Chapitre 24 : Familles sommables

1 Familles de nombres positifs

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit $x = (x_j)_{j \in J}$ une famille de réels ≥ 0 indexés par une ensemble J
On définit

$$\sum_{j \in J} x_j = \sup \left\{ \sum_{j \in J_0} x_j \mid J_0 \in \mathcal{P}_f(J) \right\} \in [0, +\infty]$$

Avec la convention que la forme supérieure vaut $+\infty$ si l'ensemble n'est pas majoré.
(Ici, $\mathcal{P}_f$ désigne l'ensemble des parties finies de J)

Proposition 1.2. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^J$, des familles indexées par J
On a :

* Restriction : Si $K \subseteq J$, $\sum\limits_{j \in K} x_j \leq \sum\limits_{j \in J} x_j$
* Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum\limits_{j \in J} (x_j + \lambda y_j) = \sum\limits_{j \in J} x_j + \lambda \sum_{j \in J} y_j$
* Croissance : Si $\forall j \in J$, $x_j \leq y_j$, alors $\sum\limits_{j \in J} x_j \leq \sum\limits_{j \in J} y_j$

Corollaire 1.3. Supposons $j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} J_k$
Alors, pour toute famille $x \in \mathbb{R}_+^J$, on a $\sum\limits_{j \in J} x_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j \in J_k} x_j$

1.2 Commutativité

Proposition 1.4.

* Soit $\sigma : I \to J$ une bijection et $x \in \mathbb{R}_+^J$
  Alors $\sum\limits_{i \in I} x_{\sigma(I)} = \sum\limits_{j \in J} x_j$
* En particulier, si $\sigma : J \to I$ est bijective
  $\sum\limits_{j \in J} x_j = \sum\limits_{j \in J} x_{\sigma(j)}$