0.1 Выбор шага численного интегрирования

Автоматический (адаптивный) выбор шага численного иинтегрирования как правило основывается на идее двойного пересчета.

Как и ранее, решаемая нами задача имеет вид:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, X_{end}] \tag{1}$$

Для решения применим одношаговый метод порядка p, общий вид которого можно записать как

$$y = \Phi(x_0, y_0, x_0 + h) \tag{2}$$

Зададимся каким-то определенным шагом h и сделаем один “большой” шаг выличины $2h$, таким образом получив приближение:

$$\tilde{y}_2 = \Phi(x_0, y_0, x_0 + 2h).$$

Кроме того, сделаем 2 “маленьких” шага величины h:

$$y_1 = \Phi(x_0, y_0, x_0 + h) \quad y_2 = \Phi(x_0 + h, y_1, x_0 + 2h)$$

Разумеется и $\tilde{y}_2$ и y_2 являются решениями приближенными, а значит появляются погрешности:

$$\begin{array}{ll} \tilde{e}_2 & = y(x_0 + 2h) - \tilde{y}_2 \\ e_2 & = y(x_0 + 2h) - y_2 \end{array}, \tag{3}$$

где $y(x_0 + 2h)$ – точное решение (1), причем, вообще говоря, $\tilde{e}_2$ и e_2 не равны между собой. Наша задача - сравнить эти погрешности.

Из определения локальной погрешности имеем:

$$\tilde{e}_2 = y(x_0 + 2h) - \tilde{y}_2 = C_0(2h)^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{4}$$

С погрешностью e_2 дело обстоит сложнее – причина в том, что при вычислении y_1 уже была допущена некоторая ошибка (таким образом, начальное условие для нахождения y_2 не точно, а имеет *неустранимую погрешность*).

Погрешность первого “маленького” шага выражается аналогично (4)

$$e_1 = y(x_0 + h) - y_1 = C_0 h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

C_0 – константа погрешности метода, вычисляемая в точке x_0 (она, к слову, выражается через элементарные дифференциалы от правой части уравнения

– см. лекции о порядке методов). Погрешность второго “маленького” шага будет состоять уже из двух частей: погрешности первого шага и уже найденной нами e_1:

$$\begin{aligned} e_2 = y(x_0+2h) - y_2 = C_1 h^{p+1} + O(h^{p+2}) + e_1 = \\ = \left[C_1 = C_0 + C_0' h + O(h^2)\right] = C_0 h^{p+1} + O(h^{p+2}) + C_0 h^{p+1} + O(h^{p+2}) = \\ = 2C_0 h^{p+1} + O(h^{p+2}) \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{array}{ll} \tilde{e}_2 & = C_0(2h)^{p+1} + O(h^{p+2}) \\ e_2 & = 2C_0 h^{p+1} + O(h^{p+2}) \end{array}, \quad (6)$$

откуда, пренебрегая членами $O(h^{p+2})$ и памятуя о (4), несложно получить значение C_0 (в (6) отнимем второе уравнение от первого , предварительно подставив туда определения e_2 и $\tilde{e}_2$ из (4)):

$$C_0 = \frac{y_2 - \tilde{y}_2}{2h^{p+1}(2^p - 1)} \quad (7)$$

Зная C_0 несложно получить оценку погрешности для y_2 – из (4) имеем:

$$y(x_0+2h) = y_2 + C_0 2h^{p+1} + O(h^{p+2}) = y_2 + err + O(h^{p+2}),$$

где err – и есть искомая оценка для погрешности:

$$err = \frac{y_2 - \tilde{y}_2}{2^p - 1} \quad (8)$$

Имея оценку погрешности, проверяем, удовлетворяет ли она требуемой точности (tol), то есть выполняется ли неравенство:

$$|err| < tol \quad (9)$$

Если неравенство не соблюдается, то нужно уменьшить шаг и повторить рассчеты с уже меньщим шагом. Как правило, в этом случае поступают так: желая выполнения неравентства (9), можно сразу выразить h_{new}:

$$h_{new} < \delta h, \quad (10)$$

где

$$\delta = \left(\frac{tol}{|err|}\right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (11)$$

Если же неравенство (9) выполняется, то найденное приближение y_2 принимается, и процесс численного интегрирования продолжается из точки $x_0 +$

$2h$ с новым значением шага h_{new}, который рассчитывается аналогично предыдущему случаю (предполагаем, что константа погрешности на следующем шаге будет незначительно оличаться от уже найденной нами C_0). В этом случае величина δ будет больше единицы, что приведет к увеличению шага интегрирования.

Таким образом, имеем следующий алгоритм выбора шага численного интегрирования (входные данные – y_0, x_0, h):

1. Если достигнут конец отрезка интегрирования, прекращаем вычисления.

2. Вычисляем $\tilde{y}_2 = \Phi(x_0, y_0, x_0 + 2h)$ и $y_2 = \Phi(x_0 + h, y_1, x_0 + 2h)$, где $y_1 = \Phi(x_0, y_0, x_0 + h)$.

3. Находим оценку погрешности err (8) и коэфициент δ (11)

4. Вычисляем $h_{new} = \alpha\delta h$, где α – страховочный множитель (как правило, $\alpha \in [0.7, 0.9]$)

5. Если $\delta < 1$, то пологаем $h = h_{new}$ и возвращаемся к пункту 2.

6. Если $delta > 1$, то принимаем шаг – запоминаем пару значений $\{x + 2h, \tilde{y}_2\}$, пологаем $y_0 = \tilde{y}_2$, $x_0 = x_0 + 2h$, $h = \min\{h_{new}, \frac{X_{end} - x_0}{2}\}$ и возвращаемся к пункту 1. X_{end} обозначает конец отрезка интегрирования.

Для увеличения точности на 6-ом шаге алгоритма можно вместо $\tilde{y}_2$ использовать y_2.