Chapitre 29 : Fonctions de deux variables

1 Fonction continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Dans tout le chapitre, on munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique.

Définition 1.1. Soit $p \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$
On appelle disque ouvert de centre p et de rayon r la partie $D(p,r) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z-p\| < r\}$

Définition 1.2. Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$
On dit que U est ouvert de $\mathbb{R}^2$ si $\forall p \in U, \exists r > 0 : D(p,r) \subseteq U$

1.2 Fonctions continues

Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$

Étant donné une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ et un point $p = (a,b) \in U$, on notera indifféremment $f(p)$ ou $f(a,b)$ la valeur de f en ce point.

On peut représenter graphiquement une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ par son graphe :

$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y) \mid (x,y) \in U\}$$

qui est une partie de $U \times \mathbb{R}$, et donc de $\mathbb{R}^3$

Définition 1.3. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $p \in U$

* On dit que la fonction f est continue en p si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall z \in U \ (\|z-p\| \leq \eta \implies |f(z) - f(p)| \leq \varepsilon)$$

* On dit que f est continue si elle est continue en tout point de U

Proposition 1.4. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, I un intervalle contenant $f(U)$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$
Si f est continue en $p \in U$ et que θ est continue en $f(p)$, alors la composée $\theta \circ f$ est continue en p

Proposition 1.5. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, I un intervalle non trivial et γ_1 et $\gamma_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que la fonction $\gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ soit à valeurs dans U
Si γ_1 et γ_2 sont continues en $a \in I$, et que f est continue en $\gamma(a)$, alors $f \circ \gamma : t \mapsto f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est continue en a

Proposition 1.6. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi, \psi : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que
$\Phi : z \mapsto (\varphi(z), \psi(z))$ soit à valeurs dans U
Si φ et ψ sont continues en $p \in V$, et que f est continue en $(\varphi(p), \psi(p))$, alors $f \circ \Phi : z \mapsto f(\varphi(z), \psi(z))$ est continue en p

2 Fonctions de classe C^1

Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$

2.1 Dérivées partielles

Étant donné un point $p = (a, b) \in U$, on considère les ensembles :

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in U\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in U\}$$

et les applications partielles :

$$\varphi_1 : \begin{cases} D_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, b) \end{cases} \qquad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{cases} D_2 \to \mathbb{R} \\ y \mapsto f(a, y) \end{cases}$$

Comme U est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $D(p, r) \subseteq U$
On a alors les inclusions :

$$]a - r, a + r[\subseteq D_1 \quad \text{et} \quad]b - r, b + r[\subseteq D_2$$

Notons que D_1 et D_2 peuvent ne pas être des intervalles, mais que cela n'a guère d'importance puisque la discussion est ici locale : seul ce qui se passe au voisinage de $a \in D_1$ et $b \in D_2$ nous intéresse.

Définition 2.1. Soit $p = (a, b) \in U$

* Si l'application partielle φ_1 est dérivable en a, on dit que f admet une première dérivée partielle

$$\partial_1 f(a, b) = \varphi_1'(a)$$

* Si l'application partielle φ_2 est dérivable en b, on dit que f admet une deuxième dérivée partielle

$$\partial_2 f(a, b) = \varphi_2'(b)$$

Remarque : On utilise en pratique une notation plus parlante.
Pour une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, on note plutôt :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \partial_1 f(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \partial_2 f(a, b)$$

en s'adaptant aux noms des variables apparaissant dans la définition de f. Par exemple, les dérivées partielles de la fonction $f : (r, \theta) \mapsto r \cos \theta$ sont données par :

$$\forall (s, \omega) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial r}(s, \omega) = \cos \omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}(s, \omega) = -s \sin \omega$$

Cette notation est potentiellement ambigüe, car les variables apparaissant dans la définition de f sont en fait des variables muettes, mais elle ne pose guère de problème à l'usage.

Proposition 2.2. Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ et $p \in U$

* Si f et g admettent des dérivées partielles en p, alors $f + g$ également, avec :

$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial g}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial (f+g)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) + \frac{\partial g}{\partial y}(p)$$

* Si f et g admettent des dérivées partielles en p, alors fg également, avec :

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial (fg)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial y}(p)$$

Remarque : L'existence des dérivées partielles, même en tout point de U, n'entraîne pas la continuité de f

2.2 Fonctions de classe C^1

Si la fonction f admet des dérivés partielles en tout point de U, on peut considérer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ comme des fonctions définies sur U

Définition 2.3. La fonction f est dite de classe C^1 si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues.
On note $C^1(U;\mathbb{R})$ ou, plus simplement, $C^1(U)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 définies sur U

Théorème 2.4 (Développement limité à l'ordre 1)**.** Soit $f \in C^1(U)$ et $p = (a, b) \in U$. Il existe alors une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(z) \underset{z\to p}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $(x, y) \in U$:

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \varepsilon(x,y)\left\|(x,y)-(a,b)\right\|$$

Remarque : On peut écrire de manière plus condensée le résultat précédent sous la forme d'un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o\left(\|(h,k)\|\right)$$

Corollaire 2.5. Soit $f \in C^1(U)$. Alors f est continue.

Proposition 2.6. Soit $f, g \in C^1(U)$. Alors la somme $f+g$ et le produit fg sont des fonctions de classe C^1

2.3 Gradient

Définition 2.7. Soit $f \in C^1(U)$. Le gradient de f est l'application

$$\nabla f : \begin{cases} U \to \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \mapsto \nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \end{cases}$$

Remarque : Soit $f \in C^1(U)$ et $p \in U$.
Il existe alors une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(z) \underset{z\to p}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $z \in U$:

$$f(z) = f(p) + \langle \nabla f(z) \mid z-p\rangle + \varepsilon(z)\|z-p\|$$

3 Dérivation des fonctions composées

Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et I désigne un intervalle non trivial.

3.1 Composition avec une fonction d'une variable

Proposition 3.1. Soit $f \in C^1(U)$, I un intervalle contenant $f(U)$ et $\theta \in C^1(I)$
Alors $\theta \circ f$ est une fonction de classe C^1, avec, pour tout $p \in U$

$$\frac{\partial(\theta\circ f)}{\partial x}(p) = \theta'\big(f(p)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\theta\circ f)}{\partial y}(p) = \theta'\big(f(p)\big)\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

3.2 Première règle de la chaîne

Théorème 3.2. Soit $f \in C^1(U)$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(I)$
On suppose que la fonction $\gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est à valeurs dans U
Alors $f \circ \gamma : t \mapsto f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est de classe C^1 et l'on a, pour tout $a \in I$

$$(f \circ \gamma)'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(a))\gamma_1'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(a))\gamma_2'(a)$$

Remarque : Avec les mêmes notations que dans le théorème, on peut écrire de façon concise la dérivée de $f \circ \gamma$ à l'aide du gradient de f

$$\forall a \in I,\ (f \circ \gamma)'(a) = \langle \nabla f(\gamma(a)) \mid \gamma'(a) \rangle$$

où l'on a noté $\gamma'(a) = (\gamma_1'(a), \gamma_2'(a))$

3.3 Dérivée selon un vecteur

Proposition 3.3. Soit $f \in C^1(U)$, $p \in U$ et $v = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
L'application $\varphi_v : t \mapsto f(p + tv)$ est définie au voisinage de 0, dérivable en 0, de dérivée

$$\varphi_v'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(p) + k\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \langle \nabla f(p) \mid v \rangle$$

On note $D_v f(p) = \varphi_v'(0)$ cette dérivée, et on l'appelle dérivée de f en p selon le vecteur v

Remarque : Si v est un vecteur unitaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|D_v f(p)| = |\langle \nabla f(p) \mid v \rangle| \leq \|\nabla f(p)\|$$

En outre, la dérivée $D_v f(p)$ est alors maximale (resp. minimale) si v est positivement (resp. négativement) colinéaire à $\nabla f(p)$: elle vaut dans ce cas $\pm\|\nabla f(p)\|$
Le gradient de f en p pointe donc dans la direction dans laquelle f croît le plus vite (qui est aussi, en sens inverse, celle où elle décroît le plus vite). Cela correspond à la direction de plus grande pente sur le graphe Γ_f

3.4 Deuxième règle de la chaîne

Théorème 3.4. Soit $f \in C^1(U)$. Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi, \psi \in C^1(V)$ deux fonctions telles que l'application $\Phi : (x, y) \mapsto (\varphi(x, y), \psi(x, y))$ soit à valeurs dans U
Alors l'application composée

$$f \circ \Phi : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \end{cases}$$

est de classe C^1, et vérifie

$$\forall p \in V,\ \begin{cases} \partial_1(f \circ \Phi)(p) = \partial_1 f(\Phi(p))\partial_1\varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p))\partial_1\psi(p) \\ \partial_2(f \circ \Phi)(p) = \partial_1 f(\Phi(p))\partial_2\varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p))\partial_2\psi(p) \end{cases}$$

Remarque : Si l'on note $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $\Phi : (u, v) \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$, ces formules deviennent, selon la notation usuelle

$$\forall p \in V,\ \begin{cases} \dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(p))\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(p) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(p))\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(p) \\ \dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(p))\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(p) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(p))\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(p) \end{cases}$$

4 Extrema

Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. En plus des notions générales d'extremum (sous-entendu : global), la norme euclidienne permet de définir les extrema locaux.

Définition 4.1. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $p \in X$

* On dit que f admet un maximum local en p si

$$\exists \eta > 0 : \forall z \in X \cap D(p, \eta),\ f(z) \leq f(p)$$

* On définit de même les notions de minimum local

Définition 4.2. Soit $f \in C^1(U)$ et $p \in U$
On dit que p est un point critique pour f si $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$, c'est-à-dire si $\nabla f(p) = (0, 0)$

Théorème 4.3. Soit $f \in C^1(U)$ et $p \in U$
Si p admet un extremum local en p, alors p est un point critique de f