Chapitre 28 : Probabilités

1 Événements et variables aléatoires

1.1 Généralités

Définition 1.1.

- $*$ Un univers (fini) est un ensemble fini non vide Ω
- $*$ Un événement est une partie $A \subseteq \Omega$
- $*$ Une variable aléatoire (VA) est une application $X : \Omega \to E$ vers un ensemble E

1.2 Opérations

Image d'une VA par une application

Étant donné une VA $X : \Omega \to E$ est une application $f : E \to F$, on définit la VA image de X par f, $f(x)$ comme la composition $f \circ X : \Omega \to F$

Événements définis par une VA

Soit $X : \Omega \to E$

Pour toute partie $S \subseteq E$, on définit l'événement

$$(X \in S) = \{X \in S\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\} = X^{-1}[S]$$

Indicatrice d'un élément

Tout événement $A \subseteq \Omega$ définit une VA

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} \Omega \to \{0,1\} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases} \end{cases}$$

1.3 Expériences aléatoires

Considérons un exemple d'expérience aléatoire. On joue à pile ou face n fois de suite.

UNIVERS : On considère $\Omega = \{0,1\}$

Une issue est un résultat possible, càd ici une suite de n lancers.

ÉVÉNEMENTS : L'événement (au sens usuel) "le i-ème lancer donne pile" correspond à l'événement (au sens mathématique) $\pi_i = \{(b_1, \dots, b_n) \in \Omega \mid b_i = 1\}$ (ensemble à 2^{n-1} événements)

"Obtenir que des 'face' " $F = \{(0,0,\dots,0)\}$ (est élémentaire = singleton)

"Obtenir un nombre impair de 'pile' " $I = \{(b_1, \dots, b_n) \in \Omega \mid b_1 + \dots + b_n \equiv 1 (\text{mod } 2)\}$

VARIABLES ALÉATOIRES :

- $*$ $L_i : \begin{cases} \Omega \to \{0,1\} \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto b_i \end{cases}$ "est le résultat du i-ème lancer"
- $*$ $N : \begin{cases} \Omega \to [\![0,n]\!] \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto b_1, \dots, b_n \end{cases}$ est le nombre de "pile" obtenus
- $*$ $P : \begin{cases} \Omega \to [\![1,n]\!] \cup \{+\infty\} \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto \min\{i \in [\![1,n]\!] \mid b_i = 1\} \end{cases}$ est le rang de premier "pile"

  (avec la convention $\min \emptyset = +\infty$)

* $R : \begin{cases} \Omega \to P(\llbracket 1,n \rrbracket) \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto \{i \in \llbracket 1,n \rrbracket \mid b_i = 1\} \end{cases}$ est l'ensemble des rangs où l'on a obtenu pile

Lien entre ces objets :

* "Obtenir un nombre impair de 'pile' " et "Obtenir que 'face' " sont incompatibles : $I \cap F = \emptyset$
* $F = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \dots \cup \pi_n = \overline{\pi_1} \cap \dots \cap \overline{\pi_n}$
* Si $n = 3$, $I = (\pi_1 \cap \overline{\pi_2} \cap \overline{\pi_3}) \cup (\overline{\pi_1} \cap \pi_2 \cap \overline{\pi_3}) \cup (\overline{\pi_1} \cap \overline{\pi_2} \cap \pi_3) \cup (\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3)$
* On a $N = L_1 + L_2 + \dots + L_n$
* On a $N = |R|$

  Formellement, $N = \text{Card} \circ R$, où Card : $\begin{cases} P(\llbracket 1,n \rrbracket) \to \llbracket 0,n \rrbracket \\ T \mapsto |T| \end{cases}$

  On a en fait utilisé la notation $f(x)$ des VA images (càd qu'on a noté $\text{Card}(R)$ plutôt que $\text{Card} \circ R$)
* On a $L_1 + L_2 \leq N$ (en supposant $n \geq 2$)
* $P = \min(R)$
* $(N = 0) = F$
* $(N \equiv 1 (\text{mod } 2)) = (N \text{ impair}) = I$
* $\pi_1 \cap \dots \cap \pi_n = (N = n)$
* $(L_i = 1) = \pi_i$: en fait, $L_i = \mathbb{1}_{\pi_i}$
* $\overline{\pi_1} = (p \geq 2)$
* $(p = n) = \overline{\pi_1} \cap \overline{\pi_2} \cap \dots \cap \overline{\pi_{n-1}} \cap \pi_n = (R = \{n\}) = (N = 1, L_n = 1)$

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Généralités

Définition 2.1.

* Une mesure de probabilités sur un univers Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :
  — $P(\Omega) = 1$
  — Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjoints, $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
* On appelle espace probabilisé (fini) tout couple (Ω, P), où Ω est un univers et P une mesure de probabilités du Ω

Proposition 2.2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini (epf).
On a :

* $P(\emptyset) = 0$
* Croissance : pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A})$
* Pour tous $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjoints,

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{r} A_i\right) = \sum_{i=1}^{r} P(A_i)$$

* $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.2 Formule des probabilités globales

Définition 2.3. Soit (Ω, P) un epf. Un système complet d'événements (scé) est une famille $(C_i)_{i=1}^{r}$ qui forme un recouvrement disjoint de Ω, càd telle que :

* Les C_i sont (deux à deux) disjoints : $\forall i, j \in \llbracket 1,r \rrbracket$, $i \neq j \implies C_i \cap C_j = \emptyset$
* $\bigcup_{i=1} C_i = \Omega$

Théorème 2.4 (Formule des probabilités totales)**.** Soit (Ω, P) un epf et $(C_i)_{i=1}^r$ un scé.
Alors $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{r} P(A \cap C_i)$

2.3 Loi d'une VA

Définition 2.5. Soit (Ω, P) un epf et $X : \Omega \to E$ une VA.
La loi de X est la donnée pour tout $S \subseteq E$ de la probabilité $P(X \in S) = P((X \in S))$

Proposition 2.6. Soit (Ω, P) un epf et $X : \Omega \to E$ une VA.
La loi de X est déterminée par les probabilités $P(X = x)$, pour x décrivant $\operatorname{im} X$
Plus précisément, pour tout $S \subseteq E$

$$P(X \in S) = \sum_{x \in S \cap \operatorname{im} X} P(X = x)$$

Définition 2.7. Soit (Ω, P) un epf et E un ensemble fini non vide.
Une VA $X : \Omega \to E$ suit la loi uniforme sur E si $\forall S \in \mathcal{P}(E)$, $P(X \in S) = \frac{|S|}{|E|}$
On note alors $X \sim U(E)$

Définition 2.8. Soit (Ω, P) un epf.
Une VA $X : \Omega \to \{0, 1\}$ suit le loi de Bernoulli de paramètre $p \in [\![0, 1]\!]$ si $P(X = 1) = p$
On note alors $X \sim B(p)$

Remarque importante : Si $A \subseteq \Omega$ est un événement, alors $\mathbb{1}_A \sim B(p)$, où $p = P(A)$

2.4 Couples de VA

Définition 2.9. Soit un epf et $X_1 : \Omega \to E_1$ et $X_2 : \Omega \to E_2$ deux VA.
Le loi conjointe de X_1 et X_2 est la loi de la VA

$$(X_1, X_2) : \begin{cases} \Omega \to E_1 \times E_2 \\ \omega \to (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{cases}$$

Les lois de X_1 et X_2 sont appelées lois marginales de loi conjointe.