Chapitre 13. Limites et continuité

1 Voisinage

Définition 1.1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$
Un voisinage de a :

* Si $a \in \mathbb{R}$, est un ensemble qui contient $[a-\delta, a+\delta]$, pour un certain $\delta > 0$
* Si $a = +\infty$, est un ensemble $[A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$
* Si $a = -\infty$, est un ensemble $]-\infty, A]$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$

Lemme 1.2. Soit V un voisinage de $+\infty$
Alors il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ telle que $v_n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Définition 1.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$
On dit qu'une propriété (de la fonction f) est vraie au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que la propriété soit vraie sur $V \cap I$

2 Notion de limite

Cadre : Dans cette section, $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et a est un élément de I ou $\pm\infty$. En pratique, I sera un intervalle et a un point ou une borne de l'intervalle.

2.1 Limites en $\pm\infty$

Définition 2.1. Soit I un ensemble non majoré et $f : I \to \mathbb{R}$ On dit que :

* f converge vers $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq H \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
* f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq H \implies f(x) \geq A$
* f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq H \implies f(x) \leq A$

2.2 Limites en un réel

Cadre : $a \in \overline{I}$

Définition 2.2. Soit $a \in \overline{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$

* On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en a si
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0 : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
* On dit que f tend vers $+\infty$ en a si
  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0 : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \implies f(a) \geq A$
* On dit que f tend vers $-\infty$ en a si
  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0 : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \implies f(a) \leq A$

Proposition 2.3. Soit $a \in I$
Si f admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en a, cette limite est nécessairement $f(a)$

2.3 Variantes

Définition 2.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, J une partie de I et $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que a est arbitrairement proche d'éléments de J (càd $a \in \overline{J}$ ou ($a = +\infty$ et J n'est pas majoré) ou ($a = -\infty$ et J n'est pas minoré))
On dit alors que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in J}}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in J, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad (\text{cas } a \in \mathbb{R})$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathbb{R} : \forall x \in J, x \geq H \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad (\text{cas } a = +\infty)$$

etc...

Proposition 2.5. Soit J_1, J_2 deux parties de I, $a \in I \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \overline{R}$. On suppose que a est arbitrairement proche d'éléments de J_1 et de J_2
Alors

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in J_1 \cup J_2}}{\longrightarrow} l \iff \begin{cases} f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in J_1}}{\longrightarrow} l \\ f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in J_2}}{\longrightarrow} l \end{cases}$$

3 Propriétés de la limite

3.1 Caractère local

Proposition 3.1. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$ arbitrairement proches d'éléments de I
Si f et g coïncident au voisinage de a, alors f admet une limite en a ssi g en admet une. Dans ce cas, ces limites sont les mêmes.

3.2 Propriétés des fonctions convergentes

Proposition 3.2. Les fonctions convergentes sont localement bornés :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$
Alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition 3.3 ($\mathbb{R}_+^*$ est ouvert)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$
Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+^*$, alors f est > 0 au voisinage de a.

3.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 3.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$
On a $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si, pour toute suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\xi_n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(\xi_n) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$

3.4 Composition des limites

Théorème 3.5 (À retenir mais mal énoncé)**.** Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} l$, alors $g(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$

Théorème 3.6 (Plus précis)**.** Soit $f : I \to J$ et $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$

* Déjà, $b \in \overline{J} \cup \{\pm\infty\}$
* Pour toute fonction $g : J \to \mathbb{R}$ telle que $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$, on a $g(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$

3.5 Théorème de la limite monotone

Théorème 3.7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

* Si I n'est pas majoré, f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $+\infty$
* Si I n'est pas minoré, f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $-\infty$
* Si a est un réel tel que $a \in \overline{I \cap]-\infty, a[}$, f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ à gauche de a
* Si a est un réel tel que $a \in \overline{I \cap]a, +\infty[}$, f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ à droite de a

4 Continuité

4.1 Continuité en un point

Cadre : $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$

Définition 4.1. f est <u>continue en a</u> si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Proposition 4.2 (Caractère local de la continuité)**.** Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si f et g coïncident au voisinage de a, alors f est continue en a ssi g l'est.

Définition 4.3. $f : I \to \mathbb{R}$ est <u>continue à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) et a si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \leq a}}{\longrightarrow} f(a)$ (resp. $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \geq a}}{\longrightarrow} f(a)$)

4.2 Continuité globale

Définition 4.4. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue si elle est continue en tout point de I
On note $C^0(I) = C^0(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues.

4.3 Opérations

Théorème 4.5. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

* Soit $a \in I$. Si f et g sont continues en a, alors λf, $|f|$, $\max(f, g)$, $f + g$, fg sont continues en a.
* Si $f, g \in C^0(I)$, alors λf, $|f|$, $\max(f, g)$, $f + g$, $fg \in C^0(I)$

Théorème 4.6. Soit $I, J \subseteq \mathbb{R}$ et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$

* Soit $a \in I$. Si f est continue en a et que g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
* Si f et g sont continues, $g \circ f$ l'est aussi.

Théorème 4.7 ("Théorème")**.** Les fonctions usuelles vues au chapitre 5 (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, trigonométriques réciproques, trigonométriques hyperboliques) sont continues.

4.4 Prolongement par continuité

Théorème 4.8. Soit $I \subseteq R$, $a \in I$ tel que $a \in \overline{I \setminus \{a\}}$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors il existe un prolongement continu $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ de f si et seulement si f admet une limite finie en a.
Dans ce cas, un tel prolongement est unique, c'est

$$\tilde{f} : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) \text{ si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

4.5 Prolongement des identités

Théorème 4.9 (Prolongement des identités, version continue)**.** Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues et $A \subseteq I$

* Si f et g coïncident en A, alors elles coïncident sur $\overline{A} \cap I$
* En particulier, si f et g coïncident sur A et que A est dense dans I, alors $f = g$

5 Fonctions continues sur un intervalle : propriétés globales

Dans toute cette section, I est un intervalle.

5.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.1. Soit I un intervalle et $f \in C^0(I)$. Soit $a < b \in I$.
Soit $y \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (càd $y \in [f(a), f(b)]$ ou $y \in [f(b), f(a)]$)
Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$

Corollaire 5.2. Soit $f \in C^0(I)$ et $J \subseteq I$ un intervalle.
Alors $f[J]$ est un intervalle.
"L'image continu d'un intervalle est un intervalle."

Corollaire 5.3. Soit I un intervalle et $f \in C^0(I)$. On suppose que f ne s'annule pas.
Alors f est de signe constant. On a $f > 0$ ou $f < 0$

Corollaire 5.4 (TVI généralisé)**.** Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue et y strictement compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ (dont on suppose qu'elles existent).
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$

5.2 Fonctions continues bijectives

Théorème 5.5 (de la bijection monotone)**.** Soit $a < b$ deux réels et $f \in C^0([a, b])$ strictement monotone.
Alors f induit une bijection entre $[a, b]$ et le segment joignant $f(a)$ et $f(b)$

Théorème 5.6. Soit I et J deux intervalles et $f : I \to J$ une bijection continue. Alors :
- f est strictement monotone.
- $f^{-1} : J \to I$ est encore continue.

Proposition 5.7. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective.
Alors f est strictement monotone.

Lemme 5.8. Soit $g : J \to I$ une application bijective strictement monotone entre intervalles.
Alors g est continue.

5.3 Théorème des bornes atteintes

Théorème 5.9 (de bornes atteintes)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un <u>segment</u>.
Alors il existe $\sigma, \tau \in [a, b]$ tels que $\forall x \in [a, b], f(\sigma) \leq f(x) \leq f(\tau)$
"Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes."

Corollaire 5.10. "L'image continue d'un segment est un segment"
Plus précisément, soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Alors $f[[a, b]]$ est un segment.

5.4 Uniforme continuité

Définition 5.11. $f : I \to \mathbb{R}$ est <u>uniformément continue</u> si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Théorème 5.12 (Heine)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
Alors f est uniformément continue.

6 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On considère des fonction $I \to \mathbb{C}$ où I est une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle). Comme dans le cas des suites, on définit $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C}$ soit avec la définition usuelle (interprétée avec des modules) soit avec

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \operatorname{Re}(l) \\ \operatorname{Im}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \operatorname{Im}(l) \end{cases}$$

En particulier, si $a \in I$, f est continue en a (ce qui signifie $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$) ssi $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$ sont continues.
On abandonne : les fonctions tendant vers $\pm\infty$, gendarmes et compagnie, limite monotone, le TVI, les bijections monotones.
On garde : les théorèmes d'opération, la caractérisation séquentielle, le continuité uniforme et le théorème de Heine.
Pour le théorème de bornes atteintes, on peut appliques la version réelle à $|f|$.

Théorème 6.1. Soit $f \in C^0([a, b]; \mathbb{C})$ une fonction continue sur un segment.
Alors f est bornée.
Plus précisément, on peut trouver $\tau \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq |f(\tau)|$