Chapitre 21 : Intégration

Dans tout le chapitre : I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$

1 Fonctions en escalier, fonctions continues par morceau

1.1 Subdivisions d'un segment

Définition 1.1.

- Une subdivision du segment $[a,b]$ est une famille $\sigma = (x_0, ..., x_n)$, où $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
- les x_i sont les points de la subdivision
- les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ (resp. $]x_i, x_{i+1}[$) sont les composantes fermées (resp. ouverte) de σ
- le pas de la subdivision σ est max $\{x_{i+1} - x_i \mid i \in [\![0, n-1]\!]\}$

Définition 1.2. Soit σ, σ' deux subdivisions d'un segment $[a,b]$.
On dit que σ' raffine σ (ou : est plus fine que σ) si toute composante (ouverte) de σ' est incluse dans une composante (ouverte) de σ.

Proposition 1.3. Deux subdivisions σ_1, σ_2 de $[a,b]$ possèdent toujours un raffinement commun.

1.2 Fonctions en escalier

Définition 1.4.

- Une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sera dite en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que φ soit constante sur chaque composante de σ
- On dit alors que σ est adaptée à φ

Proposition 1.5. L'ensemble $\mathcal{E}([a,b])$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{[a,b]}$
et, $\forall f \in \mathcal{E}([a,b]), |f| \in \mathcal{E}([a,b])$

1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 1.6. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ de $[a,b]$ telle que :

- la restriction $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ de f à chaque composante ouverte est continue
- f admet des limites à gauche (resp. à droite) en tout point de la subdivision, sauf $a = x_0$ (resp. $b = x_0$)

Lemme 1.7. L'ensemble $C^0_{pm}([a,b])$ des fonctions continues par morceaux est la somme $C^0([a,b]) + \mathcal{E}([a,b])$.

Corollaire 1.8. Toute fonction continue par morceaux est bornée.

2 Convergence uniforme

2.1 Convergence simple

Définition 2.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $I \to \mathbb{R}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ si $\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$
On notera

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$$

Définition 2.2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée, on définit sa norme uniforme : $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in I\}$

Proposition 2.3. La norme uniforme $\|.\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $L^\infty(I)$ des fonctions $I \to \mathbb{R}$ bornées :

* Positivité : $\forall f \in L^\infty(I), \|f\|_\infty \geq 0$
* Séparation : $\forall f \in L^\infty(I), \|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$
* Homogénéité : $\forall f \in L^\infty(I), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
* Inégalité triangulaire : $\forall f, g \in L^\infty(I), \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Définition 2.4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $I \to \mathbb{R}$ bornées et $f : I \to \mathbb{R}$ bornée.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
On note alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$$

Proposition 2.5. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions bornées sur I et $f, g : I \to \mathbb{R}$ bornées telles que

$$\begin{cases} \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \\ \psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} g \end{cases}$$

Alors :

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi_n + \lambda\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f + \lambda g$
* $|\varphi_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$

Théorème 2.6. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées et $f : I \to \mathbb{R}$ bornée telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$.
Alors, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue, f l'est aussi.

2.2 Approximation uniforme

Théorème 2.7. Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$.
Alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$

3 Définition de l'intégrale

3.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 3.1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\sigma = (a = x_0, ..., x_n = b)$ une subdivision adaptée à φ.
On peut donc écrire

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{x_i} + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \mathbb{1}_{]x_j, x_{j+1}[}$$

On définit alors l'intégrale de φ :

$$\int_a^b \varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j (x_{j+1} - x_j)$$

Proposition 3.2.

* Cette intégrale est bien définie.
* L'intégrale est une forme linéaire $\int_a^b : \mathcal{E}([a,b]) \to \mathbb{R}$
* (Inégalité triangulaire & contrôle uniforme) : $\forall f \in \mathcal{E}([a,b])$,

$$\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$$

* Relation de Chasles : si $a < b < c$, on a $\forall \varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, $\int_a^c \varphi = \int_a^b \varphi + \int_b^c \varphi$

3.2 Lemme fondamental et définition

Théorème 3.3. Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}([a,b])$ convergent uniformément vers f.
Alors :

* La suite $(\int_a^b \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
* Si $(\psi)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b])^{\mathbb{N}}$ vérifie également $\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$

Définition 3.4. Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$
On définit <u>l'intégrale de f</u> : $\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt$ comme la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$ où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f.

3.3 Propriétés de base

Théorème 3.5.

* L'intégrale est une forme linéaire $\int_a^b : C^0_{pm}([a,b]) \to \mathbb{R}$
* Inégalité triangulaire et contrôle uniforme : $\forall f \in C^0_{pm}([a,b])$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

* si $f, g \in C^0_{pm}([a,c])$ et que f et g coïncident sur le complémentaire d'un ensemble fini, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$
* <u>Positivité</u> : Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$ positive. Alors $\int_a^b f \geq 0$
* <u>Croissance</u> : Soit $f, g \in C^0_{pm}([a,b])$ telles que $f \leq g$. Alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Théorème 3.6 (stricte positivité)**.**

* Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$ à valeurs ≥ 0. Soit $x_0 \in [a,b]$ un point en lequel f est continue et $f(x_0) > 0$
  Alors $\int_a^b f > 0$
* Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$ à valeurs ≥ 0
  Si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$

Proposition 3.7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers $f \in C^0_{pm}([a,b])$

Alors $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$

3.4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 3.8.

* Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux.
* Pour une telle fonction, on définit

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

Les propriétés "algébriques" (linéarité, Chasles, etc...) s'étendent sans difficulté.

Proposition 3.9. Soit $f \in C^0_{pm}([a,b];\mathbb{C})$
On a

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

4 Calcul intégral

4.1 "Théorème fondamental"

Théorème 4.1. Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$

* Alors $x \to \int_a^x f$ est une primitive de f (càd une fonction dérivable F telle que $F' = f$
* Les primitives de f sont les fonctions de la forme $x \to \int_a^x f + \kappa$, où $\kappa \in \mathbb{R}$

Corollaire 4.2. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive/

Corollaire 4.3. Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$ et F une primitive de f.
Alors $\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b = [F(x)]_{x=a}^b$

Corollaire 4.4 (IAF pour $f \in C^1(I;\mathbb{C})$)**.** Soit $f \in C^1(I;\mathbb{C})$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$
Alors f est M-lipschitzienne : $\forall a,b \in I, |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

4.2 Formulaire

Sur un intervalle inclus dans	les primitives de	sont :
$\mathbb{R}$	exp	$\exp + \kappa$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + \kappa$
$\mathbb{R}$ (si $\alpha \in \mathbb{N}$) $\mathbb{R}^*$ (si $\alpha \in \mathbb{Z}$) $\mathbb{R}_+^*$ (si $\alpha \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \kappa$
$\mathbb{R}$	sin	$-\cos + \kappa$
	cos	$\sin + \kappa$
	sinh	$\cosh + \kappa$
	cosh	$\sinh + \kappa$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan + \kappa$
$]1, 1[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin + \kappa$

C'est un tableau de dérivées à l'envers.

4.3 Intégration par parties

Théorème 4.5. Soit $f, g \in C^1([a, b])$
On a :

$$\int_a^b fg' = \underbrace{f(b)g(b) - f(a)g(a)}_{[fg]_a^b} - \int_a^b f'g$$

4.4 Changement de variables

Théorème 4.6. Soit $f \in C^0(I)$ et $\varphi : [a, b] \mapsto I$ de classe C^1
On a alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} fu\, du$$

4.5 Exponentielle fois (co)sinus

Exemple : Cherchons les primitives de $x \mapsto e^{2x}\cos(3x)$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x}\cos(3x) = \operatorname{Re}\underbrace{(e^{2x}e^{3x})}_{=e^{(2+3i)x}}$

Une primitive de $x \mapsto e^{(2+3i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)x}$
Donc une primitive de $x \mapsto e^{2x}\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{(2+3i)x})$ est

$$\begin{aligned}
x \mapsto \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)x}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{2-3i}{13}e^{(2+3i)x}\right) \\
&= \frac{2}{13}\operatorname{Re}\left(e^{(2+3i)x}\right) + \frac{3}{13}\operatorname{Im}\left(e^{(2+3i)x}\right) \\
&= \frac{2}{13}e^{2x}\cos(3x) + \frac{3}{13}e^{2x}\sin(3x) \\
&= \frac{e^{2x}}{13}(2\cos(3x) + 3\sin(3x))
\end{aligned}$$

4.6 Polynômes trigonométriques

Il est facile d'interpréter un polynôme trigonométrique une fois linéarisé :

Exemple : Trouvont une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}) \\ &= \frac{\cos(3x)}{4}+\frac{3}{4}\cos(x)\end{aligned}$$

Donc une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ est $x \mapsto \frac{\sin(3x)}{12}+\frac{3}{4}\sin(x)$

4.7 Fractions rationnelles

La méthode standard pour calculer une intégrale de $F \in \mathbb{R}(X)$ est de décomposer en éléments simples et d'intégrer les différents éléments simples.

Première espèce : Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}$ est $x \mapsto \ln|x-a|$
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}$ est $x \mapsto \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$

Deuxième espèce, exposant 1 :
Il y a deux briques de base :
- $\frac{Q'}{Q}$ qui donnera une primitive $x \mapsto \ln|Q(x)|$
- $\frac{1}{Q}$, que l'on ramène à $\frac{1}{X^2+1}$, qui va donner des primitives de arctan

Par CL, on obtient tous les $\frac{P}{Q}$, $P \in \mathbb{R}_1[X]$

Deuxième espèce, exposant quelconque : On obtient une relation de récurrence par intégration par parties.

5 Sommes de Riemann

Théorème 5.1. Soit $f \in C^0_{pm}([a,b])$
Alors
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$

6 Formules de Taylor globales

6.1 Formule de Taylor avec reste intégrale

Théorème 6.1. Soit $f \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$ On a $\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 6.2. Soit $f \in \mathbb{C}^{n+1}(I)$ et $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}$ soit bornée.
On a $\forall x \in I$
$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}||f^{(n+1)}||_\infty$$