Chapitre 17. Séries entières

Si $r > 0$ on notera $D(a,r) =]a-r, a+r[$ dans $\mathbb{R}$

1 Rayon de convergence d'une série entière

1.1 Généralités

Définition 1.1. On appelle série entière toute série de fonctions du type $\sum u_n$ avec $u_n : z \in \mathbb{K} \mapsto a_n z^n \in \mathbb{K}$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$
On la note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Théorème 1.2. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière.
Alors dans $[0, +\infty]$

$$\begin{aligned} R &= \sup\left\{ r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \right\} \\ &= \sup\left\{ r \geq 0 \mid a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\} \\ &= \sup\left\{ r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sommable } \right\} \end{aligned}$$

R est appelée rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Théorème 1.3. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$

1. Pour tout $z \in \mathbb{K}$ avec $|z| < R$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument.
2. Pour tout $z \in \mathbb{K}$ avec $|z| > R$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ diverge grossièrement (ie. $a_n z^n \not\to 0$)

Définition 1.4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (rp. $\mathbb{R}$) $D(0,R)$ est appelé disque (rp. intervalle) ouvert de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $C(0,R)$ est appelé cercle d'incertitude de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $\{-R, R\}$ sont appelés points d'incertitude.
La somme de la série entière est

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Son domaine de définition $\mathcal{D}_S$ vérifie

$$D(0,R) \subset \mathcal{D}_S \subset \overline{D}(0,R)$$

1.2 La Règle de D'Alembert

Proposition 1.5 (Règle de D'alembert)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ pour tout n
Si

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

Alors dans $[0, +\infty]$

$$R = \frac{1}{L}$$

1.3 Théorème de comparaison

Théorème 1.6. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon R_a et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon R_b

Alors :

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_b \leq R_a$
2. Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{=} O(|b_n|)$ alors $R_b \leq R_a$
3. Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_b = R_a$

1.4 Rayon d'une somme, d'un produit

Proposition 1.7. On considère $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon R_a et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon R_b

Notons R le rayon de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$

Alors :

- $R \geq \min(R_a, R_b)$ et même si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$
- Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Définition 1.8. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières.

La série entière produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Théorème 1.9. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon R_a et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon R_b

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ leur produit de Cauchy de rayon R

Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$ et si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)}$$

2 Propriétés des séries entières dans le disque ouvert de convergence

2.1 Mode de convergence

Théorème 2.1. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R \in]0, +\infty]$

1. Il y a convergence absolue sur $D(0, R)$
2. Il y a convergence normale sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ inclus dans le disque <u>ouvert</u> de convergence (avec donc $r < R$)
   En particulier, il y a convergence uniforme sur tout $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$

Corollaire 2.2. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$

Il y a convergence normale sur tout compact contenu dans le disque ouvert $D(0, R)$

La fonction somme $S : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0, R)$

2.2 Dérivation d'une série entière

Définition 2.3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ ou $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$ est appelée série entière dérivée de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$

Proposition 2.4. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon R alors sa série dérivée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ a le même rayon R

Théorème 2.5. Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R ($a_n \in \mathbb{K}$)
Alors S est $\mathcal{C}^\infty$sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et on obtient S' en dérivant terme à terme :
Pour tout $x \in]-R, R[$

$$\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n}$$

Et si $p \geq 1$

$$\boxed{S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)...(n+1)a_{n+p}x^n}$$

2.3 Unicité des coefficients

Proposition 2.6. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) une série entière de rayon $R > 0$
Alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

En particulier, les coefficients d'une série entière de rayon > 0 sont uniquement déterminés par la fonction somme.
De plus, pour $x \in]-R, R[$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

ie. f est égale à sa série de Taylor.

Corollaire 2.7. Si deux séries entières avec un rayon > 0 coïncident sur un voisinage de 0
(ou de 0^+ ou de 0^-) alors elles ont les mêmes coefficients et sont donc égales.

2.4 Intégration d'une série entière

Proposition 2.8. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon $R > 0$
On peut intégrer terme à terme la série sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$
En particulier si $|x| < R$

$$\boxed{\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}}$$

Proposition 2.9. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$
Si $r \in [0, R[$ alors

$$\boxed{a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta}$$

2.5 Complément : fonctions holomorphes

Définition 2.10. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$
On dit que f est holomorphe (ou $\mathbb{C}$-dérivable) si pour tout $z_0 \in \Omega$ $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe.

Cette limite est notée $f'(z_0)$

Théorème 2.11. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z)$ une série entière de rayon $R > 0$
Alors f est holomorphe sur $D(0, R)$
Pour tout $z \in D(0, R)$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

En particulier f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0, R)$

3 Fonctions développables en séries entières

3.1 Position du problème

Définition 3.1. Soit $f : U \to \mathbb{K}$, $U \subset \mathbb{K}$, $a \in U$ voisinage de a
On dit que f est développable en série entière en a (DSE en a) s'il existe $r > 0$, $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que
$\forall x \in U, |x-a| < r \implies f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$
Si U est un ouvert et si f est DSE en tout point $a \in U$ on dit que f est analytique.

Proposition 3.2. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ DSE en $a \in \overset{\circ}{I}$ alors :

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de a
2. Au voisinage de a

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}$$

3.2 Application du développement de l'exponentielle

Proposition 3.3. L'exponentielle

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

a un rayon <u>infini</u>.
Par opération, il en va de même pour cos, sin, cosh, sinh qui ont toutes un rayon <u>infini</u>
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}}$$

3.3 Méthode de l'équation différentielle

Pour montrer qu'une fonction f est DSE en 0 on peut :

- Trouver une équation différentielle sur f d'ordre 1 ou 2 à coefficients polynomiaux.
- Analyse : on suppose f DSE en 0 avec un rayon $R > 0$ et on injecte dans l'équation différentielle. Par unicité des coefficients et les conditions de Cauchy on obtient les coefficients a_n
- Synthèse : On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec les a_n trouvés. On montre que $R_g > 0$, que g vérifie le même problème de Cauchy que f et donc $f = g$

Exercice : DSE en 0 de $f(t) = \cos(\alpha \arcsin(t))$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

3.4 La série de binôme de Newton

Théorème 3.4 (Série du binôme)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable de 0 en série entière avec un rayon égal à 1 et si $|x| < 1$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}$$

Proposition 3.5. Pour $|x| < 1$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ \ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n} x^n}$$

$$\boxed{\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n} x^{2n+1}}{(2n+1)4^n}}$$

3.5 Complément : Développement en série entière des fractions rationnelles

Théorème 3.6. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ dont 0 n'est pas pôle. On note $a_1, ..., a_p$ ses pôles.
Alors F est développable en série entière en 0 avec un rayon $R = \inf(|a_1|, |a_2|, ..., |a_p|)$ (si $p = 0$, $R = +\infty$)

4 Comportement aux points d'incertitude

4.1 Cas où $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n < +\infty$

Proposition 4.1. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon $R \in \,]0, +\infty[$ (fini) et si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n < +\infty$ alors

$$f : \begin{cases} \overline{D}(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$$

est continue sur $\overline{D}(0,R)$

4.2 Cas où $R = 1$ est les coefficients sont positifs

Proposition 4.2.

1. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$ alors $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-1, 1]$
2. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = +\infty$

Dans $[0, +\infty]$ on a donc

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

4.3 Le théorème d'Abel-radial

Théorème 4.3 (Théorème d'Abel-radial). Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $R \in \,]0, +\infty[$ ($\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{R}$)
Si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue en R (et donc sur $]-R, R]$)
Autrement dit

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

5 Exercices classiques

5.1 Exercice type : traitement d'équations différentielles d'ordre 2

On considère (E) $4xy'' + 2y' - y = 0$
Trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}_-$
(Indication : on en cherchera une DSE)

5.2 Équivalent d'une série entière au point d'incertitude

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ suite de $\mathbb{R}_+$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}$ avec $b_n \underset{+\infty}{=} o(a_n)$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}$ avec $c_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$
No suppose de plus $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ et $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour $|x| < 1$

1. Montrer que le rayon de g et de h est ≥ 1, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$
2. Monter que $g(x) \underset{x\to 1^-}{=} o(f(x))$
3. Montrer que $h(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} f(x)$

5.3 Analycité, inversion, composition

Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$

1. Montrer que si $a_0 \neq 0$ ie. $f(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est DSE en 0
2. Montrer que si $|z_0| < R$ alors f est DSE en z_0 (Analycité)
   f est donc analytique sur $D(0, R)$
3. Soit $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ ($b_0 = 0$ ie. $g(0) = 0$) avec un rayon $R' > 0$
   Montrer que $f \circ g(z) = f(g(z))$ est DSE en 0