

Chapitre 21 : Intégration

Dans tout le chapitre : I désigne un intervalle de \mathbb{R}

1 Fonctions en escalier, fonctions continues par morceau

1.1 Subdivisions d'un segment

Définition 1.1.

- * Une subdivision du segment $[a, b]$ est une famille $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$, où $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- * les x_i sont les points de la subdivision
- * les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ (resp. $]x_i, x_{i+1}[$) sont les composantes fermées (resp. ouverte) de σ
- * le pas de la subdivision σ est $\max \{x_{i+1} - x_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$

Définition 1.2. Soit σ, σ' deux subdivisions d'un segment $[a, b]$.

On dit que σ' raffine σ (ou : est plus fine que σ) si toute composante (ouverte) de σ' est incluse dans une composante (ouverte) de σ .

Proposition 1.3. Deux subdivisions σ_1, σ_2 de $[a, b]$ possèdent toujours un raffinement commun.

1.2 Fonctions en escalier

Définition 1.4.

- * Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sera dite en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chaque composante de σ
- * On dit alors que σ est adaptée à φ

Proposition 1.5. L'ensemble $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{[a, b]}$ et, $\forall f \in \mathcal{E}([a, b]), |f| \in \mathcal{E}([a, b])$

1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 1.6. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que :

- * la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ de f à chaque composante ouverte est continue
- * f admet des limites à gauche (resp. à droite) en tout point de la subdivision, sauf $a = x_0$ (resp. $b = x_n$)

Lemme 1.7. L'ensemble $C_{pm}^0([a, b])$ des fonctions continues par morceaux est la somme $C^0([a, b]) + \mathcal{E}([a, b])$.

Corollaire 1.8. Toute fonction continue par morceaux est bornée.

2 Convergence uniforme

2.1 Convergence simple

Définition 2.1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si $\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$

On notera

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$$

Définition 2.2. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée, on définit sa norme uniforme : $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| \mid t \in I\}$

Proposition 2.3. La norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $L^\infty(I)$ des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ bornées :

- * Positivité : $\forall f \in L^\infty(I), \|f\|_\infty \geq 0$
- * Séparation : $\forall f \in L^\infty(I), \|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$
- * Homogénéité : $\forall f \in L^\infty(I), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
- * Inégalité triangulaire : $\forall f, g \in L^\infty(I), \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Définition 2.4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ bornées et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On note alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$$

Proposition 2.5. Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions bornées sur I et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ bornées telles que

$$\begin{cases} \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f \\ \psi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} g \end{cases}$$

Alors :

- * $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi_n + \lambda \psi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f + \lambda g$
- * $|\varphi_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$

Théorème 2.6. Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$.

Alors, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue, f l'est aussi.

2.2 Approximation uniforme

Théorème 2.7. Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$.

Alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$

3 Définition de l'intégrale

3.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 3.1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\sigma = (a = x_0, \dots, x_n = b)$ une subdivision adaptée à φ .

On peut donc écrire

$$\varphi = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbb{1}_{x_i} + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \mathbb{1}_{]x_j, x_{j+1}[}$$

On définit alors l'intégrale de φ :

$$\int_a^b \varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j (x_{j+1} - x_j)$$

Proposition 3.2.

- * Cette intégrale est bien définie.
- * L'intégrale est une forme linéaire $\int_a^b : \mathcal{E}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$
- * (Inégalité triangulaire & contrôle uniforme) : $\forall f \in \mathcal{E}([a, b]),$

$$\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi| \leq (b - a) \|\varphi\|_\infty$$

- * Relation de Chasles : si $a < b < c$, on a $\forall \varphi \in \mathcal{E}([a, b])$, $\int_a^c \varphi = \int_a^b \varphi + \int_b^c \varphi$

3.2 Lemme fondamental et définition

Théorème 3.3. Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}([a, b])$ convergent uniformément vers f .

Alors :

- * La suite $(\int_a^b \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- * Si $(\psi)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b])^{\mathbb{N}}$ vérifie également $\psi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n$

Définition 3.4. Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$

On définit l'intégrale de f : $\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt$ comme la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n$ où $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f .

3.3 Propriétés de base

Théorème 3.5.

- * L'intégrale est une forme linéaire $\int_a^b : C_{pm}^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$
- * Inégalité triangulaire et contrôle uniforme : $\forall f \in C_{pm}^0([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \|f\|_{\infty}$$

- * si $f, g \in C_{pm}^0([a, c])$ et que f et g coïncident sur le complémentaire d'un ensemble fini, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$
- * Positivité : Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$ positive. Alors $\int_a^b f \geq 0$
- * Croissance : Soit $f, g \in C_{pm}^0([a, b])$ telles que $f \leq g$. Alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Théorème 3.6 (stricte positivité).

- * Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$ à valeurs ≥ 0 . Soit $x_0 \in [a, b]$ un point en lequel f est continue et $f(x_0) > 0$
Alors $\int_a^b f > 0$
- * Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$ à valeurs ≥ 0
Si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$

Proposition 3.7. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers $f \in C_{pm}^0([a, b])$

Alors $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f$

3.4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 3.8.

- * Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si $\text{Re } f$ et $\text{Im } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux.

* Pour une telle fonction, on définit

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

Les propriétés "algébriques" (linéarité, Chasles, etc...) s'étendent sans difficulté.

Proposition 3.9. Soit $f \in C_{pm}^0([a, b]; \mathbb{C})$

On a

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

4 Calcul intégral

4.1 "Théorème fondamental"

Théorème 4.1. Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$

* Alors $x \mapsto \int_a^x f$ est une primitive de f (càd une fonction dérivable F telle que $F' = f$)

* Les primitives de f sont les fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^x f + \kappa$, où $\kappa \in \mathbb{R}$

Corollaire 4.2. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive/

Corollaire 4.3. Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$ et F une primitive de f .

$$\text{Alors } \int_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b = [F(x)]_{x=a}^b$$

Corollaire 4.4 (IAF pour $f \in C^1(I; \mathbb{C})$). Soit $f \in C^1(I; \mathbb{C})$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$

Alors f est M -lipschitzienne : $\forall a, b \in I, |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

4.2 Formulaire

Sur un intervalle inclus dans	les primitives de	sont :
\mathbb{R}	\exp	$\exp + \kappa$
\mathbb{R}^*	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x + \kappa$
\mathbb{R} (si $\alpha \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \kappa$
\mathbb{R}^* (si $\alpha \in \mathbb{Z}$)		
\mathbb{R}_+^* (si $\alpha \in \mathbb{R}$)		
\mathbb{R}	\sin	$-\cos + \kappa$
	\cos	$\sin + \kappa$
	\sinh	$\cosh + \kappa$
	\cosh	$\sinh + \kappa$
\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan + \kappa$
$]1, 1[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin + \kappa$

C'est un tableau de dérivées à l'envers.

4.3 Intégration par parties

Théorème 4.5. Soit $f, g \in C^1([a, b])$

On a :

$$\int_a^b f g' = \underbrace{f(b)g(b) - f(a)g(a)}_{[fg]_a^b} - \int_a^b f' g$$

4.4 Changement de variables

Théorème 4.6. Soit $f \in C^0(I)$ et $\varphi : [a, b] \mapsto I$ de classe C^1

On a alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f u du$$

4.5 Exponentielle fois (co)sinus

Exemple : Cherchons les primitives de $x \mapsto e^{2x} \cos(3x)$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} \cos(3x) = \operatorname{Re} \left(\underbrace{e^{2x} e^{3ix}}_{=e^{(2+3i)x}} \right)$

Une primitive de $x \mapsto e^{(2+3i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)x}$

Donc une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{(2+3i)x})$ est

$$\begin{aligned} x \mapsto \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)x} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{2-3i}{13} e^{(2+3i)x} \right) \\ &= \frac{2}{13} \operatorname{Re} \left(e^{(2+3i)x} \right) + \frac{3}{13} \operatorname{Im} \left(e^{(2+3i)x} \right) \\ &= \frac{2}{13} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{13} e^{2x} \sin(3x) \\ &= \frac{e^{2x}}{13} (2 \cos(3x) + 3 \sin(3x)) \end{aligned}$$

4.6 Polynômes trigonométriques

Il est facile d'interpréter un polynôme trigonométrique une fois linéarisé :

Exemple : Trouvons une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}) \\ &= \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3}{4} \cos(x) \end{aligned}$$

Donc une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ est $x \mapsto \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3}{4} \sin(x)$

4.7 Fractions rationnelles

La méthode standard pour calculer une intégrale de $F \in \mathbb{R}(X)$ est de décomposer en éléments simples et d'intégrer les différents éléments simples.

Première espèce : Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}$ est $x \mapsto \ln|x-a|$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}$ est $x \mapsto \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$

Deuxième espèce, exposant 1 :

Il y a deux briques de base :

* $\frac{Q'}{Q}$ qui donnera une primitive $x \mapsto \ln|Q(x)|$

* $\frac{1}{Q}$, que l'on ramène à $\frac{1}{x^2+1}$, qui va donner des primitives de arctan

Par CL, on obtient tous les $\frac{P}{Q}, P \in \mathbb{R}_1[X]$

Deuxième espèce, exposant quelconque : On obtient une relation de récurrence par intégration par parties.

5 Sommes de Riemann

Théorème 5.1. Soit $f \in C_{pm}^0([a, b])$

Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

6 Formules de Taylor globales

6.1 Formule de Taylor avec reste intégrale

Théorème 6.1. Soit $f \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$ On a $\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 6.2. Soit $f \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}$ soit bornée.

On a $\forall x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$