

# Chapitre 5 : Fonctions réelles

## 1 Intervalles

### 1.1 Segments

**Définition 1.1.** Soit  $a \leq b \in \mathbb{R}$

On définit le segment  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

**Proposition 1.2.** Soit  $a \leq b \in \mathbb{R}$

On a  $[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}$

### 1.2 Intervalles

**Définition 1.3.** Une partie  $I \subseteq \mathbb{R}$  est un intervalle si  $\forall x, y \in I, x \leq y \implies [x, y] \subseteq I$

## 2 Généralités sur les fonctions réelles

**Définition 2.1.** Soit  $D \subseteq \mathbb{R}, f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

On définit :

- \* Le produit  $\lambda f : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{cases}$
- \* La somme  $f + g : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$
- \* Le produit  $fg : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)g(x) \end{cases}$

### 2.1 Symétrie

**Définition 2.2.** Soit  $T > 0$

- \* On appelle domaine  $T$ -périodique une partie  $D \subseteq \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in D, (x + T \in D \text{ et } x - T \in D)$
- \* Soit  $D$  un domaine  $T$ -périodique.  
Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $T$ -périodique si  $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$

**Proposition 2.3.** Soit  $T > 0$

- \* Une partie  $D \subseteq \mathbb{R}$  est  $T$ -périodique si et seulement si  $\forall x_0 \in D, \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_0 \equiv x_1 \pmod{T} \implies x_1 \in D$
- \* Soit  $D$  un domaine  $T$ -périodique et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   
Alors  $f$  est  $T$ -périodique si et seulement si  $\forall x_0, x_1 \in D, x_0 \equiv x_1 \pmod{T} \implies f(x_0) = f(x_1)$

**Proposition 2.4.** Soit  $T > 0$

- \* La somme et le produit de deux fonctions  $T$ -périodiques est  $T$ -périodique.
- \* Si  $f$  est  $T$ -périodique, toute composée  $g \circ f$  est également  $T$ -périodique.

**Définition 2.5.**

- \* Une partie  $D \subseteq \mathbb{R}$  est dite symétrique (par rapport à 0) si  $\forall x \in D, -x \in D$
- \* Soit  $D \subseteq \mathbb{R}$  symétrique et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   
On dit que  $f$  est :
  - paire si  $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$
  - impaire si  $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$

**Proposition 2.6.**

- \* La somme de deux fonctions  $\begin{cases} \text{paires} \\ \text{impaires} \end{cases}$  est  $\begin{cases} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{cases}$
- \* Le produit de deux fonctions  $\begin{cases} \text{paires} \\ \text{impaires} \end{cases}$  est paire.
- \* Le produit d'une fonction paire et d'une impaire est impaire.
- \* Une composée  $g \circ f$  où  $f$  est paire est paire.
- \* Si les deux fonctions sont paires ou impaires,  $g \circ f$  a la parité suivante :

$f \setminus g$	p	i
p	p	p
i	p	i

## 2.2 Monotonie

**Définition 2.7.** Soit  $D \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que :

- \*  $f$  est croissante si  $\forall x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- \*  $f$  est strictement croissante si  $\forall x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y)$
- \*  $f$  est décroissante si  $\forall x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- \*  $f$  est strictement décroissante si  $\forall x, y \in D, x < y \implies f(x) > f(y)$
- \*  $f$  est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

**Proposition 2.8.**

- \* La somme de deux fonctions  $\begin{cases} \text{croissantes} \\ \text{décroissantes} \end{cases}$  est  $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$
- \* La somme d'une fonction  $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$  est d'une fonction  $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$
- \* La composée de deux fonctions (strictement) monotones est (strictement) monotone, et la monotonie de  $g \circ f$  est donnée par :

$f \setminus g$	$\nearrow$	$\searrow$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

[Injectivité des fonctions strictement monotones] Soit  $D \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Si  $f$  croît strictement, alors :  $\forall x, y \in D, f(x) \leq f(y) \implies x \leq y$
- \* Si  $f$  décroît strictement, alors :  $\forall x, y \in D, f(x) \leq f(y) \implies x \geq y$
- \* Dans les deux cas,  $f$  est injective.

**Proposition 2.9.** Soit  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow E$

- \* Si  $f$  est bijective et croissante, alors  $f$  est strictement croissante et  $f^{-1} : E \rightarrow D$  aussi.
- \* Si  $f$  est bijective et décroissante, alors  $f$  est strictement décroissante et  $f^{-1} : E \rightarrow D$  aussi.

## 2.3 Bornes et extrema

**Définition 2.10.** Soit  $D \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que  $f$  :

- \* Est majorée si  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \leq M$
- \* Est minorée si  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \geq m$
- \* Est bornée si elle est minorée et majorée.
- \* Admet un maximum si  $\exists c \in D : \forall x \in D, f(x) \leq f(c)$
- \* Admet un minimum si  $\exists d \in D : \forall x \in D, f(x) \geq f(d)$

**Proposition 2.11.** Soit  $D \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Alors  $f$  est bornée si et seulement si  $\exists c \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in D, |f(x)| \leq c$

**Proposition 2.12.**

- \* La somme de deux fonctions  $\begin{cases} \text{minorées} \\ \text{majorées} \end{cases}$  est  $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \end{cases}$
- \* La somme et le produit de deux fonctions bornées sont bornés.
- \* Si  $g$  est  $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \\ \text{bornée} \end{cases}$  alors toute composée de la forme  $g \circ f$  est  $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \\ \text{bornée} \end{cases}$

## 2.4 Transformations d'un graphe

Étant donné  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Pour  $a \in \mathbb{R}$ , le graphe de  $f + a : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + a \end{cases}$   
est l'image de  $\text{gr}(f)$  par la translation de vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$
- \* Pour  $a \in \mathbb{R}$ , le graphe de  $f(\cdot + a) : \begin{cases} D - a \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x + a) \end{cases}$   
est l'image de  $\text{gr}(f)$  par la translation de vecteur  $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$
- \* Pour  $a \in \mathbb{R}$ , le graphe de  $f(a - \cdot) : \begin{cases} D' \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a - x) \end{cases}$  où  $D' = \{x \in \mathbb{R} \mid a - x \in D\}$   
est l'image de  $\text{gr}(f)$  par la réflexion d'axe, la droite d'équation  $x = \frac{a}{2}$
- \* Pour  $\lambda \neq 0$ , le graphe de  $\lambda f : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{cases}$   
est l'image de  $\text{gr}(f)$  par  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \end{pmatrix}$
- \* Pour  $\lambda \neq 0$ , le graphe de  $f(\lambda \cdot) : \begin{cases} D' \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(\lambda x) \end{cases}$  où  $D' = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda x \in D\}$   
est l'image de  $\text{gr}(f)$  par  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} \\ y \end{pmatrix}$

## 2.5 Limites

À partir de maintenant,  $I$  est un intervalle non trivial et  $x_0$  est un élément ou une borne de  $I$

**Définition 2.13.** Soit  $l \in \mathbb{R}$

On dit que  $f$  converge (ou tend) vers  $l$  en  $x_0$  et on note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

## 2.6 Continuité

Ici,  $I$  est un intervalle,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition 2.14.**

\* La fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$

\* La fonction  $f$  est continue si elle est continue en tout point de  $I$

On note  $C^0(I) = C^0(I; \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $I \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

**Théorème 2.15.** L'ensemble des fonctions continues est stable par somme, par produit, par quotient (si le dénominateur ne s'annule pas), par composition...

## 2.7 Dérivabilité

Ici,  $I$  est un intervalle,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition 2.16.**

\* On appelle le taux d'accroissement de  $f$  en  $x_0$  la fonction

$$\tau_{[f, x_0]} : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

\* On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si  $\tau_{[f, x_0]}$  admet une limite finie en  $x_0$

\* Si c'est le cas, on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{[f, x_0]}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$

\* On dit que  $f$  est dérivable si elle est dérivable en tout point de  $I$

\* Si c'est le cas, on note

$$f' : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

**Définition 2.17.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $x_0$ , la tangente à  $\text{gr}(f)$  en  $x_0$  est la droite passant par  $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$  et de pente  $f'(x_0)$ , càd la droite d'équation  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**Proposition 2.18.** Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , elle est continue en  $x_0$

On note  $D^1(I) = D^1(I; \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$

D'après la proposition précédente,  $D^1(I) \subseteq C^0(I)$

**Théorème 2.19.** L'ensemble des fonctions dérivables est stable par somme, produit, quotient (si le dénominateur ne s'annule pas).

**Théorème 2.20.** Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables.

Alors  $g \circ f$  est dérivable et  $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

## 2.8 Tableau de variations

Dans toute la section,  $I \subseteq \mathbb{R}$  est un intervalle non trivial et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

**Théorème 2.21.** Supposons  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

- \* La fonction  $f$  est constante ssi  $\forall x \in I, f'(x) = 0$
- \* La fonction  $f$  est croissante ssi  $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$
- \* Si  $f'$  est  $> 0$  sur  $I$ , à l'exception éventuelle d'un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement croissante.

**Théorème 2.22** (des valeurs intermédiaires). Soit  $a \leq b$  deux éléments de  $I$

Notons  $J$  le segment joignant  $f(a)$  et  $f(b)$  (donc  $[f(a), f(b)]$  ou  $[f(b), f(a)]$  suivant le cas)

Supposons  $f$  continue.

Alors  $\forall y \in J, \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

**Théorème 2.23** (de bijection monotone, version segments). Soit  $a \leq b$  deux éléments de  $I$

- \* On suppose  $f$  dérivable et  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) > 0$   
Alors  $f$  induit une bijection strictement croissante  $[a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$
- \* On suppose  $f$  dérivable et  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) < 0$   
Alors  $f$  induit une bijection strictement décroissante  $[a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$

**Théorème 2.24.** Soit  $a \leq b$  deux éléments de  $I$ .

On suppose  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone sur  $[a, b]$

Alors  $f$  induit une bijection  $[a, b] \rightarrow \begin{cases} [f(a), f(b)] \\ [f(b), f(a)] \end{cases}$  suivant les cas.

**Théorème 2.25** (de la bijection monotone, version intervalles ouverts).

Soit  $a < b$  deux réels et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, de dérivée  $> 0$

Alors  $f$  admet des limites en  $a$  et  $b$  et induit une bijection strictement croissante  $]a, b[ \rightarrow \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$

## 2.9 Fonctions réciproques

Ici,  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow J$  est une bijection.

Graphiquement,  $\text{gr}(f)$  et  $\text{gr}(f^{-1})$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$

**Théorème 2.26** (Continuité de la réciproque).

Si  $f : I \rightarrow J$  est bijective et continue, alors  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue.

**Théorème 2.27** (Critère de dérivabilité des réciproques).

Supposons  $f : I \rightarrow J$  bijective et dérivable. Soit  $x_0 \in I$  et  $y_0 = f(x_0) \in J$

Alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$  si et seulement si  $f'(x_0) \neq 0$

Si c'est la cas,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

## 2.10 Étude d'une fonction : le plan

Étant donné une fonction, on peut l'étudier en six (ou sept) étapes.

(0. Si seule une expression est donnée, on détermine un domaine de définition.

On a alors une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ )

1. On examine les propriétés de symétrie de la fonction. Si on peut, on l'étudie sur un domaine plus petit.
2. On examine la régularité de la fonction : continuité, dérivabilité ?
3. Là où c'est possible, on calcule la dérivée (en cherchant la forme la plus "multiplicative" possible)
4. Tableau de variations.
5. Limites.
6. Esquisse de graphe.

**Proposition 2.28.** On a  $\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$

## 3 Fonctions usuelles

### 3.1 Exponentielle

On a vu que  $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ . En particulier,  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \in \mathbb{R}$

**Définition 3.1.** On appelle exponentielle (réelle) la fonction  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  induite par l'exponentielle complexe.

**Proposition 3.2.** L'exponentielle  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Est strictement positive :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- \* Est dérivable et  $\exp' = \exp$
- \* Admet des limites 
$$\begin{cases} \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \\ \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{cases}$$
- \* Vérifie la propriété fondamentale :  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$

**Lemme 3.3.** On a  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$

**Corollaire 3.4.**  $\exp$  induit une bijection  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

### 3.2 Logarithme

**Définition 3.5.** On note  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  la réciproque de  $\exp$

**Proposition 3.6.**

- \*  $\ln$  est une bijection strictement croissante  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
- \*  $\ln$  est dérivable et  $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(y) = \frac{1}{y}$
- \* On a  $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} -\infty$  et  $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$
- \* On a  $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*, \ln(y_1 y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2)$

**Proposition 3.7.**  $\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$

### 3.3 Puissances

**Définition 3.8.** Soit  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a \in \mathbb{R}$

On définit  $r^a = \exp(a \ln(r))$

**Proposition 3.9.** Soit  $r, s \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a, b \in \mathbb{R}$

On a :

- \*  $r^{a+b} = r^a r^b$
- \*  $(r^a)^b = r^{ab}$
- \*  $(rs)^q = r^q s^q$

Soit  $r \in \mathbb{R}_+^*$  : L'exponentielle de base  $r : x \mapsto r^x$

Elle est :

- \* Strictement décroissante si  $r < 1$
- \* Constante (égale à 1) si  $r = 1$
- \* Strictement croissante si  $r > 1$

La fonction "puissance  $a$ -ième" :  $x \mapsto x^a$  est :

- \* Strictement décroissante si  $a < 0$
- \* Constante (égale à 1) si  $a = 0$
- \* Strictement croissante si  $a > 0$

**Définition 3.10.** Soit  $r \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

On définit le logarithme en base  $r : \log_r : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  comme la réciproque de  $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto r^x \end{cases}$

**Proposition 3.11.** Soit  $r \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$

On a

$$\log_r(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(r)}$$

### 3.4 Croissances comparées

**Théorème 3.12.** La fonction  $x \mapsto x$  est négligeable devant exp au voisinage de  $+\infty$  :

$$\forall \varepsilon, A > 0, \quad \frac{x^A}{\exp(x)^\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall \varepsilon, A > 0, \quad \frac{\ln(x)^A}{x^\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall \varepsilon, A > 0, \quad \frac{|\ln(x)|^A}{\left(\frac{1}{x}\right)^\varepsilon} = x^\varepsilon |\ln(x)|^A \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

### 3.5 Trigonométrie hyperbolique

**Définition 3.13.** On définit les fonctions (co)sinus hyperbolique :

$$\cosh : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases} \quad \sinh : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

**Proposition 3.14.**

\* cosh est paire, dérivable, de dérivée

$$\cosh' = \sinh$$

et possède les limites  $\cosh(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$

\* sinh est impaire, dérivable, de dérivée

$$\sinh' = \cosh$$

et  $\sinh(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$  et  $\sinh(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

\* On a  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

**Définition 3.15.** On définit la fonction tangente hyperbolique :

$$\tanh : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{cases}$$

**Proposition 3.16.** La fonction tanh est impaire, dérivable, de dérivée

$$\tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$$

et vérifie  $\tanh(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm 1$

### 3.6 Fonctions trigonométriques réciproques

**Définition 3.17.** On appelle arc cosinus  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  la réciproque de la bijection induite  $\cos|_{[0, \pi]}$

On appelle arc sinus  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  la réciproque de la bijection induite  $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

**Proposition 3.18.** On a  $\forall y \in [-1, 1], \cos(\arcsin(y)) = \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1 - y^2}$

**Proposition 3.19.**  $\arccos$  et  $\arcsin$  sont non dérivables en  $-1$  et  $1$ , mais dérivables en tout  $y \in ]-1, 1[$  et  $\forall y \in ]-1, 1[ :$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

### 3.7 Tangente

**Définition 3.20.** On note  $D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\} = \cos^{-1}[\mathbb{R}^*]$

On définit la fonction tangente

$$\tan : \begin{cases} D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$

**Proposition 3.21.** tan est impaire,  $\pi$ -périodique, dérivable de dérivée

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

et on a  $\tan(x) \xrightarrow[x < \frac{\pi}{2}]{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} +\infty$  et  $\tan(x) \xrightarrow[x > \frac{\pi}{2}]{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\infty$



**Proposition 3.22.** Soit  $x, y \in D_{\tan}$

\* Si  $x + y \in D_{\tan}$ , on a

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

\* Si  $x - y \in D_{\tan}$ , on a

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$$

**Proposition 3.23.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$

On peut exprimer  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  en fonction de  $t = \tan(\frac{x}{2})$

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

### 3.8 Arc tangente

Par le théorème de la bijection monotone,  $\tan$  induit une bijection  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [ \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition 3.24.** On appelle arc tangente la fonction  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ ,  
réciproque de la bijection induite  $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

**Proposition 3.25.**  $\arctan$  est une fonction impaire, dérivable, de dérivée

$$\arctan' : y \mapsto \frac{1}{1 + y^2}$$

et telle que  $\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{\pi}{2}$

**Proposition 3.26.** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$  que l'on écrit  $z = re^{i\theta}$ , où  $r > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } \begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) = r \cos(\theta) \\ b = \operatorname{Im}(z) = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Supposons  $a \neq 0$  (càd  $z \notin i\mathbb{R}$ )

On a alors

$$\frac{b}{a} = \frac{r \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} = \tan(\theta)$$

Donc  $\theta$  est un antécédent de  $\frac{b}{a}$  par  $\tan$

$$\theta \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{\pi}$$

**Proposition 3.27.** On a  $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$$

## 4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle.

**Définition 4.1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

On dit que  $f$  est dérivable si les fonctions  $\begin{cases} \operatorname{Re}(f) : I \rightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{Im}(f) : I \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$  sont dérivables.

Si c'est la cas, on définit la dérivée de  $f$

$$f' = \operatorname{Re}(f)' + i \operatorname{Im}(f)'$$

**Proposition 4.2.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  dérivables et  $\lambda \in \mathbb{C}$

Alors :

- \*  $\lambda f$  est dérivable et  $(\lambda f)' = \lambda f'$
- \*  $f + g$  est dérivable et  $(f + g)' = f' + g'$
- \*  $fg$  est dérivable et  $(fg)' = f'g + fg'$
- \* Si  $g$  ne s'annule pas,  $\frac{f}{g}$  est dérivable et  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- \*  $\exp \circ f$  est dérivable et  $(\exp \circ f)' = f' \cdot (\exp \circ f)$

## 5 Dérivée d'ordre supérieur

Ici,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non trivial.

### 5.1 Définition

**Définition 5.1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- \* On dit que  $f$  est deux fois dérivable si  $f$  est dérivable et que  $f'$  est dérivable.  
On note alors  $f'' = (f')'$
- \* Par récurrence, pour tout  $n \geq 2$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable si  $f$  est  $(n - 1)$  fois dérivable et que  $f^{(n-1)}$  est dérivable.  
On note alors  $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$  la dérivée  $n$ -ième.
- \* On note  $D^n(I) = D^n(I; \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $n$  fois dérivables.
- \* On dit que  $f$  est lisse ou de classe  $C^\infty$  si elle est  $n$  fois dérivable pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
On note  $C^\infty(I) = C^\infty(I; \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions lisses.

Convention : Toute fonction est "0 fois dérivable" et  $f^{(0)} = f$

### 5.2 Propriétés de stabilité

**Proposition 5.2.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  fois dérivable et  $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors  $\lambda f$  est  $n$  fois dérivable et  $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

Et  $f + g$  est  $n$  fois dérivable et  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

**Corollaire 5.3.** Toute combinaison linéaire de fonctions lisses est lisse.

**Théorème 5.4** (Formule de Leibniz). Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  fois dérivables.

Alors  $fg$  est  $n$  fois dérivable et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**Corollaire 5.5.** Le produit de deux fonctions lisses est lisse.

**Théorème 5.6.** La composée de deux fonctions  $n$  fois dérivables est  $n$  fois dérivables.

**Corollaire 5.7.** La composée de deux fonctions lisses est lisse.