

Chapitre 26 : Espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, le corps des scalaires est \mathbb{R}

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel (réel).

Un produit scalaire sur E est une application

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \rightarrow \langle u | v \rangle \end{cases}$$

* linéaire

* symétrique (càd $\forall u, v \in E, \langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle$)

* et définie positive (càd $\forall u \in E, \langle u | u \rangle \geq 0$ et $\forall u \in E, \langle u | u \rangle = 0 \implies u = 0_E$)

Un espace préhilbertien (réel) est la donnée d'une ev E et d'un produit scalaire sur E

Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

1.2 Norme euclidienne

Définition 1.2. Soit E un espace préhilbertien.

* La norme (euclidienne) de $u \in E$ est $\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$

* Le distance de u à $v \in E$ est $d(u, v) = \|v - u\|$

Théorème 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit E un espace préhilbertien et $u, v \in E$

On a

$$\langle u | v \rangle \leq |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

"Le produit scalaire est inférieur au produit des normes"

Théorème 1.4. La norme $\|\cdot\|$ est une norme, càd qu'on a :

Positivité : $\forall u \in E, \|u\| \geq 0$

Séparation : $\forall u \in E, \|u\| = 0 \implies u = 0_E$

Homogénéité : $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$

Inégalité triangulaire : $\forall u, v \in E, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

2 Orthogonalité

2.1 Définition

Dans toute cette section, E est un espace préhilbertien.

Définition 2.1.

* Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits orthogonaux (et on note $u \perp v$) si $\langle u | v \rangle = 0$

* Un vecteur $u \in E$ est orthogonal à une partie X de E (et on note $u \perp X$) si $\forall v \in X, u \perp v$

* Deux parties X et Y de E sont orthogonales (et on note $X \perp Y$) si $\forall u \in X, \forall v \in Y, u \perp v$

Théorème 2.2 (Pythagore). Soit $u, v \in E$

Alors $u \perp v$ ssi $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Définition 2.3. Soit X une partie de E

On définit l'orthogonal de X

$$X^\perp = \{u \in E \mid u \perp X\} = \{u \in E \mid \forall v \in X, \langle u \mid v \rangle = 0\}$$

Proposition 2.4. Soit X une partie de E

On a :

- * X^\perp est une sev de E
- * $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$

Théorème 2.5 (de représentation de Riesz). Soit E un espace euclidien et $\varphi \in E^*$

Alors il existe $u \in E$ tel que $\varphi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \langle u \mid v \rangle \end{cases}$

2.2 Familles et bases orthonormées

Définition 2.6. Soit E un espace préhilbertien.

- * Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j \in I, \langle x_i \mid x_j \rangle = 0$
- * La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthonormée (ou orthonormale) si les vecteurs sont en outre de norme 1, càd $\forall i, j \in I, \langle x_i \mid x_j \rangle = \delta_{ij}$

Proposition 2.7. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier, toute famille orthonormée) est libre.

Définition 2.8. Une base orthogonale (resp. orthonormée) (BON) d'un espace préhilbertien E est une base de E qui est également une famille orthogonale (resp. orthonormée).

Théorème 2.9. Tout espace euclidien E possède une base orthonormée.

Remarque : On utilise l'algorithme d'orthonormalisation :

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on remplace v_k par

$$\frac{v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k \mid e_j \rangle e_j}{\|v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k \mid e_j \rangle e_j\|}$$

Corollaire 2.10 (Théorème de la base orthonormée incomplète).

Soit E un espace euclidien et (e_1, \dots, e_r) une famille orthonormée.

Alors il existe (e_{r+1}, \dots, e_n) telle que (e_1, \dots, e_n) soit une base orthonormée de E

Proposition 2.11. Soit E un espace euclidien et (e_1, \dots, e_n) une BON de E

Alors, pour tous $x, y \in E$ on a :

- * $x = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i \rangle e_i$
- * $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i \rangle \langle y \mid e_i \rangle$
- * $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i \rangle^2$

Autrement dit, dans une BON, tous les calculs se font comme dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Plus conceptuellement, tout espace euclidien de dimension n est isomorphe (en tant qu'espace euclidien) à \mathbb{R}^n

3 Projection orthogonale

Dans toute la section, E est un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E

3.1 Définition

Proposition 3.1. Avec ces notations (F de dimension finie!) on a :

- * $E = F \oplus F^\perp$
- * $(F^\perp)^\perp = F$

Définition 3.2. On note p_F et on appelle projection orthogonale sur F le projecteur sur F parallèlement à F^\perp

Proposition 3.3. Si F possède une base orthonormée (e_1, \dots, e_r) , on a

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^r \langle x | e_i \rangle e_i$$

Proposition 3.4. Soit $x \in E$

- * Le projeté $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $\forall y \in F, \langle p_F(x) | y \rangle = \langle x | y \rangle$
- * Si F possède une base (pas nécessairement ON) (v_1, \dots, v_r) , cette condition équivaut à $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \langle p_F(x) | v_j \rangle = \langle x | v_j \rangle$

Proposition 3.5 (Inégalité de Bessel). On a $\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$

3.2 Distance à un sev de dimension finie

Proposition 3.6. Soit E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E . Soit $x \in E$

On a $\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ avec égalité ssi $y = p_F(x)$

Définition 3.7. Avec les mêmes notations, $\|x - p_F(x)\|$ est la distance de x à F , notée $d(x, F)$

3.3 Cas d'un hyperplan

Dans cette section, E est un espace euclidien et F est un hyperplan de E . On fixe un vecteur normal n de F (càd $F = \text{Vect}(n)^\perp$)

Proposition 3.8. On a :

$$p_F(x) = x - \frac{\langle x | n \rangle}{\|n\|^2} n \quad \text{et} \quad d(x, F) = \frac{|\langle x | n \rangle|}{\|n\|}$$