Chapitre 18. Espaces vectoriels de dimension finie

1 Définitions et lemmes fondamentaux

1.1 Sous-familles

Définition 1.1.

* Une sous-famille d'une famille $F = (x_i)_{i \in I}$ est une famille de la forme $(x_j)_{j \in J}$ où $J \subseteq I$
* En particulier, une sous-famille de $(x_i)_{i=1}^n$ est une famille de la forme $(x_{i_k})_{k=1}^r$ où $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$

Proposition 1.2. Soit F une famille de vecteurs d'un ev E et G une sous-famille de F.

* Si F est libre, alors G aussi.
* Si G est génératrice, alors F aussi.

Lemme 1.3 (Lemme de précipitation)**.** Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre d'un ev E et $y \in E$.
Alors $(x_1, ..., x_n, y)$ est liée ssi $y \in \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

On fixe un ev E.

Lemme 1.4 (Théorème de la base incomplète, version forte)**.**
Soit $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p)$ une famille de vecteurs de E telle que :

* $(x_1, ..., x_n)$ libre.
* $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p)$ génératrice.

Alors il existent $1 \leq j_1 < ... < j_r \leq p$ tels que $(x_1, ..., x_n, y_{j_1}, ..., y_{j_r})$ soit une base de E.

Corollaire 1.5 (théorème de la base extraite)**.** Soit $(y_1, ..., y_p)$ une famille génératrice de E.
Alors on peut en "extraire" une base : il existe $1 \leq j_1 < ... < j_r \leq p$ tels que $(y_{j_1}, ..., y_{j_r})$ soit une base de E.

Corollaire 1.6. E admet une base finie ssi E admet une famille génératrice finie.

Définition 1.7. On dit que E est de dimension finie s'il admet une base finie (ou une famille génératrice finie, puisque c'est équivalent).

Corollaire 1.8 (Théorème de la base incomplète, version faible)**.** Supposons E de dimension finie.
Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. On peut alors la "compléter" en une base :
on peut trouver $z_1, ..., z_r \in E$ tels que $(x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_r)$ soit une base de E.

1.3 Dimension

Lemme 1.9 (Lemme de l'échange de Steinitz)**.** Soit $e_1, ..., e_n \subseteq E$.
Alors toute famille de $n+1$ vecteurs de $\text{Vect}(e_1, ..., e_n)$ est liée.

Corollaire 1.10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

* Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de vecteurs de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de vecteurs de E alors $\mathcal{G}$ a au moins autant d'éléments que $\mathcal{L}$.
* Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Définition 1.11. Soit E un evdf [ev de dimension finie].
On en définit sa dimension $\dim E \in \mathbb{N}$ comme étant le nombre de vecteurs de ses bases.

Définition 1.12.

* Une droite (vectorielle) est un ev de dimension 1.
* Un plan (vectoriel) est un ev de dimension 2.

Théorème 1.13. Soit E un evdf et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Alors :

* Si $\mathcal{F}$ est libre, on a $n \leq \dim E$
* Si $\mathcal{F}$ est génératrice, on a $\dim E \leq n$
* Si $n = \dim E$, alors LASSÉ :
  (i) $\mathcal{F}$ libre.
  (ii) $\mathcal{F}$ engendre E.
  (iii) $\mathcal{F}$ est une base de E.

1.4 Retour aux familles échelonnées

Théorème 1.14. Soit $P_0, P_1, \dots, P_k \in K[X]$ tels que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_i = i$.
Alors $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $K_n[X]$.

1.5 Classification des evdf à isomorphisme près

Théorème 1.15. Soit E, F deux ev.

* Si E et F sont isomorphes, E est de dimension finie si et seulement si F l'est.
* Si E et F sont de dimension finie, alors E et F sont isomorphes ssi $\dim E = \dim F$.

2 EV de dimension infinie (hors-programme)

Si E possède une famille libre infinie $(e_i)_{i \in I}$, alors E est de dimension infinie (càd qu'il n'est pas de dimension finie).
En effet, si E était de dimension finie $d = \dim E$ on pourrait extraire de $(e_i)_{i \in I}$ une famille (nécessairement libre) à $d+1$ vecteurs, ce qui est absurde. Cela donne des exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie :

* $K[X]$, avec sa base $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$
* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, e.g. $\begin{pmatrix} (1, 0, 0, 0, \dots, \quad) \\ (0, 1, 0, 0, \dots, \quad) \\ (0, 0, 1, 0, \dots, \quad), \text{etc...} \end{pmatrix}$
* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ou $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e.g. $(x \to e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$

Toute la suite du B est hors-programme.

2.1 Existence de bases

* Le lemme de précipitation marche très bien avec des familles infinies.
* Le théorème de la base incomplète reste vrai avec essentiellement la même preuve : la famille libre maximale est fournie par le lemme de Zorn.

Lemme 2.1. Soit $(I_\tau)_{\tau \in T}$ une famille d'ensembles telle que $\forall \tau_1, \tau_2 \in T$, $I_{\tau_1} \subseteq I_{\tau_2}$ ou $I_{\tau_2} \subseteq I_{\tau_1}$
On note $I = \bigcup\limits_{I \in T} I_\tau$ et on prend une famille $(x_i)_{i \in I}$.
Si toutes les familles $(x_i)_{i \in I_\tau}$ sont libres, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Corollaire 2.2. Tout espace vectoriel admet une base.

2.2 Définition de la dimension

Lemme 2.3. Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$
Alors il existe une injection $J \to I$.

Corollaire 2.4. Si $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ sont deux bases d'un même ev E, alors I et J sont en bijection.

2.3 Bases de Hamel

Définition 2.5. Une base de Hamel est une base du $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$.

3 Sous-espaces vectoriels et dimensions

3.1 Inégalité des dimensions, base adaptée

Théorème 3.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sev de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

Théorème 3.2. Soit E un evdf et F un sev de E.
Alors il existe une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_r)$ soit une base de F.

Théorème 3.3. Soit E un evdf et F un sev de E.
Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition 3.4. Un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie E est un sev de E de dimension $\dim E - 1$.

3.2 Sommes (directes) et dimension

Lemme 3.5. Soit E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie et en somme directe. Alors $\bigoplus\limits_{i=1} F_i$ est de dimension finie et $\dim(\bigoplus\limits_{i=1} F_i) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim F_i$

Proposition 3.6. Soit $E_1, \dots, E_r$ des espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $E_1 \times \dots \times E_r$ est de dimension finie, et $\dim(E_1 \times \dots \times E_r) = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim E_i$

Proposition 3.7. Soit E un evdf et F un sev de E.
Alors F possède (au moins) un supplémentaire dans E et tous les supplémentaires de F sont de dimension $\dim E - \dim F$

Théorème 3.8 (Formule de Grassmann)**.** Soit E un ev. Soit F, G deux sev de E de dimension finie.
Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Théorème 3.9. Soit F, G deux sev de dimension finie d'un ev E.

- F et G sont en somme directe ssi $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$
- Supposons E de dimension finie $\dim E = \dim F + \dim G$.
  Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

  (i) F et G sont en somme directe.

  (ii) $F + G = E$

  (iii) F et G sont supplémentaires : $E = F \oplus G$

3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.10. Soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs d'un ev E.
On définit le rang de cette famille : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

Proposition 3.11.

* On a $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$
* Si E est de dimension finie, $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq \dim E$ (et donc $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq \min(p, \dim E)$)
* On a $(x_1, \dots, x_p)$ libre ssi $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$
* On a $(x_1, \dots, x_p)$ engendre E ssi $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim E$
* $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E ssi $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = p = \dim E$

4 Applications linéaires et dimensions

4.1 Injectivité et surjectivité

Théorème 4.1. Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

* Si F est de dimension finie et f injective, alors E est de dimension finie et $\dim E \leq \dim F$
* Si E est de dimension finie et que f est surjective, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$
* Si E et F sont de dimension finie et que $\dim E = \dim F$, LASSÉ :
  (i) f injective.
  (ii) f surjective.
  (iii) f est un isomorphisme.

Corollaire 4.2. Soit E un evdf et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors f injectif $\iff$ f surjective $\iff$ $f \in GL(E)$

Corollaire 4.3. Soit E un evdf et $u \in \mathcal{L}(E)$. LASSÉ :

(i) u est inversible à gauche : $\exists v \in \mathcal{L}(E), v \circ u = id_E$
(ii) u est inversible à droite : $\exists v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = id_E$
(iii) u est un isomorphisme.

Théorème 4.4. Soit A une K-algèbre et B une sous-algèbre de A de dimension finie.
Soit $x \in B \cap A^\times$ (càd $x \in B$ et il possède un inverse dans A).
Alors $x \in B^\times$ (càd l'inverse $x^{-1} \in B$).

4.2 Rang d'une application linéaire

Définition 4.5. Soit E, F deux ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

* On dit que f est de rang fini si $\mathrm{im}\, f$ est de dimension finie.
* Si c'est le cas, le rang de f est $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}\, f)$

Proposition 4.6. Soit E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

* Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini, est $\mathrm{rg}\, f \leq \dim E$
* Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini, est $\mathrm{rg}\, f \leq \dim F$

Proposition 4.7. Soit E, F, G trois espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

* Si f est de rang fini, alors $g \circ f$ aussi et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}\, f$
* Si g est de rang fini, alors $g \circ f$ aussi et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}\, g$

Proposition 4.8. On reprend les notations de la question précédente.

* Si f est un isomorphisme et que g est de rang fini, on a $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$
* Si g est un isomorphisme et que f est de rang fini, on a $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$

4.3 Théorème du rang

Théorème 4.9 (du rang / rank-nullity theorem)**.** Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

* Soit S un supplémentaire de $\ker f$ dans E ($E = \ker f \oplus S$).
  Alors f induit un isomorphisme $\tilde{f} : S \to \operatorname{im} f$
* On a la formule du rang : $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \ker f$

Corollaire 4.10. Avec les mêmes notations, on a :

* f injective $\iff \dim \ker f = 0 \iff \operatorname{rg} f = \dim E$
* f surjective $\iff \operatorname{rg} f = \dim F$
* f iso $\iff \operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$

On retrouve les résultats de la section 1.

4.4 Formes linéaires et hyperplans

Définition 4.11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Une forme linéaire sur E est une AL $E \to K$.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ et on appelle dual de E l'espace des formes linéaires sur E.

Proposition 4.12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

* Soit $\alpha \in E^*$ non nulle. Alors $\ker \alpha$ est un hyperplan de E.
* Soit H un hyperplan de E
  — Il existe $\alpha \in E^*$ non nulle tel que $H = \ker \alpha$
  — Si $\alpha, \beta \in E^*$ vérifient $\ker \alpha = \ker \beta = H$ alors $\exists \lambda \in K \setminus \{0\} : \beta = \lambda \alpha$

Proposition 4.13. Soit E un ev de dimension n.

* Tout sev F de E de dimension d est l'intersection $F = H_1 \cap ... \cap H_{n-d}$ de $n - d$ hyperplans.
* Réciproquement, si $H_1, ..., H_r$ sont r hyperplans de E, alors $\dim(H_1 \cap ... \cap H_r) \geq n - r$.

Définition 4.14. Étant donné un sev F de E, on définit sa codimension $\operatorname{cod}(F) = \dim E - \dim F$

Lemme 4.15. Si $F_1, ..., F_r$ sont des sev de E, alors $\operatorname{cod}(F_1 \cap ... \cap F_r) \leq \sum_{i=1}^{r} \operatorname{cod}(F_i)$

5 Représentation matricielle

5.1 Matrices d'un vecteur, d'une famille, d'une AL

Dans toute cette section, E est un espace vectoriel de dim p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$
F est un espace vectoriel de dim n, muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_p)$

Rappel : Tout vecteur $y \in F$ a une matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, où $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ sont tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$

Définition 5.1. Soit $y_1, ..., y_p \in F$. On définit la matrice de la famille $(y_1, ..., y_p)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(y_1, ..., y_p) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(y_1) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(y_p)\right) \in M_{np}(K)$$

Définition 5.2. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit le matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), ..., u(e_p)) = \left(Mat_{\mathcal{C}}(u(e_1)) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_p))\right) \in M_{np}(K)$$

Définition 5.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) \in M_p(K)$$

Proposition 5.4 ("évaluer c'est multiplier")**.** Soit $x \in E$.
Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Corollaire 5.5. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

* Pour tout $x \in E$, $x \in \ker u \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \ker \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$
* Pour tout $y \in F$, $y \in \operatorname{im} u \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(y) \in \operatorname{im} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

Proposition 5.6 ("composer c'est multiplier")**.** Soit E, F, G trois evdf de bases
$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_m)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$
Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(u)$$

5.2 Application linéaire associées à des matrices

Théorème 5.7.

* $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} : F \to K^n$ est un isomorphisme (d'év).
* $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : \mathcal{L}(E, F) \to M_{np}(K)$ est un isomorphisme (d'év).
* $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_p(K)$ est un isomorphisme (d'év).

Corollaire 5.8. On a $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$

Corollaire 5.9 (du corollaire)**.**

* $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$
* $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, K) = \dim E$

Corollaire 5.10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
Alors u est un automorphisme ssi $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est inversible.
Autrement dit : $u \in GL(E) \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_p(K)$

5.3 Rang d'une matrice

Définition 5.11. Soit $A \in M_{np}(K)$
On définit le <u>rang</u> de A : $\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{im} A)$

Proposition 5.12.

* Soit $y_1, \dots, y_p \in F$. On a $\operatorname{rg}(y_1, \dots, y_p) = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(y_1, \dots, y_p)$
* Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

Théorème 5.13.

* $\forall A \in M_{np}(K)$, $\operatorname{rg} A \leq \min(n, p)$
* $\forall A \in M_{np}(K), \forall B \in M_{pq}(K)$, $\operatorname{rg}(AB) \leq (\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$
* $\forall A \in M_{np}(K), \begin{cases} \forall P \in GL_n(K),\ \operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg} A \\ \forall Q \in GL_p(K),\ \operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg} A \end{cases}$

Théorème 5.14 (Théorème du rang).

* $\forall A \in M_{np}(K)$, $\operatorname{rg} A = p - \dim\ker A$
* Pour tout $A \in M_{np}(K)$, $\ker A = \{0_{K^p}\} \iff \operatorname{rg} A = p$
  $\operatorname{im} A = K^n \iff \operatorname{rg} A = n$
* En particulier, pour tout $A \in M_n(K)$, on a
  $\operatorname{rg} A = n \iff A \in GL_n(K) \iff \ker A = \{0_{K^n}\} \iff \operatorname{im} A = K^n$

Corollaire 5.15. Soit $A \in M_{np}(K)$ et $A' \in M_{np}(K)$ la matrice obtenue en effectuant des opérations élémentaires (échanges, dilatations, transvections) sur les lignes et les colonnes de A. Alors $\operatorname{rg}(A') = \operatorname{rg}(A)$
"Le rang est invariant par opérations élémentaires".

6 Changement de bases

6.1 Formules

Définition 6.1. Soit F un ev de dimension n et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{C}' = (f_1', \dots, f_n')$ deux bases de F.
On définit la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$:

$$P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f_1', \dots, f_n')$$

Proposition 6.2. Soit F un ev de dim n et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F.

* On a $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(id_F)$
* On a $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} \in GL_n(K)$ et $P^{-1}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} = P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}$
* Pour toute matrice $Q \in GL_n(K)$ et toute base $\mathcal{D}$ de F, il existe une unique base $\mathcal{D}'$ de F telle que $P_{\mathcal{D}\to\mathcal{D}'} = Q$

Théorème 6.3 (Changement de bases pour un vecteur). Soit F un ev de dim n et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F.
Pour tout $x \in F$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}'}(x) = P^{-1}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(x)$$

Théorème 6.4 (Changement de bases pour les AL). Soit E et F deux ev, de dimension p et n respectivement. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et deux bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de F. Alors, pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = P^{-1}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Corollaire 6.5. Soit E un ev de dim p et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

6.2 Similitude

Définition 6.6. Deux matrices $A, B \in M_p(K)$ sont semblables (et on note $A \sim B$) si $\exists P \in GL_p(K) : B = P^{-1}AP$

Proposition 6.7. $\sim$ est une relation d'équivalence sur $M_p(K)$

6.3 Équivalence

Définition 6.8. Soit $A, B \in M_{np}(K)$.
On dit que A et B sont équivalents s'il existe $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_p(K)$ telles que $B = PAQ$

Proposition 6.9. La relation d'équivalence est une relation d'équivalence.

Théorème 6.10.

* Deux matrices de $M_{np}(K)$ sont équivalentes ssi elles ont le même rang.
* Toute matrice de $M_{np}(K)$ de rang $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$ est équivalente à

$$J_r = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & (0) \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & (0) & & & (0) \end{array}\right) = \sum_{k=1}^{r} E_{k,k}$$

6.4 Rang d'une transposée

Théorème 6.11. Soit $A \in M_{np}(K)$.
Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$

Lemme 6.12. $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* (que l'on appelle la base duale de $\mathcal{B}$).

Définition 6.13. Soit $A \in M_{np}(K)$.
Soit $I = \{i_1, \dots, i_q\} \subseteq [\![1,n]\!]$ et $J = \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq [\![1,p]\!]$ tels que $i_1 < \dots < i_q$ et $j_1 < \dots < j_s$
On définit alors la matrice extraite :

$$A_{I,J} = (a_{i_k,j_l})_{\substack{1 \leq k \leq q \\ 1 \leq l \leq s}} \in M_{qs}(K)$$

Autrement dit, on ne garde que les lignes dont le numéro appartient à I et les colonnes dont le numéro appartient à J.

Théorème 6.14. Soit $A \in M_{np}(K)$.

* Toute matrice extraite de A possède un rang $\leq \mathrm{rg}\, A$
* Le rang de A est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de A.

6.5 Forme des matrices carrées

Soit E un ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Examinons des cas où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ possède des formes remarquables.

1)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(K)$$

signifie $\forall i \in [\![1,n]\!], u(e_i) = \lambda_i e_i$
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable ssi $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u. On dira que u est diagonalisable s'il existe une telle base.

2)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline (0) & * \end{array}\right)$$

"triangulaire par blocs"
Signifie $\forall i \in [\![1,r]\!], u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_i, \dots, e_r)$
Autrement dit, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ stable sous u.

3)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} * & (0) \\ \hline (0) & * \end{array}\right)$$

"diagonale par blocs"
Signifie que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ et $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ sont stables sous u.
Autrement dit, u stabilise les deux sev de la décomposition $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \oplus \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$

4)

$$\mathrm{Mat}\,\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} * & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{pmatrix} \in T_n^+(K)$$

Signifie que u stabilise tous les sev $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$ qui forment une suite de sev emboîtés les uns dans les autres (ce qu'on appelle un <u>drapeau</u>. Ici, on a des sev de toutes les dimensions, donc on parle de <u>drapeau complet</u>).