Chapitre 15. Dérivation

Cadre : Dans tout le chapitre, I est un intervalle.
(même si les résultats généraux s'étendent à des parties de $\mathbb{R}$ quelconques, pourvu que $a \in I$ ne soit pas isolé dans I, càd pourvu que $a \in \overline{I \setminus \{a\}}$)

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$

* On définit la fonction taux d'accroissement de f en a :

$$\tau_{[f;a]} : \begin{cases} I \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

* La fonction f est dérivable en a si $\tau_{[f;a]}$ possède une limite finie en a.
  Si c'est le cas, on définit le nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* La fonction est dérivable si elle est dérivable en tout point de I

On note $D^1(I) = D^1(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables.

Proposition 1.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. LASSÉ :

(i) f est dérivable en a.

(ii) Il existe une fonction $\kappa : I \to \mathbb{R}$ continue en a et telle que $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \kappa(x)(x - a)$

(iii) Il existe $\nu \in \mathbb{R}$ et une fonction $\eta : I \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \nu(x - a) + (x - a)\eta(x) \\ \eta(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{cases}$

(iv) Il existe $\nu \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I_a \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall h \in I_a,\ f(a + h) = f(a) + \nu h + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \end{cases}$

Si c'est le cas, on a $f'(a) = \kappa(a) = \nu$

Proposition 1.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$
Si f est dérivable en $a \in I$ alors elle est continue en a. On a donc $D^1(I) \subseteq C^0(I)$

1.2 Caractère local de la dérivabilité

Proposition 1.4. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ qui coïncident au voisinage de $a \in I$
Alors f est dérivable en a ssi g l'est. Si c'est le cas, $f'(a) = g'(a)$

1.3 Dérivées à gauche et à droite

Définition 1.5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$

* (Si a n'est pas l'extrémité gauche de I), on dit que f est dérivable à gauche en a si $\tau_{[f;a]}$ admet une limite finie par valeurs inférieures en a. Si c'est le cas, on note

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* Idem à droite, avec
$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
(Si cette limite existe)

1.4 Opérations

Proposition 1.6. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
* Si f est dérivable en a, λf aussi et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
* Si f est dérivable en a, $f+g$ aussi et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
* Si f et g sont dérivables en a, fg aussi et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
* Si f et g sont dérivables en a et que $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ aussi et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Corollaire 1.7. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et que $\lambda \in \mathbb{R}$
* λf, $f+g$, fg sont dérivables.
* Si en outre, g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable.

Corollaire 1.8. $D^1(I)$ est un sous-algèbre de $C^0(I)$ (ou de $\mathbb{R}^I$), càd un sous-anneau stable par opération linéaire.

Proposition 1.9 (Dérivation des fonctions composées, ou "chain rule")**.**
Soit $I, J \subseteq \mathbb{R}$ deux intervalles et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$
* Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$
* Si f et g sont dérivables, $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$

1.5 Critère de dérivabilité des fonctions réciproques

Proposition 1.10. Soit $I, J \subseteq \mathbb{R}$ deux intervalles, $f : I \to J$ une bijection dérivable, $a \in I$ et $b = f(a) \in J$
Alors f^{-1} est dérivable en b ssi $f'(a) \neq 0$
Si c'est le cas, on a
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b)}$$

2 Théorèmes principaux

2.1 Extrema locaux

Définition 2.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$
* On dit que f possède un minimum local en a s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leq \delta \implies f(x) \geq f(a)$
* On dit que f possède un maximum local en a s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leq \delta \implies f(x) \leq f(a)$

On dit que f possède un extremum local en a si elle possède un minimum ou un maximum local en a.

Définition 2.2. Un élément $a \in I$ est dit intérieur s'il n'est pas une extrémité de I.

Théorème 2.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Soit $a \in I$ un point intérieur en lequel f admet un extremum local. Alors $f'(a) = 0$

Théorème 2.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ intérieur.
Si f est dérivable en a et qu'elle admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$

Définition 2.5. Un point $a \in I$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et tel que $f'(a) = 0$ s'appelle un point critique (ou un point stationnaire) pour f.

2.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 2.6 (Théorème de Rolle)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en tout point de $]a, b[$
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 2.7 (Théorème des accroissements finis)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue,
dérivable en tout point de $]a, b[$
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interprétation cinématique : Dans un mouvement rectiligne, la vitesse instantanée vaut, à un certain moment, la vitesse moyenne.

2.3 Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 2.8. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors :
- f est constante ssi $f' = 0$
- f est croissante ssi $f' \geq 0$
- f est strictement croissante ssi $f' \geq 0$ et que la restriction de f' à tout intervalle non trivial est non nulle.

Corollaire 2.9. Soit $f \in C^0(I)$
Si $f' > 0$ sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

2.4 Inégalité des accroissements finis

Proposition 2.10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$
Alors $\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$

Définition 2.11. Soit $f : I \to \mathbb{R}$
- Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on dit que f est k-lipschitzienne si $\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$
- On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ telle que f soit k-lipschitzienne.
- On dit que f est une contraction s'il existe $k \in [0, 1[$ telle que f soit k-lipschitzienne.

Proposition 2.12 ("Reformulation" de l'inégalité des accroissements finis)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, f est k-lipschitzienne ssi $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$
- f est lipschitzienne ssi f' est bornée.

2.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 2.13. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $a \in I$.
On suppose que :
- f est dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$
- $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} l \in \mathbb{R}$

Alors f est dérivable en a, et $f'(a) = l$

Théorème 2.14. Soit $f \in C^0(I)$, $a \in I$ tel que f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} \pm\infty$

Alors
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \pm\infty$$

En particulier, f' n'est pas dérivable.

3 Fonction de classe C^n

3.1 Généralités

On rappelle que, pour $n \geq 1$, on peut considérer l'ensemble $D^n(I) = D^n(I;\mathbb{R})$ des fonctions n fois dérivables. Si $f \in D^n(I)$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

Définition 3.1.
* $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^n si elle est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue.
* $f : I \to \mathbb{R}$ est dite lisse ou de classe C^∞ si elle est n fois dérivable pour tout $n \geq 1$.

On note $C^n(I) = C^n(I;\mathbb{R})$ et $C^\infty(I) = C^\infty(I;\mathbb{R})$ les ensembles continues de ces fonctions.
Comme une fonction dérivable est continue, on a :

$$... \subseteq D^3(I) \subseteq C^2(I) \subseteq D^2(I) \subseteq C^1(I) \subseteq D^1(I) \subseteq C^0(I) \subseteq \mathbb{R}^I$$

et on a $C^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D^n(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$

3.2 Fonctions continûment dérivables

Remarque : "Continûment dérivable" = "de classe C^1"

Proposition 3.2 (Théorème de la limite de la dérivée, version C^1)**.** Soit $f \in C^0(I)$ et $a \in I$
Si $f_{|I\setminus\{a\}}$ est de classe C^1 et que $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} l$ alors $f \in C^1(I)$ et $f'(a) = l$

Proposition 3.3. Soit $f \in C^1([a,b])$
Alors f est lipschitzienne.

Proposition 3.4. Soit $f \in C^1(I;\mathbb{R})$ et $a \in I$ tel que $f'(a) > 0$
Alors f est strictement croissante au voisinage de a.

3.3 Opérations algébriques

Proposition 3.5. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n (resp. n fois dérivables) et $\lambda \in \mathbb{R}$
* Alors λf est de classe C^n (resp. n fois dérivable) et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
* Alors $f+g$ est de classe C^n est $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
* (Formule de Leibniz) fg est de classe C^n et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Corollaire 3.6. $C^n(I)$ et $D^n(I)$ sont des sous-algèbres de $\mathbb{R}^I$
(rappel : des sous-anneaux stables par combinaison linéaire)
Par intersection, il en va de même de $C^\infty(I)$

3.4 Composition et réciproque

Théorème 3.7. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ de classe C^n (resp. n fois dérivables). Alors $g \circ f$ est de classe C^n.

Théorème 3.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n(I)$ telle que f' ne s'annule pas.
Alors f induit une bijection de I sur un intervalle J et $f^{-1} : J \to I$ est de classe C^n.

4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

4.1 Généralités

Définition 4.1. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$
La fonction f est dérivable en a si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite ($\in \mathbb{C}$) quand $x \to a$
Si c'est le cas, cette limite est $f'(a) \in \mathbb{C}$

Proposition 4.2. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $c \in I$
La fonction f est dérivable en a ssi $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$ le sont.
Si c'est le cas, $(f')(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a)$ (autrement dit : $\operatorname{Re} f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a)$, etc...).

S'étendent sans difficulté au cadre complexe : le caractère local, les théorèmes d'opération et la notion de fonction de classe C^n : on obtient des ensembles $D^n(I, \mathbb{C})$, $C^n(I, \mathbb{C})$, $C^\infty(I, \mathbb{C})$.

Rappel : On a vu au chapitre 5 que $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \end{cases}$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \alpha e^{\alpha x}$.
Par une récurrence immédiate, c'est juste une fonction lisse.
En revanche, notre section B s'écroule :

* La notion d'extremum n'a plus de sens
* L'énoncé du théorème de Rolle aurait un sens, mais il est faux.

Par exemple : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$ est lisse, vérifie $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant $f' : t \mapsto ie^{it}$ ne s'annule jamais (on a même $|f'| = 1$)
Rolle et TAF sont fondamentalement des théorèmes en dimension 1.

4.2 Inégalité des accroissements finis

Le programme officiel énonce l'inégalité des accroissements finis pour $f \in C^1(I, \mathbb{C})$ avec la démo suivante (qu'on comprendra plus tard).

Proposition 4.3. Si $\forall t \in [a, b]$, $|f'(t)| \leq k$, on a

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)|\, dt \leq \int_a^b k\, dt \leq k|b-a|$$

En fait, l'inégalité des accroissements finis reste vraie, pour $f \in D^1(I, \mathbb{C})$