Chapitre 26 : Espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel (réel).
Un produit scalaire sur E est une application

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 \to \mathbb{R} \\ (u, v) \to \langle u \mid v \rangle \end{cases}$$

- $*$ linéaire
- $*$ symétrique (càd $\forall u, v \in E$, $\langle u \mid v \rangle = \langle v \mid u \rangle$)
- $*$ et définie positive (càd $\forall u \in E$, $\langle u \mid u \rangle \geq 0$ et $\forall u \in E$, $\langle u \mid u \rangle = 0 \implies u = 0_E$)

Un espace préhibertien (réel) est la donnée d'une ev E et d'un produit scalaire sur E
Un espace euclidien est un espace préhibertien de dimension finie.

1.2 Norme euclidienne

Définition 1.2. Soit E un espace préhibertien.
- $*$ La norme (euclidienne) de $u \in E$ est $\|u\| = \sqrt{\langle u \mid v \rangle}$
- $*$ Le distance de u à $v \in E$ est $\mathrm{d}(u, v) = \|v - u\|$

Théorème 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soit E un espace préhibertien et $u, v \in E$
On a

$$\langle u \mid v \rangle \leq |\langle u \mid v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

"Le produit scalaire est inférieur au produit des normes"

Théorème 1.4. La norme $\|\cdot\|$ est une norme, càd qu'on a :
Positivité : $\forall u \in E$, $\|u\| \geq 0$
Séparation : $\forall u \in E$, $\|u\| = 0 \implies u = 0_E$
Homogénéité : $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$
Inégalité triangulaire : $\forall u, v \in E$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$