

Chapitre 16. Intégrales à paramètre

I, J intervalles d'intérieur non vide, E un evn.

1 Le théorème de convergence dominée

1.1 Le théorème de convergence dominée

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone). Soit $g_n : I \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables et $g_n : I \rightarrow [0, +\infty]$ On suppose que :

1. $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq g_n \leq g_{n+1}$

Alors dans $[0, +\infty]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I g_n = \int_I g \in [0, +\infty]$$

Corollaire 1.2. Soit $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable et $F_n : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($n \geq 1$) mesurable.

On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq F_{n+1} \leq F_n$
2. (F_n) converge simplement vers 0

Alors

$$\int_I F_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

1.2 Énoncé du théorème de convergence dominée

Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée). Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux ($n \in \mathbb{N}$)

On suppose :

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I
2. Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \quad |f_n(x)| \leq \varphi(t)$ (Hypothèse de domination)

Alors les f_n sont intégrables et f aussi et

$$\boxed{\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f}$$

On a même

$$\|f_n - f\|_1 = \int_I |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

1.3 Premiers exemples d'application

Quelques exercices classiques :

1. Montrer que

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ continue.
Montrer que

$$I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$$

3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ continue avec $\lim_{+\infty} f = 0$.
Montrer que

$$I_n = \int_0^1 f(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$$

4. Soit $n \geq 1$ et

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$$

Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $I_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha}{n}$ avec α à exprimer avec une intégrale.

5. Montrer que

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

1.4 Théorème de convergence dominée appliquée à l'interversion série / suite

Corollaire 1.4 (Théorème de convergence dominée). Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose que :

1. $\sum f_n$ converge simplement vers $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \mathcal{C}^0$ par morceaux.
2. Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=0}^n f_k \right| \leq \varphi$ (Domination)

Alors les f_n sont intégrables, $\sum f_n$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

1.5 Le théorème d'intégration terme à terme

Théorème 1.5 (Théorème d'intégration terme à terme pour les fonctions positives).

Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable ($n \in \mathbb{N}$)

On suppose que $\sum f_n$ converge simplement et que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux.

Alors dans $[0, +\infty]$ on a

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

En particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ intégrable } \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_I f_n < +\infty$$

Dans ces conditions, dans \mathbb{R}_+^*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Théorème 1.6 (Théorème d'intégration terme à terme). Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ intégrables ($n \in \mathbb{N}$)

On suppose que :

1. $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux.
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_I |f_n| < +\infty$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

De plus

$$\left| \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

2 Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre

2.1 Convergence dominée avec un paramètre continue

Corollaire 2.1. Soit $f : (x, t) \in A \times I \mapsto f(x, t) \in \mathbb{K}$ avec $A \subset E$ (E evn) et a adhérent à A

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

On suppose :

1. Pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(t)$
2. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^0 par morceaux.
3. Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x, t) \in A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi$ (Domination)

Alors pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ (ie. $t \mapsto f(x, t)$) est intégrable, g aussi et

$$\boxed{\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I g(t) dt}$$

2.2 Continuité

Théorème 2.2. Soit $A \subset E$ (E evn) et $f : (x, t) \in A \times I \mapsto f(x, t) \in \mathbb{K}$

On suppose :

1. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux.
2. Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue.
3. Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x, t) \in A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi$ (Domination)

Alors

$$F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est bien définie et continue en A

2.3 Dérivation sous le signe intégral

Théorème 2.3 (Formule de Leibniz). Soit $f : \begin{cases} J \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$

On suppose :

1. À x fixé $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I
2. À t fixé $x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^1 sur J
3. À x fixé $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux.
4. Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x, t) \in J \times I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ (Domination)

Alors

$$F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 et $\forall x \in J$

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Proposition 2.4. Soit $f : \begin{cases} J \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$ et $k \in \mathbb{N}^*$

On suppose :

1. À t fixé $x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^k sur J
2. Pour tout $0 \leq i \leq k - 1$, à x fixé $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est intégrable sur I

3. À x fixé $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux.

4. Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ (Domination)

Alors

$$F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^k et $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x \in J$

$$F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$$

Corollaire 2.5. Soit $f : \begin{cases} J \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$

On suppose :

1. À t fixé $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur J
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, à x fixé $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$ (Domination)

Alors

$$F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et $\forall k \geq 0, x \in J$

$$F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$$

2.4 La fonction Γ d'Euler (HP)

Définition 2.6. Pour $x > 0$ on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

C'est la fonction Gamma d'Euler.

Extension : Si $z \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}(z) > 0$ alors on peut définir $\Gamma(z)$ de la même façon.

Proposition 2.7.

- Pour $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$
-

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Proposition 2.8. La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et pour $x > 0, k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ est convexe et $\lim_{0^+} \Gamma = \lim_{+\infty} \Gamma = +\infty$

2.5 Fonctions à support compact

Définition 2.9. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$

Le support de f est $S = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$

On dit que f est à support compact si S est compact ie. borné, autrement dit :

$$\exists R > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > R \implies f(x) = 0$$

Définition 2.10. Une suite de fonctions régularisantes est une suite de fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mathcal{C}^\infty$ à support contenu dans $[-a_n, a_n]$ où :

- a_n est une suite de \mathbb{R}_+^*
- a_n décroît.
- a_n tend vers 0

et vérifiant $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$

2.6 Intégrales doubles sur un pavé

Théorème 2.11 (Théorème de Fubini). Soit $a \leq b, v \leq d$ et $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$
Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Cette valeur commune est appelée

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy$$

2.7 Fonctions intégrables sur $I \times J$

Proposition 2.12. Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}_+$

Sous réserve de régularité de fonction on a dans

$$0, +\infty$$

$$\int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy$$

On note la valeur commune

$$\iint_{I \times J} f \in [0, +\infty]$$

Si $\iint_{I \times J} f < +\infty$ on dit que f est intégrable.

3 Convergence en moyenne quadratique

3.1 La convergence en moyenne

Définition 3.1. Soit $f_n \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ $n \in \mathbb{N}$

On dit que f_n converge en moyenne vers f si

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

On dit que f_n converge en moyenne quadratique vers f si

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\int_I |f_n - f|^2} \rightarrow 0$$

On note $L^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I bornées.

Alors

$$L^\infty \subset L^2(I) \subset L^1(I)$$

Ces inclusions sont strictes si I n'est pas un segment.

3.2 Complément : Base hilbertienne

Théorème 3.2 (Inégalité de Bessel-Parseval). Soit E préhilbertien, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système orthonormé et $x \in E$. Alors $(\langle e_n, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable (ie. $(\langle e_n, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$) et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Définition 3.3. Soit E préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système orthonormé. On dit que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne si $\overline{\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}} = E$