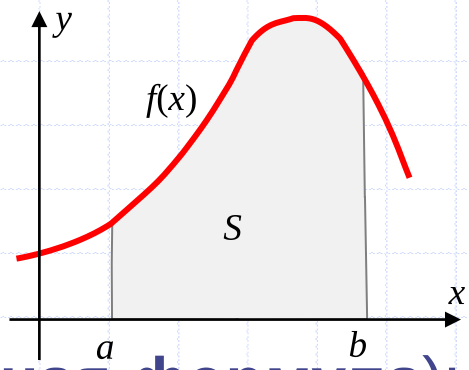
Методы численного интегрирования

Численное интегрирование

- Определенный интеграл от некоторой функции $f(x)$:

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$



- Численное интегрирование (**квадратурная формула**):

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot f(x_j)$$

  - где c_j – числовые коэффициенты, выбор которых зависит от выбранного метода численного интегрирования
  - $x_j \in [a,b],\ j = 1,\ldots,N$ – **узлы интегрирования**

Погрешность численного интегрирования

- Численное интегрирование применяется:
  - подынтегральная функция задана не аналитически, а таблицей значений
  - аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции

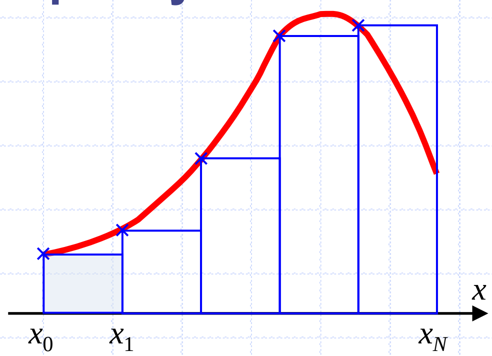
- Погрешность численного интегрирования:

$$\Psi_n = \int_a^b f(x) \cdot dx - \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot f(x_j)$$

  - уменьшение шага разбиения
  - повышения степени используемых интерполяционных многочленов

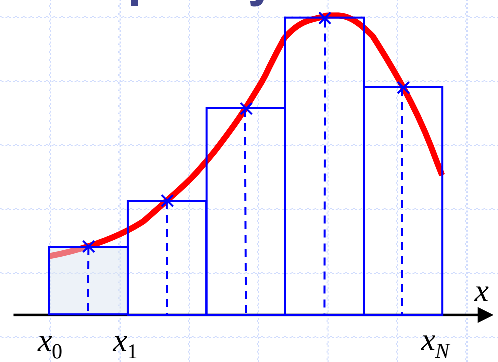
Метод прямоугольников

Левые прямоугольники



$$I \approx \sum_{j=1}^{N} h \cdot f(x_{j-1})$$

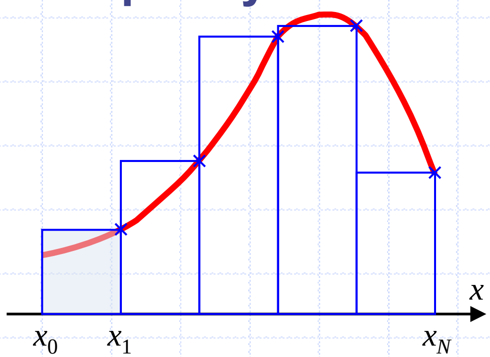
Средние прямоугольники



$$I \approx \sum_{j=1}^{N} f(x_{j-0.5}) \cdot h$$

$$x_{j-0.5} = x_j - 0.5h$$

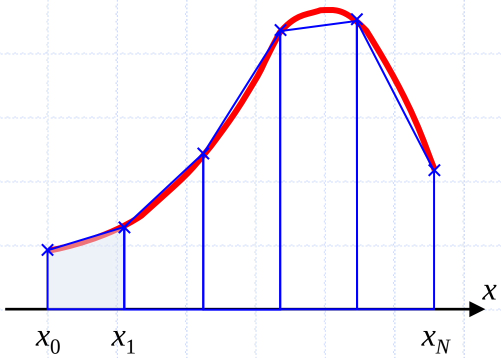
Правые прямоугольники



$$I \approx \sum_{j=1}^{N} h \cdot f(x_j)$$

- Интегрируемый отрезок [*a*;*b*] делится на *N* равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{N}$
- Интеграл вычисляется как сумма вписанных в каждый **частичный отрезок** прямоугольников
  - чем меньше длина отрезков *h*, тем точнее вычисленное значение интеграла
  - метод средних прямоугольников наиболее точный

Метод трапеций



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{f(x_j) + f(x_{j-1})}{2} h$$

- Интегрируемый отрезок [*a*;*b*] делится на *N* равных отрезков длиной *h*
- Каждый отрезок функции $[x_{j-1}, x_j]$ представляется в виде трапеции:

$$f(x) = \frac{1}{h}\left[(x - x_{j-1}) f(x_j) - (x - x_j) f(x_{j-1})\right]$$

- Интеграл вычисляется как сумма трапеций

Метод Симпсона

- Интегрируемый отрезок [*a*;*b*] делится на *N* равных отрезков длиной *h*
- Каждый отрезок функции аппроксимируется параболой
  - парабола проходит через три точки: узлы интегрирования x_{j-1}, x_j и середину отрезка $x_{j-0.5}$

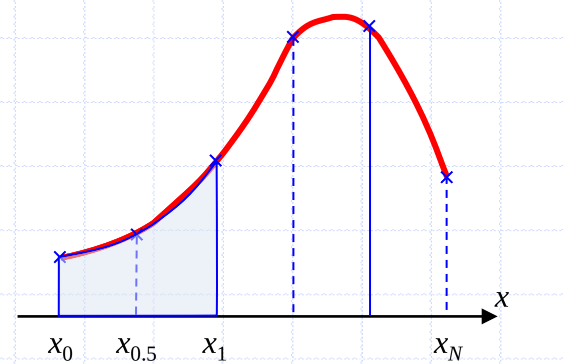
$$f(x)=\frac{2}{h^2}\left[(x-x_{j-0.5})(x-x_j)f(x_{j-1})-2\cdot(x-x_{j-1})(x-x_j)f(x_{j-0.5})+(x-x_{j-1})(x-x_{j-0.5})f(x_j)\right]$$

- Площадь параболы на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f_{j-1}+4f_{j-0.5}+f_j\right)$$

- Тогда интеграл функции на отрезке [*a*;*b*]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f_1+f_N+2\cdot\sum_{j=1}^{N-1} f_j+4\cdot\sum_{j=1.5}^{N-0.5} f_j\right]$$



Метод Симпсона

- Избавимся от дробных индексов, разобьем отрезок [*a*;*b*] на *N*·2 равных отрезков длиной *h*:

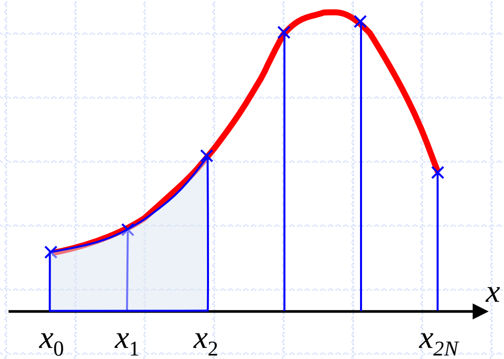
$$x_j = a + h \cdot j \qquad j = 1,2,\ldots 2N \qquad h = \frac{b-a}{2N}$$

- Тогда формула Симпсона примет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2N} + 2\left(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}\right) + 4\left(f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2N-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + f_{2N} + 2 \cdot \sum_{j=2,2}^{2N-2} f_j + 4 \cdot \sum_{j=1,2}^{2N-1} f_j\right]$$

  - отрезок интегрирования всегда разбивается на четное число интервалов



Семейство методов Ньютона-Котеса

- Интегрируемая функция интерполируется на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ по равноотстоящим узлам многочленом Лагранжа

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

  - где c_i весовые коэффициенты

    метод прямоугольников – многочлен Лагранжа 0й степени

    метод трапеций – многочлен Лагранжа 1й степени

    метод Симпсона – многочлен Лагранжа 2й степени

- В общем виде формула Ньютона-Котеса:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} c_{in} f(x_i)$$

  - Где *N* - количество частичных отрезков,
    n - порядок метода

$$h = \frac{x_j - x_{j-1}}{n} \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n} c_{in} \qquad x_i = x_j + i \cdot h$$

Весовые коэффициенты метода Ньютона-Котеса

$$C_n = \sum_{i=0}^{n} c_{in}$$

n	C_n	c_{0n}	c_{1n}	c_{2n}	c_{3n}	c_{4n}	c_{5n}
0	1	1					
1	2	1	1				
2	6	1	4	1			
3	8	1	3	3	1		
4	90	7	32	12	32	7	
5	288	19	75	50	50	75	19

Метод Гаусса

- Узлы интегрирования x_i на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ располагаются не равномерно, а выбираются таким образом, чтобы при наименьшем возможном числе узлов точно интегрировать многочлены наивысшей возможной степени

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

  - узлы x_i являются корнями полинома Лежандра степени *n*
  - веса вычисляются интегрированием полиномов Лежандра

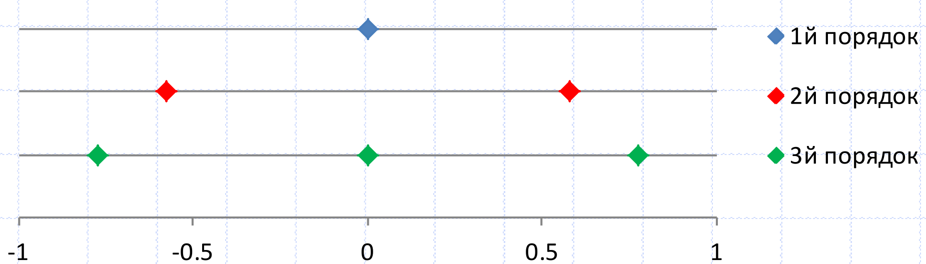
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} c_{in} f(x_i)$$

- *N* - количество частичных отрезков, *n* - порядок метода

Весовые коэффициенты метода Гаусса

- Приведенные в таблице данные соответствуют отрезку [-1;1]
- Для интегрирования на отрезке $[x_{j\text{-}1}, x_j]$ необходимо пересчитать значения узлов для заданного отрезка:

$$x_i = x_{j-1} + \frac{(x_{i[-1;1]} + 1)(x_{j-1} - x_j)}{2}$$



	i	$x_{i\,[-1;1]}$	c_i
1	1	0	2
2	1	-0.5773503	1
	2	0.5773503	1
3	1	-0.7745967	0.5555556
	2	0	0.8888889
	3	0.7745967	0.5555556
4	1	-0.8611363	0.3478548
	2	-0.3399810	0.6521451
	3	0.3399810	0.6521451
	4	0.8611363	0.3478548
5	1	-0.9061798	0.4786287
	2	-0.5384693	0.2369269
	3	0	0.5688888
	4	0.5384693	0.2369269
	5	0.9061798	0.4786287
6	1	-0.9324700	0.1713245
	2	-0.6612094	0.3607616
	3	-0.2386142	0.4679140
	4	0.2386142	0.4679140
	5	0.6612094	0.3607616
	6	0.9324700	0.1713245