

Chapitre 17. Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, on fixe un corps K , appelé corps des scalaires.

Pseudo-définition : Étant donné n objets x_1, \dots, x_n , une combinaison linéaire (CL) de x_1, \dots, x_n est (quand ça a un sens) une expression de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition 1.1. Un espace vectoriel sur K (ou K -espace vectoriel) est un ensemble E muni de deux opérations :

$$+ : \begin{cases} E \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} \quad \cdot : \begin{cases} K \times E \rightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$$

telles que :

- * $(E, +)$ est un groupe abélien.
- * On a $\forall x \in E, 1x = x$
- * On a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- * On a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- * On a $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

1.2 Premiers exemples

- 1) L'espace vectoriel K^n pour $n \in \mathbb{N}$
- 2) L'ensemble $M_{np}(K)$
- 3) L'ensemble K^Ω des fonctions $\Omega \rightarrow K$
- 4) Si E et F sont des K -ev, $E \times F$ est un K -ev
- 5) L'ensemble $K[X]$ des polynômes et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $K_n[X]$
- 6) L'ensemble $\{0_E\}$ est un K -ev que l'on qualifie d'espace vectoriel nul (ou trivial)

1.3 Quelques règles de calcul

Proposition 1.2. Soit E un ev. On a :

- * $\forall \lambda \in K, \lambda 0_E = 0_E$
- * $\forall x \in E, 0x = 0_E$
- * $\forall x \in E, -x = (-1)x$

Proposition 1.3 ("règle de produit scalaire-vecteur nul"). Soit E un ev et $\lambda \in K, x \in E$ tels que $\lambda x = 0_E$. Alors $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$

1.4 Algèbres

Définition 1.4. Une K -algèbre est un ensemble A muni de trois relations :

$$+ : \begin{cases} A \times A \rightarrow A \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} \quad \bullet : \begin{cases} K \times A \rightarrow A \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases} \quad \times : \begin{cases} A \times A \mapsto A \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases}$$

telles que :

- * $(A, +, \cdot)$ soit un K -espace vectoriel.
- * $(A, +, \times)$ soit un anneau.
- * La multiplication \times soit bilinéaire, càd $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in K, (x \times (\lambda y) = (\lambda x) \times y = \lambda \times (xy))$

Proposition 1.5. Soit L/K une extension de corps (càd L est un corps dont K est un sous-corps).

Alors L est un K -algèbre pour les lois usuelles, càd l'addition et la multiplication de L et la multiplication restreinte

$$\begin{cases} K \times L \rightarrow L \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$$

Par exemple, \mathbb{C} est une \mathbb{R} -algèbre (et donc un \mathbb{R} -ev)

\mathbb{R} est une \mathbb{Q} -algèbre (et donc un \mathbb{Q} -ev)

2 Familles de vecteurs

Dans toute cette section, on fixe un K -ev E et une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E (si $I = \llbracket 1, r \rrbracket$, on le notera plus simplement (x_1, \dots, x_r)).

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 2.1. Une combinaison linéaire de vecteurs $x_i, i \in I$ est un élément de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle d'éléments de K , càd que $S = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini.

La somme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ signifie simplement $\sum_{i \in S} \lambda_i x_i$

On note $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ et on appelle sous-espace vectoriel engendré par les $x_i, i \in I$ l'ensemble de ces combinaisons linéaires.

Si $I = \llbracket 1, r \rrbracket$ la définition devient :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_r) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \right\}$$

2.2 Familles libres

Définition 2.2.

- * Une relation de liaison entre les $x_i, i \in I$ est une égalité de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$
- * Cette relation de liaison est dite triviale si $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ et non triviale sinon.

Définition 2.3.

- * La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite liée s'il existe une relation de liaison non triviale entre les $x_i, i \in I$.
- * Elle est dite libre dans le cas contraire. (On dit aussi que les $x_i, i \in I$ sont linéairement indépendants).

Définition 2.4 (Colinéarité). Soit $u, v \in E$. LASSÉ :

- (i) Il existe $\omega \in E$ et $\lambda, \mu \in K$ tels que
$$\begin{cases} u = \lambda\omega \\ v = \mu\omega \end{cases}$$
- (ii) $(\exists \alpha \in K : v = \alpha u)$ ou $(\exists \beta \in K : u = \beta v)$

Quand ces assertions sont vraies, on dit que u et v sont colinéaires.

Proposition 2.5 (Liberté de petites familles).

- 0. La famille $()$ est libre.
- 1. Soit $v \in E$. La famille (v) est libre ssi $v \neq 0_E$
- 2. Soit $u, v \in E$. La famille (u, v) est libre ssi u et v ne sont pas colinéaires.

Proposition 2.6. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs est CL des autres.

2.3 Familles génératrices

Définition 2.7. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ engendre E (ou est génératrice de E) si $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$, càd si tout vecteur de E est CL de vecteurs $x_i, i \in I$

2.4 Bases

Définition 2.8. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E si $(x_i)_{i \in I}$ est libre et qu'elle engendre E .

2.5 Décomposition selon une base

Proposition 2.9. On a les équivalences suivantes :

- * La famille $(x_i)_{i \in I}$ engendre E ssi tout vecteur $v \in E$ possède une écriture
$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, \text{ pour une certaine } \lambda \in K^{(I)}$$
- * La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre ssi tout vecteur $v \in E$ possède au plus une écriture.
- * La famille $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E ssi tout vecteur $v \in E$ possède exactement une écriture.

Définition 2.10. On suppose que E a une base finie $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$. Soit $v \in E$.

L'unique n -uplet $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ est noté $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$

On dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur v dans la base \mathcal{B} .

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 Définitions

Philosophiquement, un sous-espace vectoriel (sev) de E est une partie de E stable par combinaison linéaire, càd que dès qu'elle contient une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ elle contient toutes les CL des $x_i, i \in I$.

En particulier, elle doit toujours contenir 0_E , qui est une CL de 0 vecteurs.

Dans toute cette section, E désigne un K -ev.

Définition 3.1. Un sous-espace vectoriel de E est une partie $F \subseteq E$ telle que :

- * $0_E \in F$
- * $\forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x \in F$
- * $\forall x, y \in F, x + y \in F$

Théorème 3.2 (Stabilité par CL). Soit F un sev de E .

Alors F est stable par CL : pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de F , on a $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} \subseteq F$

Proposition 3.3. Soit $F \subseteq E$ une partie non vide telle que $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in F, x + \lambda y \in F$

Alors F est un sev de E .

Proposition 3.4. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

Alors $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 3.5. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev E .

Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E .

3.2 Exemples

Proposition 3.6. Soit $A \in M_{np}(K)$

* $\ker A = \{X \in K^p \mid AX = 0_{K^n}\}$ est un sev de K^p

* $\text{im } A = \{AX \mid X \in K^p\}$ est un sev de K^n

Proposition 3.7. Soit $A \in M_{np}(K)$

Alors $\text{im } A = \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A))$

3.3 Bases d'un sous-espace vectoriel

Si F est un sev de E , F hérite d'une structure de ev. On peut donc s'intéresser à une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de F et se demander si elle est libre / génératrice de F / une base de F .

En pratique, il y a deux méthodes pour vérifier que $(x_i)_{i \in I}$ est une base de F

Méthode 1 : retour aux définitions.

0. On vérifie que $\forall i \in I, x_i \in F$ (ce qui montre $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} \subseteq F$ par stabilité par CL).

1. On vérifie que $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

2. On vérifie que tout $y \in F$ est CL des $x_i, i \in I$, ce qui montre $F \subseteq \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$

Méthode 2 : par analyse-synthèse.

0. idem.

1. On vérifie que tout $y \in F$ s'écrit de manière unique comme CL des $x_i, i \in I$

4 Familles et bases échelonnées

Définition 4.1. Une famille $(P_i)_{i \in I}$ de polynômes non nuls est dite échelonnée si tous les degrés $\deg P_i, i \in I$ sont différents.

Proposition 4.2. Toute famille échelonnée de polynômes est libre.

Théorème 4.3.

* Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes tels que $\forall i \in \mathbb{N}, \deg P_i = i$. Alors $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$

* Soit $(P_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille de polynômes tels que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg P_i = i$. Alors $(P_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $K[X]$

5 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans toute cette section, on fixe un espace vectoriel E .

5.1 Définition

Définition 5.1.

- * Soit F_1, F_2 deux sev de E .
On définit leur somme $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$
- * Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .
On définit leur somme $\sum_{i \in I} F_i$ comme l'ensemble des sommes $\sum_{i \in I} x_i$ où $(x_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle d'éléments de E telle que $\forall i \in I, x_i \in F_i$

Proposition 5.2.

- * La somme d'une famille de sev de E est un sev de E .
- * C'est même le plus petit sev de E dans lequel sont inclus tous les éléments de la famille.

5.2 Somme directe

Définition 5.3.

- * Soit F_1, F_2 deux sev de E .
On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si tout élément de $F_1 + F_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.
Si c'est le cas, on note $F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2$
- * Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev. On dit que les $F_i, i \in I$ sont en somme directe si tout élément de $\sum_{i \in I} F_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i \in I} x_i$, où $(x_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle d'éléments de E telle que $\forall i \in I, x_i \in F_i$.
Si c'est le cas, on note $\bigoplus_{i \in I} F_i = \sum_{i \in I} F_i$

Proposition 5.4. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E .

Alors les $F_i, i \in I$ sont en somme directe si et seulement si la seule décomposition de 0_E sous la forme $\sum_{i \in I} x_i$ est la décomposition $0_E = \sum_{i \in I} 0_E$

Proposition 5.5. Soit F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

5.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 5.6. Soit F_1 et F_2 deux sev de E .

On dit qu'ils sont supplémentaires si $F_1 \oplus F_2 = E$

5.4 Bases adaptées à une décomposition en somme directe

Théorème 5.7.

- * Soit F_1 et F_2 deux sev de E en somme directe. Supposons que (x_1, \dots, x_n) soit une base de F_1 et (y_1, \dots, y_p) soit une base de F_2 .
Alors la concaténation $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ est une base de $F_1 \oplus F_2$
- * Plus généralement, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sev de E en somme directe et que, pour tout $i \in I$, $(x_{i,j})_{j \in J_i}$ est une base de F_i , alors la "concaténation" $(x_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J_i}}$ est une base de $\bigoplus_{i \in I} F_i$

Théorème 5.8.

- * Soit $(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ une base de E .
Alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_r) \oplus \text{Vect}(x_{r+1}, \dots, x_n) = E$
- * Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de E et $(I_j)_{j \in J}$ une famille de parties de I formant un recouvrement disjoint de I
(càd $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$). Alors $E = \bigoplus_{j \in J} \text{Vect}(x_i)_{i \in I_j}$

6 Applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels.

6.1 Définition

Définition 6.1. Une application K -linéaire $f : E \rightarrow F$ est une application telle que :

- * $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- * $\forall x \in E, \lambda \in K, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathcal{L}_K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \rightarrow F$

Proposition 6.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f "préserve les CL", càd :

- * $f(0_E) = 0_F$
- * $\forall x_1, \dots, x_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

Proposition 6.3. Soit $f : E \rightarrow F$ une application telle que $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$
Alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Proposition 6.4. $\mathcal{L}(E, F)$ est un sev de F^E
(Autrement dit : une CL d'applications linéaires est linéaire).

Proposition 6.5 (Stabilité par composition). Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

Proposition 6.6 (Bilinéarité de la composition). La composition des applications linéaires est bilinéaire.
Soit E, F, G trois espaces vectoriels. Soit $\lambda \in K$.

- * Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$.
On a $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$ et $(\lambda g_1) \circ f = \lambda(g_1 \circ f)$
- * Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
On a $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ et $g \circ (\lambda f_1) = \lambda(g \circ f_1)$

Définition 6.7. Un endomorphisme de E est une application linéaire $E \rightarrow E$
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$

Corollaire 6.8. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, et même une K -algèbre.

6.2 Exemples

Cas particulier crucial : Si $A \in M_{np}(K)$, on a une AL

$$\varphi_A : \begin{cases} K^p \rightarrow K^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

C'est l'application linéaire canoniquement associée à A .

6.3 Noyaux et images

Définition 6.9. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On définit :

- * Son noyau $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$
- * son image $\operatorname{im} f = \{f(x) \mid x \in E\}$

Proposition 6.10. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- * $\ker f$ est un sev de E .
- * $\operatorname{im} f$ est un sev de F .

Proposition 6.11. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- * Si H est un sev de F , alors $f^{-1}[H]$ est un sev de E .
- * Si G est un sev de E , alors $f[G]$ est un sev de F .

Théorème 6.12. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- * Deux vecteurs $x_1, x_2 \in E$ ont la même image par f ssi $x_2 - x_1 \in \ker f$
- * On a f injective $\iff \ker f = \{0_E\}$
- * On a f surjective $\iff \operatorname{im} f = F$

6.4 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Définition 6.13. Un Sous-espace affine de E est un ensemble de la forme $a + G = \{a + x \mid x \in G\}$ où $a \in E$ et G est un sev de E .

On dit que l'espace vectoriel G est la direction du sous-espace affine.

Notation : La direction G d'un sous-espace affine $A \subseteq E$ est parfois noté \vec{A} .

Proposition 6.14. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.

Alors $f^{-1}[\{y\}] = \{x \in E \mid f(x) = y\}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker f$.

Proposition 6.15. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E .

Alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine, de direction $\bigcap_{i \in I} \vec{A}_i$

6.5 Isomorphismes

Définition 6.16. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f est un isomorphisme si f est bijective.

On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $E \rightarrow F$.

Proposition 6.17. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme.

Alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire (et donc un isomorphisme).

Proposition 6.18. Soit E, F, G trois sev et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux isomorphismes.

Alors $g \circ f$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

7 Endomorphismes

On fixe un K -ev. E

Rappel : $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (et même une K -algèbre).

Définition 7.1. Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif de E .

On note $GL(E)$, et on appelle groupe linéaire de E , l'ensemble des automorphismes de E .

Définition 7.2. Deux endomorphismes $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent si $g \circ f = f \circ g$.

Proposition 7.3. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutant.

Alors $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont stables par g .

Définition 7.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On définit son commutant $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$

8 Applications linéaires et familles

Soit E, F deux ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

8.1 Prolongement des identités

Théorème 8.1.

- * Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que $\forall i \in I, f(x_i) = g(x_i)$
Alors f et g coïncident sur $\operatorname{Vect}(x_i)_{i \in I} : \forall v \in \operatorname{Vect}(x_i)_{i \in I}, f(v) = g(v)$
- * Si en outre $(x_i)_{i \in I}$ engendre E , alors $f = g$

8.2 Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité

Notation non standard : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E , on notera :

$f_*(\mathcal{B}) = (f(e_i))_{i \in I}$ qui est une famille de vecteurs de F .

Proposition 8.2. Soit \mathcal{B} une base de E .

Alors :

- * f est injective ssi $f_*(\mathcal{B})$ est libre.
- * f est surjective ssi $f_*(\mathcal{B})$ engendre F .
- * f est un isomorphisme ssi $f_*(\mathcal{B})$ est une base de F .

8.3 Propriété universelle des bases

Théorème 8.3. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $F = (y_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F .

Alors il existe une unique AL $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f_*(\mathcal{B}) = F$. ($\forall i \in I, f(e_i) = y_i$)

9 Applications linéaires et décomposition en somme directe

9.1 Propriété universelle de la somme directe

Théorème 9.1. Soit E, F deux espaces vectoriels et $(S_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E telle que $E = \bigoplus_{i \in I} S_i$. On se

donne, pour tout $i \in I$, une AL $f_i \in \mathcal{L}(S_i, F)$

Alors il existe une unique AL $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, f|_{S_i} = f_i$

9.2 Projecteurs et symétries

On fixe un espace vectoriel E

Définition 9.2. Soit F, G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$

- * Le projecteur sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in F, f(x) = x$ et $\forall x \in G, f(x) = 0_E$
- * (On suppose que K n'est pas de caractéristique 2)
La symétrie d'axe F parallèlement à G est l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in F, f(x) = x$ et $\forall x \in G, f(x) = -x$

Définition 9.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$.

On définit l'espace propre de f associé à λ : $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$

On dit que λ est valeur propre de f si $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$ et on appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ tout élément non nul de $E_\lambda(f)$ (Autrement dit, tout vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$)

On appelle spectre de f l'ensemble $S_p(f) = S_{p_K}(f)$ de valeurs propres de F .

Proposition 9.4. Soit F, G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$

- * On note p le projecteur sur F parallèlement à G .
On a alors $F = \text{im}(p) = E_1(p)$, $G = \ker(p) = E_0(p)$ et $\forall \lambda \in K \setminus \{0, 1\}, E_\lambda(p) = \{0_E\}$
(Autrement dit, $S_p(p) \subseteq \{0, 1\}$)
- * (On suppose $\text{car}(K) \neq 2$)
On note s la symétrie d'axe F parallèlement à G .
On a alors $F = E_1(s)$ et $G = E_{-1}(s)$ et $\forall \lambda \in K \setminus \{-1, 1\}, E_\lambda(s) = \{0_E\}$
(Autrement dit, $S_p(s) \subseteq \{-1, 1\}$)

Théorème 9.5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- * f est un projecteur ssi $f^2 = f$
- * (On suppose $\text{car}(K) \neq 2$)
 f est une symétrie ssi $f^2 = id_E$