Аппроксимация

Задача аппроксимации

- **Аппроксимация** – это определение параметров аналитической функции, описывающей набор точек, полученных в результате эксперимента

y_1	x_1
y_2	x_2
…	…
y_i	x_i
…	…
y_n	x_n

- Аппроксимирующая функциея:

$$f(x_i) = c_0 \cdot g_0(x_i) + c_1 \cdot g_1(x_i) + \ldots + c_m \cdot g_m(x_i)$$

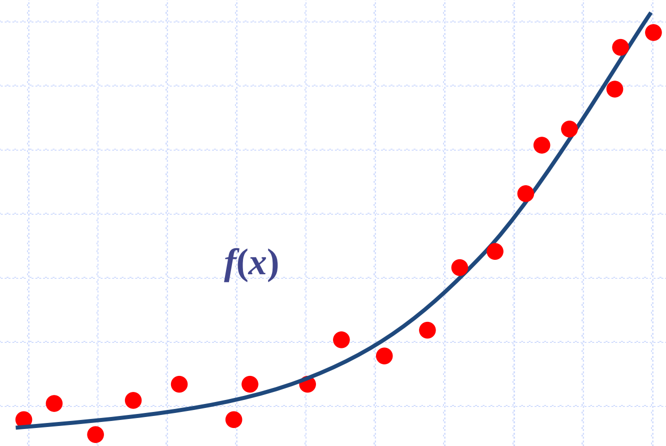
  - $g_0, g_1, \ldots, g_m$ – базисные функции
  - $c_0, c_1, \ldots, c_m$ – коэффициенты

$$i = 0,1,\ldots,n$$

- Степенной полином:

$$f(x_i) = c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \ldots + c_m \cdot x_i^m$$

$$i = 0,1,\ldots,n$$



Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

- Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- m - количество уравнений
- n - количество неизвестных
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные, которые надо определить
- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ - коэффициенты системы
- $b_1, b_2, \ldots b_m$ - свободные члены (известны)

СЛАУ в матричной форме

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- **A** - матрица системы
- **X** - столбец неизвестных
- **B** - столбец свободных членов

- Решение СЛАУ (матрица системы квадратная, и ее определитель ≠0):
  - **Метод Крамера** – вычисление определителей матрицы
  - **Метод Гаусса** – последовательное исключение переменных
  - **Метод обратной матрицы** – метод решения через обратную матрицу

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Пример аппроксимации

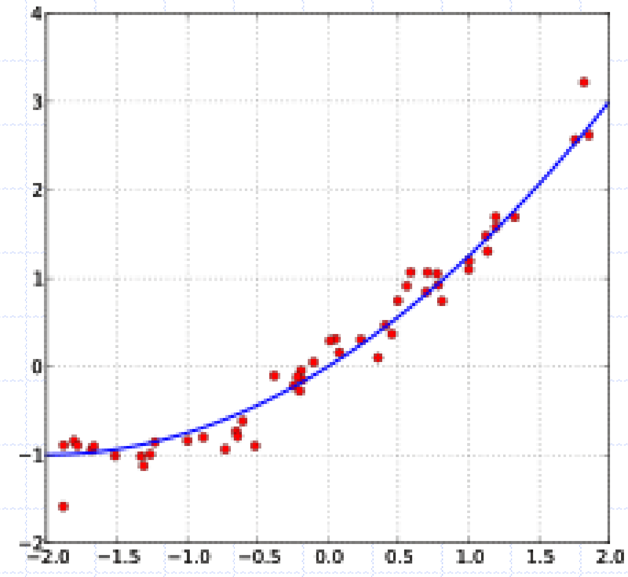
- Имеется набор экспериментальных данных y_i , x_i
- Задача: аппроксимировать экспериментальные данные некоторой функцией $f(x_i)$
  - например $f(x_i) = a_1 + a_2 \cdot x_i + a_3 \cdot x_i^2$

y_1	x_1
y_2	x_2
$\dots$	$\dots$
y_i	x_i
$\dots$	$\dots$
y_n	x_n

- Составим систему линейных уравнений:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_i & x_i^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$



Метод наименьших квадратов (МНК)

- Для переопределенных СЛАУ (количество уравнений больше количества неизвестных, т.е. $m > n$) система не имеет единственного точного решения, но можно найти «оптимальный» вектор $\mathbf{X}$

- Среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от найденной аппроксимирующей функции было наименьшим:

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i \left(y_i - f(x_i)\right)^2 \to \min$$

- В матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \sum_i \varepsilon_i^2 = \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \to \min$$

- **Метод наименьших квадратов**:

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$$

Взвешенный метод наименьших квадратов

- Разные уравнения системы (разные точки экспериментально полученных данных) имеют разный вес, пропорциональный погрешности каждой точки:

$$w_i \approx \frac{1}{\delta y_i}$$

- В матричном виде:

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{B}$$

  - где **W** — диагональная матрица весов:

$$\mathbf{W}_{n\times n} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{pmatrix}$$