Logiki nieklasyczne w informatyce

Szymon Wróbel

5 listopada 2019

Plan prezentacji

Po co nam logika?

Po co nam logika?

Filozofowie: Poszukiwanie prawdy.

Po co nam logika?

Filozofowie: Poszukiwanie prawdy.
Lingwiści: Formalizacja znaczenia wypowiedzi.

Po co nam logika?

Filozofowie: Poszukiwanie prawdy.
Lingwiści: Formalizacja znaczenia wypowiedzi.
Matematycy: Systemy dowodzenia

Po co nam logika?

Filozofowie: Poszukiwanie prawdy.
Lingwiści: Formalizacja znaczenia wypowiedzi.
Matematycy: Systemy dowodzenia (lub z nudów).

Po co nam logika?

Filozofowie: Poszukiwanie prawdy.
Lingwiści: Formalizacja znaczenia wypowiedzi.
Matematycy: Systemy dowodzenia (lub z nudów).
Informatycy: Weryfikacja poprawności programów analiza pracy systemów, systemy AI.

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja
- Wdrożenie

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja
- Wdrożenie

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja
- Wdrożenie

Projektowanie logiki

- Problem

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja
- Wdrożenie

Projektowanie logiki

- Problem
- Intuicja

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja
- Wdrożenie

Projektowanie logiki

- Problem
- Intuicja
- Składnia

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja
- Wdrożenie

Projektowanie logiki

- Problem
- Intuicja
- Składnia
- Semantyka

Powstawanie logiki

Projektowanie aplikacji

- Problem
- Pomysł
- Specyfikacja
- Implementacja
- Wdrożenie

Projektowanie logiki

- Problem
- Intuicja
- Składnia
- Semantyka
- Zastosowania

Dowody konstruktywne

Problem

Czy istnieją dwie liczby niewymierne a, b, takie, że a^b jest liczbą wymierną?

Dowody konstruktywne

Problem

Czy istnieją dwie liczby niewymierne a, b, takie, że a^b jest liczbą wymierną?

Dowód

Weźmy $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$. Rozważmy wymierność a^b. Jeśli jest wymierne, to dowód jest zakończony. Jeśli nie, weźmy
$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$.
Wtedy

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

■

Dowody konstruktywne

Problem

Podaj dwie liczby niewymierne a, b, takie, że a^b jest liczbą wymierną?

Dowody konstruktywne

Problem

Podaj dwie liczby niewymierne a, b, takie, że a^b jest liczbą wymierną?

Pomimo tego, że udowodniliśmy istnienie tych liczb, nie możemy skorzystać z poprzedniego dowodu

Dowody konstruktywne

Dowód (v 2.0)

Weźmy $a = \sqrt{2}, b = 2\log_2 3$.

Wtedy $a^b = \sqrt{2}^{(2\log_2 3)} = 2^{\log_2 3} = 3$

$\blacksquare$

Logika intuicjonistyczna

Prawdziwe jest to, na co mamy dowód.

Logika intuicjonistyczna

Interpretacja BHK

- Dowód $A \wedge B$ to dowód A i dowód B

Logika intuicjonistyczna

Interpretacja BHK

- Dowód $A \wedge B$ to dowód A i dowód B
- Dowód $A \vee B$ to dowód A albo dowód B

Logika intuicjonistyczna

Interpretacja BHK

- Dowód $A \wedge B$ to dowód A i dowód B
- Dowód $A \vee B$ to dowód A albo dowód B
- Dowód $A \rightarrow B$ to metoda przekształcająca dowód A, w dowód B

Logika intuicjonistyczna

Interpretacja BHK

- Dowód $A \wedge B$ to dowód A i dowód B
- Dowód $A \vee B$ to dowód A albo dowód B
- Dowód $A \rightarrow B$ to metoda przekształcająca dowód A, w dowód B
- Nie ma dowodu $\perp$

Dedukcja naturalna

Postać sekwentów

$$\Delta \vdash \Gamma$$

Dedukcja naturalna

Aksjomat

$$\frac{}{\Delta, P \vdash P}\,\mathsf{Ass}$$

Dedukcja naturalna

Aksjomat

$$\frac{}{\Delta, P \vdash P}\,\text{Ass}$$

Implikacja

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\,{\to}\text{I} \qquad \frac{\Delta \vdash A \to B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}\,{\to}\text{E}$$

Dedukcja naturalna

Aksjomat

$$\frac{}{\Delta, P \vdash P}\,\text{Ass}$$

Implikacja

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\,{\to}\text{I} \qquad \frac{\Delta \vdash A \to B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}\,{\to}\text{E}$$

Koniunkcja

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\,{\wedge}\text{I} \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\,{\wedge}\text{E}_1 \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\,{\wedge}\text{E}_2$$

Dedukcja naturalna

Alternatywa

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_1 \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_2$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\,\vee\mathrm{E}$$

Dedukcja naturalna

Alternatywa

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_1 \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\,\vee\mathrm{I}_2$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\,\vee\mathrm{E}$$

$NI \Rightarrow NK$

$$\frac{}{\Delta \vdash P \vee \neg P}\,\mathrm{LEM} \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg P}{\Delta \vdash P}\,\mathrm{DNE} \qquad \frac{\Delta, \neg P \vdash \bot}{\Delta \vdash P}\,\mathrm{PBC}$$

Przykład: $P \to \neg\neg P$

$$\vdash P \to (P \to \bot) \to \bot$$

Przykład: $P \to \neg\neg P$

$$\dfrac{P \vdash (P \to \bot) \to \bot}{\vdash P \to (P \to \bot) \to \bot}\ {\to}\mathrm{I}$$

Przykład: $P \to \neg\neg P$

$$\dfrac{\dfrac{P, (P \to \bot) \vdash \bot}{P \vdash (P \to \bot) \to \bot}\,{\to}\mathrm{I}}{\vdash P \to (P \to \bot) \to \bot}\,{\to}\mathrm{I}$$

Przykład: $P \to \neg\neg P$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{P, (P \to \bot) \vdash (P \to \bot) \quad P, (P \to \bot) \vdash P}{P, (P \to \bot) \vdash \bot}\,{\to}\mathrm{E}}{P \vdash (P \to \bot) \to \bot}\,{\to}\mathrm{I}}{\vdash P \to (P \to \bot) \to \bot}\,{\to}\mathrm{I}
$$

Przykład: $P \to \neg\neg P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, (P \to \bot) \vdash (P \to \bot)}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{}{P, (P \to \bot) \vdash P}\,\text{Ass}}{P, (P \to \bot) \vdash \bot}\,{\to}\text{E}}{P \vdash (P \to \bot) \to \bot}\,{\to}\text{I}}{\vdash P \to (P \to \bot) \to \bot}\,{\to}\text{I}$$

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Rachunek lambda z typami prostymi

$$\frac{}{\Gamma, x : \alpha \vdash x : \alpha}$$

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Rachunek lambda z typami prostymi

$$\frac{}{\Gamma, x : \alpha \vdash x : \alpha}$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.M) : \alpha \to \beta}\,\mathsf{ABS} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash N : \alpha}{\Gamma \vdash (MN) : \beta}\,\mathsf{APP}$$

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Rachunek lambda z typami prostymi

$$\frac{}{\Gamma, x : \alpha \vdash x : \alpha}$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.M) : \alpha \to \beta}\,\text{ABS} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash N : \alpha}{\Gamma \vdash (MN) : \beta}\,\text{APP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \alpha \quad \Gamma \vdash B : \beta}{\Gamma \vdash \langle A, B \rangle : \alpha * \beta}\,\text{PAIR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \langle A, B \rangle : \alpha * \beta}{\Gamma \vdash A : \alpha}\,\text{FST} \qquad \frac{\Gamma \vdash \langle A, B \rangle : \alpha * \beta}{\Gamma \vdash B : \beta}\,\text{SND}$$

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

$$A \wedge B \Rightarrow \alpha * \beta$$

```
data Pair a b = Pair a b
```

$$A \vee B \Rightarrow \alpha + \beta$$

```
data Either a b = Left a | Right b
```

Logika liniowa

Przykład

Logika liniowa

Przykład

Niech P oznacza "mieć ciastko".

Logika liniowa

Przykład

Niech P oznacza "mieć ciastko".
Niech Q oznacza "zjeść ciastko".

Logika liniowa

Przykład

Niech P oznacza "mieć ciastko".
Niech Q oznacza "zjeść ciastko".
Jeśli mamy ciastko, to możemy je zjeść, co zapiszemy jako $P \longrightarrow Q$

Logika liniowa

Przykład

Niech P oznacza "mieć ciastko".
Niech Q oznacza "zjeść ciastko".
Jeśli mamy ciastko, to możemy je zjeść, co zapiszemy jako $P \rightarrow Q$
Wtedy w logice intuicjonistycznej możemy udowodnić
$P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow P \wedge Q$.

Wniosek

Dzięki logice intuicjonistycznej możemy zjeść ciastko i mieć ciastko

Logika liniowa: składnia

Zmienne zdaniowe

$$p, p^{\perp}$$

Stałe

$$1, \perp, \top, 0$$

Koniunkcja

$$A \otimes B, A \& B$$

Alternatywa

$$A \parr B, A \oplus B$$

Logika liniowa: zastosowania

- Typy Liniowe jako kontrakt [Wad91]

Logika liniowa: zastosowania

- Typy Liniowe jako kontrakt [Wad91]
- Logika liniowa jako logika współbieżności/równoległości [Wad14]

Logika liniowa: zastosowania

- Typy Liniowe jako kontrakt [Wad91]
- Logika liniowa jako logika współbieżności/równoległości [Wad14]
- Powiązania z układami kwantowymi [Lag12], [Bae09]

Relevance Logic

Implikacja

Jeśli $2 = 3$, to księżyc jest z sera.

Relevance Logic

Implikacja

Jeśli $2 = 3$, to księżyc jest z sera.

Potrzebujemy logiki, w której poprzednik implikacji jest istotny (ang. relevant) dla następnika.

Relevance Logic

Implikacja

Jeśli $2 = 3$, to księżyc jest z sera.

Potrzebujemy logiki, w której poprzednik implikacji jest istotny (ang. relevant) dla następnika.

Zastosowania

- Analiza systemów współbieżnych [Dam88]
- Reprezentacja wiedzy w systemach sztucznej inteligencji [Sha92]

Logika parakonsystentna

Jedą z istotnych właściwości logiki istotnościowej, wynikającą z potrzeby istotności przesłanki implikacji, jest odrzucenie zasady eksplozji (z fałszu wynika wszystko).

Logika parakonsystentna

Jedą z istotnych właściwości logiki istotnościowej(???), wynikającą z potrzeby istotności przesłanki implikacji, jest odrzucenie zasady eksplozji (z fałszu wynika wszystko).

Logika parakonsystentna

Jedą z istotnych właściwości logiki istotnościowej, wynikającą z potrzeby istotności przesłanki implikacji, jest odrzucenie zasady eksplozji (z fałszu wynika wszystko).

Zastosowania

- Powiązania z modelami obliczeń kwantowych [Agu06]
- Parakonsystencja jako dualność intuicjonizmu [Aoy04]

Computability Logic (CoL)

Bibliografia

- [Tho91] S. Thompson, *Type Theory and Functional Programming*, Addison-Wesley, 1991.
- [Pri08] G. Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is*, Cambridge University Press, 2008.
- [Gen35] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, 1935.
- [Wad91] P. Wadler, *Is there a use for linear logic?*, 1991.
- [Wad14] P. Wadler, *Propositions as sessions*, Journal of Functional Programming, vol. 24, 2014.
- [Lag12] U. Dal Lago, C. Faggian, *On Multiplicative Linear Logic, Modality and Quantum Circuits*, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, 2012

Bibliografia

- [Bae09] J. Baez, M. Stay, *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*, 2009.
- [Dam88] M. Dam, *Relevance logic and concurrent composition*, 1988.
- [Sha92] S. Shapiro, *Relevance Logic in Computer Science*, 1992.
- [Agu06] J. Agudelo-Agudelo, W. Carnielli, *Quantum Computation via Paraconsistent Computation*, 2006.
- [Aoy04] H. Aoyama, *LK, LJ, Dual Intuitionistic Logic, and Quantum Logic*, 2004.