

# Chapitre 23 : Séries

## 1 Généralités

### 1.1 Définition

**Définition 1.1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

On dit que la série  $\sum u_n$  converge si la suite  $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et qu'elle diverge sinon.

- \* Le nombre  $\sum_{k=0}^n u_k$  est la n-ième somme partielle de la série.
- \* Le nombre  $u_n$  est le terme général de la série.
- \* Si la série converge, la somme de la série est  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$

**Proposition 1.2** (Linéarité de la somme). Soit  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  deux séries convergentes.

Alors  $\sum_n (u_n + \lambda v_n)$  converge pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

**Définition 1.3.** Soit  $\sum_n u_n$  est une série convergente.

Le n-ième reste de la série est la somme  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

**Proposition 1.4.** La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

### 1.2 Divergence grossière

**Proposition 1.5.** Soit  $\sum_n u_n$  une série convergente.

Alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

### 1.3 Critère spécial des séries alternées

**Théorème 1.6.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle :

- \* décroissante
- \* telle que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Alors la série  $\sum_n (-1)^n u_n$  converge.

## 2 Séries à termes positifs

**Définition 2.1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles positives.

On dit alors que  $\sum_n u_n$  est une série à termes positifs (SÀTP)

### 2.1 Théorèmes de comparaison

**Théorème 2.2.** Soit  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  deux SÀTP telles que  $u_n \leq v_n$  à pcr.

Alors  $\sum_n v_n$  converge  $\implies \sum_n u_n$  converge.

**Corollaire 2.3.**

- \* Soit  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  deux SÀTP telles que  $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$   
Alors  $\sum_n v_n$  converge  $\implies \sum_n u_n$  converge.
- \* C'est en particulier le cas si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  ou si  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$

**2.2 Comparaison série-intégrale**

**Théorème 2.4** (Comparaison série/intégrale, cas décroissant). Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  décroissante et continue par morceaux.

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_n^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^{n+1} f + f(1) - f(n+1)$$

**Théorème 2.5.** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et croissante. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{n+1} f - (f(n+1) - f(0)) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^{n+1} f$$

**Théorème 2.6** (Série de Riemann). Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

Alors la série  $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$

**3 Séries absolument convergentes****3.1 Convergence**

**Définition 3.1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

On dit que  $\sum_n u_n$  converge absolument si  $\sum_n |u_n|$  converge.

**Théorème 3.2.** Soit  $\sum_n u_n$  une série (de terme général complexe) absolument convergente.

Alors  $\sum_n u_n$  converge.

**Théorème 3.3.** Soit  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  deux séries à valeurs complexes.

Si  $u_n = O(v_n)$  et que  $\sum_n v_n$  converge absolument, alors  $\sum_n u_n$  converge absolument.