Chapitre 24 : Familles sommables

1 Familles de nombres positifs

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit $x = (x_j)_{j \in J}$ une famille de réels ≥ 0 indexés par une ensemble J
On définit

$$\sum_{j \in J} x_j = \sup \left\{ \sum_{j \in J_0} x_j \mid J_0 \in \mathcal{P}_f(J) \right\} \in [0, +\infty]$$

Avec la convention que la forme supérieure vaut $+\infty$ si l'ensemble n'est pas majoré.
(Ici, $\mathcal{P}_f$ désigne l'ensemble des parties finies de J)

Proposition 1.2. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^J$, des familles indexées par J
On a :

* Restriction : Si $K \subseteq J$, $\sum\limits_{j \in K} x_j \leq \sum\limits_{j \in J} x_j$
* Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum\limits_{j \in J} (x_j + \lambda y_j) = \sum\limits_{j \in J} x_j + \lambda \sum_{j \in J} y_j$
* Croissance : Si $\forall j \in J, x_j \leq y_j$, alors $\sum\limits_{j \in J} x_j \leq \sum\limits_{j \in J} y_j$

Corollaire 1.3. Supposons $J = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} J_k$
Alors, pour toute famille $x \in \mathbb{R}_+^J$, on a

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_k} x_j$$

1.2 Commutativité

Proposition 1.4.

* Soit $\sigma : I \to J$ une bijection et $x \in \mathbb{R}_+^J$
  Alors
  $$\sum_{i \in I} x_{\sigma(I)} = \sum_{j \in J} x_j$$
* En particulier, si $\sigma : J \to I$ est bijective
  $$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{j \in J} x_{\sigma(j)}$$

1.3 Sommation par paquets

Théorème 1.5 (Sommation par paquets)**.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^J$ et un recouvrement disjoint $J = \bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$
Alors

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j \in J_\lambda} x_j$$

Corollaire 1.6 (Théorème de Fubini)**.** Soit $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels positifs.
Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} x_{i,j}$$

2 Familles sommables de nombres complexes

2.1 Généralités

Définition 2.1.

* Une famille $x = (x_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ est dite <u>sommable</u> si $\sum\limits_{j\in J} |x_j| < +\infty$
* On note $l^1(J;\mathbb{C})$ l'ensemble des familles sommables indexées par J
* Si $x \in \mathbb{R}^J$ est sommable, on définit sa <u>somme</u> $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{j\in J} x_j^+ - \sum\limits_{j\in J} x_j^-$
* Si $x \in \mathbb{C}^J$ est sommable, on définit sa <u>somme</u> $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{j\in J} \mathrm{Re}(x_j) + i \sum\limits_{j\in J} \mathrm{Im}(x_j)$

Lemme 2.2. Soit $x \in l^1(J;\mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie $J_0 \subseteq J$ finie telle que

$$\forall K \in \mathcal{P}_f(J),\ J_0 \in K \implies \left| \sum_{j\in J} x_j - \sum_{j\in K} x_j \right| \leq \varepsilon$$

Corollaire 2.3.

* En appliquant le lemme à $\varepsilon = 2^{-n}$, on peut trouver une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de J telles que $\sum\limits_{j\in J} x_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum\limits_{j\in J} x_j$ (en remplaçant J_n par $J_0 \cup ... \cup J_n$ on peut même imposer qu'elle soit croissante)
* Étant donné $x, y \in l^1(J;\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver J_0 et K_0 comme dans le lemme et l'ensemble fini $L_0 = J_0 \cup K_0$ vérifie
$$\left| \sum_{j\in J} x_j - \sum_{j\in L_0} x_j \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \sum_{j\in J} y_j - \sum_{j\in L_0} y_j \right| \leq \varepsilon$$
Naturellement, cela s'étend à Γ familles sommables.

2.2 Propriétés

Proposition 2.4. Soit $x, y \in l^1(J;\mathbb{C})$
On a :

* <u>Restriction</u> : Si $K \subseteq J$, $(x_k)_{k\in K}$ est sommable.
* <u>Linéarité</u> : Pour toute $\lambda \in \mathbb{C}$, $(x_j + \lambda y_j)_{j\in J} \in l^1(J;\mathbb{C})$ et $\sum\limits_{j\in J} (x_j + \lambda y_j) = \sum\limits_{j\in J} x_j + \sum\limits_{j\in J} y_j$
* <u>Croissance</u> : Si x, y sont à valeurs réelles et que $\forall j \in J$, $x_j \leq y_j$, alors $\sum\limits_{j\in J} x_j \leq \sum\limits_{j\in J} y_j$

Proposition 2.5 (Inégalité triangulaire). Soit $x \in l^1(J;\mathbb{C})$
On a

$$\left| \sum_{j\in J} x_j \right| \leq \sum_{j\in J} |x_j|$$

2.3 Commutativité

Proposition 2.6. Soit $x \in l^1(J;\mathbb{C})$

* Si $\sigma : I \to J$ est une bijection, $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I} x_{\sigma(i)} = \sum\limits_{j\in J} x_j$
* En particulier, si $\sigma : J \to J$, $(x_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable et $\sum\limits_{j\in J} x_{\sigma(j)} = \sum\limits_{j\in J} x_j$

Corollaire 2.7 (sur les séries). Si $\sum\limits_n x_n$ est une série absolument convergente et que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, alors $\sum\limits_n x_{\sigma(n)}$ est encore absolument convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$

2.4 Sommation par paquets

Théorème 2.8. Soit $(x_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ et on considère un recouvrement disjoint $J = \bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda}$

Alors $(x_j)_{j\in J}$ est sommable ssi, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $(x_j)_{j\in J_\lambda}$ est sommable et que $(\sum\limits_{j\in J_\lambda} |x_j|)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable.

Et, si c'est le cas, on a

$$\sum_{j\in J} x_j = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{j\in J_\lambda} x_j$$

Corollaire 2.9 (Théorème de Fubini)**.** Soit $(x_{i,j})_{i,j} \in I \times J \in \mathbb{C}^{I\times J}$

Alors $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable ssi les familles $(x_{i,j})_{j\in J}$ $(i \in I)$ le sont et que $(\sum\limits_{j\in J} |x_{i,j}|)_{i\in I}$ soit sommable.

Si c'est la cas, on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} x_{i,j}$$

En particulier, si x est sommable

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} x_{i,j}$$

2.5 Produit

Théorème 2.10. Soit $a \in l^1(I;\mathbb{C})$ et $b \in l^1(J;\mathbb{C})$

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Définition 2.11. Soit $\sum\limits_n a_n$ et $\sum\limits_n b_n$ deux suites (à valeurs complexes).

Leur <u>produit de Cauchy</u> est la série $\sum\limits_n c_n$ où, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} a_i b_j = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Corollaire 2.12. Soit $\sum\limits_n a_n$ et $\sum\limits_n b_n$ deux séries absolument convergentes.

Alors leur produit de Cauchy $\sum\limits_n c_n$ est une série absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$