Chapitre 16. Intégrales à paramètre

I, J intervalles d'intérieur non vide, E un evn.

1 Le théorème de convergence dominée

1.1 Le théorème de convergence dominée

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone). Soit $g_n : I \to [0, +\infty]$ mesurables et $g_n : I \to [0, +\infty]$
On suppose que :

1. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq g_n \leq g_{n+1}$

Alors dans $[0, +\infty]$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I g_n = \int_I g \in [0, +\infty]$$

Corollaire 1.2. Soit $F_0 : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable et $F_n : I \to \mathbb{R}_+$ $(n \geq 1)$ mesurable.
On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\, 0 \leq F_{n+1} \leq F_n$
2. (F_n) converge simplement vers 0

Alors

$$\int_I F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1.2 Énoncé du théorème de convergence dominée

Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée). Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux $(n \in \mathbb{N})$
On suppose :

1. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I
2. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \quad |f_n(x)| \leq \varphi(t)$ (Hypothèse de domination)

Alors les f_n sont intégrables et f aussi et

$$\boxed{\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f}$$

On a même

$$\|f_n - f\|_1 = \int_I |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1.3 Premiers exemples d'application

Quelques exercices classiques :

1. Montrer que
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$ continue.
Montrer que
$$I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$
3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$ continue avec $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
Montrer que
$$I_n = \int_0^1 f(nx) dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

4. Soit $n \geq 1$ et
$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$$
Montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$ avec α à exprimer avec une intégrale.
5. Montrer que
$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

1.4 Théorème de convergence dominée appliquée à l'interversion série / suite

Corollaire 1.4 (Théorème de convergence dominée). Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose que :

1. $\sum f_n$ converge simplement vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ $\mathcal{C}^0$ par morceaux.
2. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right| \leq \varphi$ (Domination)

Alors les f_n sont intégrables, $\sum f_n$ est intégrable et
$$\boxed{\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$$

1.5 Le théorème d'intégration terme à terme