Chapitre 12. Suites réelles et complexes

1 Convergence

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- $*$ Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que u converge (ou tend) vers l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$
  Dans ce cas, on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ ou $u \to l$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
- $*$ On dit que u diverge si elle ne converge vers aucun $l \in \mathbb{R}$

1.2 Premières propriétés

Proposition 1.2 (Unicité de la limite)**.** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \\ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l' \end{cases}$
Alors $l = l'$

Proposition 1.3. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$
On a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Proposition 1.4. Toute suite convergente est bornée.

Lemme 1.5. Toute suite bornée à partir d'un certain rang (àpcr) est bornée.

Proposition 1.6 (Caractère asymptotique de la limite)**.**
La convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes.
Plus précisément, soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ égales àpcr.
Alors u converge si et seulement si v converge. Si c'est le cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

1.3 Limites et inégalités

Théorème 1.7 (Passage à la limite dans les inégalités larges)**.**
Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
Alors $l \leq l'$

Théorème 1.8 ($\mathbb{R}_+^*$ est ouvert)**.** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l > 0$
Alors u est strictement positive àpcr, càd $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n > 0$

1.4 Limite infinie

Définition 1.9. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $*$ On dit que u tend (ou diverge) vers $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \geq A$
  Dans ce cas, on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ ou $u \to +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- $*$ On dit que u tend (ou diverge) vers $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \leq A$

Définition 1.10. La droite numérique achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Proposition 1.11 (Unicité de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$)**.** Soit $n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$
Alors $l = l'$

2 Théorèmes de convergence

2.1 Opérations

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une addition et d'une multiplication "partielles", càd qu'elles ne sont pas définies pour tous les couples d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

$+$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	X
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	X	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}_-^*$	0	$b \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	X	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
0	X	0	0	0	X
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	X	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 2.1. Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} u_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ v_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $*$ On a $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l_1|$
- $*$ Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l_1$
- $*$ Si $l_1 + l_2$ est bien définie, $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2$
- $*$ Si $l_1 l_2$ est bien définie, $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$

Lemme 2.2. Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} u \text{ bornée} \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Lemme 2.3. Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} u \text{ bornée} \\ v_n \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

Alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème 2.4. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne s'annule pas.

- $*$ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}$
- $*$ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $*$ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2.2 Théorème de la limite monotone