

# Chapitre 16. Analyse asymptotique

Cadre : Dans tout le chapitre, on regardera des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et un point  $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$  en lequel il est pertinent de s'intéresser à la limite de  $f$ . En pratique,  $I$  sera un intervalle (et  $a$  un point ou une extrémité de  $I$ ) ou  $I$  sera  $\mathbb{N}$  (et  $a = +\infty$ ) dans le cas des suites.

## 1 Équivalence

### 1.1 Définitions

**Définition 1.1.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$  et on note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  ou  $f \underset{a}{\sim} g$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $I$  et  $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in V, g(x) = \mu(x)f(x) \\ \mu(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \end{cases}$$

En pratique, on sera dans l'un des 2 cas suivants :

- \*  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$
- \*  $f(a) = g(a) = 0$  et il existe un voisinage de  $a$  tel que  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas sur  $V \setminus \{a\}$  (On dit que  $a$  est un zéro isolé de  $f$  et  $g$ ).

Dans ce cas, la définition devient simplement :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

**Avertissement** : En particulier :  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$  signifie que  $f$  est nulle au voisinage de  $a$ . C'est une assertion que l'on lit souvent après des erreurs de calculs.

**Proposition 1.2.**  $\sim$  est une relation d'équivalence : Soit  $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Réflexivité : On a  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$
- \* Symétrie : Si  $f \underset{a}{\sim} g$ , alors  $g \underset{a}{\sim} f$
- \* Transitivité : Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $g \underset{a}{\sim} h$ , alors  $f \underset{a}{\sim} h$

### 1.2 Propriétés multiplicatives

**Proposition 1.3.** Soit  $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :  $\begin{cases} g_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f_1(x) \\ g_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f_2(x) \end{cases}$

- \* Alors  $g_1 g_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f_1 f_2(x)$
- \* Si  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas nulles au voisinage de  $a$ ,  $\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$
- \* On peut élever un équivalent à une puissance (constante).  
Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a  $f_1(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)^\alpha$  (à conditions que ces fonctions soient définis au voisinage de  $a$ ).

### 1.3 Propriétés de l'équivalence

**Proposition 1.4.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Si  $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$  alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$
- \* Si  $l \in \mathbb{R}^*$  (ni  $\pm\infty$ , ni 0) et tel que  $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \end{cases}$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$

**Proposition 1.5.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$

Alors  $f$  et  $g$  ont le même signe au voisinage de  $a$ .

Plus précisément : il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $I$  tel que, pour tout  $x \in V$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe ( $< 0$ , nul,  $> 0$ ).

## 2 Négligeabilité et domination

### 2.1 Définitions

**Définition 2.1.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$

- \* On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$ , et on note  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  (ou  $f = \underset{a}{o}(g)$ ) s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $I$  et  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
- \* On dit que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  et on note  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$  (ou  $f = \underset{a}{O}(g)$ ) s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $I$  et  $c : V \rightarrow \mathbb{R}$  bornée tels que  $\forall x \in V, f(x) = c(x)g(x)$

Remarque important : Dans les cas usuels, on a

- \*  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  ssi  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
- \*  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$  ssi  $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  est bornée au voisinage de  $a$

### 2.2 Opérations

**Proposition 2.2.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$
- \* Si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  alors  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$

**Proposition 2.3.** Soit  $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$

- \* Si  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$  et  $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(h(x))$  alors  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(h(x))$
- \* Si l'une des relations de dominations est remplacée par une relation de négligeabilité, on obtient  $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$

**Proposition 2.4.** Soit  $f_1, f_2, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } \begin{cases} f_1(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \\ f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \end{cases} \text{ alors } \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$$

**Proposition 2.5.** Soit  $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Si } \begin{cases} f_1(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g_1(x)) \\ f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g_2(x)) \end{cases} \text{ alors } f_1(x)f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g_1(x)g_2(x))$$

Si l'une de deux relations de domination est remplacée par une relation de négligeabilité, on a

$$f_1(x)f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g_1(x)g_2(x))$$

**Proposition 2.6.** Soit  $\varphi : J \rightarrow I$  une fonction telle que  $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} a$  et  $b \in \bar{J} \cup \{\pm\infty\}$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$

Alors, si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  on a  $f(\varphi(t)) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(\varphi(t))$

Idem avec  $o$  ou  $O$ .

## 2.3 Notations de Landau

On utilisera  $\underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$  et  $\underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$  dans des égalités pour designer une fonction non nommée, dont on garantit qu'elle est négligeable ou dominée par  $g(x)$ .

Par exemple, on écrira  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)$  pour dire  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + f_1(x)$ , où  $f_1(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)$

Attention! Cette pratique a des conséquences surprenantes :

- \* Par exemple, on ne peut pas simplifier  $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x) - \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$   
 Cette expression veut dire  $f_1(x) - f_2(x)$  où  $f_1(x), f_2(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$   
 On remplacera par un unique  $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$
- \* On sait que  $x^4 = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)$ . On en déduit que si  $f_1(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)$  alors  $f_1(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)$ .  
 Dans un calcul :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

On a en fait écrit  $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)$  mais cette égalité n'est pas symétrique :  
 on ne peut pas remplacer  $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)$  par un  $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)$

**Théorème 2.7.** Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  LASSÉ :

- (i)  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$
- (ii)  $f(x) = g(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$
- (iii)  $g(x) = f(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}(f(x))$

## 3 Développement limités

### 3.1 Définition et premières propriétés

**Définition 3.1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  :  $DL_n(a)$  s'il existe  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tels que  
 $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \underset{x \rightarrow a}{o}((x-a)^n)$   
 ( ou  $f(a+h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + \dots + c_nh^n + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^n)$  )

**Proposition 3.2** (Troncature de DL). Soit  $m \leq n$  deux entiers naturels.

Si  $f$  admet un  $DL_n(a) : f(a+h) = c_0 + c_1h + \dots + c_nh^n + o(h^n)$

alors elle admet un  $DL_m(a) : f(a+h) = c_0 + c_1h + \dots + c_mh^m + o(h^m)$

**Proposition 3.3.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admettant un  $DL_n(a) : f(a+h) = c_0 + c_1h + \dots + c_nh^n + o(h^n)$

Si  $c_0, c_1, \dots, c_n$  ne sont pas tous nuls, on note  $\mu = \min\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid c_i \neq 0\}$  et on a :  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} c_\mu h^\mu$

**Proposition 3.4.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$

- \*  $f$  est continue et  $a$  ssi elle admet un  $DL_0(a)$  ( le DL est alors  $f(a+h) = f(a) + o(1)$  )
- \*  $f$  est dérivable en  $a$  ssi elle admet un  $DL_1(a)$  ( le DL est alors  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$  )

**Proposition 3.5** (Unicité du DL). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned}f(a+h) &= b_0 + b_1h + \dots + b_nh^n + o(h^n) \\ &= c_0 + c_1h + \dots + c_nh^n + o(h^n)\end{aligned}$$

Alors  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = c_i$

**Corollaire 3.6.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admettant un  $DL_n(0) : f(h) = c_0 + c_1h + \dots + c_nh^n + o(h^n)$

- \* Si  $f$  est paire, on a  $c_1 = c_3 = \dots = 0$
- \* Si  $f$  est impaire, alors  $c_0 = c_2 = \dots = 0$

### 3.2 Lemme de primitivation des DL

**Lemme 3.7.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et  $a \in I$

On suppose que  $f'$  admet un  $DL_n(a) : f'(a+h) = c_0 + c_1h + \dots + c_nh^n + o(h^n)$

Alors  $f$  admet un  $DL_{n+1}(a) : f(a+h) = f(a) + c_0h + c_1\frac{h^2}{2} + \dots + c_n\frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1})$

### 3.3 Théorème de Taylor-Young

Rappel : Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est  $n$  fois dérivable et  $a \in I$ , il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que

$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f^{(k)}(a) = P^{(k)}(a)$  c'est le  $n$ -ième polynôme de Taylor de  $f$  en  $a$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

**Théorème 3.8** (Taylor-Young). Soit  $f \in C^n(I)$  et  $a \in I$

Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

càd

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

Notamment,  $f$  admet un  $DL_n(a)$

**Théorème 3.9** (Formulaire). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \dots + h^n + o(h^n)$$

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots + (-1)^n h^n + o(h^n)$$

$$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} h^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} h^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} h^n + o(h^n)$$

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n} + o(h^n)$$

$$\arctan(h) = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2n+1} + o(h^{2n+1})$$

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

$$\cosh(h) = 1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \dots + \frac{h^{2n}}{(2n)!} + o(h^{2n})$$

$$\sinh(h) = h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots + \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(h^{2n+1})$$

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} + o(h^{2n})$$

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

## 4 Calculs pratiques

### 4.1 Somme et produit

On retrouve le DL de cosh :

$$\begin{aligned}e^h &= 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{h^n}{n!} + o(h^n) \\e^{-h} &= 1 - h + \frac{h^2}{2!} + \dots - \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)\end{aligned}$$

Donc

$$\cosh(h) = \frac{e^h + e^{-h}}{2} = 1 + \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^{2n}}{(2n)!} + o(h^{2n})$$

Cela marche plus généralement pour les parties paire (  $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$  ) et impaire (  $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$  ) d'une fonction  $f$ .

DL<sub>3</sub>(0) de  $x \mapsto e^x \sinh(x)$  :

$$\begin{aligned}e^x \sinh(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\&= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\&= x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Si un facteur a une valuation  $> 0$ , on peut développer l'autre à une précision moindre.

### 4.2 Composition

On peut facilement composer un DL avec une puissance de  $x$  : par exemple, donnons un DL<sub>5</sub>(0) de  $x \mapsto \sin(x^2) \cos(x)$

$$\begin{aligned}\sin(x^2) \cos(x) &= (x^2 + o(x^5))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \\&= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\end{aligned}$$

On peut aussi composer avec des fonction plus compliquées. Donnons un DL<sub>2</sub>(0) de  $x \mapsto e^{\sin(x)}$

$$\begin{aligned}e^{\sin(x)} &= 1 + \sin(x) + \frac{(\sin(x))^2}{2} + o(x^2) \\&= 1 + (x + o(x^2)) + \frac{(x + o(x))^2}{2} + o(x^2) \\&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

### 4.3 Quotient

Pas besoin de nouvelle technique : on utilise le DL de  $u \mapsto \frac{1}{1+u}$

DL<sub>4</sub>(0) de  $\frac{1}{\cos}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 + (\cos(x) - 1)} \\&= 1 - \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + \left( -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 + o(x^4) \\&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

DL<sub>5</sub>(0) de tan

$$\begin{aligned}\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right) \\&= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

Remarque : Selon le programme officiel,

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

est à connaître.

## 5 Applications

### 5.1 Limites et équivalents

Déterminons la limite en 0 de  $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$$

Or

$$\begin{aligned}x^2 - \sin^2(x) &= \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\x^2 - \sin^2(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{3}\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$

Donc

$$\frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

Équivalent en 0 de  $x \mapsto (\cosh(x))^x - (\cos(x))^x$

$$\begin{aligned} (\cosh(x))^x &= \exp(x \ln(\cosh(x))) \\ &= \exp\left(x \left(\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + o(x^3)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

De même

$$(\cos(x))^x = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Donc

$$\begin{aligned} (\cosh(x))^x - (\cos(x))^x &= x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3 \end{aligned}$$

## 5.2 Étude locale d'une fonction

On rappelle que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admet un  $DL_0(a)$  ssi  $f$  est continue en  $a$ .

$DL_1(a)$  ssi  $f$  est dérivable en  $a$ .

Un DL de la forme  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \lambda h^v + o(h^v)$  permet de déterminer la position de  $f$  par rapport à sa tangente :

$$f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \lambda h^v$$

et deux fonctions équivalentes ont localement le même signe.

Cela montre notamment le résultat suivant :

**Proposition 5.1.** Soit  $f \in C^2(I)$  et  $a \in I$  un point intérieur.

- \* Si  $f$  a un minimum local en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) \geq 0$
- \* Si  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) > 0$ ,  $f$  admet un minimum local en  $a$ .

### 5.3 Asymptotes

On peut calculer des développements asymptotiques plus généraux que des DL.

Donnons un DA à la précision  $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$  de  $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x - 1} &= \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{x} \left( 1 - \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) + \left( \frac{x}{2} + o(x) \right)^2 + o(x^2) \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + o(x) \end{aligned}$$

Remarque : On peut calculer certains DA quand  $x \rightarrow +\infty$  en passant par la fonction  $h \mapsto f(\frac{1}{h})$

Considérons  $x \mapsto x^2 \ln(\frac{x}{x-1})$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1}{h^2} \ln\left(\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h} - 1}\right) \\ &= \frac{1}{h^2} \ln\left(\frac{1}{1 - h}\right) \\ &= -\frac{1}{h^2} \ln(1 - h) \\ &= -\frac{1}{h^2} \left( -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + o(h^3) \right) \\ &= \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{h}{3} + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Graphiquement, cela dit que la droite d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$  est une asymptote du graphe de  $f$  et cela donne la position relative du graphe et de l'asymptote.