

Chapitre 15. Suites et séries de fonctions

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

X un ensemble non vide et E, F evn.

1.1 Convergence simple

Définition 1.1. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$)

On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f si pour tout $x \in X$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ ie.

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

f est alors unique et appelée limite simple de $(f_n)_{n \geq 0}$. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$

1.2 Convergence uniforme

Définition 1.2. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) et $f : X \rightarrow \mathbb{K}$

On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ ie.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

f est appelée limite uniforme des f_n

Proposition 1.3. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \geq 0$)

On suppose qu'il existe $N \geq 0$ et $(\alpha_n)_{n \geq N}$ suite de \mathbb{R}_+ avec

$$1. \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$

Alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f

Proposition 1.4. Soit $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \geq 0$)

Si (f_n) (resp. (g_n)) converge uniformément vers f (resp. g) alors $(f_n + g_n)$ (resp. λf_n) converge uniformément vers $f + g$ (resp. λf)

1.3 Étude des exemples

Exemple 1 :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\lambda x e^{-nx} \end{cases} \quad (n \geq 1, \lambda \in \mathbb{R})$$

f_n converge simplement vers 0 et converge uniformément sur \mathbb{R}_+ ssi $\lambda < 1$

Si $\lambda > 1$ il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$)

Exemple 2 :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} \end{cases}$$

Il y a convergence simple vers $f : x \mapsto e^{-2x}$

Il y a convergence uniforme sur \mathbb{R}_+

2 Continuité des limites uniformes

2.1 Caractérisation de la continuité par limite uniforme

Ici X est une partie non vide d'un evn.

Proposition 2.1. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}, a \in X (n \in \mathbb{N})$

On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a
2. $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f

Alors f est continue en a

Corollaire 2.2. Les limites uniformes de fonctions continues sont continues.

2.2 Théorème de la double limite

Théorème 2.3 (Théorème de la double limite ou d'interversion des limites).

Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ avec $X \subset E, X \neq \emptyset, E$ evn ($n \geq 0$), $a \in E$ adhérent à X

(a peut être dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $X \subset \mathbb{R}$) et $f : X \rightarrow \mathbb{K}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n \in \mathbb{K}$
2. $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{K} vers un élément $l \in \mathbb{K}$ et de plus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Autrement dit :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

3 Modes de convergence des séries de fonctions

3.1 Convergence simple, absolue, uniforme

Définition 3.1. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K} (n \geq 0)$

On dit que $\sum f_n$ converge simplement si pour tout $x \in X, \sum f_n(x)$ converge.

On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si $S_N = \sum_{n=0}^N f_n$ converge uniformément.

Corollaire 3.2 (Théorème de la double limite).

1. Si les f_n sont \mathcal{C}^0 et si $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.
2. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K} (X \subset E, a$ adhérent à $X)$

On suppose :

- $\sum f_n$ converge uniformément.
- $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$

Alors $\sum l_n$ converge et

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$$

3.2 Convergence normale

Définition 3.3. Soit $f_n(x) : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$)

On dit que $\sum f_n$ converge normalement si à partir d'un certain rang N les f_n sont bornés et si $\sum_{n \geq N} \|f_n\|_\infty < +\infty$

Proposition 3.4. Si $\sum f_n$ converge normalement sur X alors $\sum f_n$ converge uniformément et absolument sur X

Proposition 3.5. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \geq 0$)

On suppose qu'il existe $N \geq 0$ et $(\alpha_n)_{n \geq N}$ suite dans \mathbb{R}_+ avec :

1. $\forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq \alpha_n$
2. $\sum \alpha_n$ converge ie. $(\alpha_n)_{n \geq N}$ sommable.

Alors il y a convergence normale de $\sum f_n$

3.3 Cas des séries non normalement convergentes

Dans le cas où la série n'est pas normalement convergente on peut utiliser :

- Le critère spécial des séries alternées.
- La transformation D'Abel.

3.4 Exemples des séries trigonométriques

Définition 3.6. Les séries trigonométriques sont les séries de fonctions

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

avec $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ suites de \mathbb{K}

Ou encore

$$x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$$

avec $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ suite de \mathbb{C}

4 Intégration et dérivation d'une suite ou série de fonctions

4.1 Intersion limite et intégrale

Théorème 4.1. Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$)

On suppose les f_n continues et convergentes uniformément vers f

Alors f est continue et

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$$

Autrement dit

$$\boxed{\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n}$$

Corollaire 4.2. Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continues ($n \geq 0$)

Si $\sum f_n$ converge uniformément, on a

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n}$$

4.2 Dérivation d'une limite d'une suite de fonctions

Théorème 4.3 (Théorème de dérivation). Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K} \mathcal{C}^1$ ($n \in \mathbb{N}$) avec I intervalle de \mathbb{R}

On suppose :

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$
2. $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$

Alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I , f est \mathcal{C}^1 et $f' = g$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$$

Corollaire 4.4. Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) \mathcal{C}^k avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

On suppose :

1. Pour tout $0 \leq i \leq k-1$, $(f_n^{(i)})_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction g_i
2. $(f_n^{(k)})_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segments de I vers g_k

On pose $f = g_0 = \lim f_n$, chaque $(f_n^{(i)})_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g_i

De plus $g_0 = f$ est \mathcal{C}^k et pour $0 \leq i \leq k$, $f^{(i)} = g_i$

Autrement dit

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(i)}$$

Corollaire 4.5. Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K} \mathcal{C}^k$ ($n \in \mathbb{N}$)

On suppose :

1. $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ $f_n^{(i)}$ converge simplement.
2. $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I

Alors $\sum f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I

De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k et $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$$

Corollaire 4.6. Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K} \mathcal{C}^\infty$ ($n \in \mathbb{N}$)

On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}$ $(f_n^{(i)})_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(i)}$$

De même, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$$

4.3 Extension des résultats aux fonctions vectorielles

On peut tout généraliser aux suite / série de fonctions d'un evn de dimension finie.

5 Exemples d'approximation uniforme

5.1 Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier

Théorème 5.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ (ou E evn de dim finie) continue par morceaux.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier telle que $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$

Il existe $(h_n)_{n \geq 0}$ suite de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ qui converge uniformément vers f

5.2 Théorème de Weierstrass

Théorème 5.2 (Théorème de Weierstrass). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$

Il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{K}[X]$ qui converge uniformément vers f

5.3 Densité des polynômes trigonométriques

Théorème 5.3 (Théorème de Weierstrass trigonométrique). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ continue 2π -périodique

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe P polynôme trigonométrique (de période 2π) tel que $\|f - P\| \leq \varepsilon$

Il existe donc une suite de polynômes trigonométrique (P_n) qui converge uniformément vers f

6 Exercices classiques

6.1 Suite des fonctions M -lipschitziennes

1. Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) M -lipschitzienne ($M > 0$) qui converge simplement vers f
Montrer que f est M -lipschitzienne et que la convergence des f_n est uniforme.
2. Extension : Soit K un compact, $f_n : K \rightarrow K$ M -lipschitzienne convergente simplement vers f
Montrer que la convergence est uniforme.

6.2 Le théorème de Dini (Le premier)

Soit K un compact, $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) continues.

On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ f_n \leq f_{n+1}$
2. $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f continue sur K

Mq $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f