

Chapitre 18. Probabilités discrètes (2^{ème} partie)

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1 Variance d'une variable aléatoire discrète

1.1 Moment d'ordre p

Définition 1.1. Soit X une v.a.d. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$

On dit que X admet un moment d'ordre p ($p \in \mathbb{N}^*$) si $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$

Proposition 1.2. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ une vad et $1 \leq q \leq p$ dans \mathbb{N}

1. Si X admet un moment d'ordre p il admet un moment d'ordre q
2. Si $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ vad admettent des moments d'ordre p , il en va de même de $\lambda X + \mu Y$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

1.2 Variance

Définition 1.3. On note :

$$L^1(\Omega) = L^1 = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(|X|) < +\infty\}$$
$$L^2(\Omega) = L^2 = \left\{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(|X|^2) < +\infty\right\}$$

On a $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$

Alors XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

avec égalité ssi $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \lambda X + \mu Y = 0$ p.s.

Corollaire 1.5. Si $X \in L^2(\Omega)$ alors X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$$

Définition 1.6. Soit $X \in L^2(\Omega)$

On appelle variance de X le réel

$$\text{Var}(X) = V(X) = \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right)$$

L'écart type de X est

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var } X} = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

Proposition 1.7.

1. Si $X \in L^2(\Omega)$ alors

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

2. Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} \text{Var}(X - a) &= \text{Var}(X) \\ \text{Var}(bX) &= b^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

Définition 1.8. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une vard (variable aléatoire réelle discrète)

1. Si $X \in L^1$, on pose $\overset{\circ}{X} = X - \mathbb{E}(X)$
C'est la variable contrée associée à X
2. Si $X \in L^2$, on pose $\tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$
C'est la variable centrée réduite associée à X

1.3 Covariance

Définition 1.9. Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$

Alors $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}$ admet une espérance appelée covariance de X et Y et notée

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = \text{Cov}(Y, X)$$

Proposition 1.10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$

Alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \text{Var}(X) \text{Var}(Y)$$

Proposition 1.11.

1. Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$ indépendants
Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

2. Si $X_1, \dots, X_n \in L^2(\Omega)$ indépendantes, alors

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

1.4 Variance des lois discrètes classiques

1.4.1 Loi de Bernoulli

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$\text{Var } X = p(1 - p) = pq$$

1.4.2 Loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\text{Var } X = npq$$

1.4.3 Loi géométrique

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ avec $0 < p < 1$ alors

$$\text{Var } X = \frac{q}{p^2}$$

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ alors $Y = X + 1$ et $\text{Var } X = \text{Var } Y = \frac{q}{p^2}$

1.4.4 Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$\text{Var } X = \mathbb{E}(X) = \lambda$$

1.5 Inégalité de Markov et de Tchebychev

Proposition 1.12 (Inégalité de Markov). Soit X une v.a.d sur Ω possédant une espérance.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\varepsilon}$$

Corollaire 1.13 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une v.a.d à variance finie et $\varepsilon > 0$

Alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

2 Fonctions génératrices

2.1 Généralités

Ici $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

Définition 2.1. On pose

$$G_X : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \mathbb{E}(s^X) \end{cases}$$

C'est la fonction génératrice de X

Proposition 2.2. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une v.a.d, G_X sa fonction génératrice et $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Le domaine de définition de G_X contient $[-1, 1]$ et si $s \in [-1, 1]$ alors $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n$

En particulier G_X est une série entière de rayon $R \geq 1$

De plus pour $s \in [-1, 1]$, $|G_X(s)| \leq 1$ et $G_X(1) = 1$

2. G_X est continue sur $[-1, 1]$ et \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$p_n = \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

G_X caractérise la loi de X

Proposition 2.3.

1. Soit $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ v.a.d indépendantes.

Alors pour tout $s \in [-1, 1]$

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

2. Si $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ v.a.d indépendantes alors pour tout $s \in [-1, 1]$

$$G_{X_1 + \dots + X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$$

2.2 Fonctions génératrices des lois classiques

2.2.1 Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$ alors

$$G_X(s) = \frac{s}{N} \frac{1 - s^N}{1 - s}$$

2.2.2 Loi de Bernoulli

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$G_X(s) = q + sp$$

2.2.3 Loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$G_X(s) = (q + sp)^n$$

2.2.4 Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

2.2.5 Loi géométrique

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ avec $0 < p < 1$ alors

$$G_X(s) = \frac{sp}{1 - sq}$$

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ alors

$$G_X(s) = \frac{p}{1 - sq}$$

2.3 Obtention des moments

Proposition 2.4. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une v.a.d, $r \geq 1$

Alors X admet un moment d'ordre $r \iff G_X$ est \mathcal{C}^r sur $[0, 1]$

X est d'espérance finie $\iff G_X$ est \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$

X est à variance finie $\iff G_X$ est \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$

Dans ces conditions, respectivement :

$$G_X^{(r)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1))$$

$$G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$$

$$\text{Var } X = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$$

3 Convergence de variables aléatoires

3.1 Convergence en probabilité

Définition 3.1. Soit $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) v.a.d et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$

On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers X si $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

3.2 Loi faible des grands nombres

Théorème 3.2 (Loi faible des grandes nombres).

Soit $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a.d indépendantes de même loi et à variance finie.

On note $m = \mathbb{E}(X_1)$ leur espérance commune.

Alors $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers m .

Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$