Методы численного дифференцирования

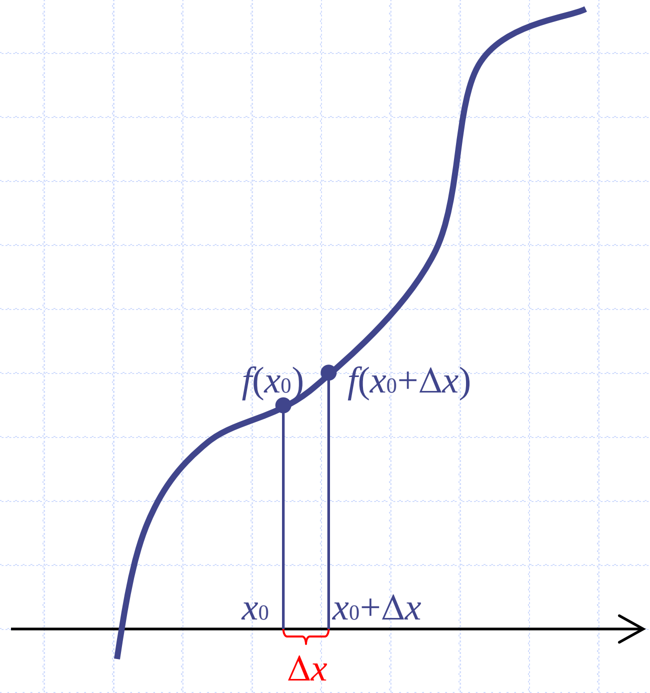
Односторонняя разность

- Производная функции определяется выражением:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$$

- заменяем приращение *dx* на конечную величину (шаг дифференцирования):

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Односторонняя разность

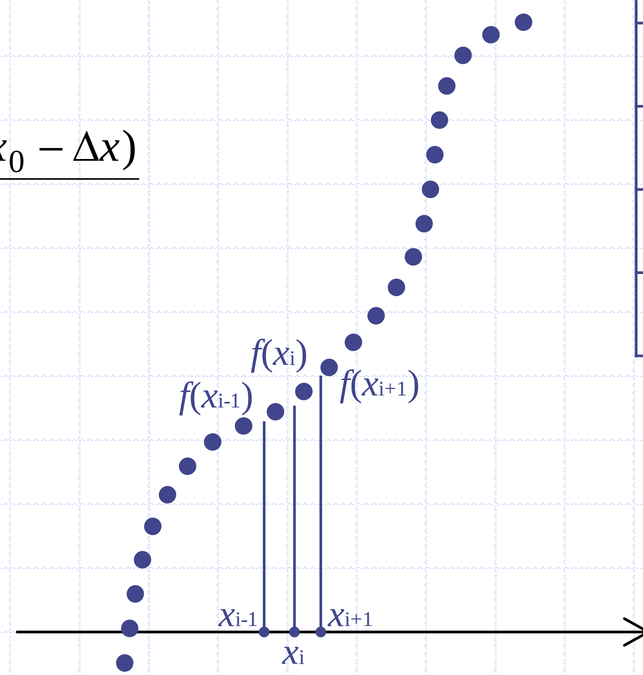
- Численное дифференцирование (для дискретной функции):
  - правосторонняя разность:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{(x_{i+1} - x_i)} \qquad f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

  - левосторонняя разность:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})} \qquad f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

f_1	x_1
f_2	x_2
…	…
f_i	x_i
…	…
f_n	x_n



Двусторонняя разность

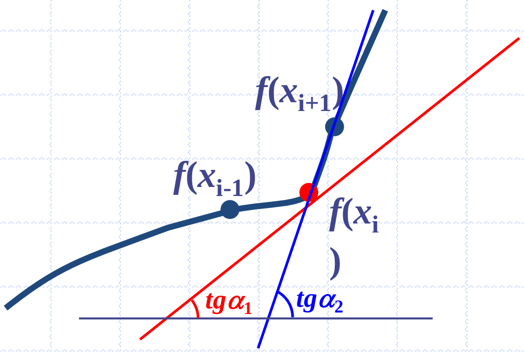
- Более точное значение производной:

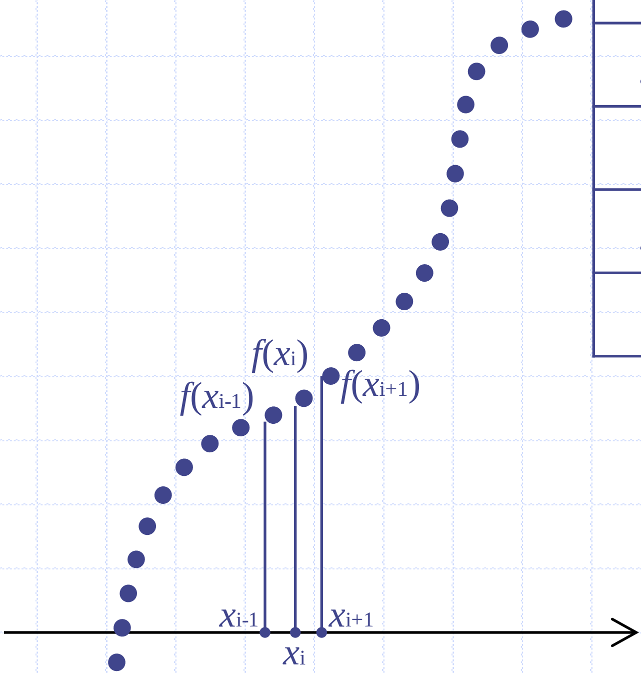
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}$$

- Двусторонняя разность:

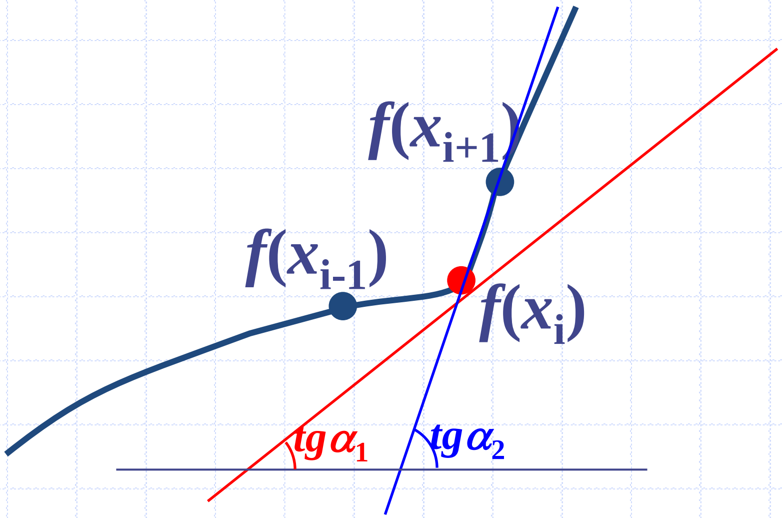
$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})}$$

f_1	x_1
f_2	x_2
...	...
f_i	x_i
...	...
f_n	x_n

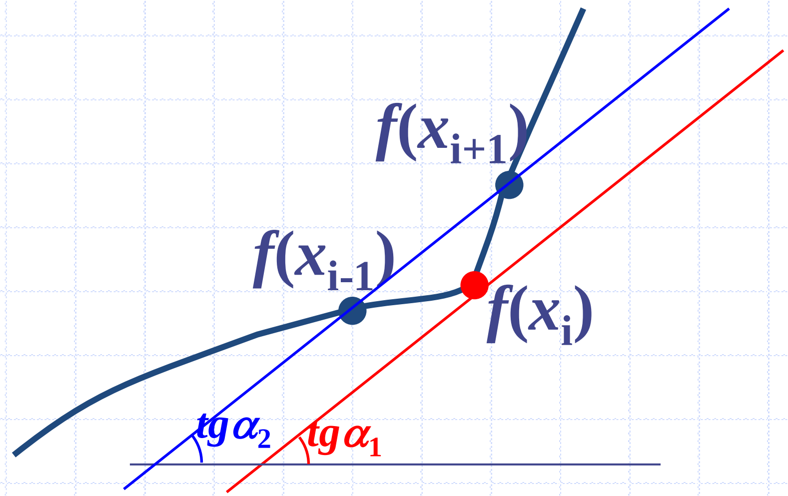




Графическое представление производной



Односторонняя разность



Двусторонняя разность

- $\mathrm{tg}\,\alpha_1$ - точное значение производной
  (тангенс угла наклона касательной к функции в точке x_i)
- $\mathrm{tg}\,\alpha_2$ - вычисленное значение производной

Частное дифференцирование функции от многих переменных

- Все аргументы функции становятся константами, кроме аргумента по которому проводится дифференцирование
- Требуемый порядок производной получается путем последовательного вычисления производных, вплоть до требуемого порядка

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

Производная высоких порядков

- Производная *n*-го порядка считается первой производной от (*n*-1)-го порядка:

$$f''(x) = (f'(x))' \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

- или

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{f_1' - f'_{-1}}{2h} = \frac{\dfrac{f_2' - f'_0}{2h} - \dfrac{f_0' - f'_{-2}}{2h}}{2h} = \frac{f_2' - 2f_0' + f'_{-2}}{(2h)^2}$$