# Chapitre 1 : Structures fondamentales

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## 1 Groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels

### 1.1 Structures algébriques usuelles

$$\underline{\text{lci}} * : \begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x * y \end{cases}$$

**Définition 1.1.** Soit $M$ un ensemble muni d'une lci $*$
$(M, *)$ est un monoïde si :

1. $*$ est associative.
2. $*$ possède un élément neutre $e_M$

**Définition 1.2.** Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles.

**Définition 1.3.** Soit $A$ un ensemble avec 2 lci : $+$ et $*$
$A$ est un anneau si :

1. $(A, +)$ est un groupe abélien.
2. $(A, *)$ est un monoïde.
3. $\forall a, x, y \in A \qquad \begin{cases} a * (x + y) = a * x + a * y \\ (x + y) * a = x * a + y * a \end{cases}$

**Définition 1.4.** Un anneau commutatif $\neq \{0\}$ dont tous les éléments non nuls sont inversibles est un corps.

**Définition 1.5.** Soit $(E, +, \bullet)$ avec $E$ ensemble, $*$ lci et $\bullet : \begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \bullet x \end{cases}$ (l.c. externe)
$(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel si :

1. $(E, +)$ groupe abélien.
2. $\forall x \in E \qquad 1 \bullet x = x$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E \qquad \lambda \bullet (x + y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E \qquad (\lambda + \mu) \bullet x = \lambda \bullet x + \mu \bullet x$
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E \qquad (\lambda \bullet \mu) \bullet x = \lambda \bullet (\mu \bullet x) = \mu \bullet (\lambda \bullet x)$

### 1.2 Sous-structures

**Rappel.**

1. $G$ groupe, $H \subset G$

   $$H \text{ sous-groupe} \iff \begin{cases} 1_G \in H \\ \forall x, y \in H,\ xy \in H \\ \forall x \in H,\ x^{-1} \in H \end{cases}$$

   $H$ est un groupe aussi pour la restriction.

2. $A$ anneau, $B \subset A$

   $$B \text{ sous-anneau} \iff \begin{cases} \forall x, y \in B,\ x + y \in B,\ xy \in B \\ 1_A \in B \\ \forall x \in B,\ -x \in B \end{cases}$$

   Le sous-anneau $B$ est en particulier un anneau.

3. $K$ un corps, $L \subset K$

   $$L \text{ sous-corps de } K \iff \begin{cases} L \text{ sous-anneau de } K \\ \forall x \in L \setminus \{0\},\, x^{-1} \in L \end{cases}$$

4. $E$ un $\mathbb{K}$-ev, $F \subset E$

   $$F \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} \forall x, y \in F,\, x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\, \forall x \in F,\, \lambda x \in F \\ 0 \in F \end{cases}$$

Démarche : Pour montrer qu'un ensemble est un machin[1], on pourra le réaliser comme un sous-machin d'un machin connu.

**Lemme 1.6.** Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(K)$
Alors
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

**Proposition 1.7.** Soit $M$ un machin[1] et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de sous-machins de $M$
Alors $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ est un sous-machin de $M$

## 1.3 Morphismes

**Rappel.**

1. $f : G \to H$, $G, H$ groupes.
   $f$ morphisme de groupes $\iff \forall x, y \in G,\, f(x * y) = f(x) + f(y)$
   Dans ces conditions : $\begin{cases} f(e_G) = e_H \\ \forall x \in G,\, f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \end{cases}$
2. Soit $f : A \to B$, $A, B$ anneaux.

   $$f \text{ morphisme d'anneaux} \iff \begin{cases} f(1_A) = 1_B \\ \forall x, y \in A,\, \begin{cases} f(x * y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases} \end{cases}$$

   $$\text{Automatiquement : } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-x) = -f(x) \\ x \text{ inversible } \implies f(x) \text{ inversible et } f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \end{cases}$$
3. Un morphisme de corps c'est un morphisme d'anneaux.
4. $$u : E \to F \text{ linéaire} \iff \begin{cases} \forall x, y \in E,\, u(x + y) = u(x) + u(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\, u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases}$$

**Rappel.** Isomorphisme = morphisme bijectif.
La composée de 2 morphismes est un morphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
$G$ et $H$ sont dits isomorphes s'il existe $f : G \to H$ isomorphe. On note alors $G \underset{f}{\simeq} H$ ou $G \simeq H$

1. monoïde, groupe, anneau, corps ou $\mathbb{K}$-ev

**Rappel.**

1. $f : G \to H$ morphisme de groupes.
   $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$
   ( Respectivement, $\ker f = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$ )
2. Si $f : A \to B$ morphisme d'anneaux.
   $\ker f = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$
3. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$
   $\ker u = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$
   $f$ injective $\iff$ $\ker f = \{$ neutre $\}$

**Rappel.**

1. Soit $f : G \to H$ morphisme de machins [1].
   Alors $f(G)$ est un sous-machin de $H$
2. Si $f$ est $\begin{cases} \text{un morphisme de groupes} \\ \text{une application linéaire} \end{cases}$ alors $\ker f$ est $\begin{cases} \text{un sous-groupe} \\ \text{un sous-espace vectoriel} \end{cases}$

**Définition 1.8.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev.
Un hyperplan de $E$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle de $E$, ie. d'un élément de $\mathcal{L}(E, K) \setminus \{0\}$

## 1.4 Structure de $\mathbb{K}$-algèbre

**Définition 1.9.** Soit :

— $\mathbb{K}$ un corps.
— $A$ un ensemble.
— $+, *$ deux lci sur $A$
— $\bullet$ une lce sur $A$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$

On dit que $A$ est une $\mathbb{K}$-algèbre si :

1. $(A, +, *)$ est un anneau.
2. $(A, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in A \qquad \lambda \bullet (ab) = (\lambda \bullet a)b = a(\lambda \bullet b)$

**Proposition 1.10.**

1. Si $X$ est un ensemble, $\mathcal{F}(X, K) = K^X$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
2. $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
3. $M_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
4. Si $E$ est un $\mathbb{K}$-ev, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, *)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

**Proposition 1.11.** Soit $L$ un surcorps de $\mathbb{K}$
Alors $L$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

**Définition 1.12.** Soit $A$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit $B \subset A$
$B$ est une sous-algèbre de $A$ si :

— $1_A \in B$
— $\forall x, y \in B \qquad x + y \in B \qquad xy \in B$
— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in B \qquad \lambda x \in B$

**Définition 1.13.** Soit $f : A \to B$, $A, B$ deux $\mathbb{K}$-algèbres.
On dit que $f$ est un morphisme d'algèbres si $f$ est un morphisme d'anneaux linéaire, ie :

1. $f(1_A) = 1_B$
2. $\forall x, y \in A \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$
3. $\forall x, y \in A \qquad f(xy) = f(x)f(y)$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in A \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Si de plus $f$ est bijective, on dit que $f$ est un isomorphisme. On écrit alors $A \simeq B$

**Proposition 1.14.** L'image d'une $\mathbb{K}$-algèbre par $f : A \to B$ morphisme est une sous-algèbre de $B$

# 2 Ensembles quotients

## 2.1 Généralités