



Cálculo de distancias

Felipe Pirul Yévenes
Samuel Saez Fuentealba

1. Introducción:

A continuación conoceremos el caso de Kamilla, es estudiante de topografía, ella se encuentra realizando su practica, en donde debe aplicar conceptos de cálculo para medir la altura de las Torres del Paine. En perspectiva, estamos separados de la torre por el lago, y tenemos que calcular la altura de la distancia desde el pueblo a los pies de la torre. En este trabajo se espera que se haga un planteamiento sobre el problema y se proponga un modelo, donde definiremos lo que sabemos y lo que no sabemos. De esta forma, el problema se puede solucionar de forma óptima y más eficaz. También intenta resolver un sistema de ecuaciones expresadas en fórmulas numéricas para que de esta manera se pueda verificar una prueba de concepto para una situación dada. En resumidas cuentas resolveremos el problema paso a paso, considerando la información que obtenemos de la novela "Las Torres".

2. Modelado:

Antes de comenzar con nuestro modelado del problema, debemos considerar los siguientes puntos:

- Desconocemos la longitud del lago.
- Desconocemos la posición exacta de las torres.
- Desconocemos las características de las torres.

Modelado que ocuparemos:

$$d(x, y) = \sqrt{(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + (X_3 - Y_3)^2}$$

Esta ecuación la llevaremos a un plano tridimensional en donde tenemos las coordenadas (x,y,z) que en nuestro caso serán (a_1, a_2, a_3) .

Primero obtendremos la distancia que hay desde distintos puntos de la laguna hasta la cima. Para esto, trazaremos tres triangulos los cuales irán desde puntos predeterminados de la laguna hasta la cima de la montaña y calcularemos la distancia de estos segmentos usando el siguiente teorema:

$$|P_2P_1| = \frac{|P_2P_3| \cdot \sin(\alpha(P_3))}{\sin(\alpha(P_1))}$$

En donde αP_1 corresponde al angulo que se forma en la cima de la montaña.

- $|P_2P_3|$: Distancia entre los puntos BC ; DE ; FG
- αP_3 : Ángulo formado en el punto evualuado

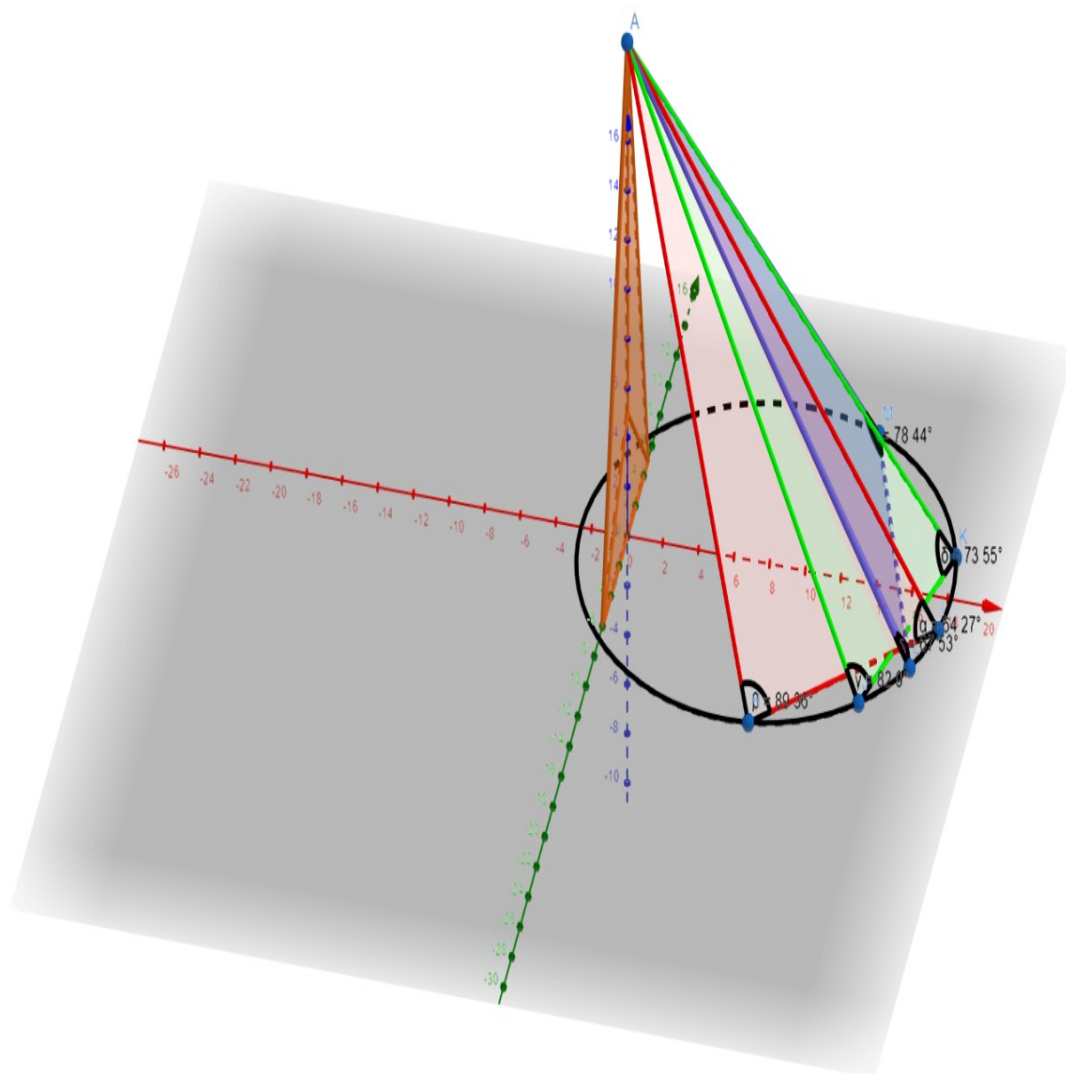
Sabido esto podemos plantear la ecuación de distancia de la siguiente forma:

- $|BA| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$
- $|BA|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$

De esta forma obtendremos una ecuación para cada punto de nuestros tres triángulos que van desde los puntos en la laguna hasta la cima en común que tienen.

- $f_1(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3) - (|BA|)^2$
- $f_2(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (a_3 - c_3) - (|CA|)^2$
- $f_3(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - d_1)^2 + (a_2 - d_2)^2 + (a_3 - d_3) - (|DA|)^2$
- $f_4(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - e_1)^2 + (a_2 - e_2)^2 + (a_3 - e_3) - (|EA|)^2$
- $f_5(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - f_1)^2 + (a_2 - f_2)^2 + (a_3 - f_3) - (|FA|)^2$
- $f_6(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - g_1)^2 + (a_2 - g_2)^2 + (a_3 - g_3) - (|GA|)^2$

Para tener una idea de cómo se vería nuestro modelado, usaremos "Geogebra 3D".^{el} cual nos permitirá obtener información en forma más precisa y rápida.



Geogebra nos entrega los siguientes datos :

- Coordenadas de los puntos por el lado de la laguna.
- Distancia entre los puntos por el lado de la laguna.
- Ángulos generados en los vértices de nuestros triángulos.

Las coordenadas dadas por geogebra son :

- A : (0 ; 0 ; 20)
- B : (9.18 ; -10.29 ; 0)
- C : (17.96 ; -2.15 ; 0)
- D : (14.76 ; -7.7 ; 0)
- E : (17.83 ; 2.7 ; 0)
- F : (16.98 ; -4.86 ; 0)
- G : (11.94 ; 9.52 ; 0)

Las distancias de los segmentos |BC| , |DE| , |FG| son:

- |BC| = 11.98
- |DE| = 10.84
- |FG| = 15.24

Reemplazaremos estos datos en la ecuación anteriormente mencionada:

$$|P_2P_1| = \frac{|P_2P_3| \cdot \sin(\alpha(P_3))}{\sin(\alpha(P_1))}$$

Entonces:

- $|BA| = \frac{11,98 \cdot \sin(64,27)}{\sin(26,37)} = 24,29$
- $|CA| = \frac{11,98 \cdot \sin(89,36)}{\sin(26,37)} = 29,97$
- $|DA| = \frac{10,84 \cdot \sin(73,55)}{\sin(23,55)} = 26,02$
- $|EA| = \frac{10,84 \cdot \sin(82,9)}{\sin(23,55)} = 26,92$
- $|FA| = \frac{15,24 \cdot \sin(78,44)}{\sin(34,03)} = 26,68$
- $|GA| = \frac{15,24 \cdot \sin(67,53)}{\sin(34,03)} = 25,16$

Distancia desde puntos de la laguna hasta la cima "A" de la montaña.

Una vez obtenidas las distancias desde nuestros puntos en la laguna hacia la cima, podemos expresar el mismo sistema anterior pero esta vez reemplazando las coordenadas y la distancia de los segmentos obtenidos.:

- $f_1(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 9, 8)^2 + (a_2 - (-10, 29))^2 + (a_3 - 0) - (24, 29)^2$
- $f_2(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 17, 96)^2 + (a_2 - (-2, 15))^2 + (a_3 - 0) - (29, 97)^2$
- $f_3(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 14, 76)^2 + (a_2 - (-7, 7))^2 + (a_3 - 0) - (26, 02)^2$
- $f_4(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 17, 83)^2 + (a_2 - 2, 7)^2 + (a_3 - 0) - (26, 92)^2$
- $f_5(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 16, 98)^2 + (a_2 - (-4, 86))^2 + (a_3 - 0) - (26, 68)^2$
- $f_6(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 11, 94)^2 + (a_2 - (9, 52))^2 + (a_3 - 0) - (25, 16)^2$