	6	3
7.	Мелех А.	7	1
8.	Неверо А.	1	2
9.	Соловей М.	2	3
10.	Тарайкович А.	3	1
11.	Филипович Ф.	4	2
12.	Ходор И.	5	3
13.	Шакель А.	6	1
14.	Шляго Н.	7	2
15.	Юрковская Е.	1	3