

Chapitre 23 : Séries

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et qu'elle diverge sinon.

- * Le nombre $\sum_{k=0}^n u_k$ est la n-ième somme partielle de la série.
- * Le nombre u_n est le terme général de la série.
- * Si la série converge, la somme de la série est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$

Proposition 1.2 (Linéarité de la somme). Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries convergentes.

Alors $\sum_n (u_n + \lambda v_n)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Définition 1.3. Soit $\sum_n u_n$ est une série convergente.

Le n-ième reste de la série est la somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Proposition 1.4. La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

1.2 Divergence grossière

Proposition 1.5. Soit $\sum_n u_n$ une série convergente.

Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

1.3 Critère spécial des séries alternées

Théorème 1.6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle :

- * décroissante
- * telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Alors la série $\sum_n (-1)^n u_n$ converge.

2 Séries à termes positifs

Définition 2.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives.

On dit alors que $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs (SÀTP)

2.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.2. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux SÀTP telles que $u_n \leq v_n$ à pcr.

Alors $\sum_n v_n$ converge $\implies \sum_n u_n$ converge.

Corollaire 2.3.

- * Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux SÀTP telles que $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$
Alors $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.
- * C'est en particulier le cas si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ou si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$

2.2 Comparaison série-intégrale

Théorème 2.4 (Comparaison série/intégrale, cas décroissant). Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et continue par morceaux.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^{n+1} f + f(1) - f(n+1)$$

Théorème 2.5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et croissante.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{n+1} f - (f(n+1) - f(0)) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^{n+1} f$$

Théorème 2.6 (Série de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Alors la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Remarque : On définit la fonction zêta de Riemann

$$\zeta : \begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{cases}$$

Par exemple, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

Remarque : On définit le n -ième nombre harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

La démonstration du théorème précédent donne

$$H_n = \ln(n) + o(1)$$

Plus précisément

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

avec $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n - \ln(n)$

3 Séries absolument convergentes**3.1 Convergence**

Définition 3.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

On dit que $\sum_n u_n$ converge absolument si $\sum_n |u_n|$ converge.

Théorème 3.2. Soit $\sum_n u_n$ une série (de terme général complexe) absolument convergente.

Alors $\sum_n u_n$ converge.

Théorème 3.3. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à valeurs complexes.

Si $u_n = O(v_n)$ et que $\sum_n v_n$ converge absolument, alors $\sum_n u_n$ converge absolument.