Chapitre 2 : Sommes et produits

1 Notation Σ

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels indexée par un ensemble fini I
On note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille.
Dans le cas où $I = [\![p,q]\!]$ on notera

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i\in[\![p,q]\!]} a_i = a_p + a_{p+1} + ... + a_q$$

Proposition 1.2. Soit I un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
On a :
Linéarité : On a $\sum\limits_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in I} b_i$
Linéarité : On a $\sum\limits_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} a_i$
Positivité : Si $\forall i \in I, a_i \leq b_i$, alors $\sum\limits_{i\in I} a_i \leq \sum\limits_{i\in I} b_i$

Proposition 1.3 (Encadrement grossier d'une somme)**.** Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$
Alors

$$|I| \times \min\{a_i \mid i \in I\} \leq \sum_{i\in I} a_i \leq |I| \times \max\{a_i \mid i \in I\}$$

Proposition 1.4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
Alors

$$b + (a+b) + (2a+b) + ... + (na+b) = \sum_{k=0}^{n}(ka+b) = (n+1)\frac{na+2b}{2}$$

"La moyenne des termes d'une suite arithmétique est la moyenne des termes extrêmes".
"La somme des termes d'une suite arithmétique vaut le nombre de termes fois la moyenne des termes dans la suite arithmétique".

Proposition 1.5.

* Soit $p \leq a < r$ trois entiers et $(a_i)_{i=p}^{r}$ une famille de nombres réels.
  Alors
  $$\sum_{i=p}^{r} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i + \sum_{i=q+1}^{r} a_i$$
  (Relation de Chasles)
* Soit $(J_1, ..., J_s)$ un recouvrement disjoint d'un ensemble I et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$
  Alors
  $$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in J_1} a_i + \sum_{i\in J_2} a_i + ... + \sum_{i\in J_s} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{i\in J_k} a_i$$

Remarque cruciale : L'addition est commutative.
En particulier, si deux familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ prennent les mêmes valeurs, le même nombre de fois, alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j$$

Notamment, si $(a_i)_{i=p}^{q}$ est une famille de réels :

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=0}^{q-p} a_{j+p} = \sum_{k=0}^{q-p} a_{q-k}$$

on vient d'effectuer un changement d'indice.

Proposition 1.6 (Télescopage)**.** Soit $(a_i)_{i=p}^{q+1}$ une famille de réels.
Alors

$$\sum_{i=p}^{q}(a_{i+1} - q_i) = a_{q+1} - a_p$$

Exemples importants :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 Produits

Définition 2.1. Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels indexée par un ensemble fini I,
on note $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de cette famille.

Proposition 2.2. Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par le même ensemble fini I

- On a

$$\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \prod_{i\in I} a_i \prod_{i\in I} b_i$$

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i\in I}(a_i^n) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^n$$

- Règle du produit nul : $\prod_{i\in I} a_i = 0 \iff \exists i \in I : a_i = 0$
- Si $\forall i \in I, a_i \geq 0$, alors $\prod_{i\in I} a_i \geq 0$
- Si $\forall i \in I, 0 \leq a_i \leq b_i$, on a $\prod_{i\in I} a_i \leq \prod_{i\in I} b_i$
- Si $(J_1, \ldots, J_s)$ est un recouvrement disjoint de I, alors

$$\prod_{i\in I} a_i = \left(\prod_{i\in J_1} a_i\right) \cdots \left(\prod_{i\in J_s} a_i\right) = \prod_{k=1}\prod_{i\in J_k} a_i$$

Définition 2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$
On définit factorielle n

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Proposition 2.4. Soit $(a_i)_{i=k}^{q+1}$ une famille de réels non nuls.
Alors

$$\prod_{i=p}^{q} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$$

3 Somme géométrique

3.1 Formule de base

Théorème 3.1. Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
On a
$$(q-1)(q^n + q^{n-1} + ... + q + 1) = (q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} - 1$$
En particulier, si $q \neq 1$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$
Remarque : De même, si $q \neq 1$
$$\sum_{k=a}^{b} q^k = \frac{q^{b+1}-q^a}{q-1}$$
$$\frac{\text{après-dernier terme } - \text{ premier terme}}{q-1}$$

3.2 Variants

Proposition 3.2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
On a

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) \end{aligned}$$

Si n est impair

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k}\right) \end{aligned}$$

4 Formule de binôme de Newton

4.1 Coefficients binomiaux

On rappelle que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est le cardinal de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
En particulier $\binom{n}{k} = 0$ dès que $k > n$
On étend la notion en posant $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$
On obtient ainsi des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

Proposition 4.1 (Formule de Pascal)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$
On a
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Théorème 4.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$
On a
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k} \text{ si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque : Le théorème montre que $!k$ divise le produit de k entiers consécutifs.

Proposition 4.3 (Symétrie des binomiaux)**.** Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$
On a
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

4.2 Binôme de Newton

Théorème 4.4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
On a
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemples importants :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

Donc si $n > 0$, on a
$$\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ paire}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impaire}}} \binom{n}{k} = 0$$

5 Sommes doubles

Proposition 5.1. Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![p,q]\!] \times [\![r,s]\!]}$ une famille de nombres réels.
Alors
$$\sum_{(i,j) \in [\![p,q]\!] \times [\![r,s]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{q} \sum_{j=r}^{s} a_{i,j} = \sum_{j=r}^{s} \sum_{i=p}^{q} a_{i,j}$$

Proposition 5.2. Soit $(a_i)_{i=p}^{q}$ et $(b_j)_{j=r}^{s}$ deux familles de réels.
Alors
$$\left(\sum_{i=p}^{q} a_i\right) \left(\sum_{j=r}^{s} b_j\right) = \sum_{i=p}^{q} \sum_{j=r}^{s} a_i b_j = \sum_{j=r}^{s} \sum_{i=p}^{q} a_i b_j$$

Corollaire 5.3. Soit $\left(a_i^{(1)}\right)_{i_1 \in I_1}, \dots, \left(a_i^{(d)}\right)_{i_d \in I_d}$ d familles de nombres réels indexées par des ensembles finis $I_1, \dots, I_d$
Alors
$$\prod_{j=1}^{d} \sum_{i_j \in I_j} a_{i_j}^{(j)} = \left(\sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1}^{(1)}\right) \dots \left(\sum_{i_d \in I_d} a_{i_d}^{(d)}\right) = \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in I_1 \times \dots \times I_d} a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_d}^{(d)}$$

5.1 Sommes triangulaires

Proposition 5.4. Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille indexée par $\left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \leq j\right\}$
Alors
$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

5.2 Carré d'une somme

Proposition 5.5. Si $(a_i)_{i=1}^{n}$ est une famille de nombres, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$