Chapitre 21 : Intégration

Dans tout le chapitre : I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$

1 Fonctions en escalier, fonctions continues par morceau

1.1 Subdivisions d'un segment

Définition 1.1.

* Une subdivision du segment $[a,b]$ est une famille $\sigma = (x_0, ..., x_n)$, où $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
* les x_i sont les points de la subdivision
* les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ (resp. $]x_i, x_{i+1}[$) sont les composantes fermées (resp. ouverte) de σ
* le pas de la subdivision σ est $\max\{x_{i+1} - x_i \mid i \in [\![0, n-1]\!]\}$

Définition 1.2. Soit σ, σ' deux subdivisions d'un segment $[a,b]$.
On dit que σ' raffine σ (ou : est plus fine que σ) si toute composante (ouverte) de σ' est incluse dans une composante (ouverte) de σ.

Proposition 1.3. Deux subdivisions σ_1, σ_2 de $[a,b]$ possèdent toujours un raffinement commun.

1.2 Fonctions en escalier

Définition 1.4.

* Une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sera dite en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que φ soit constante sur chaque composante de σ
* On dit alors que σ est adaptée à φ

Proposition 1.5. L'ensemble $\mathcal{E}([a,b])$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{[a,b]}$
et, $\forall f \in \mathcal{E}([a,b]), |f| \in \mathcal{E}([a,b])$

1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 1.6. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ de $[a,b]$ telle que :

* la restriction $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ de f à chaque composante ouverte est continue
* f admet des limites à gauche (resp. à droite) en tout point de la subdivision, sauf $a = x_0$ (resp. $b = x_0$)

Lemme 1.7. L'ensemble $C^\circ_{pm}([a,b])$ des fonctions continues par morceaux est la somme $C^\circ([a,b]) + \mathcal{E}([a,b])$.

Corollaire 1.8. Toute fonction continue par morceaux est bornée.

2 Convergence uniforme

2.1 Convergence simple

Définition 2.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $I \to \mathbb{R}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ si $\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$
On notera $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$

Définition 2.2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée, on définit sa norme uniforme : $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in I\}$

Proposition 2.3. La norme uniforme $\|.\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $L^\infty(I)$ des fonctions $I \to \mathbb{R}$ bornées :

* Positivité : $\forall f \in L^\infty(I)$, $\|f\|_\infty \geq 0$
* Séparation : $\forall f \in L^\infty(I)$, $\|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$
* Homogénéité : $\forall f \in L^\infty(I), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
* Inégalité triangulaire : $\forall f, g \in L^\infty(I)$, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Définition 2.4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $I \to \mathbb{R}$ bornées et $f : I \to \mathbb{R}$ bornée.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$

Proposition 2.5. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions bornées sur I et $f, g : I \to \mathbb{R}$ bornées telles que

$$\begin{cases} \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \\ \psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} g \end{cases}$$

Alors :

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_n + \lambda\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f + \lambda g$
* $|\varphi_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$

Théorème 2.6. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées et $f : I \to \mathbb{R}$ bornée telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$.
Alors, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue, f l'est aussi.

2.2 Approximation uniforme

Théorème 2.7. Soit $f \in C^\circ_{pm}([a,b])$.
Alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$

3 Définition de l'intégrale

3.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 3.1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\sigma = (a = x_0, ..., x_n = b)$ une subdivision adaptée à φ.
On peut donc écrire

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{x_i} + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \mathbb{1}_{]x_j, x_{j+1}[}$$

On définit alors l'intégrale de φ :

$$\int_a^b \varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j (x_{j+1} - x_j)$$

Proposition 3.2.

* Cette intégrale est bien définie.
* L'intégrale est une forme linéaire $\int_a^b : \mathcal{E}([a,b]) \to \mathbb{R}$
* (Inégalité triangulaire & contrôle uniforme) : $\forall f \in \mathcal{E}([a,b])$, $|\int_a^b \varphi| \leq \int_a^b |\varphi| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$
* Relation de Chasles : si $a < b < c$, on a $\forall \varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, $\int_a^c \varphi = \int_a^b \varphi + \int_b^c \varphi$

3.2 Lemme fondamental et définition

Théorème 3.3. Soit $f \in C^{\circ}_{pm}([a,b])$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}([a,b])$ convergent uniformément vers f.
Alors :

* La suite $(\int\limits_a^b \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
* Si $(\psi)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b])^{\mathbb{N}}$ vérifie également $\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b \varphi_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b \varphi_n$

Définition 3.4. Soit $f \in C^{\circ}_{pm}([a,b])$
On définit <u>l'intégrale de f</u> : $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(t)dt$ comme la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b \varphi_n$ où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f.

3.3 Propriétés de base

Théorème 3.5.

* L'intégrale est une forme linéaire $\int\limits_a^b : C^{\circ}_{pm}([a,b]) \to \mathbb{R}$
* Inégalité triangulaire et contrôle uniforme : $\forall f \in C^{\circ}_{pm}([a,b]), |\int\limits_a^b f| \leq \int\limits_a^b |f| \leq (b-a)\|f\|_\infty$
* si $f, g \in C^{\circ}_{pm}([a,c])$ et que f et g coïncident sur le complémentaire d'un ensemble fini, alors $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b g$
* <u>Positivité</u> : Soit $f \in C^{\circ}_{pm}([a,b])$ positive. Alors $\int\limits_a^b f \geq 0$
* <u>Croissance</u> : Soit $f, g \in C^{\circ}_{pm}([a,b])$ telles que $f \leq g$. Alors $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$