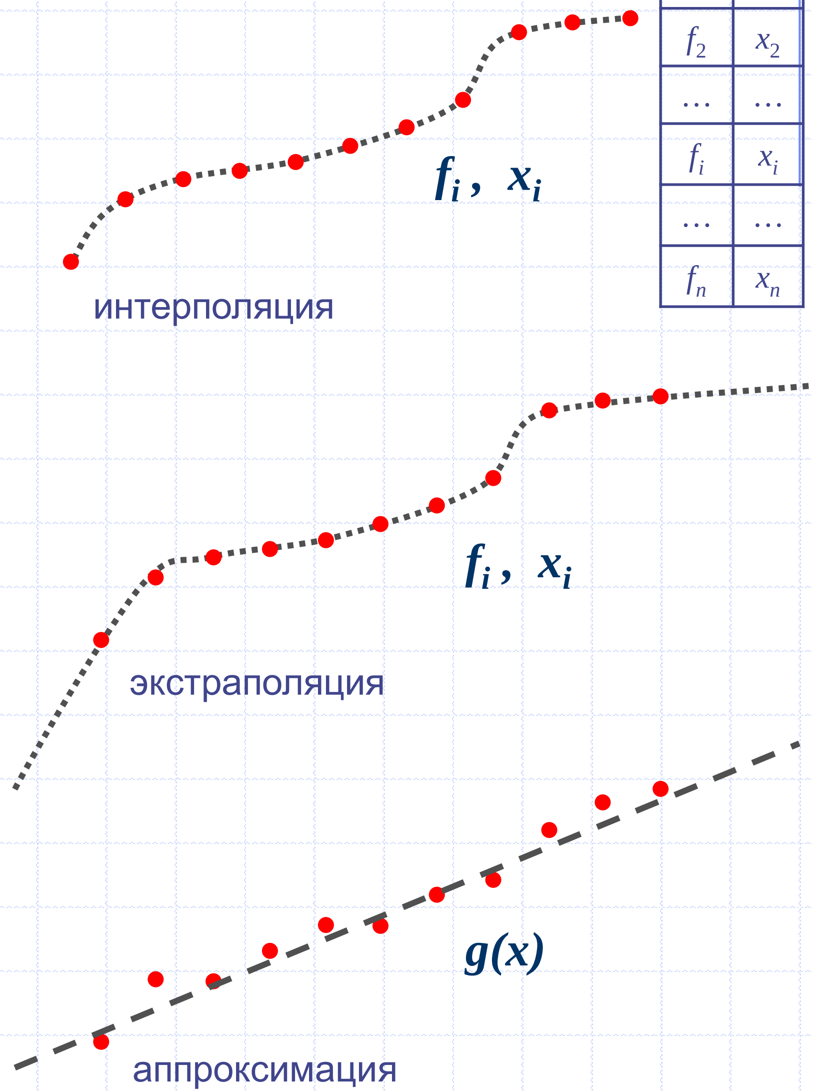
Методы интерполяции

Интерполяция, экстраполяция, аппроксимация

- Интерполяция – определение промежуточных значений функции по известному дискретному набору значений функции
- Экстраполяция – определение значений функции за пределами первоначально известного интервала
- Аппроксимация – определение в явном виде параметров функции, описывающей распределение точек

f_1	x_1
f_2	x_2
…	…
f_i	x_i
…	…
f_n	x_n



Задача интерполяции

- Пусть функция $f(x)$ задана таблицей своих значений x_i, y_i: на интервале [a; b]:

$$y_i = f\left(x_i\right) \quad i = 0,1,\ldots,n \quad a \le x_i \le b$$

y_1	x_1
y_2	x_2
$\ldots$	$\ldots$
y_i	x_i
$\ldots$	$\ldots$
y_n	x_n

- Задача интерполяции - найти функцию $F(x)$, принимающую в точках x_i те же значения y_i
  - точки x_i – узлы интерполяции
  - условие $F(x)= y_i$ – условие интерполяции

  - Через заданные точки можно провести бесконечно много кривых, для каждой из которых выполнены все условия интерполяции
  - Для практики важен случай аппроксимации функции многочленами:

$$F\left(x\right) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_m \cdot x^m$$

Локальная и глобальная интерполяция

- Глобальная интерполяция
  - функция $f(x)$ интерполируется на всем интервале [a; b] с помощью единого интерполяционного полинома

$$P_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_m \cdot x^m$$

    - обычно $m=n$, т.е. степень полинома выбирается равной количеству узлов
    - на практике не всегда применима

- Локальная (кусочно-полиномиальная) интерполяция
  - на каждом интервале $[x_i,\ x_{i+1}]$ строится отдельный интерполяционный полином невысокой степени

Кусочно-линейная интерполяция

- Узловые точки соединяются отрезками прямых
- через каждые две точки x_i, x_{i+1} проводится полином первой степени:

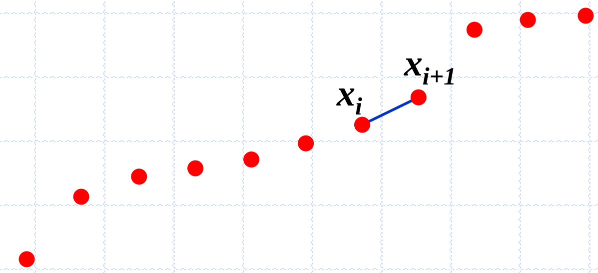
$$F(x) = a_0 + a_1 \cdot x \qquad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$$

- коэффициенты a_0, a_1 разные на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{cases} f_{i-1} = a_0 + a_1 \cdot x_{i-1} \\ f_i = a_0 + a_1 \cdot x_i \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$a_0 = f(x_{i-1}) - a_1 \cdot x_{i-1}$$



Кусочно-квадратичная интерполяция

- Квадратичная интерполяция проводит через узловые точки уравнение параболы:

$$F(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2 \qquad x_{i-1}\le x\le x_{i+1}$$

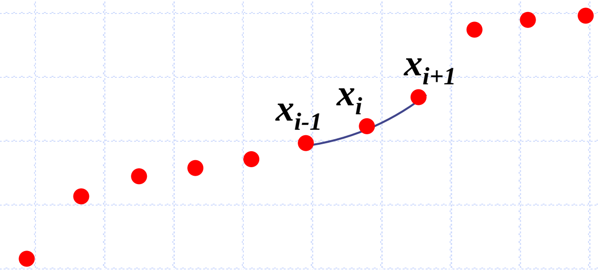
  - коэффициенты a_0, a_1, a_2 разные на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{cases} f_{i-1}=a_0+a_1\cdot x_{i-1}+a_2\cdot x_{x-i}^2 \\ f_i=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_x^2 \\ f_{i+1}=a_0+a_1\cdot x_{i+1}+a_2\cdot x_{x+i}^2 \end{cases}$$

$$a_2=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}-\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}$$

$$a_1=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}-a_2\cdot(x_i+x_{i-1})$$

$$a_0=f(x_{i-1})-a_1\cdot x_{i-1}-a_2\cdot x_{i-1}^2$$



Многочлен Лагранжа

- На всем интервале [*a*; *b*] строится единый полином:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

  - где $l_i(x)$ – базисные полиномы степени *n*:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

    - имеет малую погрешность при небольших значениях *n*<20. При больших *n* погрешность начинает расти
    - применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов.
    - кусочно-линейная и кусочно-квадратичная локальные интерполяции - частные случаи интерполяции многочленом Лагранжа.

Многочлен Ньютона (разделенные разности)

- Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах

- Разделенные разности первого порядка:
  - определяются через разделенные разности нулевого порядка

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- Разделенные разности второго порядка:
  - определяются через разделенные разности нулевого порядка

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

- Разделенная разность k-го порядка:
  - определяются через разделенные разности порядка k - 1

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Многочлен Ньютона

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)\cdot(x-x_0) + f(x_0,x_1,x_2)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0,x_1,\ldots,x_n)\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

- где $f(x_0)$, $f(x_0,x_1)$, $f(x_0,x_1,x_2)$, $f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ - разделенные разности 1, 2, 3, *n*-го порядков
- если необходимо увеличить степень многочлена на единицу, добавив в таблицу еще один узел
  - для многочлена Лагранжа необходимо вычислять каждое слагаемое заново
  - для многочлена Ньютона достаточно добавить одно слагаемое

$$f(x_0,\ldots,x_n,x_{n+1})\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots\cdot(x-x_{n+1})$$

- Если функция достаточно гладкая, то:

$$f(x) - P_n(x) \approx P_{n+1}(x) - P_n(x)$$

- Погрешность интерполяции:

$$\varepsilon_n = |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$$