Лабораторная работа

Дифференциальные уравнения в частных производных

Постановка задачи: Для указанного уравнения:

- построить явную разностную схему (не забываем аппроксиммировать граничные условия, если это необходимо). – *4 балла*
- аппроксиммировать граничные условия со вторым порядком – *1 балл*
- провести исследование порядка точности и устойчивости построенной разностной схемы. – *2 балла*
- выполнить программную реализацию построенной разностной схемы. Провести вычислительный эксперимент: на равномерной сетки с количеством узлов $N = 10, 20, 50$ найти решение указанной задачи при помощи построенной разностной схемы. Шаг по времени определяется исходя из требований устойчивости. Временной отрезок – $[0, 1]$. В отчет приложить графики построенного решения. Сравните с точным решением в узлах сетки. Какой точности удалось достичь в каждом из экспериментов? Сколько времени заняли вычисления? – *3 балла*

№	Тип уравнения	Исходные данные
1.	$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x)$	$\alpha = -10$ $f(t,x) = 10\pi^2 e^t\cos(\pi x) + e^t(x+\cos(\pi x))$ $u(t,1) = 0$ $\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = e^t$ $u(0,x) = x + \cos(\pi x)$ Точное решение: $u(t,x) = e^t(x+\cos(\pi x))$

2.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$\alpha=-10$$ $$f(t,x)=e^t x+\left(1+10\pi^2\right)e^t\cos(\pi x)-10e^x$$ $$u(t,0)=e^t+1$$ $$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=e^t+e$$ $$u(0,x)=x+e^x+\cos(\pi x)$$ Точное решение: $$u(t,x)=e^t(x+\cos(\pi x))+e^x$$
3.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$\alpha=-15$$ $$f(t,x)=15\pi^2 t^2\cos(\pi tx)-\pi x\sin(\pi tx)-15e^x$$ $$u(t,0)=2$$ $$u(t,1)=\cos(\pi t)+e+1$$ $$u(0,x)=x+e^x+1$$ Точное решение: $$u(t,x)=\cos(\pi tx)+x+e^x$$
4.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=\pi\left(\left(25\pi t^2-x\right)\cos(\pi tx)-\left(25\pi t^2+x\right)\sin(\pi tx)\right)$$ $$\alpha=-25$$ $$u(t,0)=1$$ $$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=-\pi t\sin(\pi t)-\pi t\cos(\pi t)+1$$ $$u(0,x)=x+1$$ Точное решение: $$u(t,x)=-\sin(\pi tx)+\cos(\pi tx)+x$$

5.	$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=\pi\left(-25\pi(t-2)^2\sin(\pi(t-2)x)-x\cos(\pi(t-2)x)\right)$$ $$\alpha=-25$$ $$u(t,0)=0$$ $$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=-\pi(t-2)\cos(\pi(t-2))$$ $$u(0,x)=\sin(2\pi x)$$ Точное решение: $$u(t,x)=-\sin(\pi(t-2)x)$$
6.	$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=-\pi x\sin(\pi(t-2)x)+25\pi^2(t-2)^2\cos(\pi(t-2)x)+x$$ $$\alpha=-25$$ $$u(t,1)=t+\cos(\pi(t-2))$$ $$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=t$$ $$u(0,x)=\cos(2\pi x)$$ Точное решение: $$u(t,x)=tx+\cos(\pi(t-2)x)$$
7.	$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=x\left(3\pi^3(t-2)^2\left(10t-x^2-20\right)+1\right)$$ $$\alpha=-5$$ $$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=t$$ $$u(t,1)=t-\pi^3(t-2)^3$$ $$u(0,x)=8\pi^3x^3$$ Точное решение: $$u(t,x)=tx-\pi^3(t-2)^3x^3$$

8.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=-3(t-2)^2\cos^3(x)-\frac{15}{4}(t-2)^3(\cos(x)+3\cos(3x))+x$$ $$\alpha=-5$$ $$u(t,0)=(2-t)^3$$ $$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=t+3(t-2)^3\sin(1)\cos^2(1)$$ $$u(0,x)=8\cos^3(x)$$ Точное решение: $$u(t,x)=tx-(t-2)^3\cos^3(x)$$
9.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=-6t\left(t^2-2\right)^2\sin^3(x)-\frac{15}{4}\left(t^2-2\right)^3(\sin(x)-3\sin(3x))+x$$ $$\alpha=-5$$ $$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=t$$ $$u(t,1)=t-\left(t^2-2\right)^3\sin^3(1)$$ $$u(0,x)=8\sin^3(x)$$ Точное решение: $$u(t,x)=tx-\left(t^2-2\right)^3\sin^3(x)$$
10.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=6t\left(t^2-2\right)^2-30x$$ $$\alpha=-5$$ $$u(t,0)=\left(t^2-2\right)^3$$ $$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=3$$ $$u(0,x)=x^3-8$$ Точное решение: $$u(t,x)=\left(t^2-2\right)^3+x^3$$

11.	$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=6t\left(t^2-2\right)^2+x^4e^{tx}-20xe^{tx}(tx(tx+6)+6)$$ $$\alpha=-20$$ $$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=0$$ $$u(t,1)=\left(t^2-2\right)^3+e^t$$ $$u(0,x)=x^3-8$$ Точное решение: $$u(t,x)=\left(t^2-2\right)^3+x^3e^{tx}$$
12.	$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=e^{tx}\left(x-10t^2\right)+6t\left(t^2-2\right)^2-60x$$ $$\alpha=-10$$ $$u(t,0)=\left(t^2-2\right)^3+1$$ $$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=e^tt+3$$ $$u(0,x)=x^3-7$$ Точное решение: $$u(t,x)=\left(t^2-2\right)^3+e^{tx}+x^3$$
13.	$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$$f(t,x)=6t\left(t^2-2\right)^2+(1-10t)e^x-60x$$ $$\alpha=-10$$ $$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=t$$ $$u(t,1)=\left(t^2-2\right)^3+et+1$$ $$u(0,x)=x^3-8$$ Точное решение: $$u(t,x)=\left(t^2-2\right)^3+te^x+x^3$$

14.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$f(t,x)=-3(t-2)^2\sin^3(\pi x)-\dfrac{45}{4}\pi^2(t-2)^3(\sin(\pi x)-3\sin(3\pi x))+x$ $\alpha=-15$ $\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x}=t$ $u(t,1)=t$ $u(0,x)=8\sin^3(\pi x)$ Точное решение: $u(t,x)=tx-(t-2)^3\sin^3(\pi x)$
15.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$f(t,x)=-3(t-2)^2\cos^3(3x)-\dfrac{405}{4}(t-2)^3(\cos(3x)+3\cos(9x))+x$ $\alpha=-15$ $u(t,0)=(2-t)^3$ $\dfrac{\partial u(t,1)}{\partial x}=t+9(t-2)^3\sin(3)\cos^2(3)$ $u(0,x)=8\cos^3(3x)$ Точное решение: $u(t,x)=tx-(t-2)^3\cos^3(3x)$
16.	$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x)$	$f(t,x)=(269-135t)\cos(3x)+x$ $\alpha=-15$ $u(t,0)=2-t$ $\dfrac{\partial u(t,1)}{\partial x}=t+3(t-2)\sin(3)$ $u(0,x)=2\cos(3x)$ Точное решение: $u(t,x)=tx-(t-2)\cos(3x)$

Варианты

№	Фамилия	Вариант
1.	Артюшкевич С.	1
2.	Бакевич А.	2
3.	Ганкович Е.	3
4.	Диброва Е.	4
5.	Казаков А.	5
6.	Керножицкий А.	6
7.	Мелех А.	7
8.	Неверо А.	8
9.	Соловей М.	9
10.	Тарайкович А.	10
11.	Филипович Ф.	11
12.	Ходор И.	12
13.	Шакель А.	13
14.	Шляго Н.	14
15.	Юрковская Е.	15