Chapitre 1 : Structures fondamentales

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels

1.1 Structures algébriques usuelles

$$\underline{\text{lci}} * : \begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x * y \end{cases}$$

Définition 1.1. Soit M un ensemble muni d'une lci $*$
$(M, *)$ est un monoïde si :

1. $*$ est associative.
2. $*$ possède un élément neutre e_M

Définition 1.2. Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles.

Définition 1.3. Soit A un ensemble avec 2 lci : $+$ et $*$
A est un anneau si :

1. $(A, +)$ est un groupe abélien.
2. $(A, *)$ est un monoïde.
3. $\forall a, x, y \in A \qquad \begin{cases} a * (x + y) = a * x + a * y \\ (x + y) * a = x * a + y * a \end{cases}$

Définition 1.4. Un anneau commutatif $\neq \{0\}$ dont tous les éléments non nuls sont inversibles est un corps.

Définition 1.5. Soit $(E, +, \bullet)$ avec E ensemble, $*$ lci et $\bullet : \begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \bullet x \end{cases}$ (l.c. externe)
$(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel si :

1. $(E, +)$ groupe abélien.
2. $\forall x \in E \qquad 1 \bullet x = x$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E \qquad \lambda \bullet (x + y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E \qquad (\lambda + \mu) \bullet x = \lambda \bullet x + \mu \bullet x$
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E \qquad (\lambda \bullet \mu) \bullet x = \lambda \bullet (\mu \bullet x) = \mu \bullet (\lambda \bullet x)$

1.2 Sous-structures

Rappels :

1. G groupe, $H \subset G$

   $$H \text{ sous-groupe} \iff \begin{cases} 1_G \in H \\ \forall x, y \in H,\ xy \in H \\ \forall x \in H,\ x^{-1} \in H \end{cases}$$

   H est un groupe aussi pour la restriction.
2. A anneau, $B \subset A$

   $$B \text{ sous-anneau} \iff \begin{cases} \forall x, y \in B,\ x + y \in B,\ xy \in B \\ 1_A \in B \\ \forall x \in B,\ -x \in B \end{cases}$$

   Le sous-anneau B est en particulier un anneau.

3. K un corps, $L \subset K$

   $$L \text{ sous-corps de } K \iff \begin{cases} L \text{ sous-anneau de } K \\ \forall x \in L \setminus \{0\},\, x^{-1} \in L \end{cases}$$

4. E un $\mathbb{K}$-ev, $F \subset E$

   $$F \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} \forall x, y \in F,\, x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\, \forall x \in F,\, \lambda x \in F \\ 0 \in F \end{cases}$$

Démarche : Pour montrer qu'un ensemble est un machin[1], on pourra le réaliser comme un sous-machin d'un machin connu.

Lemme 1.6. Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(K)$
Alors
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Proposition 1.7. Soit M un machin[1] et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de sous-machins de M
Alors $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ est un sous-machin de M

1. monoïde, groupe, anneau, corps ou $\mathbb{K}$-ev