Chapitre 12. Réduction des endomorphismes

1 Sous-espaces stables. Polynômes d'endomorphisme

1.1 Exemples de sous-espaces stables

Définition 1.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E
On dit que F est stable sous u su $u(F) \subset F$
On note alors u_F l'induit de u sur F

Proposition 1.2. Si $P \in K[X]$, $P(u)$ laisse stable F et $\boxed{P(u)_F = P(u_F)}$

1.2 Exemples de sous-espaces stables

* Premier type : Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $e \in E$
  Alors $F_e = \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Vect}}(u^k(e))$ est un sev stable par u, c'est même le plus petit sev stable contenant e
* Deuxième type : $\ker P(u)$ et $\operatorname{im} P(u)$

Proposition 1.3. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ aveec $u \circ v = v \circ u$
Alors $\ker v$ et $\operatorname{im} v$ sont stables par u

Corollaire 1.4. Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$
Alors $\ker P(u)$ et $\operatorname{im} P(u)$ sont stables par u

1.3 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 1.5 (Théorème de décomposition des noyaux).
Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in K[X]$ <u>Premiers entre eux</u>.
Alors

$$\boxed{\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)}$$

Corollaire 1.6. Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, ..., P_r \in K[X]$ premiers entre eux 2 à 2
Alors

$$\boxed{\ker P_1 P_2 ... P_r(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)}$$

1.4 Polynôme minimal d'un endomorphisme

Théorème 1.7. Soit E est de dimension finie et $\Phi : \begin{cases} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$ un morphisme d'algèbres.
Alors $\ker \Phi \neq \{0\}$ et il existe un unique polynôme unitaire μ_u (ou π_u) tel que $\ker \Phi = \mu_u K[X]$
Si $P \in K[X]$ alors $P(u) = 0 \iff \mu_n \mid P$
μ_u est donc le polynôme unitaire de plus petit degré (non nul) qui annule u
Par ailleurs $\operatorname{im} \Phi = K[u] = \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Vect}}(u^k)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ (commutative)
de dimension $\deg \mu_u = d$ et de base $(\mathrm{Id}, u, ..., u^{d-1})$

Définition 1.8. Avec ces notations, μ_u s'appelle polynôme minimal de u

Proposition 1.9. Si E de dimension finie
* $\boxed{\mu_u = 1 \iff E = \{0\}}$
* $\boxed{\mu_u = X - \lambda \iff u = \lambda \mathrm{Id}_E,\ E \neq \{0\}}$

Théorème 1.10. Soit $A \in M_n(K)$

Alors $\Phi : \begin{cases} K[X] \to M_n(K) \\ P \mapsto P(A) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres non injectif.

Donc $\ker \Phi$ est un idéal différent de $\{0\}$ qui s'écrit $\mu_A K[X]$

Si $P \in K[X]$, $P(A) = 0 \iff \mu_A = P$

et μ_A est donc le polynôme unitaire différent de 0 de plus petit degré annulant A

Par ailleurs, si $d = \deg \mu_A$, $K[A]$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(K)$ de dimension d, de base $(\mathrm{Id}, A, ..., A^{d-1})$

Définition 1.11. μ_A est appelé polynôme minimal de A (aussi noté μ_A)

1.5 Racines de polynôme minimal

Proposition 1.12. Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $Q \in K[X]$

Si (e, λ) un couple propre de u alors

$$\boxed{Q(u)(e) = Q(\lambda)e}$$

Proposition 1.13.

* Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, P un polynôme annulateur de u, $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$
  Alors λ est racine de P : $\mathrm{Sp}_u \in Z(P)$
* Soit $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P \in K[X]$ avec $P(A) = 0$
  Alors λ est racine de P

Proposition 1.14.

* Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$
  Les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u
  $$\boxed{\mathrm{Sp}\, u = Z(\mu_u)}$$
* Soit $A \in M_n(K)$
  Les racines de μ_A sont exactement les valeurs propres de A
  $$\boxed{\mathrm{Sp}\, A = Z(\mu_A)}$$

2 Diagonalisabilité

2.1 Endomorphismes diagonalisables

Définition 2.1. Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$

On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(K)$$

Autrement dit, s'il existe une base de vecteurs propres.

Théorème 2.2. Soit E un K-ev de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$
Les 5 conditions suivantes sont équivalentes :

* u est diagonalisable.
* Il existe $\lambda_1, ... \lambda_r \in K$ 2 à 2 distincts tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\left(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)$$

* Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ 2 à 2 distincts tels que

$$\prod_{i=1}^{r} \left(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right) = 0$$

* Il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples annulant u
* μ_u est scindé à racines simples.

Dans ces conditions

$$\boxed{E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \ker\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)}$$

$$\boxed{\mu_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} (X - \lambda)}$$

(On dit que "la somme des sev propres rejoint E")