

# Chapitre 28 : Probabilités

## 1 Événements et variables aléatoires

### 1.1 Généralités

#### Définition 1.1.

- \* Un univers (fini) est un ensemble fini non vide  $\Omega$
- \* Un événement est une partie  $A \subseteq \Omega$
- \* Une variable aléatoire (VA) est une application  $X : \Omega \rightarrow E$  vers un ensemble  $E$

### 1.2 Opérations

#### Image d'une VA par une application

Étant donné une VA  $X : \Omega \rightarrow E$  et une application  $f : E \rightarrow F$ , on définit la VA image de  $X$  par  $f$ ,  $f(X)$  comme la composition  $f \circ X : \Omega \rightarrow F$

#### Événements définis par une VA

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$

Pour toute partie  $S \subseteq E$ , on définit l'événement

$$(X \in S) = \{X \in S\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\} = X^{-1}[S]$$

#### Indicatrice d'un élément

Tout événement  $A \subseteq \Omega$  définit une VA

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} \Omega \rightarrow \{0, 1\} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases} \end{cases}$$

### 1.3 Expériences aléatoires

Considérons un exemple d'expérience aléatoire. On joue à pile ou face  $n$  fois de suite.

UNIVERS : On considère  $\Omega = \{0, 1\}^n$

Une issue est un résultat possible, c'est-à-dire ici une suite de  $n$  lancers.

ÉVÉNEMENTS : L'événement (au sens usuel) "le  $i$ -ème lancer donne pile" correspond à l'événement (au sens mathématique)  $\pi_i = \{(b_1, \dots, b_n) \in \Omega \mid b_i = 1\}$  (ensemble à  $2^{n-1}$  événements)

"Obtenir que des 'face' "  $F = \{(0, 0, \dots, 0)\}$  (est élémentaire = singleton)

"Obtenir un nombre impair de 'pile' "  $I = \{(b_1, \dots, b_n) \in \Omega \mid b_1 + \dots + b_n \equiv 1 \pmod{2}\}$

#### VARIABLES ALÉATOIRES :

- \*  $L_i : \begin{cases} \Omega \rightarrow \{0, 1\} \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto b_i \end{cases}$  "est le résultat du  $i$ -ème lancer"
- \*  $N : \begin{cases} \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto b_1 + \dots + b_n \end{cases}$  est le nombre de "pile" obtenus
- \*  $P : \begin{cases} \Omega \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \cup \{+\infty\} \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto \min \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid b_i = 1\} \end{cases}$  est le rang de premier "pile"  
(avec la convention  $\min \emptyset = +\infty$ )

- \*  $R : \begin{cases} \Omega \rightarrow P(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid b_i = 1\} \end{cases}$  est l'ensemble des rangs où l'on a obtenu pile

Lien entre ces objets :

- \* "Obtenir un nombre impair de 'pile' " et "Obtenir que 'face' " sont incompatibles :  $I \cap F = \emptyset$
- \*  $F = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \dots \cup \pi_n = \overline{\pi_1} \cap \dots \cap \overline{\pi_n}$
- \* Si  $n = 3$ ,  $I = (\pi_1 \cap \overline{\pi_2} \cap \overline{\pi_3}) \cup (\overline{\pi_1} \cap \pi_2 \cap \overline{\pi_3}) \cup (\overline{\pi_1} \cap \overline{\pi_2} \cap \pi_3) \cup (\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3)$
- \* On a  $N = L_1 + L_2 + \dots + L_n$
- \* On a  $N = |R|$
- Formellement,  $N = \text{Card} \circ R$ , où  $\text{Card} : \begin{cases} P(\llbracket 1, n \rrbracket) \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket \\ T \mapsto |T| \end{cases}$
- On a en fait utilisé la notation  $f(x)$  des VA images (càd qu'on a noté  $\text{Card}(R)$  plutôt que  $\text{Card} \circ R$ )
- \* On a  $L_1 + L_2 \leq N$  (en supposant  $n \geq 2$ )
- \*  $P = \min(R)$
- \*  $(N = 0) = F$
- \*  $(N \equiv 1 \pmod{2}) = (N \text{ impair}) = I$
- \*  $\pi_1 \cap \dots \cap \pi_n = (N = n)$
- \*  $(L_i = 1) = \pi_i$  : en fait,  $L_i = \mathbb{1}_{\pi_i}$
- \*  $\overline{\pi_1} = (p \geq 2)$
- \*  $(p = n) = \overline{\pi_1} \cap \overline{\pi_2} \cap \dots \cap \overline{\pi_{n-1}} \cap \pi_n = (R = \{n\}) = (N = 1, L_n = 1)$

## 2 Espaces probabilisés finis

### 2.1 Généralités

**Définition 2.1.**

- \* Une mesure de probabilités sur un univers  $\Omega$  est une application  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que :
  - $P(\Omega) = 1$
  - Pour tous  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  disjoints,  $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
- \* On appelle espace probabilisé (fini) tout couple  $(\Omega, P)$ , où  $\Omega$  est un univers et  $P$  une mesure de probabilités du  $\Omega$

**Proposition 2.2.** Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini (epf).

On a :

- \*  $P(\emptyset) = 0$
- \* Croissance : pour tous  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- \*  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- \* Pour tous  $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{P}(\Omega)$  disjoints,

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^r A_i\right) = \sum_{i=1}^r P(A_i)$$

- \*  $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 2.2 Formule des probabilités globales

**Définition 2.3.** Soit  $(\Omega, P)$  un epf. Un système complet d'événements (scé) est une famille  $(C_i)_{i=1}^r$  qui forme un recouvrement disjoint de  $\Omega$ , càd telle que :

- \* Les  $C_i$  sont (deux à deux) disjoints :  $\forall i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket, i \neq j \implies C_i \cap C_j = \emptyset$
- \*  $\bigcup_{i=1}^r C_i = \Omega$

**Théorème 2.4** (Formule des probabilités totales). Soit  $(\Omega, P)$  un epf et  $(C_i)_{i=1}^r$  un scé. Alors  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{i=1}^r P(A \cap C_i)$

## 2.3 Loi d'une VA

**Définition 2.5.** Soit  $(\Omega, P)$  un epf et  $X : \Omega \rightarrow E$  une VA.

La loi de  $X$  est la donnée pour tout  $S \subseteq E$  de la probabilité  $P(X \in S) = P(\{X \in S\})$

**Proposition 2.6.** Soit  $(\Omega, P)$  un epf et  $X : \Omega \rightarrow E$  une VA.

La loi de  $X$  est déterminée par les probabilités  $P(X = x)$ , pour  $x$  décrivant  $\text{im } X$

Plus précisément, pour tout  $S \subseteq E$

$$P(X \in S) = \sum_{x \in S \cap \text{im } X} P(X = x)$$

**Définition 2.7.** Soit  $(\Omega, P)$  un epf et  $E$  un ensemble fini non vide.

Une VA  $X : \Omega \rightarrow E$  suit la loi uniforme sur  $E$  si  $\forall S \in \mathcal{P}(E), P(X \in S) = \frac{|S|}{|E|}$

On note alors  $X \sim U(E)$

**Définition 2.8.** Soit  $(\Omega, P)$  un epf.

Une VA  $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  suit le loi de Bernoulli de paramètre  $p \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$  si  $P(X = 1) = p$

On note alors  $X \sim B(p)$

Remarque importante : Si  $A \subseteq \Omega$  est un événement, alors  $\mathbb{1}_A \sim B(p)$ , où  $p = P(A)$

## 2.4 Couples de VA

**Définition 2.9.** Soit un epf et  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1$  et  $X_2 : \Omega \rightarrow E_2$  deux VA.

Le loi conjointe de  $X_1$  et  $X_2$  est la loi de la VA

$$(X_1, X_2) : \begin{cases} \Omega \rightarrow E_1 \times E_2 \\ \omega \rightarrow (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{cases}$$

Les lois de  $X_1$  et  $X_2$  sont appelées lois marginales de loi conjointe.

**Proposition 2.10** (Calcul des marginales). Avec les notations de la définition :

$$\forall x_1 \in E_1, P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2 \in \text{im } X_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Remarque important :

La loi conjointe détermine les lois marginales, la réciproque est fautive : il y a plusieurs manières de coupler des lois.

Notamment, pour tout  $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  on a

$k \setminus l$	0	1
0	$p$	$\frac{1}{2} - p$
1	$\frac{1}{2} - p$	$p$

qui constitue un couplage de  $B\left(\frac{1}{2}\right)$  avec elle-même.

Trois cas particuliers :

$p = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	$\frac{1}{2}$

On a  $P(X_1 = X_2) = 1$

$X_1$  et  $X_2$  sont égales (presque sûrement).

$p = 0$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	0

$X_1 + X_2 = 1$  presque sûrement.

$p = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{2}$

Connaître le résultat de  $X_1$  ne donne aucune information sur celui de  $X_2$

On dira que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.

## 2.5 Construction d'espaces probabilisés finis

**Définition 2.11.** Une distribution de probabilités sur un univers fini  $\Omega$  est une famille  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  de réels  $\geq 0$  tels que  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

**Proposition 2.12.** Soit  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une distribution de probabilités sur un univers fini  $\Omega$

Alors il existe une unique mesure de probabilités  $P$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$

## 2.6 Modélisation(s) d'expériences aléatoires

Imaginons qu'on veuille modéliser l'expérience constituant à tirer aléatoirement une carte dans un jeu de 52 cartes.

Modélisation 1 (normale) : On prend  $\Omega = \{2, 3, \dots, V, D, R, A\} \times \{P, C, K, T\}$  l'ensemble des 52 cartes, muni de la probabilité uniforme.

L'événement (au sens usuel) "tirer un coeur" correspond à l'événement  $\heartsuit = \{(2, C), \dots, (A, C)\}$

donc  $P(\heartsuit) = \frac{|\heartsuit|}{|\Omega|} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Modélisation 2 (un peu tordue) : On commence par mélanger le jeu. On va poser  $J = \{2, \dots, R, A\} \times \{P, C, K, T\}$  puis on pose  $\Omega$  l'ensemble des permutations de  $J$  (càd une 52-liste sans répétition de  $J$ ), muni de la mesure de probabilités uniforme.

L'événement (au sens usuel) "tirer un coeur" correspond à l'événement

$\heartsuit' = \{(C_1, C_2, \dots, C_{52}) \in \Omega' \mid C_1 \in \{(2, C), \dots, (A, C)\}\}$

On a  $|\Omega'| = 52!$  Calculons  $|\heartsuit'|$

Pour construire un élément de  $\heartsuit'$  :

- \* On choisit une première carte (un coeur) : 13 possibilités.
- \* \_\_\_\_\_ 2è carte (différente de la 1ère) : 51 possibilité.
- \* \_\_\_\_\_ 3è carte (différente des précédentes) : 50 possibilités.

Par principe de multiplication,  $|\heartsuit'| = 13 \times 51 \times 50 \times \dots \times 1 = 13 \times 51!$

Donc  $P(\heartsuit') = \frac{13 \times 51!}{52!} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

En théorie des possibilités, l'epf joue un rôle de seconde plan : dans l'exemple précédent, les détails de  $\Omega$  n'importent pas. Ce qui compte est qu'il existe une VA donnant le résultat du tirage. Que l'on prenne

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow J \\ C \mapsto C \end{cases} \quad \text{ou} \quad X' : \begin{cases} \Omega' \rightarrow J \\ (C_1, \dots, C_{52}) \mapsto C_1 \end{cases}$$

On a une VA  $X$  ou  $X' \sim U(J)$  et c'est ce qui compte.

## 2.7 Vers les espaces probabilisés généraux

**Définition 2.13.** Une tribu (ou une  $\sigma$ -algèbre) sur une ensemble  $\Omega$  est une partie  $a \in \mathcal{P}(\Omega)$  contenant  $\Omega$  ( $\Omega \in a$ ) stable par passage au complémentaire (si  $A \in a$ ,  $\bar{A} \in a$ ) et union dénombrable (si  $A_0, A_1, \dots \in a$ ,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in a$ )

**Définition 2.14.** Un espace probabilisé est un triplet  $(\Omega, a, P)$  où :

- \* L'univers  $\Omega$  est un ensemble non vide.
- \*  $a$  est une tribu sur  $\Omega$
- \* La mesure de probabilités  $P : a \rightarrow [0, 1]$  vérifie :
  - $P(\Omega) = 1$
  - Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $a$ , deux à deux disjoints, alors  $P\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$  ( $\sigma$ -additivité)

**Théorème 2.15** (culturel). Il existe un espace probabilisé  $([0, 1], B, \lambda)$  où :

- \*  $B$  est une tribu sur  $[0, 1]$  (tribu des boréliens) contenant les intervalles.
- \*  $\lambda : B \rightarrow [0, 1]$  est une mesure de probabilités telle que  $\forall 0 \leq a < b \leq 1$ ,  $\lambda([a, b]) = b - a$  appelée mesure de Lebesgue.

## 3 Indépendance

Dans cette section,  $(\Omega, P)$  est un épif.

### 3.1 Deux événements

**Définition 3.1.** Soit  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  deux événements.

On dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

**Proposition 3.2.** Soit  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  indépendants.

Alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.

### 3.2 Variables aléatoires

**Définition 3.3.** Soit  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1$  et  $X_2 : \Omega \rightarrow E_2$

On dit que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes (et on note  $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ ) si  $\forall S_1 \in \mathcal{P}(E_1), \forall S_2 \in \mathcal{P}(E_2)$

$$P(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = P(X_1 \in S_1)P(X_2 \in S_2)$$

Plus généralement, soit  $X_i : \Omega \rightarrow E_i$  des VA ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ).

On dit qu'elles sont indépendantes si  $\forall S_1 \in \mathcal{P}(E_1), \dots, \forall S_n \in \mathcal{P}(E_n)$

$$P(X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n) = P(X_1 \in S_1) \dots P(X_n \in S_n)$$

Remarque : Si  $n$  VA sont indépendantes (ou, pour insister mutuellement indépendantes), elles sont indépendantes deux à deux, càd  $\forall i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \perp\!\!\!\perp X_j$

**Théorème 3.4.** Soit  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$  des VA.

Alors  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes ssi

$$\forall x_1 \in E_1, \dots, \forall x_n \in E_n, P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$

**Proposition 3.5.** Soit  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

Alors  $A$  et  $B$  sont indépendants ssi  $\mathbb{1}_A \perp\!\!\!\perp \mathbb{1}_B$

### 3.3 Plusieurs événements

**Définition 3.6.** Soit  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$

Alors ils sont indépendants si  $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$  sont indépendants.

**Théorème 3.7.** Soit  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$

Alors  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendants ssi

$$\forall I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

### 3.4 Stabilité de l'indépendance

**Théorème 3.8** (Transfert de l'indépendance).

Soit  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$  des VA indépendantes.

Soit  $f_1 : E_1 \rightarrow F_1, \dots, f_n : E_n \rightarrow F_n$  des applications.

Alors  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  sont indépendantes.

**Corollaire 3.9.** Si  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$  sont indépendantes et que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_i$  est un événement défini par  $X_i$ , alors  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendants.

**Théorème 3.10** (Lemme de coalitions). Soit  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E_n$  indépendantes et  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Alors les VA

$$Y : \begin{cases} \Omega \rightarrow E_1 \times \dots \times E_r \\ \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_r(\omega)) \end{cases} \quad Z : \begin{cases} \Omega \rightarrow E_{r+1} \times \dots \times E_n \\ \omega \mapsto (X_{r+1}(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{cases}$$

sont indépendantes.

### 3.5 Indépendance et mesure uniforme

**Théorème 3.11.** Soit  $E_1, \dots, E_n$  des ensembles finis non vides et on munit  $\Omega = E_1 \times \dots \times E_n$  de la probabilité uniforme.

Alors

$$X_1 : \begin{cases} \Omega \rightarrow E_1 \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \end{cases}, \dots, X_n : \begin{cases} \Omega \rightarrow E_n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n \end{cases}$$

sont indépendantes.

### 3.6 Loi binomiale

**Définition 3.12.** Une VA  $X : \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$  suit la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p \in [0, 1]$  ( $X \sim B(n, p)$ )

si  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

**Théorème 3.13.** Soit  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  indépendantes suivant la loi de Bernoulli  $B(p)$  (pour  $p \in [0, 1]$ )

Alors  $X_1 + \dots + X_n \sim B(n, p)$

## 4 Probabilités conditionnelles

On se place dans un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$

### 4.1 Définition

**Définition 4.1.** Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  un événement non négligeable (càd  $P(B) > 0$ ). Soit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

On définit la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$

$$P_B(A) = P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Proposition 4.2.** Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) > 0$

Alors  $P_B$  est une mesure de probabilités sur  $\Omega$  pour laquelle  $B$  est presque sûr.

Attention! La notation  $(A | B)$  seule n'a aucun sens.

Par exemple, la phrase française " Sachant que  $X = Y$ , ' $X = 0$ ' équivaut à ' $Y = 0$ ' " ne se traduit pas en  $(X = 0 | X = Y) = (Y = 0)$  qui n'a aucun sens.

Elle ne se traduit pas non plus en  $P(X = 0 | X = Y) = P(Y = 0)$  (qui a un sens mais qui est faux en général).

La bonne traduction est  $(X = Y, X = 0) = (X = Y, Y = 0)$

**Proposition 4.3.** Soit  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tels que  $P(B) > 0$

Alors  $A$  et  $B$  sont indépendants ssi  $P(A | B) = P(A)$

**Définition 4.4.** Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une VA et  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  un événement non négligeable.

La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $A$  est la donnée, pour tout  $S \subseteq E$  de  $P(X \in S | A)$

### 4.2 Probabilités composées et probabilités totales

**Proposition 4.5** (Formule des probabilités composées).

Soit  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$  tels que  $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$  soit non négligeable.

On a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_2 \cap A_1) \dots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Remarque : Si  $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$  est négligeable, la formule reste correcte si on pose la convention  $0 \times \text{inerte} = 0$

**Proposition 4.6** (Formule des probabilités totales). Soit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  et  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{P}(\Omega)$  des événements (non négligeables) formant un système complet d'événements.

Alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^n P(A | C_i)P(C_i)$$

**Corollaire 4.7.** Soit  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  (tels que  $P(B) \in ]0, 1[$ )

Alors  $P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \bar{B})P(\bar{B})$