Темы лабораторных работ по курсу
«Численное моделирование»

Вычислительные методы линейной алгебры

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений с квадратными матрицами общего вида.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений с квадратными ленточными матрицами общего вида.
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений с квадратными симметричными ленточными положительно-определёнными матрицами.
4. Решение систем линейных алгебраических уравнений с квадратными разреженными матрицами общего вида.

Задание к работам 1-4

Напишите программу для решения с **обычной (**а затем и **с двойной) точностью** системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, в которой квадратная матрица и правая часть зависят от параметра ***p***. Параметр выбран так, что при всех его значениях существует один и тот же вектор решения *x*.

Матрица, вектор правой части и дополнительная информация о системе уравнений содержатся в файлах, выдаваемых преподавателем.

Для решения систем использовать программы из библиотеки **IMSL**. Инструкции по использованию библиотеки **IMSL** находятся в файле «Подключение библиотеки IMSL для Intel_Fortran.pdf», полное описание библиотеки **IMSL** можно открыть по ссылке Пуск -> Все программы -> VisualNumerics ->IMSL Fortran Library User's Guide.pdf (или в паке /Numerical modeling/2019/ на локальном диске).

Для решения системы в **заданиях 1–3** последовательно применить 2 программы из библиотеки **IMSL:**

1 - факторизация матрицы с оценкой числа **обусловленности** или его обратной величины (Factor and compute condition number);

2 – решение системы с использованием найденной факторизации (Solve after factoring)

В **задании 4** использовать программу для решения системы непосредственно, без факторизации матрицы.

Написанная программа должна выводить в файл следующие данные:

фамилию, имя и номер группы автора программы

значение параметра ***p***,

матрицу и правую часть системы уравнений,

оценку числа обусловленности матрицы $\nu_1(A)$ и оценку обратной величины числа обусловленности $1/\nu_1(A)$ (в **заданиях 1-3**) ,

найденное приближённое решение $\tilde{x}$,

вектор невязки $r = b - A\tilde{x}$,

оценку погрешности решения $\nu_1(A)\frac{\|r\|_1}{\|b\|_1}$ из неравенства $\frac{\|x-\tilde{x}\|_1}{\|x\|_1} \le \nu_1(A)\frac{\|r\|_1}{\|b\|_1}$, где $\|r\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|r_i|$ (в **заданиях 1-3**); в **задании 4** оцените погрешность решения, сравнив результаты, полученные с одинарной и двойной точностью.

Дайте письменные ответы на следующие вопросы:

1) Как изменяется число обусловленности матрицы с уменьшением значения параметра ***p***?
2) Что происходит с системой при $p = 0$?
3) Сравните при одних и тех же значениях ***p*** решения, найденные с обычной и двойной точностью. Почему при $p = 0$ решения отличаются больше, чем при других значениях ***p***? Если решения при $p = 0$ получить не удаётся, то в чём причина?

Поиск собственных значений и собственных векторов матриц

5. Вычисление всех собственных чисел и собственных векторов симметричной матрицы.
6. Вычисление всех собственных чисел и собственных векторов несимметричной матрицы.

Задание к работам 5-6

Напишите программу для решения с **обычной (**а затем и **с двойной) точностью** задачи на собственные значения $Ax = \lambda x$, в которой квадратная матрица зависит от параметра ***p***.

Информация о матрице содержится в файлах, выдаваемых преподавателем.

Для решения задачи использовать программы из библиотеки **IMSL**. Инструкции по использованию библиотеки **IMSL** находятся в файле «Подключение библиотеки IMSL для Intel_Fortran.pdf», полное описание библиотеки **IMSL** можно открыть по ссылке Пуск -> Все программы -> VisualNumerics ->IMSL Fortran Library User's Guide.pdf (или в паке /Numerical modeling/2019/ на локальном диске)**.**

Дополнительно вычислить индекс выполнения (performance index), используя программу из библиотеки **IMSL.**

Написанная программа должна выводить в файл следующие данные:

фамилию, имя и номер группы автора программы
значение параметра ***p***,
матрицу,
найденные собственные числа матрицы $\tilde{\lambda}$,
найденные собственные векторы $\tilde{x}$,
индекс выполнения (performance index)
векторы невязок $r = \tilde{\lambda}\tilde{x} - A\tilde{x}$,
проверку ортогональности собственных векторов

Дайте письменные ответы на следующие вопросы:

1) Как изменяется наименьшее по модулю собственное число матрицы с уменьшением значения параметра ***p***?
2) Что происходит с матрицей при $p = 0$?
3) Сравните при одних и тех же значениях ***p*** решения, найденные с обычной и двойной точностью.
4) Что такое индекс выполнения (performance index) в библиотеке **IMSL** и каков его смысл?

Аппроксимация функций, численное дифференцирование и интегрирование

7. Аппроксимация функций интерполяционным кубическим сплайном с помощью программы CSIEZ.
8. Аппроксимация функций и их производных интерполяционным кубическим сплайном с помощью CSINT и CSDER.
9. Аппроксимация функций интерполяционными B-сплайнами программой DBSINT.

Задание к работе 7

Напишите программу с одинарной точностью для аппроксимации заданной функции $f(x)$ $x \in [a,b]$ интерполяционным кубическим сплайном $s(x)$, используя программу CSIEZ из библиотеки **IMSL.**

Оцените погрешность аппроксимации функции сплайном для числа разбиений интервала N=10, 20, 40, 80, 160. Погрешность аппроксимации оцените по формуле $\varepsilon = \max_i \left| f(x_i) - s(x_i) \right|$, где

$x_i = a + ih,\ h = \dfrac{b-a}{4N},\ i = 0,1,\dots,4N$. Покажите, что в узлах интерполяции значения функции и сплайна совпадают.

Написанная программа должна выводить в файл следующие данные:

фамилию, имя и номер группы автора программы,

$f(x)$, $a,\ b,\ N,\ \varepsilon$,

отношения погрешностей ε для двух соседних разбиений.

Дайте письменные ответы на следующие вопросы:

1) Что такое условие интерполяции?
2) Как изменятся погрешность $\varepsilon = \max\limits_i |f(x_i) - s(x_i)|$ с увеличением числа разбиений? Сравните полученные результаты для двух соседних разбиений с теоретической оценкой: $\varepsilon = \max\limits_i |f(x_i) - s(x_i)| < Ch^4$.

Задание к работе 8

Напишите программу с одинарной точностью для аппроксимации заданной функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ и её первых трёх производных интерполяционным кубическим сплайном $s(x)$, используя программы CSINT и CSDER из библиотеки **IMSL**. Вычислите $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, используя CSITG**.**

Оцените погрешность аппроксимации функции, производных и интеграла сплайном для числа разбиений интервала N=10, 20, 40, 80, 160. Погрешность аппроксимации функции и её производных оцените по формуле $\varepsilon = \max\limits_i |f^{(\nu)}(x_i) - s^{(\nu)}(x_i)|,\ \nu = 0,1,2,3$, где $x_i = a + ih,\ h = \dfrac{b-a}{4N},\ i = 0,1,\dots,4N$. Погрешность вычисления интеграла $\varepsilon = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b s(x)dx$

Написанная программа должна выводить в файл следующие данные:

фамилию, имя и номер группы автора программы

$f(x)$, $a,\ b,\ N,\ \varepsilon$ и отношения погрешностей для двух соседних разбиений для функции, производных и интеграла.

Дайте письменные ответы на следующие вопросы:

1) Как изменятся погрешность аппроксимации функции, производных и интеграла с увеличением числа разбиений? Сравните, полученные результаты с теоретической оценкой.
2) Как будет вести себя погрешность аппроксимации функции при дальнейшем увеличении N?

Задание к работе 9

Напишите программу с **двойной** точностью для аппроксимации заданной функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ интерполяционными B-сплайнами $s(x) = \sum\limits_i \alpha_i B_i^{(k)}$, где *k*-степень сплайна, используя программы DBSINT из библиотеки **IMSL**.

Оцените погрешность аппроксимации функции сплайном для числа разбиений интервала N=10, 20, 40, 80 при *k*=1, 2, 3, 4, 5. Погрешность аппроксимации функции оцените по формуле $\varepsilon = \max\limits_i |f(x_i) - s\ (x_i)|,$, где $x_i = a + ih,\ h = \dfrac{b-a}{8N},\ i = 0,1,\dots,8N$. Написанная программа должна выводить в файл следующие данные:

фамилию, имя и номер группы автора программы,

$f(x)$, $a,\ b,\ N,\ \varepsilon$,

отношения погрешностей для двух соседних разбиений для функции для всех *к*.

Дайте письменные ответы на следующие вопросы:
1) Что такое B-сплайн? Как строится интерполяционный B-сплайн?
2) Анализируя полученные результаты, выведите формулу для оценки погрешности аппроксимации функции в зависимости от степени сплайна *к*.

Таблица 1. Вид функций для одномерной интерполяции

№	Вид функции *f(x)*	Интервал [*a,b*]	№	Вид функции *f(x)*	Интервал [*a,b*]
1	$\sin^2(x)$	$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$	12	$e^x\cos(x)$	$[-\pi,\pi]$
2	$x\sin^2(x)$	$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$	13	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$
3	$10xe^{-x}$	$[0,2]$	14	$\frac{1}{1+\sin(x)}$	$[0,\pi]$
4	$10x^2e^{-x}$	$[0,2]$	15	$\frac{1}{1-\sin(x)}$	$[-\pi,0]$
5	$x\sin(x)$	$[0,\pi]$	16	$\frac{1}{(1+\sin(x))^2}$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
6	$x\cos(x)$	$[0,\pi]$	17	$\frac{1}{(1-\sin(x))^2}$	$\left[\frac{-\pi}{2},0\right]$
7	$x^2\sin(x)$	$[-\pi,\pi]$	18	$\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$	$[0,\pi]$
8	$x^2\cos(x)$	$[-\pi,\pi]$	19	$\frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}$	$[-\pi,0]$
9	$e^{-x}\sin(x)$	$[-\pi,\pi]$	20	$\frac{\cos(x)}{1+x}$	$[0,\pi]$
10	$e^{-x}\cos(x)$	$[-\pi,\pi]$	21	$\frac{x\sin(x)}{1+\sin(x)}$	$[0,\pi]$
11	$e^x\sin(x)$	$[-\pi,\pi]$	22	$\frac{x\cos(x)}{1+\cos(x)}$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

10. Вычисление корней нелинейных уравнений
11. Решение систем нелинейных уравнений

Задание к работе 10

Напишите программу для нахождения корня нелинейного уравнения с точностью 1.0e-5 и 1.0e-6, используя программу ZBREN из библиотеки IMSL.

Напечатайте точность, значение корня, значение невязки и количество итераций (количество вычислений функции), выполненных программой.

Указание. Если программа не выдаёт количество вычислений функций, то организуйте подсчёт «вручную». Для этого создайте модуль

module counter

```
integer count_f
end module counter
```

В головной программе и подпрограмме вычисления функции после заголовка добавьте оператор

```
use counter
```

Задайте начальное значение *count_f=0*
В подпрограмме вставьте оператор *count_f= count_f+1*

Дайте письменные ответы на следующие вопросы:

1) Какое условие необходимо для поиска корня данной подпрограммой и каков его смысл?
2) Какова идея поиска корня нелинейного уравнения методом бисекции?

Таблица 2. Вид нелинейных уравнений.

1	$2^x + 5x - 3 = 0$	16	$tg(x) - x = 0,\ \lvert x\rvert \le \frac{\pi}{2}$
2	$2^{-x} + 1 - (x-2)^2 = 0$	17	$5^x - 6x - 3 = 0$
3	$(x-3)\cos(x) - 1 = 0,\ \lvert x\rvert \le 2\pi$	18	$2x^2 - 2^{-x} - 3 = 0$
4	$5\sin(x) - x - 2 = 0$	19	$x\lg(x+1) - 1 = 0$
5	$e^{-2x} - 2x + 1 = 0$	20	$2arctg(x) - x + 3 = 0$
6	$x^2\cos(2x) + 1 = 0$	21	$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{x^2}{2} + 1 = 0$
7	$arctg(x-1) + 2x = 0$	22	$2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$
8	$(x-2)^2 2^x - 1 = 0$	23	$3^x + 2x - 2 = 0$
9	$x^2 - 20\sin(x) = 0$	24	$\left[(x-2)^2 - 1\right]2^x - 1 = 0$
10	$arctg(x) - \frac{1}{3x^3} = 0$	25	$3^x + 2x - 5 = 0$
11	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{x}{2} = 0$	26	$(x-2)^2\lg(x+11) - 1 = 0$
12	$2e^x + 5x = 0$	27	$3^{x-1} - x + 4 = 0$
13	$\cos(x+0{,}5) - x^3 = 0$	28	$e^x + x + 1 = 0$
14	$2arctg(x) - \frac{1}{2x^3} = 0$	29	$\sin(x-0{,}5) - x + 0{,}5 = 0$
15	$x^2 2^x - 1 = 0$	30	$2e^x - 3x + 1 = 0$

Задание к работе 11

Напишите программу для нахождения корней системы нелинейных уравнений с точностью 1.0e-5 и 1.0e-6, используя программы NEQNF и NEQNJ из библиотеки IMSL.

Напечатайте точность, значение корней, значение невязки (**одно число**) и количество итераций, выполненных программой (количество вычислений функции правой части), а для программы NEQNJ дополнительно количество вычислений матрицы Якоби.

Указание. Если программа не выдаёт количество вычислений функций и матрицы Якоби, то организуйте подсчёт «вручную». Для этого создайте модуль

```
module counter
integer count_fun, count_jac
```

end module counter

В головной программе и подпрограммах добавьте оператор

use counter

Задайте начальные значения *count_fun=0* и *count_jac=0*
В подпрограммах вычисления функции правой части и матрицы Якоби вставьте в соответствующие места операторы

count_fun= count_fun+1
count_jac= count_jac +1

Дайте письменные ответы на следующие вопросы:

1) В чем заключается принципиальное отличие программ NEQNF и NEQNJ?
2) Что такое матрица Якоби, и с какой целью она используется для решения нелинейных систем?
3) Как должно различаться количество вычислений функций в программах NEQNF и NEQNJ и почему?

Таблица 3. Вид систем нелинейных уравнений.

N	Система уравнений	N	Система уравнений
1	$\begin{cases}\sin(x+1)-y+1{,}2=0,\\ 2x+\cos(y)-2=0\end{cases}$	16	$\begin{cases}tg(xy+0{,}4)-x^2=0,\\ 0{,}6x^2+2y^2-1=0\end{cases}$
2	$\begin{cases}\cos(x-1)+y-0{,}5=0,\\ x-\cos(y)-3=0\end{cases}$	17	$\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}6x=0,\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$
3	$\begin{cases}\sin(x)+2y-2=0,\\ x+\cos(y-1)-0{,}7=0\end{cases}$	18	$\begin{cases}tg(xy+0{,}1)-x^2=0,\\ x^2+2y^2-1=0\end{cases}$
4	$\begin{cases}\cos(x)+y-1{,}5=0,\\ 2x-\cos(y-0{,}5)-1=0\end{cases}$	19	$\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}2x-0{,}2=0,\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$
5	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y-1=0,\\ x+\cos(y-2)=0\end{cases}$	20	$\begin{cases}tg(xy+0{,}3)-x^2=0,\\ 0{,}9x^2+2y^2-1=0\end{cases}$
6	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y-0{,}8=0,\\ -2x+\sin(y)-1{,}6=0\end{cases}$	21	$\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}3x=0,\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$
7	$\begin{cases}\sin(x-1)+y-1{,}3=0,\\ x-\sin(y+1)-0{,}8=0\end{cases}$	22	$\begin{cases}tg(xy)-x^2=0,\\ 0{,}8x^2+2y^2-1=0\end{cases}$
8	$\begin{cases}-\cos(x+1)+2y=0,\\ x+\sin(y)+0{,}4=0\end{cases}$	23	$\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}5x-0{,}1=0,\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$
9	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)-y-2{,}0=0,\\ -2x+\sin(y)-1=0\end{cases}$	24	$\begin{cases}tg(xy)-x^2=0,\\ 0{,}7x^2+2y^2-1=0\end{cases}$
10	$\begin{cases}\sin(x+2)-y-1{,}5=0,\\ x+\cos(y-2)-0{,}5=0\end{cases}$	25	$\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}2x-0{,}1=0,\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$
11	$\begin{cases}-x+\sin(y+1)-1{,}2=0,\\ \cos(x)+2y-2=0\end{cases}$	26	$\begin{cases}tg(xy+0{,}2)-x^2=0,\\ 0{,}6x^2+2y^2-1=0\end{cases}$

12	$\begin{cases} x+\cos(y-1)-0{,}5=0, \\ -\cos(x)+y-3=0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}5x+0{,}1=0, \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x+\sin(y)-2=0, \\ \cos(x-1)+y-0{,}7=0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} tg(xy+0{,}4)-x^2=0, \\ 0{,}8x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x+\cos(y)-1{,}5=0, \\ -\sin(x-0{,}5)+2y-1=0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}2x+0{,}1=0, \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -x+\sin(y+0{,}5)-1=0, \\ \cos(x-2)+y=0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} tg(xy+0{,}1)-x^2=0, \\ 0{,}9x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$