

# 目录

<b>第一章 量子开放系统</b>	<b>2</b>
1.1 简介	2
1.1.1 启发式推导	3
1.2 动力系统的一般性考量	3
1.3 量子信道 Quantum Channel	4
1.3.1 利用过程层析计算量子信道	17
1.3.2 量子信道的局限性	18
1.4 量子 Markov 演化	18
1.4.1 马尔科夫过程 Markov Process	18
1.4.2 量子 Markov 动力学	21
1.4.3 主方程的微观推导	23
1.5 经典噪声	26
1.6 量子噪声与量子比特-热库模型 Quantum Noise and Qubit-bath Model	26
1.6.1 Polaronic Interaction of a Two-Level System with a Phonon Bath	26
1.6.2 The Spin-boson System	27
1.6.3 Pure Dephasing Model	27
1.6.4 耗散环境中的二能级系统: JC 模型 Two-level System in a Dissipative Environment: JC Model	31
1.6.5 大失谐近似	32
1.6.6 Single qubit with multiple decoherence channels	32
1.7 Hierarchical Equations Of Motion (HEOM)	33
1.8 量子轨迹 Quantum trajectory	33
1.8.1 量子随机过程	33
<b>参考文献</b>	<b>35</b>



## 量子开放系统

## 内容提要

- 量子信道:公理化定义-Kraus 算符和表示-系统
- 量子噪声模型
- 环境耦合形式
- 量子轨迹和量子随机过程
- 量子 Markov 演化

## 1.1 简介

在封闭的非相对论量子系统中，系统的动力学演化满足薛定谔，这种演化具有么正性。研究开放量子系统的主要动机是：

1. 环境不可避免的相互作用：量子系统在处理信息时总是处于某种环境中，无法完全隔离。例如，在量子计算中，量子比特 (qubits) 会受到周围环境的影响，如温度波动、电磁场干扰等，靠得很近的两个超导量子比特可能会发生串扰，这些都会导致量子信息的丢失，即所谓的量子退相干。研究开放量子系统有助于我们理解和控制这种退相干过程，提高量子计算机的稳定性和性能。
2. 简化模型：当外界环境维度非常高，甚至达到宏观量级时，将整个系统（包括量子系统和环境）视为一个封闭系统进行研究是不切实际的，因为这会涉及到极其复杂的动力学。通过研究开放量子系统，我们可以专注于感兴趣的量子系统本身，而将环境的影响以某种方式简化，例如原子吸收和放出光子时可以将原子视为开放量子系统、将其周围的光场视为一个热库；
3. 量子计算和通信的实际需求：在量子计算和量子通信中，我们经常需要处理量子信息的输入和输出。例如，量子纠错码需要引入额外的量子比特来保护信息，这些辅助比特在完成任务后可能会被丢弃。这种情况下，需要统一的数学语言来描述这种输入和输出比特数不相同的量子过程，主要的量子系统（如量子比特）与辅助比特之间的相互作用可以被视为开放系统的行为。
4. 量子热力学和量子信息：开放量子系统的研究还有助于我们理解量子热力学，即量子系统与热库交换能量和信息时的行为。这包括量子相变、量子统计力学以及宏观量子现象，如量子相干和量子纠缠在宏观尺度上的表现。从热力学的角度考虑，量子开放系统和经典开放系统的一大区别是，在经典系统的热量交换过程中，系统失去的热量就是环境获得的热量，而量子系统中相互作用能不能被忽略。

在开放系统问题中，由于同外界热库的相互作用，约化量子系统系统的动力学演化通常是非么正、不可逆的 [6]。

根据记忆效应 (memory effect) 的重要性，可以将动力学分为马尔科夫或非马尔科夫的 [8, 25]，定性地说，如果表征热库的时间尺度比系统的时间尺度短<sup>1</sup>，则动力学是马尔科夫的，否则是非马尔科夫的 [8, p117]。非马尔科夫性可以用探针与环境的信息流动方向来刻画，如果信息是单向地从探针流到热库，则动力学是马尔科夫的，若信息往复流动，则是非马尔科夫的 [14, 33]。

<sup>1</sup>在短环境相关时间的条件下，可以忽略记忆效应，并用量子动力学半群的形式表示简化的系统动力学。

### 1.1.1 启发式推导

参考 [lidar2013QuantumErrorCorrectiona]。对一个量子系统做任意的两体划分，分成系统和热库两部分，哈密顿量总是可以拆成系统哈密顿量、环境哈密顿量、相互作用哈密顿量三项

$$H_{SB} = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + H_I$$

不失一般性<sup>2</sup>，可设

$$H_I = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \otimes B_{\alpha}$$

其中的  $S_{\alpha}$  和  $B_{\alpha}$  都是 Hermite 算符。假设初始时系统和热库环境处于直积态，

$$\rho_{SB}(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B(t_0)$$

演化到  $t$  时刻，trace 掉热库，只考察系统部分的演化

$$\begin{aligned} \rho_S(t_1) &= \sum_{\mu} \left\langle \mu_B \left| U(t_1, t_0) \left( \rho_S(0) \otimes \sum_{\nu} \lambda_{\nu} |\nu_B\rangle \langle \nu_B| \right) U^{\dagger}(t_1, t_0) \right| \mu_B \right\rangle \\ &= \sum_a A_a \rho_S(t_0) A_a^{\dagger} \end{aligned}$$

其中 Kraus 算符

$$A_a = \sqrt{\lambda_{\nu}} \langle \mu_B | U(t_1, t_0) | \nu_B \rangle; \quad a = (\mu, \nu)$$

上述过程给出的映射  $\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho) \equiv \sum_a A_a \rho A_a^{\dagger}$ ，有几个值得注意的性质，

- 由于么正演化和偏迹都是线性的，所以  $\mathcal{E}$  是线性的
- $\mathcal{E}$  保持了态的归一化，有  $\text{tr} \rho(t) = \sum_a \text{tr} (A_a \rho_S(0) A_a^{\dagger}) = \sum_a \text{tr} (\rho_S(0) A_a^{\dagger} A_a) = 1 \Leftrightarrow \sum_a A_a^{\dagger} A_a = I_S$
- $\mathcal{E}$  是正的映射，实际上  $\mathcal{E}$  还是全正的。

## 1.2 动力系统的一般性考量

在一定的条件下，物理系统的动力学可以被视为数学上的动力学系统  $(\Phi, T, X)$ ，其中  $\Phi: T \times X \rightarrow X$  定义了么半群  $T$  在集合  $X$  上的群作用。数学和物理的动力学系统体现出两点差别：1、描述物理系统的方程有时候会超出了这个定义，而在数学上满足上述定义的方程也未必是物理学家所关心的。常见的描述物理系统的方程通常包括：ODE、PDE、差分方程、代数微分方程、微积分方程、分数维微分方程、随机微分方程。2、即使是对于同一个动力学系统，数学和物理往往对相同的现象有着不同的解释，两者的价值观不完全相同，物理更侧重方程描述现实世界的能力。如何认识、理解和刻画一个动力系统？需要哪些信息？如何获得这些信息？

考虑由 ODE 描述的动力学系统，通常会从一下方面进行分析：

- 方程的解的存在性、唯一性、稳定性。
- 自治系统可以用群论、拓扑、势函数等工具进行分析（待补充）；而非自治系统通常可以通过增加空间维度的方式来自治化。
- 保守系统和耗散系统。
- 吸引子和吸引域 (basin of attraction)。
- 不动点解（又称定态解）。
- 解的稳定性，包括局域稳定性和全局稳定性。线性 ODE 的稳定性分析。
- 分岔。
- 混沌。刻画混沌的方式包括：庞加莱截面、计算功率谱密度和自相关函数、计算 Lyapunov 指数谱。
- 动力系统的统计描述。动力系统的定义分为几何定义和测度论定义两种，测度论定义更强调动力学的统计描述，这种描述能帮助我们更好地研究动力系统的长期行为。包括动力系统的回归性、遍历性和混合性。

<sup>2</sup>如果  $\alpha \mapsto S_{\alpha}$  和  $\alpha \mapsto B_{\alpha}$  是单射，会失去一般性吗？

从动力学方程的角度考察开放量子系统，参见图??。

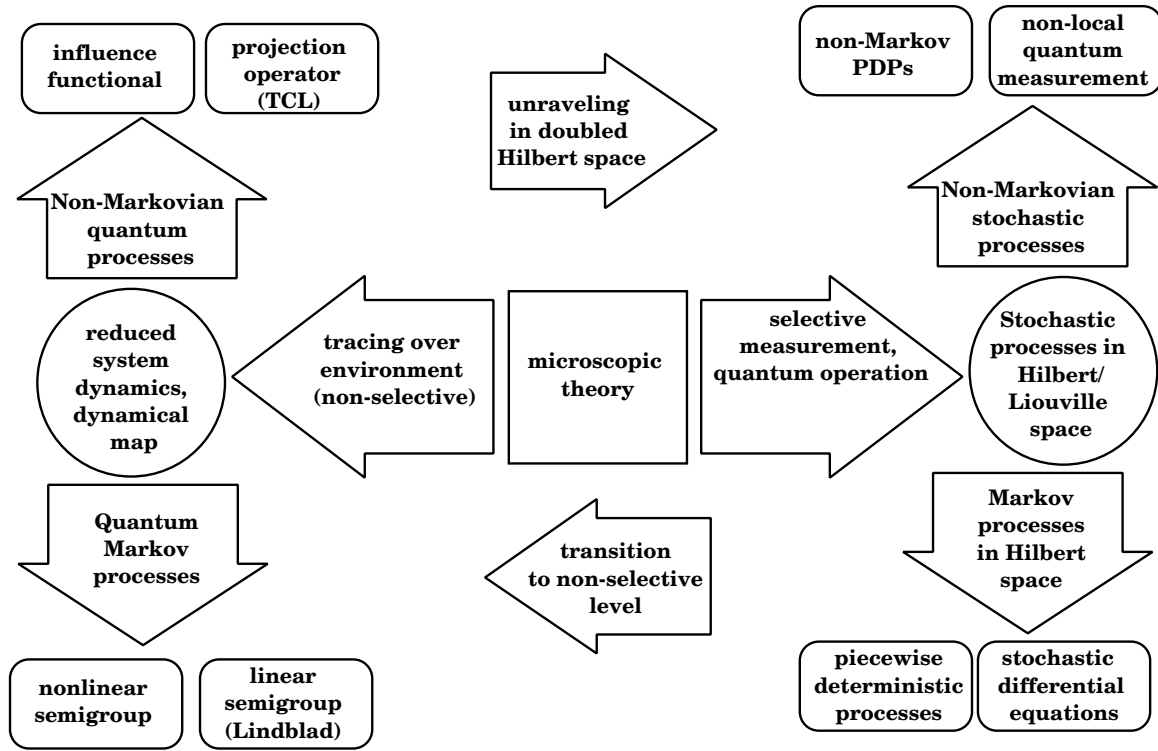


图 1.1: 开放量子系统中的概念与方法 [7]

### 1.3 量子信道 Quantum Channel

#### 定义 1.1 (全正映射 [30, Chap.3])

- $\mathfrak{A}$  and  $\mathfrak{B}$  are two  $C^*$ -algebras.  $S \subseteq \mathfrak{A}$  is an **operator system**, that is,  $S$  is a self-adjoint (i.e. dagger closed) subspace of  $\mathfrak{A}$  containing 1.
- $\phi : S \rightarrow \mathfrak{B}$  is a linear map.  $\phi$  is called **positive** if  $\phi(a)$  is positive for all  $a \in S$ .
- The  $C^*$ -algebra of  $n \times n$  matrices with entries in  $\mathfrak{B}$  is denoted by  $M_n(\mathfrak{B})$ . We define

$$\phi_n : M_n(S) \rightarrow M_n(\mathfrak{B}), (a_{i,j}) \mapsto \phi_n((a_{i,j})) = (\phi(a_{i,j}))$$

We call  $\phi$   **$n$ -positive** if  $\phi_n$  is positive, and we call  $\phi$  **completely positive** if  $\phi$  is  $n$ -positive for all  $n$ . We call  $\phi$  **completely bounded** if  $\sup_n \|\phi_n\|$  is finite, and we set

$$\|\phi\|_{cb} = \sup_n \|\phi_n\|.$$

**笔记**  $\mathfrak{A} \otimes M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathfrak{A}), \sum_{ij} A_{ij} \otimes E_{ij} \mapsto (A_{ij})$  是  $*$ -同构，通常直接记作  $(A_{ij}) = \sum_{ij} A_{ij} \otimes E_{ij}$ ，其中  $E_{ij}$  是 matrix unit。因此有全正的等价定义： $\phi$  是  $n$ -正的  $\Leftrightarrow \phi \otimes \mathbb{I}_{n \times n}$  是正的，其中  $\mathbb{I}_{n \times n}$  是  $n$  阶单位矩阵。必要性：设  $\phi$  是  $n$ -正的，任取正的  $x = \sum_{ij} A_{ij} \otimes E_{ij} \in \mathfrak{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ ，有  $(\phi(A_{ij})) = \sum_{ij} \phi(A_{ij}) \otimes E_{ij} = (\phi \otimes \mathbb{I})(\sum_{ij} A_{ij} \otimes E_{ij})$  是正的，即  $\phi \otimes \mathbb{I}$  是正的。充分性类似。

$\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  是  $*$ -同构，则由

$$\pi(A^*A) = \pi(A^*)\pi(A) = \pi(A)^*\pi(A) \geq_{\mathfrak{B}} 0$$

可知， $\pi$  是正的。 $\pi$  是全正的，即  $\pi_n : M_n(\mathfrak{A}) \rightarrow M_n(\mathfrak{B})$  是正的。

根据引理 [30, p. Lm.3.13], 任取  $P = B^*B \in M_n(\mathfrak{A})$ , 都有


$$P = R_1^*R_1 + \cdots + R_n^*R_n$$

其中  $R_k$  是  $B$  将除了第  $k$  行以外的其他元素置零所得的矩阵。只有一行非零的矩阵  $R$  满足

$$R^*R = (a_i^*a_j)$$

只要对于任意的  $a_i, a_j \in \mathfrak{A}$  证明  $\pi_n((a_i^*a_j))$  是正的, 这一结论被用于证明 Stinespring 扩张定理的逆命题。

$$\begin{aligned} \pi_n((a_i^*a_j)) &= (\pi(a_i^*)\pi(a_j)) \\ &= (\pi(a_i))^* \pi(a_j) \\ &= \begin{pmatrix} \pi(a_1) \cdots \pi(a_n) \\ 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \pi(a_1) \cdots \pi(a_n) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.1)$$

 **技巧** 利用上述引理, 将全正性的证明约化为  $(\pi(a_i^*a_j))$  的正性的证明。这个技巧在 Choi[30, Th.3.14] 的证明中也发挥了作用。

**引理 1.1 ([30, p. Lm.3.13])**

$\mathfrak{A}$  是  $C^*$ -代数, 任取  $P = B^*B \in M_n(\mathfrak{A})$ , 都有

$$P = R_1^*R_1 + \cdots + R_n^*R_n$$

其中  $R_k$  是  $B$  将除了第  $k$  行以外的其他元素置零所得的矩阵。

证明:

□

$$\begin{aligned} \text{Lm.3.13} \quad R &\in M_n(\mathfrak{A}) \\ R^*R &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^* & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^*a_1 & a_1^*a_2 & \cdots & a_1^*a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^*a_1 & a_n^*a_2 & \cdots & a_n^*a_n \end{pmatrix} = (a_i^*a_j) \\ \text{positive} \quad B &= R_1 + \cdots + R_n \quad R_i = \begin{pmatrix} b_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{in} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ M_n(\mathfrak{A}) \ni P &= B^*B = R_1^*R_1 + \cdots + R_n^*R_n, \\ &= (b_{i1}^*b_{j1}) + \cdots + (b_{in}^*b_{jn}) \\ \varphi_n((a_i^*a_j)) &= (\varphi(a_i^*)\varphi(a_j)) \rightarrow \text{全是 positive} \end{aligned}$$

图 1.2: Lm.3.13

在开放系统中, 量子态的时间演化不满足薛定谔方程, 为了在保持量子态的物理含义和态生活的空间的数学结构的情况下, 尽可能一般地讨论量子态的动力学过程, 人们提出了以下概念。

**定义 1.2 (Quantum Channel and Quantum Operation)**

态空间上保迹的全正的线性映射  $\mathcal{E}: B(H_1) \rightarrow B(H_2)$  称为 (薛定谔表象的) **量子信道** (quantum channel), 如果条件放宽为迹小于等于 1, 那么称该映射为 **量子操作** (quantum operation)[29, Sec.8.2.4]。

 **笔记** 为什么在定义这个概念的时候要求迹不能大于 1?

量子操作可纠错的必要条件定理??[34, Th.7.22] 是

$$\text{tr}(\mathcal{E}(\rho)) = \text{const.} = \kappa_{\mathcal{E}} \in [0, 1] \quad \forall \rho \in D(H^c)$$

其中,  $H^c$  是码空间。

根据内积定义量子信道的厄米共轭,  $\langle Y, \mathcal{E}(X) \rangle = \langle \mathcal{E}^\dagger(Y), X \rangle$

$$\mathcal{E}^\dagger(\cdot) = \sum_{k=1}^N E_k^\dagger \cdot E_k$$

Channel 的凸线性组合、直积、复合都仍然是 Channel。

量子信道的三种等价刻画, 参见图 1.3:

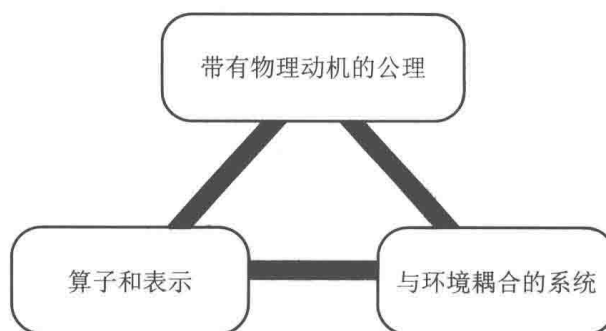


图 8-2 三种等价的量子操作方法, 但依赖于预期的应用有不同的优势

图 1.3: 量子信道的三种等价刻画

#### • 带有物理动机的公理 (公理化定义)

- 线性的动机: 量子力学大多数时候都是线性的。
- 保迹 (保持态的归一化) 的动机: 么正变换是保持迹的, 如果量子信道是以概率  $p_i$  发生么正变换  $U_i$ , 那么概率的归一化要求总效果  $\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho) = \sum p_i U_i \rho U_i^\dagger$  是保迹的。
- 次归一化的动机: 1、量子信道中如果存在某些我们未知的过程, 使得量子态通过信道后进入了更大的希尔伯特空间, 但我们仍用较小的 Hilbert 空间来表述它, 就会使得态不再是归一的。2、考虑次归一化的量子态在有时候也是有用的,

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \rho_B^0 + |1\rangle\langle 1| \otimes \rho_B^1$$

$$\text{tr}(|0\rangle\langle 0| \otimes \rho_B^0 + |1\rangle\langle 1| \otimes \rho_B^1) = \text{tr}(\rho_B^0) + \text{tr}(\rho_B^1) = 1$$

$$P(\text{发生 } |0\rangle\langle 0| \otimes E_B) = \text{tr}(|0\rangle\langle 0| \otimes \rho_B^0 + |1\rangle\langle 1| \otimes \rho_B^1) |0\rangle\langle 0| E_B) \\ = \text{tr}(\rho_B^0 E_B)$$

- 正的动机: 我们希望信道输出的态仍然是正的, 这一点实际上保证了任何事件发生的概率大于等于零, 经过归一化之后仍然可以被视为量子态。诚然, 如果两个子系统初始时存在纠缠, 通过某些信道, 再 trace 掉其中一个子系统之后剩下的部分不再是正的 (举例?), 此时可以说进行系统和热库划分已经失去了物理意义,
- 全正的动机: 初始时系统同宇宙中的其他部分处于直积态, 经历  $\mathcal{E} \otimes \text{id}$  之后仍然保持为量子态。

#### • Kraus 的算符和表示

#### • 与环境耦合的系统

其中, 后面两种表示可以视为 Steinspring 膨胀定理的推论。

**定理 1.1 (Stinespring's dilation theorem[30, Th.4.1])**

Let  $\mathfrak{A}$  be a unital  $C^*$ -algebra, and let  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$  be a completely positive map. Then there exists a Hilbert space  $\mathcal{K}$ , a unital  $*$ -homomorphism  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathcal{K})$ , and a bounded operator  $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  with  $\|\phi(1)\| = \|V\|^2$  such that

$$\phi(a) = V^* \pi(a) V.$$

Conversely, given a Hilbert space  $\mathcal{K}$ , a unital  $*$ -homomorphism  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathcal{K})$ , and a bounded operator  $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ , then the map  $\phi = V^* \pi(a) V : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$  is completely positive.

**证明:** 在  $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$  上定义一个 Hermite 对称的共轭双线性函数<sup>3</sup>

$$\langle a \otimes x, b \otimes y \rangle = \langle \phi(b^* a) x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, \phi(a^* b) y \rangle_{\mathcal{H}}$$

Hermite 对称性:

$$\langle b \otimes y, a \otimes x \rangle = \langle \phi(a^* b) y, x \rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle x, \phi(a^* b) y \rangle_{\mathcal{H}}} = \overline{\langle a \otimes x, b \otimes y \rangle_{\mathcal{H}}}$$

按数学家的约定, 第一分量线性第二分量共轭线性。根据

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \right\rangle = \left\langle \phi_n((a_i^* a_j)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^{(n)}} \geq 0$$

可知,  $\phi$  是 全正 的蕴含了  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是半正定的。其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{(n)}}$  是  $\mathcal{H}^{(n)}$  上自然的内积。根据半正定厄米对称的双线性形式的 Cauchy-Schwartz 不等式

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H} \mid \langle u, u \rangle = 0\} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$$

是  $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$  的子空间。设  $u, v \in \mathcal{N}$ , 则

$$0 \leq \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle \leq 2|\langle u, v \rangle| \leq 2\sqrt{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle} = 0$$

进而,

$$\langle u + \mathcal{N}, v + \mathcal{N} \rangle := \langle u, v \rangle$$

是商空间  $(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$  的内积, 商空间在某种意义下消除了简并。 $(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{N}$  经过完备化得到的 Hilbert 空间记为  $\mathcal{K}$ , 内积记为  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ 。

给定  $a \in \mathfrak{A}$ , 定义  $\pi(a) : \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$ , 满足

$$\pi(a)(b \otimes x) = (ab) \otimes x$$

在以  $\mathfrak{A}$  中的元素构成的  $n$  阶方阵的  $C^*$ -代数  $M_n(\mathfrak{A})$  的正元素构成的集合  $M_n(\mathfrak{A})^+$  中有

$$(a_i^* a^* a a_j) \leq \|a^* a\| \cdot (a_i^* a_j)$$

<sup>3</sup>与内积相比差了什么? 正定性?



这是因为

$$\begin{aligned}
 & \|a^*a\| \cdot (a_i^*a_j) - (a_i^*a^*aa_j) \\
 &= a_i^* (\|a^*a\| - a^*a) a_j \\
 &= \begin{pmatrix} a_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^* & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{diag}(\|a^*a\| - a^*a) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\|a^*a\| - a^*a} \\ \vdots \\ \sqrt{\|a^*a\| - a^*a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \sqrt{\|a^*a\| - a^*a} \\ \vdots \\ \sqrt{\|a^*a\| - a^*a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

考虑

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \pi(a) \left( \sum_j a_j \otimes x_j \right), \pi(a) \left( \sum_i a_i \otimes x_i \right) \right\rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle \varphi(a_i^* a^* a a_j) x_j, x_i \rangle_H \leq \|a^*a\| \sum_{i,j} \langle \varphi(a_i^* a_j) x_j, x_i \rangle_H \\
 &= \|a\|^2 \cdot \left\langle \sum_j a_j \otimes x_j, \sum_i a_i \otimes x_i \right\rangle
 \end{aligned}$$

因此

$$\pi(a)(N) \subseteq N$$

$\pi(a)$  诱导了良定义的映射  $\pi(a) : (\mathfrak{A} \otimes H)/N \rightarrow (\mathfrak{A} \otimes H)/N$ ,  $u + N \mapsto \pi(a)(u) + N$  由于  $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ , 因此  $\pi(a)$  有界, 将其拓展到完备化的  $K$  上。

可以验证  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow B(K)$  是 unital 的  $*$ -同态。  $\pi(1) = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 & \langle \alpha \otimes x + N, \pi(a)^*(\beta \otimes y + N) \rangle_K \\
 &= \langle \pi(a)(\alpha \otimes x + N), \beta \otimes y + N \rangle_K \\
 &= \langle a\alpha \otimes x + N, \beta \otimes y + N \rangle_K \\
 &= \langle \alpha x + N, a^* \beta \otimes y + N \rangle_K \\
 &= \langle \alpha x + N, \pi(a^*) \beta \otimes y + N \rangle_K
 \end{aligned}$$

定义  $V(x) : H \rightarrow K, x \mapsto 1 \otimes x + N$ , 由

$$\|Vx\|^2 = \langle 1 \otimes x, 1 \otimes x \rangle = \langle \phi(1)x, x \rangle_H \leq \|\phi(1)\| \cdot \|x\|^2$$

可知,  $V$  是有界的, 实际上

$$\|V\|^2 = \sup \{ \langle \phi(1)x, x \rangle_H : \|x\| \leq 1 \} = \|\phi(1)\|$$

对任意的  $x, y \in H$ , 有

$$\langle V^* \pi(a) V x, y \rangle_H = \langle \pi(a) 1 \otimes x, 1 \otimes y \rangle_K = \langle \phi(a)x, y \rangle_H$$

故

$$V^* \pi(a) V = \phi(a)$$

逆命题: 任何  $*$ -同态都是全正的, 这在已经知道式(1.1)情况下是显然的。  $\square$

 笔记

有了量子信道和操作的定义之后, 开始讨论其首要性质。

**引理 1.2 (蔡氏定理 (Choi))**

$\mathfrak{B}$  是  $C^*$ -代数,  $\mathcal{E}: M_n \rightarrow \mathfrak{B}$  是线性映射, 下列命题等价

- (1)  $\mathcal{E}$  全正。
- (2)  $\mathcal{E}$  是  $n$ -正的。
- (3)  $(\mathcal{E}(E_{i,j}))_{i,j=1}^n$  在  $M_n(\mathfrak{B})$  中是正的。

**证明:** (1)  $\Rightarrow$  (2) 由定义。

(2)  $\Rightarrow$  (3) 只要证  $(E_{ij})$  是正的,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_1^* & \dots & x_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} & \dots & E_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{n1} & & E_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{ij} x_i^* E_{ij} x_j = \sum_{ij} x_i^* \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_{jj} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow i^{th} \text{ row} \\ &= \sum_{ij} \bar{x}_{ii} x_{jj} = \sum_{ij} \bar{y}_i y_j \\ &= \overline{\left( \sum y_i \right)} \left( \sum y_j \right) \geq 0 \end{aligned}$$

((3)  $\Rightarrow$  (1)) 只要证明  $\mathfrak{B} = B(H)$  的情形, 设  $|x_1\rangle, \dots, |x_k\rangle \in H$ ,  $B_1, \dots, B_k \in M_n$ , 根据引理 [30, p. Lm.3.13], 只要证明

$$\sum_{i,j} \langle \mathcal{E}(B_i^* B_j) x_j | x_i \rangle \geq 0$$

将矩阵  $B_l$  展开,  $B_l = \sum_{r,s=1}^n b_{r,s,\ell} E_{r,s}$ , 设  $y_{t,r} = \sum_{j=1}^k b_{r,t,j} x_j$ , 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \langle \mathcal{E}(B_i^* B_j) x_j | x_i \rangle &= \sum_{r=1}^n \sum_{s,t=1}^n \left\langle \mathcal{E}(E_{s,t}) \left( \sum_{i,j} \bar{b}_{r,s,i} b_{r,t,j} x_j \right) | x_i \right\rangle \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s,t} \langle \mathcal{E}(E_{s,t}) y_{t,r} | y_{s,r} \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

最后一步利用了  $(\mathcal{E}(E_{st}))$  是正的。 □



**笔记** 实际上, 证明中使用的  $(E_{ij})$  是一个最大纠缠态。

设存在映射  $\mathcal{E}: B(H_A) \rightarrow B(H_B)$ ,  $\dim H_A = d_A$ ,  $\{|i\rangle\}$  是  $H_A$  上的一组 ONB, 取最大纠缠态  $|I\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} |i, i\rangle / \sqrt{d_A}$ ,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I})(|I\rangle\langle I|) \\ &= (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I}) \left( \sum_{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j| \right) d_A \\ &= (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I}) \left( \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij} \right) d_A \\ &= (\mathcal{E}(E_{ij})) d_A \end{aligned}$$

于是, 根据蔡氏定理<sup>4</sup>, 有

$$\mathcal{E} \text{ 全正} \Leftrightarrow (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I})(|I\rangle\langle I|) \text{ 是正的}$$

<sup>4</sup>转置并不是 CP 的是因为这个操作非线性?

使用 Choi-Jamiolkowski 同构可以可以使把量子信道从抽象的映射变成具体的矩阵，便于我们调动关于具体矩阵的性质和定理。设  $\rho \in D(H)$  是  $d$  阶密度矩阵，量子信道  $\mathcal{E} : D(H) \rightarrow D(H')$ ，以  $\mathcal{E}$  为元素的集合与  $D(H \otimes H')$  同构，按照以下方式构造一个具体的同构。设  $\dim H = d$ ， $\dim H' = d'$ ， $\{e_i\}$  和  $\{e'_i\}$  分别是  $H$  和  $H'$  的一组 ONB。称约化后得到最大混态（即正比于单位算符的态）的量子态为 **最大纠缠态** (maximally entangled)，任意取定最大纠缠态，

$$|I\rangle = \sum_{i=1}^d |e_i, e_i\rangle / \sqrt{d}$$

定义映射

$$\mathcal{E} \mapsto E = (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I})(|I\rangle\langle I|) \in D(H' \otimes H)$$

称上式定义了 **Choi-Jamiolkowski 同构**<sup>5</sup>。任取  $F \in D(H \otimes H')$ ，定义逆映射 [17, p.475]

$$F \mapsto \mathcal{F}(\cdot) = d \sum_{ij} \text{tr} \left( F \left( |e'_i\rangle\langle e'_j| \otimes (\cdot)^\top \right) \right) |e'_i\rangle\langle e'_j|$$

其中转置是关于基底  $\{e_i\}$  做的。

互逆性的检验

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F} \otimes \mathbb{I})|I\rangle\langle I| \\ &= (\mathcal{F} \otimes \mathbb{I}) \left( \sum_k |e_k\rangle\langle e_k| \otimes |e_k\rangle\langle e_k| \right) / d \\ &= \sum_k \text{tr} \left( F \left( |e'_i\rangle\langle e'_j| \otimes |e_l\rangle\langle e_k| \right) \right) |e'_i\rangle\langle e'_j| \otimes |e_k\rangle\langle e_l| \\ &= F \end{aligned}$$

#### 定理 1.2 (量子信道的算符和表示 (Choi-Kraus))[5, Th.1.17]

设  $H_A$  和  $H_B$  是 Hilbert 空间， $\rho_A \in D(H_A)$  是  $H_A$  上的密度算符，映射  $\mathcal{E} : B(H_A) \rightarrow B(H_B)$  是量子信道的当且仅当存在一组 Kraus 算符  $E_i : H_A \rightarrow H_B$ ，满足

$$\mathcal{E}(\rho_A) = \sum_{i=1}^r E_i \rho_A E_i^\dagger$$

且

$$\sum_{i=1}^r E_i^\dagger E_i = \mathbb{I}_A$$

其中  $r \leq \dim(H_A)\dim(H_B)$ 。

$\mathcal{E}$  是量子操作当且仅当归一化条件改为

$$\sum_{i=1}^r E_i^\dagger E_i \leq \mathbb{I}_A$$



<sup>5</sup>显然，态空间上的同构上考虑保持凸线性，算符空间上的映射保持线性。

**证明:**(全正性  $\Rightarrow$  算符和形式) 利用蔡氏定理。任取  $|\psi\rangle = c_k|k\rangle \in H_A$ ,  $\{|i\rangle\}$  是  $H_A$  上的一组 ONB,  $\rho \in |\psi\rangle\langle\psi|$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\rho) &= \mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) \\
 &= \sum_{kl} c_k \bar{c}_l \mathcal{E}(|k\rangle\langle l|) \\
 &= \langle \bar{\psi} | (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I})(|k\rangle\langle l| \otimes |k\rangle\langle l|) | \bar{\psi} \rangle \\
 &= \langle \bar{\psi} | (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I})(|I\rangle\langle I|) | \bar{\psi} \rangle d_A^2 \\
 &= \left\langle \bar{\psi} \left| \left( \sum_k p_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \right) \right| \psi \right\rangle d_A^2 \\
 &= \sum R_k |\psi\rangle\langle\psi| R_k^\dagger \\
 R_k |l\rangle &\triangleq \sqrt{p_k} d_A \langle l | \varphi_k \rangle \\
 \Rightarrow R_k |\psi\rangle &= \sqrt{p_k} d_A \langle \bar{\psi} | \varphi_k \rangle
 \end{aligned}$$

□

Kraus 算符有一定的规范自由度, 用一个么正算符中的元素对 Kraus 算符做线性组合, 得到的 Kraus 算符对应相同的量子信道。

#### 命题 1.1 (算符和表示的么正自由度)

$\mathcal{E}: B(H_1) \rightarrow B(H_2)$  是量子信道,  $\mathcal{E}(\cdot) = \sum_{i=1}^n E_i \cdot E_i^\dagger$ , 则下列等价

- (1)  $\mathcal{E}(\cdot) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot F_i^\dagger$
- (2) 存在  $n \times n$  的么正矩阵  $(u_{ij})$ , 满足  $E_i = \sum_j u_{ij} F_j$



**证明:**(2) $\Rightarrow$ (1) 易得。

(1) $\Rightarrow$ (2)

根据双矢量公式, 有

$$\sum_{i=1}^n E_i \otimes E_i^* = \sum_{i=1}^n F_i \otimes F_i^*$$

在矩阵空间中找到一组 ONB  $\{K_i\}$ 。设  $E_i = \sum_j e_{ij} K_j$ ,  $F_i = \sum_j f_{ij} K_j$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n E_i \otimes E_i^* &= \sum F_i \otimes F_i^* \\
 \Rightarrow \sum e_{ij} e_{ip}^* K_j \otimes K_p^* &= \sum f_{ij} f_{ip}^* K_j \otimes K_p^*
 \end{aligned}$$

设  $E = (e_{ij})$ ,  $F = (f_{ij})$ , 则有

$$E^\dagger E = F^\dagger F$$

根据极分解  $E = U_1|E|$ ,  $F = U_2|F| = U_2|E|$ , 可知存在么正矩阵满足  $E = UF$ , 即存在  $n \times n$  的么正矩阵  $(u_{ij})$ , 满足  $E_i = \sum_j u_{ij} F_j$ 。 □



**笔记** 回忆: 两个系综构成相同的混态  $\Leftrightarrow$  这两组系综之间只相差么正变换。

#### 命题 1.2 (算符和表示的最小尺寸)

设  $\rho \in D(H)$  是  $d$  维 Hilbert 空间上的密度算符, 量子信道  $\mathcal{E}$  有 Kraus 算符和表示

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^M E_k \rho E_k^\dagger$$

设矩阵  $(W_{jk}) \equiv \left( \text{tr} \left( E_j^\dagger E_k \right) \right) \in \mathbb{C}^{M \times M}$ ,  $\text{rank}(W) = r$ , 则  $M$  是 Hermite 矩阵,  $r \leq d^2$  且  $\mathcal{E}$  的任意算符和表示的 Kraus 算符的个数至少有  $r$  个。



**证明:**利用 trace 相关性质可以证明  $W$  的 Hermite 性

$$\overline{W_{kj}} = \overline{\text{tr}(E_k^\dagger E_j)} = \text{tr}(E_j^\dagger E_k) = W_{jk}$$

设  $\{e_k\}$  是  $\rho$  生活的空间  $D(H)$  的一组 ONB, 将每个 Kraus 算符关于这组基做分解, 有

$$E_j = \sum_{k=1}^{d^2} \alpha_{jk} e_k, j = 1, 2, \dots, M$$

利用 ONB 的正交归一性, 可以将矩阵  $W$  写成

$$\begin{aligned} W_{jk} &= \sum_{p,l=1}^{d^2} \text{tr}(\overline{\alpha_{jp}} e_p^\dagger \alpha_{kl} e_l) \\ &= \sum_{p=1}^{d^2} \overline{\alpha_{jp}} \alpha_{kp} \end{aligned}$$

设矩阵<sup>6</sup> $A = (\alpha_{ij})$ , 则

$$W = \overline{A} A^\top$$

因此,

$$r = \text{rank}(W) = \text{rank}(\overline{A} A^\top) = \text{rank}(A A^\dagger) = \text{rank}(A) \leq d^2$$

其中, 不等号是由于  $A$  的列数为  $d^2$ , 最后一个等号可以用奇异值分解或者讨论方程  $AX = 0$  的解空间的维度来证明, 下面使用第二种方法, 只要证明关于  $X$  的方程  $AX = 0$  和  $A^\dagger AX = 0$  同解即可, 从  $A^\dagger AX = 0$  可知  $(AX)^\dagger AX = 0$ , 因此  $AX = 0$ , 两个方程的解空间相同。设  $S$  是  $n$  元方程组  $AX = 0$  的解空间, 根据定理 [40, Th.5.33]

$$\dim S = n - \text{rank} A$$

可知

$$\text{rank}(A A^\dagger) = \text{rank}(A)$$

由于  $W$  是 Hermite 矩阵, 因此存在  $M$  阶幺正矩阵  $U$  使  $W$  对角化, 设

$$U W U^\dagger = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0), \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, r$$

根据矩阵  $U$  定义一组等价的 Kraus 算符,

$$F_i = \sum_{j=1}^M \overline{u_{ij}} E_j$$

根据  $W$  的定义式, 有


$$\sum_{j,k=1}^M u_{ij} W_{jk} \overline{u_{lk}} = \text{tr}(u_{ij} E_j^\dagger \overline{u_{lk}} E_k) = \text{tr}(F_i^\dagger F_l), \quad i, l = 1, \dots, M \quad (1.2)$$

根据内积  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\dagger B)$  的正定性可知,  $\{F_i\}_{i=1, \dots, M}$  中的前  $r$  个非零, 第  $r+1$  至第  $M$  个为零。由反证法可知, 不可能存在项数更少的 Kraus 算符和表示, 假设存在个数少于  $r$  个的  $\mathcal{E}$  的算符和表示  $\{G_i\}$ , 满足

$$G_i = \sum_{j=1}^M \overline{v_{ij}} E_j$$

重复式(1.2)中的计算过程可知,  $W$  与一个秩小于  $r$  的矩阵相似, 秩也小于  $r$ , 与假设矛盾, 因此 Kraus 算符至少有  $r$  个。

□

 **笔记** 通常称  $W$  的秩  $r$  为量子信道  $\mathcal{E}$  的 **秩** [18], 这样定义的秩和  $\mathcal{E}$  作为线性映射的秩是什么关系呢? 考虑一个幺正变换对应的信道,  $\mathcal{E}(\cdot) = U \cdot U^\dagger$ , 它的量子信道秩为 1, 而作为线性映射是满秩的。取一组特殊的 ONB  $\{e_i\}$ ,

<sup>6</sup>终于有了令人愉悦的矩阵写法。

满足  $(e_i)_{i_1, i_2} = 1$ , 矩阵指标  $(i_1, i_2)$  与基向量指标  $i$  之间存在一一对应关系  $i = (i_1 - 1)d + i_2$ ,  $e_i$  的其余元素为零。例如当  $d = 2$  时, 有

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这组 ONB 满足<sup>7</sup>

$$\text{tr}(e_l^\dagger e_p e_i e_q^\dagger) = \delta_{l_1 p_1} \delta_{i_1 p_2} \delta_{l_2 q_1} \delta_{i_2 q_2}$$

设  $\mathcal{E}$  在  $\{e_i\}$  下的矩阵为  $\tilde{\mathcal{E}}$ , 即

$$(\mathcal{E}(e_1), \dots, \mathcal{E}(e_{d^2})) = (e_1, \dots, e_{d^2}) \tilde{\mathcal{E}}$$

则有

$$\tilde{\mathcal{E}}_{li} = \sum_k \text{tr}(e_l^\dagger E_k e_i E_k^\dagger) = \sum_{k,p,q} \alpha_{kp} \bar{\alpha}_{kq} \text{tr}(e_l^\dagger e_p e_i e_q^\dagger) = \sum_k \alpha_{k, (l_1-1)d+i_1} \bar{\alpha}_{k, (l_2-1)d+i_2} \equiv \sum_k \alpha_{k,f(l,i)} \bar{\alpha}_{k,g(l,i)}$$

上式的右侧不能简单地写成两个矩阵的乘积, 显然, 在一般情况下<sup>8</sup>。

$$\text{rank}(\tilde{\mathcal{E}}) \neq \text{rank}(A^\top \bar{A}) = \text{rank}(\bar{A} A^\top) = r$$

进而, 我们不可能找到一组 ONB, 使得  $\text{tr}(e_l^\dagger e_p e_i e_q^\dagger) = \delta_{lp} \delta_{iq}$  成立, 否则对于任意的  $\mathcal{E}$ , 都有  $\text{rank}(\tilde{\mathcal{E}}) = r$  成立。

### 命题 1.3 (量子操作的性质)

设  $\mathcal{K}: D(\mathcal{H}) \rightarrow D_{\leq}(\mathcal{H})$  是量子操作,  $\{K_l\}_{l=0,\dots,m}$  是相应的 Kraus 算符, 那么对任意的  $0 < \kappa \leq 1$ , 有

$$\sum_{l=1}^m K_l^\dagger K_l \leq \kappa \mathbb{I} \Leftrightarrow \text{tr}(\mathcal{K}(\rho)) \leq \kappa \quad \forall \rho \in D(\mathcal{H})$$

以及

$$\sum_{l=1}^m K_l^\dagger K_l = \kappa \mathbb{I} \Leftrightarrow \text{tr}(\mathcal{K}(\rho)) = \kappa \quad \forall \rho \in D(\mathcal{H})$$

**证明:** 首先注意到  $\mathcal{K}(\rho)$  和  $\sum_{l=1}^m K_l^\dagger K_l$  是正定的。

(必要性)  $\sum_{l=1}^m K_l^\dagger K_l \leq \kappa \mathbb{I}$  意味着  $\sum_{l=1}^m K_l^\dagger K_l$  的最大本征值小于等于  $\kappa$ , 利用谱分解, 有

$$\begin{aligned} \text{tr}\left(\sum_{l=1}^m K_l \rho K_l^\dagger\right) &= \text{tr}\left(\sum_l K_l^\dagger K_l \rho\right) \\ &= \text{tr}\left(\sum_a \lambda_a |e_a\rangle \langle e_a| \rho\right) \leq \kappa \sum \text{tr}(|e_a\rangle \langle e_a| \rho) = \kappa \end{aligned}$$

取等号时,

$$\text{tr}\left(\sum_{l=1}^m K_l \rho K_l^\dagger\right) = \text{tr}\left(\sum_l K_l^\dagger K_l \rho\right) = \kappa$$

(充分性) 类似。

□



**笔记** 实际上是正算符的性质。

实际上没有用到  $\kappa$  小于等于 1 的性质?

### 定理 1.3 (Kraus 算符形式与系统环境耦合形式的等价性 [34, Th.3.24])

$\mathcal{K}: B(\mathcal{H}_1) \rightarrow B(\mathcal{H}_1)$  是线性映射,  $\rho_1 \in D(\mathcal{H}_1)$  则任取  $0 < \kappa \leq 1$ , 下列等价

(1) 存在 Hilbert 空间  $\mathcal{H}_2$ , 线性变换  $V \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$  和量子态  $\rho \in D(\mathcal{H}_2)$ , 使得

$$V^\dagger V \leq \kappa \mathbb{I}$$

<sup>7</sup> 此式没有提供证明, 但是经过程序验证, 参见: 基本矩阵作为基底.nb。

<sup>8</sup> 例如:  $A$  是一个行向量,  $W = A^* A^\top$  的秩为 1, 但是可以选取  $A$  使得  $\tilde{\mathcal{E}}$  秩大于 1。具体的数值举例, 参见: quantumChannel 的秩举例.nb

$$\mathcal{E}(\rho_1) = \text{tr}_2(V\rho_1 \otimes \rho_2 V^\dagger)$$

(2) 存在一组 Kraus 算符  $K_l \in B(H_1)$ , 满足

$$\sum_{l=1}^m K_l^\dagger K_l \leq \kappa \mathbb{I}$$

$$\mathcal{K} = \sum_{l=1}^m K_l \rho_1 K_l^\dagger$$

另外

$$V^\dagger V = \kappa \mathbb{I} \Leftrightarrow \sum_{l=1}^m K_l^\dagger K_l = \kappa \mathbb{I}$$

**证明:** 只证明  $\kappa = 1$  的情形, 推广到  $\kappa \neq 1$  是容易的。

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \sum q_i |f_i\rangle \langle f_i| \\ \mathcal{K}(\rho_1) &= \sum_{ki} \langle h_k | V(\rho_1 \otimes q_i | f_i\rangle \langle f_i|) V^\dagger | h_k \rangle \\ &= \sum_l K_l \rho_1 K_l^\dagger \\ K_l &= \sqrt{q_i} \langle h_k | V | f_i \rangle, l = (k, i) \\ \sum_l K_l^\dagger K_l &= \sum_{ik} q_i \langle f_i | V^\dagger | h_k \rangle \langle h_k | V | f_i \rangle \\ &= \sum_i q_i \langle f_i | V^\dagger V | f_i \rangle \\ &\leq \sum_i q_i \langle f_i | f_i \rangle \mathbb{I}_1 \\ &= \mathbb{I}_1 \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 设  $\mathcal{K}(\rho_1) = \sum_l K_l \rho_1 K_l^\dagger$ , 定义映射

$$\begin{aligned} \iota: H_1 &\longrightarrow H_1 \otimes H_2 \\ |\varphi\rangle &\longrightarrow |\varphi\rangle |f_1\rangle \\ \tilde{V} = v(H_1) &\longrightarrow H_1 \otimes H_2 \\ |\psi\rangle |f_1\rangle &\longrightarrow \sum_{l=1}^m K_l |\psi\rangle |f_l\rangle \\ \tilde{V} &= \sum_l K_l \otimes |f_l\rangle \langle f_1| \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{aligned} \tilde{V}(e_1 f_1, \dots, e_n f_1) &= (e_1 f_1, \dots, e_n f_n) (\tilde{V})_{n^2 \times n} \\ \forall |\psi\rangle, \langle \psi | \langle f_1 | \tilde{V}^\dagger \tilde{V} | \psi \rangle | f_1 \rangle &= \sum \langle \psi | K_l^\dagger K_l | \psi \rangle \leq 1 \\ \Rightarrow \tilde{V}^\dagger \tilde{V} &\leq \mathbb{I}_{\iota(H_1)} \end{aligned}$$

$\tilde{V}$  只定义在了某个子空间上, 为了进一步得到  $V$ , 需要做合适的拓展


$$V^\dagger V = \begin{pmatrix} \tilde{V}^\dagger \\ A^\dagger \end{pmatrix} (\tilde{V} \ A) = \begin{pmatrix} \tilde{V}^\dagger \tilde{V} & \tilde{V}^\dagger A \\ A^\dagger \tilde{V} & A^\dagger A \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tilde{V}^\dagger A = 0 \\ A^\dagger A = \mathbb{I}. \end{cases}$$

由此定义的  $V$  满  $V^\dagger V \leq \mathbb{I}$ , 以及


$$\begin{aligned} & \text{tr}_2 \left( V |\psi\rangle \langle \psi| \otimes |f_1\rangle \langle f_1| V^\dagger \right) \\ &= \text{tr}_2 \left( \tilde{V} |\psi\rangle \langle \psi| \otimes |f_1\rangle \langle f_1| \tilde{V}^\dagger \right) \\ &= \text{tr}_2 \left( \sum_l K_l |\psi\rangle \langle \psi| K_l^\dagger |f_1\rangle \langle f_1| \right) \\ &= \sum_l K_l |\psi\rangle \langle \psi| K_l^\dagger \\ &= \mathcal{K}(|\psi\rangle \langle \psi|) \end{aligned}$$

□

 **笔记** 系统环境耦合形式的量子信道表明, 任何量子信道都可以通过一个直积系统上的么正变换来实现, 为量子信道提供了一种物理上的实现方式。然而这种表示信道方式的缺点是辅助系统的初态  $\rho_2$  和么正变换  $V$  都具有较大的自由度。

如果没有直积态的条件就不能写成 Kraus 算符和的形式, 也不能被视为量子信道。

### 例 1.1 量子信道和量子操作

- 么正演化  $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$ 、测量  $\mathcal{E}_m(\rho) = M_m \rho M_m^\dagger$
- Unruh 信道 [3]。
- 比特翻转、相位反转、比特相位翻转、退极化 (depolarizing)、相位阻尼 (退相位 dephasing)、振幅阻尼 (AD)<sup>9</sup>。
- 迹和偏迹。
- $\mathcal{E}$  是  **unital channel**  $\Leftrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathcal{E}^\dagger$  是量子信道 (保迹)。
- 反例: 部分转置

$$2|I\rangle\langle I| = 2(E_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{I \otimes (\cdot)^\top} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

<sup>9</sup>参见: 几种量子信道 quantum channel, 信道-Kraus 算符-蔡氏矩阵.nb



$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 r_i \sigma_i \\
 E_i &= \sum \alpha_{ij} \sigma_j \\
 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 r'_i \sigma_i &\leftarrow \mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger = \sum \alpha_{ij} \sigma_j \frac{1}{2} r_k \sigma_k \alpha_{ik}^* = \sum \frac{1}{2} \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* r_k \sigma_j \sigma_k \sigma_i \\
 r'_p &= \text{tr}(\sigma_p \mathcal{E}(\rho)) = \frac{1}{2} \sum \text{tr}(\frac{1}{2} \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* r_k \sigma_p \sigma_j \sigma_k \sigma_i) \\
 r'_p &= r_k M_{kp} \quad r'_p = M_{pk} r_k \\
 (\vec{r}', 1) &= (\vec{r}, 1) \begin{pmatrix} M \\ \vec{1} \end{pmatrix} \\
 M_{kp} &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_p \sigma_j \sigma_k \sigma_i) \\
 &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_p \sigma_j \sigma_k \sigma_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \alpha_{i4} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_p \sigma_i \sigma_k) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{i4}^* \text{tr}(\sigma_p \sigma_j \sigma_k) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum \alpha_{i4} \alpha_{i4}^* \text{tr}(\sigma_p \sigma_k) \\
 &= \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* (\delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jk} \delta_{il}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \alpha_{i4} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\delta_{pk} \mathbb{I} + i \varepsilon_{pkm} \sigma_m) \sigma_i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{i4}^* \text{tr}(\delta_{jk} \mathbb{I} + i \varepsilon_{jkm} \sigma_m) \sigma_k \\
 &\quad + \sum \alpha_{i4} \alpha_{i4}^* \delta_{kp} \\
 &= \sum \alpha_{ip} \alpha_{ik}^* - \delta_{pk} \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* + \alpha_{ik} \alpha_{ip}^* + i \sum (\alpha_{i4} \alpha_{ik}^* \varepsilon_{pkl} + \alpha_{ij} \alpha_{i4}^* \varepsilon_{pjk}) + \sum |\alpha_{ij}|^2 \delta_{kp} \\
 M_{q4} &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_j \sigma_k) = \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* = \frac{1}{2} \sum |\alpha_{ij}|^2 \\
 k=1,2,3 \quad M_{kp} &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) \\
 &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \alpha_{i4} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_k \sigma_l) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{i4}^* \text{tr}(\sigma_j \sigma_k) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum |\alpha_{i4}|^2 \text{tr}(\sigma_k) \\
 &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\delta_{jk} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l) \sigma_i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \alpha_{i4} \alpha_{ik}^* \delta_{kl} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{i4}^* \delta_{jk} \\
 &= \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* (i \varepsilon_{jkl}) \\
 &\quad + \sum \alpha_{i4} \alpha_{ik}^* + \sum \alpha_{ik} \alpha_{i4}^* \\
 &= \sum i \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \varepsilon_{jkl} - i \varepsilon_{jkl} \alpha_{ij}^* \alpha_{ik} \\
 &= 0. \\
 p=1,2,3 \quad M_{qp} &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_p \sigma_j \sigma_l) = 2i \sum \varepsilon_{jlp} \alpha_{ij} \alpha_{lk}^* \\
 &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\delta_{pj} + i \varepsilon_{pjm} \sigma_m) \sigma_l \\
 &= \frac{1}{2} \sum \alpha_{i4} \alpha_{ik}^* \text{tr}(\sigma_l) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{i4}^* \text{tr}(\sigma_p \sigma_j) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} \alpha_{ij}^* \text{tr}(\sigma_p) \\
 &= \sum \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* i \varepsilon_{pjl} + \sum \alpha_{i4} \alpha_{ip}^* + \sum \alpha_{ip} \alpha_{i4}^* \\
 &= \sum i \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \varepsilon_{pjl} + i \varepsilon_{jlp} \alpha_{ij} \alpha_{lk}^* \\
 &= 2i \sum \varepsilon_{pjl} \alpha_{ij} \alpha_{lk}^* \\
 \begin{aligned}
 \sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} \mathbb{I} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \\
 \sigma_p \sigma_j &= \delta_{pj} \mathbb{I} + i \varepsilon_{pjl} \sigma_l \\
 \sigma_k \sigma_l &= \delta_{kl} \mathbb{I} + i \varepsilon_{klm} \sigma_m \\
 \delta_{kj} \delta_{kl} \mathbb{I} + \delta_{kj} \varepsilon_{klm} \sigma_m &+ \\
 + \varepsilon_{pjl} \sigma_l \delta_{kl} - \varepsilon_{pjl} \varepsilon_{klm} \sigma_m & \\
 2 \delta_{kj} \delta_{kl} + 2 \varepsilon_{pjl} \varepsilon_{klm} \delta_{jm} & \\
 \mathbb{I} = \sum E_i^\dagger E_i = \sum \alpha_{ij}^* \sigma_j \alpha_{ip} \sigma_p & \\
 = \sum \alpha_{ij}^* \alpha_{ip} (\delta_{jp} \mathbb{I} + i \varepsilon_{jpl} \sigma_l) & \\
 + \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^* \alpha_{i4} \sigma_j & \\
 + \sum_{p=1}^3 \alpha_{i4}^* \alpha_{ip} \sigma_p & \\
 = \sum |\alpha_{ij}|^2 \mathbb{I} + i \varepsilon_{jpl} \alpha_{ij}^* \alpha_{ip} \sigma_l & \\
 + \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^* \alpha_{i4} \sigma_j + \sum_{p=1}^3 \alpha_{i4}^* \alpha_{ip} \sigma_p & \\
 = \sum |\alpha_{ij}|^2 \mathbb{I} + i \varepsilon_{jpl} \alpha_{ij}^* \alpha_{ip} \sigma_l & \\
 + \alpha_{i4}^* \alpha_{i4} \sigma_l + \alpha_{i4} \alpha_{i4}^* \sigma_l & \\
 i \varepsilon_{jpl} \alpha_{ij}^* \alpha_{ip} + \alpha_{i4}^* \alpha_{i4} + \alpha_{i4} \alpha_{i4}^* &= 0 \\
 \sum |\alpha_{ij}|^2 = 1. &
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

图 1.4: 单比特的量子信道是 Bloch 球上的仿射变换

**定义 1.3 ( $\pi_{1,2}$  协变量子信道)**

考虑群  $G$  和它的两个么正表示  $\pi_1, \pi_2$ ，表示空间记为  $H_1$  and  $H_2$ ，量子信道  $\mathcal{E} : B(H_1) \rightarrow B(H_2)$  称为 **关于  $\pi_{1,2}$  协变的** (covariant with respect to  $\pi_{1,2}$ )，如果

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\pi_1(U)A\pi_1(U)^*] &= \pi_2(U)\mathcal{E}[A]\pi_2(U)^* \\ \forall A \in B(H_1) \forall U \in G\end{aligned}$$



**笔记** 根据协变量子信道的定义，可以构造关于编码信道协变的量子纠错码，称为协变量子纠错码。

**例 1.2**  $G = U(d)$ ， $\pi_1(U) = \pi_2(U) = U \in U(d)$ ，退极化信道

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p \operatorname{tr}(\rho)\mathbb{I}/d$$

是协变的，其中  $0 \leq p \leq \frac{d^2}{d^2-1}$  保证了退极化信道是全正的<sup>10</sup>。

可以构造一个量子信道，将所有的态都映射到某一指定的纯态，

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_n |\phi\rangle \langle \psi_n| \rho |\psi_n\rangle \langle \phi| = \operatorname{tr}(\rho)|\phi\rangle \langle \phi|$$

因此该量子信道不是单射，不具有可逆性。再比如求迹也是一个不可逆的量子信道。另外，即便对于可逆的量子信道，量子信道的逆也未必是量子信道，实际上，利用 Wigner 定理<sup>11</sup>可以证明，量子信道的逆是量子信道当且仅当它是么正的 [32, Th.3.4.1, Prop.12.13]。

**1.3.1 利用过程层析计算量子信道**

设  $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^M E_k \rho E_k^\dagger$  是量子信道，在 Kraus 算符生活的空间中取一组固定的参考 ONB 记为  $\{\tilde{E}_i\}$ ，又设  $\{r_i\}$  是量子态  $\rho$  生活的空间  $D(H)$  的一组 ONB，Hilbert 空间的维度  $\dim(H) = d$ 。将 Kraus 算符做展开  $E_i = \sum_j \alpha_{ij} \tilde{E}_j$  可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r_l) &= \sum_{ijk} \alpha_{ij} \overline{\alpha_{ik}} \tilde{E}_j \gamma_l \tilde{E}_k^\dagger \\ &\equiv \sum_{ijkp} \alpha_{ij} \overline{\alpha_{ik}} \beta_{jlkp} r_p\end{aligned}$$

其中， $\beta_{jlkp} = \operatorname{tr}(\overline{r_p} \tilde{E}_j r_l \tilde{E}_k^\dagger)$ 。另一方面， $\mathcal{E}$  可以用量子过程层析的方法得到，视为已知量，可以直接做展开

$$\mathcal{E}(r_l) = \lambda_{lp} r_p, \quad \lambda_{lp} = \operatorname{tr}(\overline{r_p} \mathcal{E}(r_l))$$

比较两个展开式可知，

$$\lambda_{lp} = \sum_{jk} \beta_{jlkp} \chi_{jk} \quad (1.3)$$

我们的目标是求解  $\chi$ ，压平矩阵和张量后可以得到我们更加熟悉的形式。4 阶的  $n \times n \times n \times n$  数组  $A$  经过压平操作  $\operatorname{Ft}$  成为  $n^2 \times n^2$  矩阵  $\operatorname{Ft}(A)$  的规则是

$$\operatorname{Ft}(A)_{(i-1)n+k, (j-1)n+l} = A_{ijkl}$$

由此可得与(1.3)等价的压平后的方程

$$\lambda_m^\downarrow = \sum_n \beta_{mn}^\downarrow \chi_n^\downarrow \quad (1.4)$$

其中， $m = (l-1)d^2 + p, n = (j-1)d^2 + k, \lambda_{(l-1)d^2+p}^\downarrow = \lambda_{lp}, \beta_{(l-1)d^2+p, (j-1)d^2+k}^\downarrow = \beta_{jlkp}$ 。向量  $\lambda_m^\downarrow$  和  $\chi_n^\downarrow$  是矩

<sup>10</sup>留作练习。

<sup>11</sup>Hilbert 空间上的 Wigner 对称性操作都是么正或者反么正的 [27, Th.12.11]

阵压平的结果，而  $\beta_{mn}^\perp$  是张量张量转置<sup>12</sup>  $\beta_{jlkp} \rightarrow \tilde{\beta}_{jlkp} = (2, 1, 4, 3) \circ \beta_{jlkp} = \beta_{ljpk}$  和数组压平的结果，即

$$\beta_{(l-1)d^2+p, (j-1)d^2+k}^\perp = \text{Ft}(\tilde{\beta})_{(l-1)d^2+p, (j-1)d^2+k} = \tilde{\beta}_{ljpk} = \beta_{jlkp} \quad (1.5)$$

上式已经过检验<sup>13</sup>。最后，求解线性方程组(1.4)，并对  $\chi$  做对角化，就可以求得  $\mathcal{E}$  的 Kraus 算符。利用上述过程的算例参见文档<sup>14</sup>。

### 1.3.2 量子信道的局限性

$$\mathcal{E}(\rho) = \begin{cases} \text{tr}_2(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|) = \rho & \text{若 } n_z = \text{tr}(\rho Z) < 0 \\ \text{tr}_2(X\rho X \otimes |1\rangle\langle 1|) = X\rho X & \text{若 } n_z > 0 \end{cases}$$

## 1.4 量子 Markov 演化

### 1.4.1 马尔科夫过程 Markov Process

春天，落樱如梦如忆如思，如翻飞的初雪，如远去的自帆。它们神秘的命运，藏在哪里？

晚秋，斑斓的树叶脱离了树干，在风中起舞。它飞向了何方？它将飞向何方？

还有迷离的细雨，忧愁的柳絮，飘然而至的那一只蝴蝶……这些物体的运动，都有一个共同的特点，即现在的位置确定之后，过去的历程无法影响未来的运动，而未来的运动只与现在的状态有关：恰便似从前种种譬如昨日死，以后种种譬如今日生 [39]。

#### 定义 1.4 (随机过程及其时空可测性 [13])

(1) 有两个可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $(E, \mathcal{E})$  和时间指标集  $\mathbb{T}$ ，称一族由  $t \in \mathbb{T}$  索引的  $E$ -值随机变量  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  为定义在  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的取值于  $(E, \mathcal{E})$  的 **DEF 随机过程**， $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  简记为  $X$ ，相当于将其视为映射  $X: \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow E$ 。

称  $(\Omega, \mathcal{F})$  为  $X$  的 **DEF 底空间 (base space)**，称  $(E, \mathcal{E})$  为  $X$  的 **DEF 状态空间 (state space)**。

$\forall t \in \mathbb{T}$ ,  $X_t$  是  $X$  在  $t$  时刻的 **DEF 状态 (state)**。

给定  $\omega \in \Omega$ ，称集合  $\{X_t(\omega); t \in \mathbb{T}\}$  为  $\omega$  的 **DEF 样本曲线 (sample path)** 或 **DEF 轨迹 (trajectory)**。

(2) 设  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  是可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的 filtration，如果  $\forall t \in \mathbb{T}$ ，状态  $X_t$  都是  $\mathcal{F}_t$  可测的，那么称  $X$  是 **DEF 适应过程**。

(3) 设  $\mathbb{T} = [0, \infty[$  or  $\mathbb{T} = [0, \infty]$ ，如果随机过程  $X: (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  是  $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F}$ -可测的，那么称  $X$  是 **DEF 可测过程**。其中 **DEF 积空间的  $\sigma$ -代数** 的定义为  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 := \sigma\{A \times B: A \in \Sigma_1 \text{ and } B \in \Sigma_2\}$

(4) 设  $\mathbb{T} = [0, \infty[$  or  $\mathbb{T} = [0, \infty]$ ，如果映射

$$X: (s, \omega) \mapsto X_s(\omega), [0, t] \times \Omega \rightarrow E$$

是  $\mathcal{E}$  可测的，其中  $[0, t] \times \Omega$  被赋予积  $\sigma$ -代数  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ ，

那么称  $X$  是 **DEF 循序可测 (progressively measurable)** 的或 **DEF 循序 (progressive)** 的。



$$P_{n+1}(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P_2(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

**DEF 时齐** 马尔科夫过程对任意的  $n$  满足

$$P_2(X_{n+1} = x \mid X_n = y) = P_2(X_n = x \mid X_{n-1} = y)$$

<sup>12</sup>4 阶置换群的“置换形式”群元  $(2, 1, 4, 3)$  表示被作用的列表中的第 1, 2, 3, 4 个元素在置换后变为第 2, 1, 4, 3 个元素，写成“循环形式”是  $c(1, 2) \circ c(3, 4)$ 。利用 PermutationCycles 和 PermutationList 可以在置换形式和循环形式之间相互转换。

<sup>13</sup>参见：几种量子信道 quantum channel，信道-Kraus 算符-蔡氏矩阵.nb

<sup>14</sup>几种量子信道 quantum channel，信道-Kraus 算符-蔡氏矩阵.nb

即转移概率与  $n$  无关。

**DEF** 平稳的马尔科夫过程对任意的  $n$  和  $k$  满足

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = P(X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+k} = x_k)$$

显然, 平稳必时齐。反之, 对于时齐马尔科夫链, 初态是马尔科夫链的稳态分布等价于马尔科夫链是平稳的。

#### 定理 1.4 (Doob's Theorem[15, 36, p295])

任意的严平稳高斯马尔科夫过程的关联函数  $C_y(\tau)$ , 谱密度  $s_y(\omega)$ , 概率密度  $P_1(y) = P_1(y, \tau)^a$  以及条件概率密度  $P_2(y_2, \tau|y_1) = \frac{P_2(y_2, \tau; y_1, 0)}{P_1(y_1)}$  <sup>b</sup> 具有以下形式:

$$C_y(\tau) = \sigma_y^2 e^{-|\tau|/\tau_r}$$

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \frac{\tau_r^{-1} \sigma_y^2}{\omega^2 + \tau_r^{-2}}$$

$$P_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-(y-\bar{y})^2/2\sigma_y^2}$$

$$P_2(y_2, \tau|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2\tau/\tau_r})\sigma_y^2}} \exp \left\{ -\frac{[(y_2 - \bar{y}) - e^{-\tau/\tau_r}(y_1 - \bar{y})]^2}{2(1-e^{-2\tau/\tau_r})\sigma_y^2} \right\},$$

其中  $\bar{y}$  表示均值,  $\sigma_y$  是标准差,  $\tau_r$  是弛豫时间。

严平稳的高斯马尔科夫过程称为 **DEF** Ornstein-Uhlenbeck 过程。

<sup>a</sup>对严平稳过程, 概率分布与时间无关, 联合分布具有平移不变性。由于限制了 Gauss 性, 宽平稳等价于严平稳 (?). 下标 1 表示一阶“关联”。

<sup>b</sup>任意平稳随机过程满足  $\lim_{\tau \rightarrow 0} P_2(y_2, \tau|y_1) = \delta(y_2 - y_1)$  (证明?). 下标 2 表示二阶关联。



**证明:**只要证明  $\sigma_y = 1$ ,  $\bar{y} = 0$  的情形。关键是解出双变量高斯分布的关联函数的具体形式。

$$\begin{aligned}
 P_1(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\
 P_2(y_2, t_2, y_1, t_1) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y_1^2 + y_2^2 - 2\rho y_1 y_2)\right) \\
 \tau &= t_2 - t_1, \quad \rho(t_1, t_2) = \int \frac{P_2(y_2, t_2 | y_1, t_1)}{P_1(y_1)} y_1 y_2 dy_1 dy_2 \\
 &= \int \frac{P_2(y_2, \tau | y_1, 0)}{P(y_1)} y_1 y_2 dy_1 dy_2 \\
 &= \rho(\tau) \\
 P_2(y_2, t_2 | y_1, t_1) &= \frac{P_2(y_2, t_2, y_1, t_1)}{P(y_1, t_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_2 - y_1\rho)^2}{2(\rho^2 - 1)}\right) \\
 P_3(y_3, t_3, y_2, t_2, y_1, t_1) &= P_3(y_3, t_3 | y_2, t_2, y_1, t_1) P_2(y_2, t_2, y_1, t_1) \\
 &= P_2(y_3, t_3 | y_2, t_2) P_2(y_2, t_2, y_1, t_1) \\
 \Rightarrow \rho(t_3 - t_1) &= \int P_3(y_3, t_3, y_2, t_2, y_1, t_1) y_1 y_3 dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= \int P_2(y_3, t_3 | y_2, t_2) P_2(y_2, t_2, y_1, t_1) y_1 y_3 dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= \rho(t_3 - t_2) \rho(t_2 - t_1) \\
 \rho(t_3) &= \rho(t_3 - t_2) \rho(t_2) \\
 \rho(t + dt) &= \rho(dt) \rho(t) \\
 \frac{\rho(t + dt) - \rho(t)}{dt} &= \frac{(\rho(dt) - 1)\rho(t)}{dt} \\
 \rho'(t) &= \rho'(0)\rho(t) \quad \rho(0) = 1. \\
 \rho(t) &= e^{\rho'(0)t} \equiv e^{-\frac{t}{\tau_r}}
 \end{aligned}$$

积分过程参见：高斯分布.nb。

□



**笔记** 当观察到一个严平稳噪声的频谱或者关联函数偏离上述形式，就可以判定这个过程不是高斯马尔科夫过程。当弛豫时间  $\tau_r$  趋于零时，这个过程是一个白噪声。带颜色的噪声未必非马尔科夫，白噪声一定是马尔科夫的<sup>15</sup>。

非高斯随机过程的特征往往体现在更高阶的关联中。

可以认为尘埃在恒温大气中的布朗运动的各个速度分量都是高斯马尔科夫过程， $\bar{v} = 0$ ,  $\frac{1}{2}m\sigma_v^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{1}{2}k_B T$ , 故  $\sigma_v = \sqrt{k_B T/m}$ , 用涨落耗散定理也可以得到该结论。

#### 命题 1.4 (查普曼-柯尔莫哥洛夫方程 Chapman-Kolmogorov 方程)

对一般的随机过程 CK 方程是

$$P_2(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int P_3(y_3, t_3 | y_2, t_2; y_1, t_1) P_2(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2 \quad (1.6)$$

对于马尔科夫过程，上式简化为

$$P_2(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int P_3(y_3, t_3 | y_2, t_2) P_2(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2 \quad (1.7)$$

对严平稳马尔科夫过程，CK 方程的形式变得更加有趣

$$P_2(y_3, t_3 | y_1, 0) = \int P_2(y_3, t_3 - t_2 | y_2, 0) P_2(y_2, t_2 | y_1, 0) dy_2 \quad (1.8)$$

<sup>15</sup>如何证明？也存在一些不同的看法 [19, 35]

或者等价地,

$$P_2(y_3, \tau_1 + \tau_2 | y_1, 0) = \int P_2(y_3, \tau_2 | y_2, 0) P_2(y_2, \tau_1 | y_1, 0) dy_2 \quad (1.9)$$

**证明:** 利用条件概率公式易得, 见 [36, Sec.6.9.1]。

$$\begin{aligned} P(y_3, t_3, y_2, t_2, y_1, t_1) &= P(y_3, t_3 | y_2, t_2, y_1, t_1) P(y_2, t_2, y_1, t_1) \\ &= P(y_3, t_3 | y_2, t_2, y_1, t_1) P(y_2, t_2 | y_1, t_1) P(y_1, t_1) \\ P(y_3, t_3, y_2, t_2 | y_1, t_1) &= P(y_3, t_3 | y_2, t_2, y_1, t_1) P(y_2, t_2 | y_1, t_1) \\ P(y_3, t_3 | y_1, t_1) &= \int P(y_3, t_3 | y_2, t_2, y_1, t_1) P(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2 \end{aligned}$$

□

**笔记** 马尔科夫过程的任意阶联合分布可以根据初始状态和一组满足 CK 方程的条件概率  $P_2$  (作为二阶关联) 来描述。平稳的马尔科夫过程的条件概率  $P_2$  可以记为

$$P_2(y_2, t_2 | y_1, t_1) = T_{t_2-t_1}(y_2 | y_1)$$

$P_2$  又称为 **转移概率**。离散的马尔科夫过程的  $n$  步转移概率构成一个转移矩阵  $p_{ij}^n(n)$ , 此时, CK 方程写成

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

考虑到反演的对称性, 马尔科夫链可以通过初始分布、向前的一步转移概率和向后的一步转移概率来确定。CK 方程(1.9)反映了马尔科夫过程的半群性质。

马尔科夫过程满足“主方程”

$$\begin{aligned} P_1(y, t+1) &= \sum_x (P_2(y, t+1 | x, t) P_1(x, t) - P_2(x, t+1 | y, t) P_1(y, t)) \\ \frac{\partial P_1(y, t)}{\partial t} &= \sum_x (W(y | x) P_1(x, t) - W(x | y) P_1(y, t)) \end{aligned}$$

## 1.4.2 量子 Markov 动力学

(补充简单的动机推导, rivass, five lectures)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(t_1, t_0)}[\rho_A(t_0)] &= \text{Tr}_B [U(t_1, t_0) \rho_A(t_0) \otimes \rho_B(t_0) U^\dagger(t_1, t_0)] \\ &= \sum_\alpha K_\alpha(t_1, t_0) \rho_A(t_0) K_\alpha^\dagger(t_1, t_0), \\ \mathcal{E}_{(t_2, t_0)}[\rho_A(t_0)] &= \text{Tr}_B [U(t_2, t_0) \rho_A(t_0) \otimes \rho_B(t_0) U^\dagger(t_2, t_0)] \\ &= \sum_\alpha K_\alpha(t_2, t_0) \rho_A(t_0) K_\alpha^\dagger(t_2, t_0). \\ \mathcal{E}_{(t_2, t_1)}[\rho_A(t_1)] &= \text{Tr}_B [U(t_2, t_1) \rho(t_1) U^\dagger(t_2, t_1)] \\ &= \sum_\alpha K_\alpha(t_2, t_1, \rho_A) \rho_A(t_1) K_\alpha^\dagger(t_2, t_1, \rho_A), \end{aligned}$$

### 定义 1.5 (量子 Markov 动力学)

给定初始时刻  $t_0$ , 设量子系统的演化由时间  $t$  索引的一族量子信道  $\{\mathcal{E}_{(t_0, t)} \mid t_0 \leq t \leq t_2\}$  描述, 满足  $\mathcal{E}_{(t_0, t_0)} = \mathbb{I}$ , 若对于任意的  $t_0 \leq t_1 \leq t_2$  有

$$\mathcal{E}_{(t_2, t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2, t_1)} \mathcal{E}_{(t_1, t_0)}$$

其中的  $\mathcal{E}_{(t_2, t_1)}$  和  $\mathcal{E}_{(t_1, t_0)}$  都是量子信道，则称该系统经历了 **Markov 演化**。  
如果  $\{\mathcal{E}\}$  进一步满足

$$\mathcal{E}_{(t_0, t_1+t_2)} = \mathcal{E}_{(t_0, t_2)} \circ \mathcal{E}_{(t_2, t_1)}$$

则称动力学满足 **(么) 半群性质**。



**笔记** 半群：群乘法具有结合性。当动力系统由自治（生成元与时间无关）的常微分方程描述时，动力学具有半群性质， $\mathcal{E}_{(t_0, t)}$  可以简记为  $\mathcal{E}_t$

举例：通过表象变换可以将动力学从半群变成非半群。

#### 定理 1.5 (Markov 动力学的微分方程 [32, Th.4.2.1])

微分方程的解构成 Markov 过程当且仅当它具有以下形式

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H(t), \rho(t)] + \sum_k \gamma_k(t) \left( V_k(t) \rho(t) V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{ V_k^\dagger(t) V_k(t), \rho(t) \} \right)$$



**笔记** 生成元可以称为刘维尔量，也可以称为 Lindblad 量。

#### 例 1.3 主方程算例

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\Gamma}{2} (2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-)$$

定义参数  $\gamma = 1 - e^{-\Gamma t}$ ，主方程的解是

$$\rho(t) = E_0 \rho_0 E_0^\dagger + E_1 \rho_0 E_1^\dagger \equiv \mathcal{E}_t(\rho_0)$$

其中，Kraus 算符

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设主方程的生成元不显含时间，将上述方程的解记为

$$\rho(t+dt) = e^{\mathcal{L}dt} \rho(t)$$

将服从主方程演化的态展开到第 1 阶得到信道

$$\mathcal{E}_1(\rho) = \rho - i[H, \rho]dt + \sum_{k=1}^r \gamma_k \left( L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_k^\dagger L_k, \rho \} \right) dt + o(dt)$$

它近似为 [38, (47)]

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\rho) = \sum_{k=0}^r K_k \rho K_k^\dagger$$

其中  $K_0 = I + \left( -iH - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \gamma_k L_k^\dagger L_k \right) dt$ ,  $K_k = L_k \sqrt{dt}$ 。展开到二阶得到信道

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\rho) = & \frac{1}{4} idt^2 \gamma_i \left( H L_i^\dagger L_i \rho - \rho L_i^\dagger L_i H \right) - \frac{1}{2} idt^2 \gamma_i \left( H L_i \rho L_i^\dagger - L_i \rho L_i^\dagger H \right) + \frac{1}{2} idt^2 \gamma_i \left( H \rho L_i^\dagger L_i - L_i^\dagger L_i \rho H \right) \\ & - \frac{1}{2} idt^2 \gamma_j \left( L_j H \rho L_j^\dagger - L_j \rho H L_j^\dagger \right) - \frac{1}{4} idt^2 \gamma_j \left( \rho H L_j^\dagger L_j - L_j^\dagger L_j \rho H \right) + dt^2 H \rho H - \frac{1}{2} dt^2 \left( \rho H^2 + H^2 \rho \right) \\ & + \frac{1}{4} dt^2 \gamma_i \gamma_j L_i^\dagger L_i \rho L_j^\dagger L_j + \frac{1}{2} dt^2 \gamma_i \gamma_j L_j L_i \rho L_i^\dagger L_j^\dagger - \frac{1}{4} dt^2 \gamma_i \gamma_j \left( L_j \rho L_i^\dagger L_i L_j^\dagger + L_j L_i^\dagger L_i \rho L_j^\dagger \right) \\ & - \frac{1}{4} dt^2 \gamma_i \gamma_j \left( L_i \rho L_j^\dagger L_j^\dagger + L_j^\dagger L_j L_i \rho L_i^\dagger \right) + \frac{1}{8} dt^2 \gamma_i \gamma_j \left( \rho L_i^\dagger L_i L_j^\dagger L_j + L_j^\dagger L_j L_i^\dagger L_i \rho \right) \\ & - idt \left( H \rho - \rho H \right) + dt \gamma_i L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} dt \gamma_i \left( \rho L_i^\dagger L_i + L_i^\dagger L_i \rho \right) + \rho + o(dt^2) \end{aligned}$$

它近似为

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho)_2 = K^{(0)}\rho K^{(0)\dagger} + \sum_i K_i^{(1)}\rho K_i^{(1)\dagger} + \sum_j K_j^{(2)}\rho K_j^{(2)\dagger} + \sum_{ij} K_{ij}^{(3)}\rho K_{ij}^{(3)\dagger}$$

其中

$$\begin{aligned} K^{(0)} &= \sum_i \left( \mathbb{I} - iHdt - \frac{1}{2}L_i^\dagger L_i \gamma_i dt - \frac{1}{2}H^2 dt^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4}\gamma_i HL_i^\dagger L_i dt^2 + \frac{i}{4}\gamma_i L_i^\dagger L_i H dt^2 + \frac{1}{8}\sum_j \gamma_i \gamma_j L_j^\dagger L_j L_i^\dagger L_i dt^2 \right) \\ K_i^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\sqrt{\gamma_i} HL_i dt^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\gamma_i} L_i \sqrt{dt} + \frac{1}{2}\sum_j L_j^\dagger L_j L_i \gamma_i \sqrt{\gamma_i} dt^{\frac{3}{2}} \right) \\ K_j^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\sqrt{\gamma_j} L_j H dt^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\gamma_j} L_j \sqrt{dt} + \frac{1}{2}\sum_i L_j L_i^\dagger L_i \gamma_i \sqrt{\gamma_j} dt^{\frac{3}{2}} \right) \\ K_{ij}^{(3)} &= \sqrt{\gamma_i \gamma_j} L_j L_i dt \end{aligned}$$

### 1.4.3 主方程的微观推导

下面是来自 Breuer[9, Sec.3.3] 的主方程的微观推导。在宏观系统中，根据热力学第一定律，系统失去的能量就是环境所获得的能量，但在微观或者介观世界中情况有所不同。考虑一个微观的量子系统，例如一个原子，生活在外界环境中，例如谐振腔中的光场，系统和环境和环境的能量输入输出可能都要通过相互作用能来体现。类似于通过弹簧相连的两个小球在光滑的平面上运动，总能量可以分为小球的动能与储存在弹簧中的弹性势能，系统-环境总能量  $H$  可以划分为系统和环境的自由演化哈密顿量  $H_S$ ,  $H_B$  和相互作用哈密顿量  $H_I$ 。

$$H = H_S + H_B + H_I$$

相互作用表象下的冯诺依曼方程

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)] \quad (1.10)$$

两边同时积分可得

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t ds [H_I(s), \rho(s)]$$

将上式代入(1.10)，并将环境算符 trace 掉可得

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t ds \text{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]]$$

其中已经假设环境的平均相互作用能为零  $\text{tr}_B [H_I(t), \rho(0)] = 0$ 。做假设环境与系统的耦合较弱，系统与环境始终处于乘积态且系统对环境的作用可以忽略不计，因此环境的态不随时间发生变换，即

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B$$

该式称为 Born 近似，近似后，有

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t ds \text{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]$$

写成较为一般的形式 (Nakajima-Zwanzig 方程)，有

$$\frac{d}{dt}\rho(t)_S = \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau) [\rho(\tau)_S] d\tau$$

对方程做粗粒化处理，认为系统在下一时刻的状态仅仅与当前时刻有关，可以做 Markov 近似

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t ds \text{tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]$$

上式虽然是时间局域 (time local) 的，但仍然不是 Markov 的因为  $\rho_S$  的动力学显式地依赖于初始制备，这意味着动力学不构成半群 (生成元含时)，为了进一步化简并获得 Markov 性，先做变量替换  $\tau = t - s$ ，可得



$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t d\tau \operatorname{tr}_B [H_I(t), [H_I(t-\tau), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]$$

设  $\tau_B$  是环境的关联函数衰减的特征时间, 当  $\tau \gg \tau_B$  时, 被积函数衰减得很快, 可以近似为零, 如果系统演化发生较大变换所定义的特征时间  $\tau_B \gg \tau_R$ , 换句话说, 系统发生演化的速度远远慢于环境的忘记过去的时间, 那么我们可以在研究系统演化时做时间的粗粒化处理, 将上式的积分上限从  $t$  推至  $\infty$ , 即

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^\infty d\tau \operatorname{tr}_B [H_I(t), [H_I(t-\tau), \rho_S(t) \otimes \rho_B]] \quad (1.11)$$

上面所经历的近似统称 Born-Markov 近似。设薛定谔表象下的相互作用哈密顿量形式为

$$H_I = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}$$

我们总是可以让  $A_{\alpha}$  和  $B_{\alpha}$  都是厄米算符。将相互作用哈密顿量按照系统的自由哈密顿量的本征值做分解可以让我们便利地执行旋转波近似, 设薛定谔表象下系统的自由哈密顿量有本征分解

$$H_S = \epsilon \sum_{\epsilon} \Pi(\epsilon)$$

定义算符

$$A_{\alpha}(\omega) \equiv \sum_{\epsilon' - \epsilon = \omega} \Pi(\epsilon) A_{\alpha} \Pi(\epsilon')$$

利用对易关系<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} [H_S, A_{\alpha}(\omega)] &= -\omega A_{\alpha}(\omega) \\ [H_S, A_{\alpha}^{\dagger}(\omega)] &= +\omega A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) \end{aligned} \quad (1.12)$$

以及 BCH 公式, 可以将算符切换到相互作用表象

$$\begin{aligned} e^{iH_S t} A_{\alpha}(\omega) e^{-iH_S t} &= e^{-i\omega t} A_{\alpha}(\omega) \\ e^{iH_S t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) e^{-iH_S t} &= e^{+i\omega t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) \end{aligned} \quad (1.13)$$

另外, 根据前述对易关系, 有

$$[H_S, A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)] = 0$$

以及根据完备性关系

$$\sum_{\omega} A_{\alpha}(\omega) = \sum_{\omega} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) = A_{\alpha}$$

在相互作用表象下, 相互作用哈密顿量可以写成

$$H_I(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{-i\omega t} A_{\alpha}(\omega) \otimes B_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{+i\omega t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) \otimes B_{\alpha}^{\dagger}(t)$$

其中, 环境算符  $B_{\alpha}(t) = e^{iH_B t} B_{\alpha} e^{-iH_B t}$ 。

16

$$\begin{aligned} [H_S, A_{\alpha}(\omega)] &= \sum_{\epsilon} \epsilon \left[ \Pi(\epsilon), \sum_{x-y=\omega} \pi(x) A_{\alpha} \pi(y) \right] \\ &= \sum_{\epsilon, x-y=\omega} \epsilon (\delta_{\epsilon, x} \Pi(x) A_{\alpha} \pi(y) - \pi(x) A_{\alpha} \pi(y) \delta_{\epsilon, y}) \\ &= \sum_{x-y=\omega} (x-y) \Pi(x) A_{\alpha} \pi(y) \\ &= \omega A_{\alpha}(\omega) \end{aligned}$$

将相互作用哈密顿量  $H_I(t)$  代入式(1.11)可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \int_0^\infty ds \operatorname{tr}_B \{H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B H_I(t) - H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t)\rho_B\} + \text{h.c.} \\ &= \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\omega' - \omega)t} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left( A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega') - A_\alpha^\dagger(\omega')A_\beta(\omega)\rho_S(t) \right) + \text{h.c.}\end{aligned}$$

其中

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \equiv \int_0^\infty ds e^{i\omega s} \left\langle B_\alpha^\dagger(t)B_\beta(t-s) \right\rangle$$

是环境关联函数的单侧傅里叶变换，环境关联函数的定义为

$$\left\langle B_\alpha^\dagger(t)B_\beta(t-s) \right\rangle \equiv \operatorname{tr}_B \left\{ B_\alpha^\dagger(t)B_\beta(t-s)\rho_B \right\}$$

对时间齐次过程，可以假设

$$\left\langle B_\alpha^\dagger(t)B_\beta(t-s) \right\rangle = \left\langle B_\alpha^\dagger(s)B_\beta(0) \right\rangle$$

这一假设将使得  $\Gamma_{\alpha\beta}$  不依赖于时间。马尔科夫近似正是假设了关联函数衰减得足够快，只有当环境无穷大且模式连续时才能较为严格的成立，当频率离散时，关联函数通常是周期性的 [9, p.135]。系统作为封闭系统自由演化的特征时间  $\tau_S$  用  $|\omega' - \omega|^{-1}$  刻画，当  $\omega' \neq \omega$  时，对应的项是快速振荡的， $\tau_S \ll \tau_R$ ，即系统本身的演化特征时间远小于开放的约化系统的弛豫时间。忽略这些项的近似被称为旋转波近似，近似后，有

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left( A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) - A_\alpha^\dagger(\omega)A_\beta(\omega)\rho_S(t) \right) + \text{h.c.}$$

将关联函数的单侧傅里叶变换分解成实部和虚部

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(\omega) + iS_{\alpha\beta}(\omega)$$

其中实部构成了完整的傅里叶变换

$$\gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega s} \left\langle B_\alpha^\dagger(s)B_\beta(0) \right\rangle$$

而虚部将导致神奇的 Lamb 位移

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2i} \left( \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) - \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega) \right)$$

最终，主方程写成

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_{LS}, \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t)) \quad (1.14)$$

其中 Lindblad 算符

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left( A_\beta(\omega)\rho_S A_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ A_\alpha^\dagger(\omega)A_\beta(\omega), \rho_S \right\} \right)$$

Lamb 位移哈密顿量<sup>17</sup>

$$H_{LS} = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} S_{\alpha\beta}(\omega) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega)$$

矩阵  $\gamma_{\alpha\beta}$  实际上是正定的，可以将主方程写成对角化的形式。

通过参考系变换可以将相互作用表象换回到薛定谔表象，将  $\rho_S(t) = U^\dagger \rho_S^{(S)}(t)U$  代入式(1.14)，任意算符也做类似的变换，其中  $U = \exp(-iH_S t)$ ，式(1.14)变为

$$\frac{d}{dt}\rho_S^{(S)}(t) = -i \left[ H_{LS}^{(S)} + H_S, \rho_S^{(S)}(t) \right] + \mathcal{D}^{(S)}(\rho_S^{(S)}(t)) \quad (1.15)$$

<sup>17</sup>由于  $[H_S, H_{LS}] = 0$  我们总是可以将其看做能级的位移。

利用前述对易关系(1.13)可知,在这两种不同表象下, Lindblad 算符的形式完全相同,即

$$\begin{aligned} H_{LS}^{(S)} &= H_{LS} \\ \mathcal{D}^{(S)} &= \mathcal{D} \end{aligned}$$

因此薛定谔表象下的主方程是

$$\frac{d}{dt}\rho_S^{(S)}(t) = -i[H_{LS} + H_S, \rho_S(t)] + \mathcal{D}^{(S)}(\rho_S^{(S)}(t)) \quad (1.16)$$

## 1.5 经典噪声

量子比特在磁场下演化,假设磁场方向固定,磁场的大小模在白噪声的影响下具有涨落项  $\xi(t) = \sqrt{t_0}BdW/dt$ , 其中  $dW$  是维纳过程的“微分”,  $t_0$  是白噪声的特征时间。噪声的特征通常用功率谱密度 (PSD, power spectral density) 或自相关函数来刻画,两者的关系由 Wiener-Khinchine 定理给出: 宽平稳随机过程的功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换。为了更好地描述噪声或者节约计算成本(?), 需要额外考虑窗口函数以及对级数进行截断 [31], 关于  $1/f$  噪声, 参考更多关于噪声的分析见 [21, 37]。

qubit 在带噪声的磁场中的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(B + \xi(t))\sigma_n \\ \sigma_n &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{n} &= (\sin \theta, 0, \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.17)$$

带随机噪声项的薛定谔方程有两种求解方式, 第一种将随机薛定谔方程平均为主方程

$$\begin{aligned} d|\psi\rangle &= -\frac{i}{2}Bdt\sigma_n|\psi\rangle - \frac{i}{2}B\sqrt{t_0}dW\sigma_n|\psi\rangle \\ d^2|\psi\rangle &= -\frac{1}{4}B^2\left(1 + 2\sqrt{t_0}\frac{dW}{dt} + t_0\left(\frac{dW}{dt}\right)^2\right)dt^2|\psi\rangle - \frac{i}{2}\sigma_nB\frac{d^2W}{dt^2}|\psi\rangle dt^2 \\ &= -\frac{1}{4}B^2\left(dt^2 + 2\sqrt{t_0}dWdt + t_0dt\right)|\psi\rangle - \frac{i}{2}\sigma_nBdt|\psi\rangle \\ d\rho &= |d\psi\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle d\psi| + \frac{1}{2}\left(|d^2\psi\rangle\langle\psi| + 2|d\psi\rangle\langle d\psi| + |\psi\rangle\langle d^2\psi|\right) \\ \dot{\rho} &= -\frac{i}{2}B[\sigma_n, \rho] + \frac{B^2}{4}t_0(\sigma_n\rho\sigma_n - \rho) \end{aligned} \quad (1.18)$$

另一种是先求解带噪声的时间演化算符, 再通过平均得到末态。设初态为  $|\psi_0\rangle$ , 则末态为

$$\rho(t) = \mathbb{E}\left[U|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^\dagger\right] \quad (1.19)$$

其中  $U(t) = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_n(Bt + \int_0^t \xi(\tau)d\tau)\right)$

## 1.6 量子噪声与量子比特-热库模型 Quantum Noise and Qubit-bath Model

### 1.6.1 Polaronic Interaction of a Two-Level System with a Phonon Bath

二能级系统与声子热浴耦合 [22]

$$\begin{aligned} H &= H_S + H_{SB} + H_B, \\ H_S &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_+e^{-i\omega_L t} + \sigma_-e^{i\omega_L t}), \\ H_{SB} &= \sigma_z \otimes \hbar \sum_k \left(g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k\right) + \sigma_x \otimes \hbar \sum_k \left(\eta_k b_k^\dagger + \eta_k^* b_k\right), \\ H_B &= \hbar \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \hbar \sum_k \tilde{\omega}_k b_k^\dagger b_k. \end{aligned} \quad (1.20)$$

### 1.6.2 The Spin-boson System

自旋玻色系统 [8, 20, 23, 28], 动力学映射没有解析解。

$$\begin{aligned}
 H &= H_S + H_B + H_I \\
 H_S &= \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z - \frac{1}{2}\Delta\sigma_x \\
 H_B &= \sum_n \left( \frac{1}{2m_n}p_n^2 + \frac{1}{2}m_n\omega_n^2x_n^2 \right) \\
 H_I &= \frac{1}{2}\sigma_z \otimes B, \quad B = \sum_n \kappa_n x_n,
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

或者 [11]

$$H_I = \sum_k \sigma_x \left( g_k a_k + g_k^* a_k^\dagger \right) \tag{1.22}$$

### 1.6.3 Pure Dephasing Model

纯退相位模型 [11] 是少数能够解析求解的量子噪声模型, 在该模型中  $H_S$  与  $H_B$  对易。

$$\begin{aligned}
 H &= H_S + H_B + H_I \\
 H_S &= \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z \\
 H_B &= \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \\
 H_I &= \sum_k \sigma_z \left( g_k a_k + g_k^* a_k^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

在相互作用表象下

$$\begin{aligned}
 H_I(t) &= e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} \\
 &= \sum_k \sigma_z \left( g_k b_k^\dagger e^{i\omega_k t} + g_k^* b_k e^{-i\omega_k t} \right)
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}
 &[H_I(t_1), H_I(t_2)] \\
 &= \left[ \sum_k \sigma_z \left( g_k b_k^\dagger e^{i\omega_k t_1} + g_k^* b_k e^{-i\omega_k t_1} \right), \sum_l \sigma_z \left( g_l b_l^\dagger e^{i\omega_l t_2} + g_l^* b_l e^{-i\omega_l t_2} \right) \right] \\
 &= \sum_{kl} \left( \left[ \sigma_z g_k b_k^\dagger e^{i\omega_k t_1}, \sigma_z g_l^* b_l e^{-i\omega_l t_2} \right] + \sigma_z \otimes \left[ g_k^* b_k e^{-i\omega_k t_1}, g_l b_l^\dagger e^{i\omega_l t_2} \right] \right) \\
 &= \sum_{kl} -g_k g_l^* e^{i(\omega_k t_1 - \omega_l t_2)} \delta_{kl} + g_k^* g_l e^{-i(\omega_k t_1 - \omega_l t_2)} \delta_{kl} \\
 &= -\sum_k |g_k|^2 2i \sin(t_1 - t_2) \\
 &\triangleq -2i\phi(t_1 - t_2) \\
 \phi(t) &= \sum_k |g_k|^2 \sin t
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

两个时刻的哈密顿量的对易子是 c 数, 因此 Magnus 级数被截断, 动力学可以解析地求解。需要注意的是, 含时哈密顿量生成的时间演化算符往往不具有半群性质, 需要考虑从一般的  $t_0$  时刻开始演化, 取  $t_0 = 0$  可能会失去

一般性。

$$\begin{aligned}
 U(t) &= e^{\Omega_1 + \Omega_2} = e^{\Omega_2} e^{\Omega_1} \\
 \Omega_1 &= -i \int_{t_0}^t ds H_I(s) = \frac{1}{2} \sigma_z \sum_k \left( e^{i\omega_k t_0} \alpha_k(t-t_0) b_k^\dagger - e^{-i\omega_k t_0} \alpha_k(t-t_0)^* b_k \right), \\
 \text{其中 } \alpha_k(t) &= 2g_k (1 - e^{i\omega_k t}) / \omega_k \\
 \Omega_2 &= -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [H(t_1), H(t_2)] \\
 &= i \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \phi(t_1 - t_2)
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

为了计算简便，后面都取  $t_0 = 0$ 。注意到  $e^{\Omega_2}$  只产生一个全局相位，因此  $e^{\Omega_1}$  将主导态的演化<sup>18</sup>

$$\begin{aligned}
 e^{\Omega_1} |0\rangle \otimes |\varphi\rangle &= |0\rangle \otimes \prod_k D\left(\frac{\alpha_k(t)}{2}\right) |\varphi\rangle \\
 e^{\Omega_1} |1\rangle \otimes |\varphi\rangle &= |1\rangle \otimes \prod_k D\left(-\frac{\alpha_k(t)}{2}\right) |\varphi\rangle \\
 D_k(x) &= e^{x b_k^\dagger - x^* b_k}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

其中  $D_k(x)$  是位移算符<sup>19</sup>。作为近似，设初态是直积态  $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$ ，在弱耦合近似下，热库总处于热平衡态  $\rho_B = \frac{1}{Z_B} e^{-\beta H_B} = \prod_{\vec{k}, \lambda} (1 - \exp[-\beta \omega_k]) \exp[-\beta \omega_k b_{\vec{k}\lambda}^\dagger b_{\vec{k}\lambda}]$ ，其中配分函数<sup>20</sup>

$$\begin{aligned}
 Z_B &= \prod_k \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta \omega_k} = 1 / \prod_k (1 - e^{-\beta \omega_k}) \\
 \rho_S(t) &= \text{tr}_B (e^{\Omega_1} \rho e^{-\Omega_1}) \\
 &\triangleq \begin{pmatrix} \rho_{00}(t) & \rho_{01}(t) \\ \rho_{10}(t) & \rho_{11}(t) \end{pmatrix} \\
 \rho_{10}(t) &= \rho_{01}(t)^* \triangleq \rho_{10}(0) e^{\Gamma(t)} \\
 \rho_{11}(t) &= \rho_{11}(0) \\
 \rho_{00}(t) &= \rho_{00}(0)
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

将  $\Omega_1$  代入上式得到

$$\begin{aligned}
 \rho_{10}(t) &= \left\langle 1 \left| \text{tr}_B \left( e^{\frac{1}{2} \sigma_z \sum_k \alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k} \rho_S(0) \otimes \rho_B e^{-\frac{1}{2} \sigma_z \sum_k (\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k)} \right) \right| 0 \right\rangle \\
 &= \rho_{10}(0) \text{tr}_B \left( e^{-\sum_k \alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k} \rho_B \right)
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

<sup>18</sup>Breuer 关于基底的排列上用了与通常情况相反的约定 [8, 式子 (4.30)]，即  $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ ，本文采用的是  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

<sup>19</sup>定义和更多性质参见参量光笔记：式(??)

<sup>20</sup>容易算得在热态  $\rho_B$  下的期望

$$\begin{aligned}
 \langle b_{\vec{k}\lambda}(\vec{k}) b_{\vec{k}'\lambda'}(\vec{k}') \rangle &= \langle b_{\vec{k}\lambda}^\dagger(\vec{k}) b_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle = 0, \\
 \langle b_{\vec{k}\lambda}(\vec{k}) b_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \rangle &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} (1 + N(\omega_k)), \\
 \langle b_{\vec{k}\lambda}^\dagger(\vec{k}) b_{\vec{k}'\lambda'}(\vec{k}') \rangle &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} N(\omega_k),
 \end{aligned}$$

其中  $N(\omega_k) = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_k) - 1}$  是相应模式的平均光子数 [9, (3.195)]。

式(1.28)引入的  $\Gamma(t)$  可以表示为

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t) &= \ln \text{tr}_B \left( e^{-\sum_k (\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k)} \frac{1}{Z_B} \prod_k e^{-\beta \omega_k b_k^\dagger b_k} \right) \\
 &= \sum_k \ln \text{tr}_k \left( e^{-(\alpha_k b_k^\dagger - \alpha_k^* b_k)} \rho_k \right) \\
 &= \sum_k \ln \text{tr}_k \left( e^{-\alpha_k b_k^\dagger + \alpha_k^* b_k} \rho_k \right) \\
 &= \sum_k \ln e^{-\frac{|\alpha_k|^2}{2} \coth \frac{\beta \omega_k}{2}} \\
 &= \sum_k \ln e^{-\frac{4|g_k|^2}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) \coth \frac{\beta \omega_k}{2}} \\
 &= - \sum_k \frac{4|g_k|^2}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) \coth \frac{\beta \omega_k}{2} \\
 &\rightarrow - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \coth \frac{\beta \omega}{2}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

最后一步对热库的频谱密度  $J(\omega)$  做了连续化推广，其定义为单位频率区间内的噪声功率<sup>21</sup>，根据频谱函数的不同选择，初始的纯态的会以不同的速率松弛到不同的平衡态<sup>22</sup>。对于任意的频谱， $\Gamma(t)$  都满足当  $t$  很小时， $\Gamma(t) \approx 0$

在大量的物理系统构成的环境中，频谱总是可以写成幂率形式 [12]，常用的欧姆频谱密度满足 [1, 24]

$$J(\omega) = \alpha \frac{\omega^s}{\omega_c^{s-1}} e^{-\omega/\omega_c} \tag{1.31}$$

其中的  $\omega_c$  是截断频率， $s$  称为 Ohmacity parameter[2]。截断的形式也可以是其他形式，例如 Lorentz 线形 [10]<sup>23</sup>。

根据量子层析的计算方法，可以将上述动力学过程写成 Kraus 算符和的形式。

$$\begin{aligned}
 \rho(t) &= \mathcal{E}_{(t,0)}(\rho(0)) = \sum_{i=1,2} E_i(t) \rho(0) E_i^\dagger(t) \\
 E_1(t) &= \sqrt{\frac{1 + e^{\Gamma(t)}}{2}} \mathbb{I} \quad E_2(t) = \sqrt{\frac{1 - e^{\Gamma(t)}}{2}} \sigma_z
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

根据定理 1.5，使用基底  $F_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}}$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ ，可以求得  $t = 0$  时刻  $\rho(t)$  满足

$$\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{t=0} = -\gamma \left( F_3 \rho F_3^\dagger - \frac{1}{2} \{F_3^\dagger F_3, \rho\} \right)$$

其中，

$$\begin{aligned}
 a_{33}(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\Gamma(t)}}{t} = -\gamma \\
 a_{44}(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\Gamma(t)} - 1}{t} \triangleq \gamma
 \end{aligned}$$

<sup>21</sup>这里出现的频谱与经典的随机过程中的频谱含义是否相同？

<sup>22</sup>讨论频谱于噪声分析的意义

<sup>23</sup>噪声频谱的性质与非马尔可夫性之间是否存在关联？

矩阵  $a_{ij}(0)$  的其他元素为零, 定理中涉及的其他量为

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{\Gamma(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\Gamma(t)} + 1 \end{pmatrix}$$

$$F = H = 0, G = \gamma/4$$

如果在推导 Kraus 算符和表示时使用一般的初始时刻  $t_0$ , 则可以用类似的方法可以得到任意时刻的、完整的微分方程。

下面计算关于  $\omega_0$  的 Fisher 信息量  $\mathcal{F}_{\omega_0}(t)$ 。由于进行与待测参数有关的表象变换时, Fisher 信息量也会发生变化, 因此为了计算  $\mathcal{F}_{\omega_0}(t)$ , 需要切换到另一个相互作用表象中, 在该表象下

$$\rho_I(t) = e^{-iH_S t} \rho(t) e^{iH_S t} = \sum_{i=1,2} K_i(t) \rho(0) K_i^\dagger(t)$$

$$K_1(t) = \sqrt{\frac{1+e^{\Gamma(t)}}{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}it\omega_0} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}it\omega_0} \end{pmatrix} \quad K_2(t) = \sqrt{\frac{1-e^{\Gamma(t)}}{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}it\omega_0} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{1}{2}it\omega_0} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

初态

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \frac{z+1}{2} & \frac{1}{2}(x-iy) \\ \frac{1}{2}(x+iy) & \frac{1-z}{2} \end{pmatrix}$$

的 Fisher 信息量<sup>24</sup>为

$$\mathcal{F}_{\omega_0}(t) = t^2 e^{2\Gamma(t)} (x^2 + y^2) \quad (1.34)$$

从上式容易看出, 对任意  $t > 0$ , 当初态是纯态且位于  $z = 0$  平面上时, Fisher 信息量有最大值。

在相互作用表象下, 从  $t_0$  开始每隔  $\Delta t$  加入  $\sigma_x$  脉冲, 可以解析地计算整个系统的时间演化算符

$$U_P(t_0, t_1 = t_0 + 2\Delta t) = \exp\left(-\frac{\sigma_z}{2} \sum_k \left(e^{i\omega_k(t_0+\Delta t)} \alpha_k(\Delta t) b_k^\dagger - \text{c.c.}\right)\right) \exp\left(\frac{\sigma_z}{2} \left(\sum_k e^{i\omega_k t_0} \alpha_k(\Delta t) b_k^\dagger - \text{c.c.}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\sigma_z}{2} \sum_k \left(e^{i\omega_k t_0} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha_k(\Delta t) b_k^\dagger - \text{c.c.}\right)\right)$$

$$U_P(t_{n+1}, t_n) = \exp\left(\frac{\sigma_z}{2} \sum_k \left(e^{i\omega_k(t_0+2(n-1)\Delta t)} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha_k(\Delta t) b_k^\dagger - \text{c.c.}\right)\right)$$

$$U_P(t_0, t_N) = \exp\left(\frac{\sigma_z}{2} \sum_k \sum_{n=1}^N e^{i\omega_k(t_0+2(n-1)\Delta t)} (1 - e^{i\omega_k \Delta t}) \alpha_k(\Delta t) b_k^\dagger - \text{c.c.}\right)$$

$$\triangleq \exp\left(\frac{\sigma_z}{2} \sum_k \left(\eta_k(N, \Delta t) b_k^\dagger - \text{c.c.}\right)\right)$$

计算 qubit 的 dephasing 只需要将前面计算过程中的  $\alpha_k$  直接替换成  $\eta_k(N, \Delta t)$

$$\Gamma_P(t_N - t_0) = - \sum_k \frac{|\eta_k(N, \Delta t)|^2}{2} \coth \frac{\beta \omega_k}{2}$$

比较加入脉冲前后的退相干情况可知, 当  $\omega_k \Delta t \leq \pi/2$  时,

$$|\alpha_k(2N\Delta t)|^2 - |\eta_k(N, \Delta t)|^2 = 16 \cos(\Delta t \omega_k) \sec^4\left(\frac{\Delta t \omega_k}{2}\right) \sin^4(\Delta t N \omega_k) \geq 0$$

加入足够的密集的脉冲就能够减缓退相干。而当  $\pi/2 \leq \omega_k \Delta t \leq 3\pi/2$  时, pulse 总是能加快 dephasing。

<sup>24</sup>参考: Pure dephasing 模型中的 Fisher 信息量.nb

### 1.6.4 耗散环境中的二能级系统：JC 模型 Two-level System in a Dissipative Environment: JC Model

耗散环境中的二能级系统 [11]

$$\begin{aligned} H_S &= \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z \\ H_E &= \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \\ H_I &= \sum_k \left( g_k \sigma_+ a_k + g_k^* \sigma_- a_k^\dagger \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

当热库改为单个模式时，称为 **Jaynes-Cummings 模型**，它描述了二能级的原子与光场的相互作用

$$\begin{aligned} H_{\text{field}} &= \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ H_{\text{atom}} &= \hbar \omega_0 \frac{\sigma_z}{2} \\ H_{\text{int}} &= \frac{\hbar \Omega}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\sigma_+ + \sigma_-) \end{aligned}$$

利用 BCH 公式，有

$$\begin{aligned} e^{i\theta a^\dagger a} a e^{-i\theta a^\dagger a} &= e^{-i\theta} a \\ e^{i\theta a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\theta a^\dagger a} &= e^{i\theta} a^\dagger \\ e^{i\omega_0 \sigma_z/2} \sigma_+ e^{-i\omega_0 \sigma_z/2} &= e^{i\omega_0} \sigma_+ \\ e^{i\omega_0 \sigma_z/2} \sigma_- e^{-i\omega_0 \sigma_z/2} &= e^{-i\omega_0} \sigma_- \end{aligned}$$

相互作用表象下的总哈密顿量  $H_{\text{JC}} = H_{\text{field}} + H_{\text{atom}} + H_{\text{int}}$  为

$$H_{\text{int}}(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} \left( \hat{a} \sigma_- e^{-i(\omega_c + \omega_0)t} + \hat{a}^\dagger \sigma_+ e^{i(\omega_c + \omega_0)t} + \hat{a} \sigma_+ e^{-i(-\omega_c + \omega_0)t} + \hat{a}^\dagger \sigma_- e^{i(-\omega_c + \omega_0)t} \right)$$

在旋转波近似下

$$H_{\text{int}}(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} \left( \hat{a} \sigma_+ e^{-i(-\omega_c + \omega_0)t} + \hat{a}^\dagger \sigma_- e^{i(-\omega_c + \omega_0)t} \right)$$

在旋转波近似下薛定谔表象的哈密顿量为，

$$H_{\text{JC}} = \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \omega_0 \frac{\sigma_z}{2} + \frac{\hbar \Omega}{2} (\hat{a} \sigma_+ + \hat{a}^\dagger \sigma_-) \quad (1.36)$$

注意上式中已经假设  $g = \hbar \Omega/2$  为实数。在相互作用表象下，

$$\tilde{H}_I(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} \left( e^{i(\omega_0 - \omega_c)t} a \sigma_+ + e^{-i(\omega_0 - \omega_c)t} a^\dagger \sigma_- \right)$$

将薛定谔表象的哈密顿量  $H_{\text{JC}}$  拆成对易的两项，

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar \omega_c \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\sigma_z}{2} \right) \\ H_2 &= \hbar \delta \frac{\sigma_z}{2} + \frac{\hbar \Omega}{2} (\hat{a} \sigma_+ + \hat{a}^\dagger \sigma_-) \end{aligned}$$

其中  $\delta = \omega_0 - \omega_c$  为失谐，通常我们处理小失谐问题，即  $\delta$  远小于 Rabi 频率  $\Omega$ 。以  $H_1$  的本征态  $\{|n, \pm\rangle\}$  为基底，可以得到分块对角阵  $H_{\text{JC}} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} H^{(n)}$ ，其中每个对角块为

$$H^{(n)} = \hbar \begin{pmatrix} n\omega_c + \frac{\omega_0}{2} & \frac{\Omega}{2} \sqrt{n+1} \\ \frac{\Omega}{2} \sqrt{n+1} & (n+1)\omega_c - \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\omega_c + \frac{\delta}{2} & \frac{\Omega}{2} \sqrt{n+1} \\ \frac{\Omega}{2} \sqrt{n+1} & (n + \frac{1}{2})\omega_c - \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$$

该哈密顿量又回到了半经典的模型，参见第??节。对角化该哈密顿量可以得到能谱和任意的初态演化。本征值

$$E_{n,\pm} = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\hbar \Delta_n}{2}, \quad \Delta_n = \sqrt{\delta^2 + (1+n)\Omega^2} \quad (1.37)$$



### 1.6.5 大失谐近似

在量子光学和量子信息领域，色散近似（Dispersive Approximation）（又称为大失谐近似）是一种简化模型，用于描述原子（或量子系统）与电磁场（如光场）相互作用时的动力学。在 Jaynes-Cummings 模型中，色散近似通常意味着原子的能级在与光场相互作用时不会发生显著的能级分裂，因此原子的能级保持不变，而光场的频率会因为原子的存在而发生微小的偏移。这种偏移被称为色散位移，它是光场频率与原子共振频率之差的函数。

在色散近似中，原子与光场的相互作用被视为弱耦合，这意味着原子的能级分裂（由光场引起的能级位移）远小于原子的自然线宽。这种近似允许我们忽略原子能级分裂对系统动力学的直接影响，从而简化了系统的哈密顿量。在色散近似下，原子与光场的相互作用可以通过一个有效的哈密顿量来描述，这个哈密顿量通常包含一个与原子和光场相互作用强度相关的项。

在色散近似下，对于我们感兴趣的  $n$  都有，式(1.37)中的  $\Omega^2(n+1)$  远小于  $\delta$ ，则

$$E_{n,\pm} \approx \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\hbar}{2} \left( |\delta| + \frac{(n+1)\Omega^2}{2|\delta|} \right)$$

对式(1.36)中的哈密顿量做 Schrieffer-Wolff 变换<sup>25</sup>，设

$$H_{JC} = H_0 + V$$

其中  $H_0 = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_0 \frac{\sigma_z}{2}$ ,  $V = \frac{\hbar\Omega}{2} (\hat{a}\sigma_+ + \hat{a}^\dagger\sigma_-)$ ，在大失谐近似下  $V$  是小量，做参考系变换

$$H' = e^S H e^{-S}$$

其中  $S$  满足  $V + [S, H_0] = 0$ ，对  $V$  和  $H_0$  的形式稍加观察，设  $S = x \hat{a}^\dagger \sigma_- + y \hat{a} \sigma_+$ ，利用待定系数法可得  $y = -x = \Omega/2\delta$ ，综上

$$S = \frac{\Omega}{2\delta} (a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-)$$

$$H' = H_0 + \frac{1}{2}[S, V] + O(V^3) \approx H_0 + \frac{\Omega^2}{4\delta} (|0\rangle\langle 0| + a^\dagger a \otimes \sigma_z)$$

括号中的第一项称为 Lamb 位移，由真空涨落引起，而第二项称为 Stark 位移，由光场的热涨落引起。

关于做 Schrieffer-Wolff 变换，再举一例 [16]，考虑腔 QED 中的模型人工原子与光场相互作用的总哈密顿量

$$\begin{aligned} H_{SC} &= H_S + H_C + H_{\text{int}} \\ &= \sum_j \Omega_j |j\rangle\langle j| + \omega_c a^\dagger a + \hat{\mu} (a + a^\dagger) \end{aligned}$$

假设  $|\hat{\mu}_{jk} = \langle j|\hat{\mu}|k\rangle| \ll |\omega_c - (\Omega_k - \Omega_j)|$ ，可以利用推广的色散近似，

$$H_{SC}^D = U_D H_{SC} U_D^\dagger \approx H_S^D + \omega_c a^\dagger a + O_S a^\dagger a$$

其中已经略去了双光子产生和湮灭<sup>26</sup>， $U_D \equiv \exp S \equiv \exp [X a^\dagger - X^\dagger a]$ ， $O_S = \frac{1}{2} [\hat{\mu}, X^\dagger - X]$ ， $X = \sum_{jk} \frac{\hat{\mu}_{jk}}{\omega_c + \Omega_j - \Omega_k} |j\rangle\langle k|$ ， $\hat{\mu}_{jk} = \langle j|\hat{\mu}|k\rangle$

### 1.6.6 Single qubit with multiple decoherence channels

该模型的解析解是单比特的随机么正动力学映射，他可以用来区分关于非马尔可夫性不同定义 [11]。

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \gamma_i(t) [\sigma_i \rho_S(t) \sigma_i - \rho_S(t)] \quad (1.38)$$

$$\Phi_t(\rho_S) = \sum_{i=0}^3 p_i(t) \sigma_i \rho_S \sigma_i \quad (1.39)$$

<sup>25</sup> 计算过程参见：Normal Ordering and Commutator v4.0.nb

<sup>26</sup> 过程参见：dispersion approximation.nb

## 1.7 Hierarchical Equations Of Motion (HEOM)

由 Yoshitaka Tanimura 和 Ryogo Kubo 于 1989 年推导出的分层运动方程 (HEOM) 是一种非微扰方法, 用于研究密度矩阵的演化  $\rho(t)$  量子耗散系统。该方法可以处理非微扰的系统-热库相互作用以及非马尔可夫噪声相关时间。

## 1.8 量子轨迹 Quantum trajectory

量子轨迹理论主要应用于理论量子光学和量子开放系统理论, 与量子力学的概念构建形式 (formalism) (量子测量理论) 密切相关。经典随机微分方程 (SED) 的成功启发了在量子领域研究类似的方程, 由此产生了随机薛定谔方程等量子随机微分方程。这本书 [4] 介绍基于经典 SDE 的量子开放系统理论的方法, 特别强调连续测量。当量子系统在时间上被连续监测的过程被称为连续测量。量子力学的传统表述只考虑瞬时测量, 但对量子系统的连续测量是一种常见的实验实践; 典型的情况是各种形式的光子探测。量子理论关于可观测的陈述具有概率性质; 因此, 连续测量的量子理论产生随机过程是很自然的。此外, 一个持续观察的系统肯定是开放的。所有这些论点表明, 量子连续测量理论的发展需要量子测量理论、开放系统理论、算子理论、量子概率、量子 and 经典随机过程等理论。

进行连续测量主要有 3 种方式

- 基于最正统的量子力学建立方式 (POVM), 与傅里叶变换、算符测度、马尔科夫半群的量子类比有关。
- 基于量子随机微积分和量子随机微分方程。这本书 [4] 没有讨论。
- 基于经典随机微分方程以及后验状态 (a posteriori states), 它起源于 Belavkin 在量子滤波方面的工作, 与量子光学中出现的概念有关, 如量子态扩散模型、量子轨迹、蒙特卡罗波函数方法、主方程的解开 (unravelling)。

连续测量中有四种经典 SDE

- 希尔伯特空间中非归一化向量的线性方程,
- 希尔伯特空间中归一化向量的非线性方程 (随机薛定谔方程),
- 正迹类算子的线性方程,
- 密度矩阵的非线性方程 (随机主方程)。

### 1.8.1 量子随机过程

#### 1.8.1.1 Quantum Stochastic Processes and Quantum non-Markovian Phenomena

- 总体思路
  - 本文 [26] 试图回答的核心问题是
    - 如何克服量子随机过程中的概念问题。
    - 当量子系统沉浸在复杂的环境中时, 如何全面地刻画多个时刻的关联 (multitime correlations) 以及记忆效应。
  - 研究开放系统的核心思想是统计学。量子随机过程不像经典过程一样有着严格的分析学基础。为了精细地对量子系统进行建模和控制、设计容错量子器件和量子计算机, 我们需要更好地理解量子系统所承载的信息, 复杂量子过程的核心机制。
  - 讨论经典随机过程和量子随机过程的关系。
  - 讨论量子随机过程的早期结果 (主方程和 Kraus 算符)、关注推广量子随机过程中的基本问题 (柯爾莫哥洛夫拓展定理 KET 的失效, 即经典情形中的相容性条件得不到满足, 在量子情形中三次测量的概率分布并不包含两次测量的概率分布)。
  - 量子理论的特征使得量子随机过程不同于经典过程。
  - 量子随机过程的特征, 例如马尔科夫和非马尔科夫过程的区别。
- 创新之处

- 提供了一种描述量子随机过程的方法，使得量子随机过程能够处理好量子测量固有的对系统的干扰性，它分离了测量过程和潜在的动力学演化。

## 参考文献

- [1] Carole Addis et al. “Coherence trapping and information backflow in dephasing qubits”. In: *Physical Review A* 89.2 (2014), p. 024101. DOI: [10.1103/PhysRevA.89.024101](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.024101). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.024101>.
- [2] Carole Addis et al. “Dynamical decoupling efficiency versus quantum non-Markovianity”. In: *New Journal of Physics* 17 (2015). ISSN: 1367-2630. DOI: [10.1088/1367-2630/17/12/123004](https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/12/123004). URL: [3CGO%20to%20ISI%3E://WOS:000365955600004](https://www.wos.org/doi/10.1088/1367-2630/17/12/123004).
- [3] Subhashish Banerjee et al. “Characterization of Unruh Channel in the Context of Open Quantum Systems”. In: *J. High Energ. Phys.* 2017.2 (2017), p. 82. ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/JHEP02\(2017\)082](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2017)082). (Visited on 03/17/2024).
- [4] Alberto Barchielli and Matteo Gregoratti. *Quantum trajectories and measurements in continuous time: the diffusive case*. Vol. 782. Springer, 2009.
- [5] Christian Beck. “Localization: local quantum measurement and relativity”. PhD thesis. Dissertation, München, Ludwig-Maximilians-Universität, 2020, 2020.
- [6] Fabio Benatti et al., eds. *Irreversible Quantum Dynamics*. Vol. 622. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. ISBN: 978-3-540-40223-7 978-3-540-44874-7. DOI: [10.1007/3-540-44874-8](https://doi.org/10.1007/3-540-44874-8). (Visited on 03/10/2024).
- [7] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. “Concepts and Methods in the Theory of Open Quantum Systems”. In: *Irreversible Quantum Dynamics*. Ed. by Fabio Benatti and Roberto Floreanini. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003, pp. 65–79. ISBN: 978-3-540-44874-7. DOI: [10.1007/3-540-44874-8\\_4](https://doi.org/10.1007/3-540-44874-8_4). (Visited on 03/10/2024).
- [8] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002, p. 490. ISBN: 0198520638.
- [9] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002. ISBN: 0198520638.
- [10] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002. ISBN: 0198520638.
- [11] Heinz-Peter Breuer et al. “Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum systems”. In: *Reviews of Modern Physics* 88.2 (2016). ISSN: 0034-6861. URL: <https://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.88.021002>.
- [12] A. W. Chin, S. F. Huelga, and M. B. Plenio. “Quantum Metrology in Non-Markovian Environments”. In: *Physical Review Letters* 109.23 (2012), p. 5. ISSN: 0031-9007. DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.233601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.233601). URL: [3CGO%20to%20ISI%3E://WOS:000312011200013%20https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.109.233601](https://www.wos.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.233601).
- [13] Samuel N Cohen and Robert James Elliott. *Stochastic calculus and applications*. Vol. 2. Springer, 2015.

- [14] Inés De Vega and Daniel Alonso. “Dynamics of non-Markovian open quantum systems”. In: *Reviews of Modern Physics* 89.1 (2017). ISSN: 0034-6861. DOI: [10.1103/revmodphys.89.015001](https://doi.org/10.1103/revmodphys.89.015001). URL: <https://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.89.015001>.
- [15] Joseph L Doob. “The Brownian movement and stochastic equations”. In: *Annals of Mathematics* (1942), pp. 351–369.
- [16] JG Peixoto de Faria and MC Nemes. “Dissipative dynamics of the Jaynes-Cummings model in the dispersive approximation: Analytical results”. In: *Physical Review A* 59.5 (1999), p. 3918.
- [17] Jean-Pierre Francoise, Gregory L Naber, and Sheung Tsun Tsou. *Encyclopedia of mathematical physics*. Vol. 2. Elsevier Amsterdam, 2006.
- [18] Akio Fujiwara and Hiroshi Imai. “A fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41.25 (2008), p. 255304. ISSN: 1751-8113 1751-8121. DOI: [10.1088/1751-8113/41/25/255304](https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/25/255304). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/41/25/255304>.
- [19] A. Fuliński. “Non-Markovian Noise”. In: *Phys. Rev. E* 50.4 (1994), pp. 2668–2681. DOI: [10.1103/PhysRevE.50.2668](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.50.2668). (Visited on 03/24/2024).
- [20] Joel Gilmore and Ross H McKenzie. “Spin boson models for quantum decoherence of electronic excitations of biomolecules and quantum dots in a solvent”. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 17.10 (Feb. 2005), pp. 1735–1746. DOI: [10.1088/0953-8984/17/10/028](https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/10/028). URL: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/10/028>.
- [21] Roy M Howard. *Principles of random signal analysis and low noise design: The power spectral density and its applications*. John Wiley & Sons, 2004. ISBN: 0471460834.
- [22] Abraham G Kurizki Gershon Kofman. *Thermodynamics and Control of Open Quantum Systems*. Cambridge University Press, 2022, p. 48. ISBN: 1107175410.
- [23] A. J. Leggett et al. “Dynamics of the dissipative two-state system”. In: *Reviews of Modern Physics* 59.1 (1987), pp. 1–85. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.59.1>.
- [24] A. J. Leggett et al. “Dynamics of the dissipative two-state system”. In: *Rev. Mod. Phys.* 59 (1 Jan. 1987), pp. 1–85. DOI: [10.1103/RevModPhys.59.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.59.1). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.59.1>.
- [25] E. Mangaud et al. “Non-Markovianity in the optimal control of an open quantum system described by hierarchical equations of motion”. In: *New Journal of Physics* 20.4 (2018), p. 043050. ISSN: 1367-2630. DOI: [10.1088/1367-2630/aab651](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aab651). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/aab651>.
- [26] S. Milz and K. Modi. “Quantum Stochastic Processes and Quantum non-Markovian Phenomena”. In: *Prx Quantum* 2.3 (2021). Tl3ps Times Cited:21 Cited References Count:397. DOI: [ARTN03020110.1103/PRXQuantum.2.030201](https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.2.030201).
- [27] Valter Moretti. *Spectral theory and quantum mechanics*. UNITEXT, Italy: Springer International Publishing AG. 2017.
- [28] Ahsan Nazir. “Correlation-Dependent Coherent to Incoherent Transitions in Resonant Energy Transfer Dynamics”. In: *Physical Review Letters* 103.14 (2009). ISSN: 0031-9007. DOI: [10.1103/physrevlett.103.146404](https://doi.org/10.1103/physrevlett.103.146404). URL: <https://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.103.146404>.
- [29] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Vol. 54. 2. 2001, p. 60.
- [30] Vern Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras*. 78. Cambridge University Press, 2002.
- [31] Wolfram Research. *PowerSpectralDensity*. <https://reference.wolfram.com/language/ref/PowerSpectralDensity.html>. [version 13.0]. 2012.

- [32] Angel Rivas and Susana F Huelga. *Open quantum systems*. Vol. 10. Springer, 2012.
- [33] Angel Rivas, Susana F. Huelga, and Martin B. Plenio. “Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection”. In: *Reports on Progress in Physics* 77.9 (2014). Times Cited: 522 Plenio, Martin B/I-7895-2013; Rivas, Ángel/B-1537-2010; Plenio, Martin B/Y-8282-2019; Plenio, Martin B/ Rivas, Ángel/0000-0002-0636-2446; Plenio, Martin B/0000-0003-4238-8843 0 523 1361-6633. ISSN: 0034-4885. DOI: [10.1088/0034-4885/77/9/094001](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/9/094001).
- [34] Wolfgang Scherer. *Mathematics of quantum computing*. Springer, 2019.
- [35] P. Szańkowski et al. “Environmental noise spectroscopy with qubits subjected to dynamical decoupling”. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 29.33 (2017), p. 333001. ISSN: 0953-8984. DOI: [10.1088/1361-648x/aa7648](https://doi.org/10.1088/1361-648x/aa7648). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-648x/aa7648%20https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-648X/aa7648/pdf>.
- [36] Kip S Thorne and Roger D Blandford. *Modern classical physics: optics, fluids, plasmas, elasticity, relativity, and statistical physics*. Princeton University Press, 2017.
- [37] Jerry C Whitaker. *The electronics handbook*. Crc Press, 2018, p. 30. ISBN: 1315220709.
- [38] S. S. Zhou et al. “Achieving the Heisenberg limit in quantum metrology using quantum error correction”. In: *Nature Communications* 9 (2018). Fs0el Times Cited:88 Cited References Count:62. ISSN: 2041-1723. URL: [HYPERLINK%20%22http://gateway.isiknowledge.com/gateway/Gateway.cgi?GWVersion=2&SrcAuth=ResearchSoft&SrcApp=EndNote&DestLinkType=FullRecord&DestApp=WOS&KeyUT=000419446600006%22%3CGo%20to%20ISI%3E://WOS:000419446600006](http://gateway.isiknowledge.com/gateway/Gateway.cgi?GWVersion=2&SrcAuth=ResearchSoft&SrcApp=EndNote&DestLinkType=FullRecord&DestApp=WOS&KeyUT=000419446600006%22%3CGo%20to%20ISI%3E://WOS:000419446600006).
- [39] 任佳刚. 随机过程教程. Vol. 194. 科学出版社, 2021.
- [40] 李忠华. 线性代数. 未出版, 2020.

## W

Wiener-Khintchine theorem

26