

量子线路和量子模拟

癸卯年十月初七 2023年11月19日15:50:24

```
In[1]:= << Wolfram`QuantumFramework`
```

目录

- 量子线路模型
 - 单比特门
 - 受控门
 - 测量
 - 通用量子门
 - 总结
- 其他量子计算模型
- 量子模拟

1 量子线路模型 Quantum Circuit

本章将详细探讨量子计算，阐述量子计算的基本原理，建立量子电路的基本构造框架。

量子线路是一种描述复杂量子计算的通用语言。

目前已知的两个基础量子算法量子傅里叶变换、量子搜索算法是由这些电路在接下来两章中构造的。

1.1 单比特门

X 门和 $R_X(\theta)$ 门

```
In[2]:= opx = QuantumOperator["X"];  
opx = QuantumOperator[PauliMatrix[1]];  
opx["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[5]:= opx // TraditionalForm
```

Out[5]//TraditionalForm=

$$|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

```
In[6]:= (QuantumState /@ ({# / Norm[#] & /@ Eigenvectors[PauliMatrix[1]]}) // TraditionalForm
```

```
Out[6]//TraditionalForm=
```

$$\left\{ -\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right\}$$

```
In[7]:= opx[QuantumState[{α, β}]] // TraditionalForm
```

```
Out[7]//TraditionalForm=
```

$$\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

```
In[8]:= QuantumOperator[{"RX", θ}][["Matrix"] // Normal // FullSimplify // MatrixForm
```

$$\text{MatrixExp}\left[-i \frac{\theta}{2} \text{PauliMatrix}[1]\right] // \text{MatrixForm} \text{ (* 绕着x轴旋转角度 } \theta \text{ *)}$$

$$\text{I \% /. } \theta \rightarrow \text{Pi} // \text{MatrixForm}$$

```
Out[8]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] & -i \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ -i \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```
Out[9]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] & -i \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ -i \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```
Out[10]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y 门和 $R_Y(\theta)$ 门

```
In[11]:= opy = QuantumOperator[PauliMatrix[2]];
```

```
opy[["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

```
Out[12]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[13]:= QuantumOperator[{"RY", θ}][["Matrix"] // Normal // FullSimplify // MatrixForm
```

$$\text{MatrixExp}\left[-i \frac{\theta}{2} \text{PauliMatrix}[2]\right] // \text{MatrixForm}$$

$$\text{I \% /. } \theta \rightarrow \text{Pi} // \text{MatrixForm}$$

```
Out[13]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] & -\sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```
Out[14]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] & -\sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```
Out[15]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Z 门和 $R_z(\theta)$ 门

```
In[16]:= QuantumCircuitOperator["Z"];
          %["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

```
Out[17]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```

```
In[18]:= QuantumOperator["Z"] // TraditionalForm
```

```
Out[18]//TraditionalForm=

$$|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

```

```
In[19]:= QuantumOperator[{"RZ", \theta}][["Matrix"] // Normal // FullSimplify // MatrixForm
          MatrixExp[-I \frac{\theta}{2} PauliMatrix[3]] // MatrixForm
          I % /. \theta \to Pi // MatrixForm
```

```
Out[19]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

```

```
Out[20]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

```

```
Out[21]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$R_n(\theta)$ 门：绕着轴 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 旋转角度 θ

$$R_{\hat{n}}(\theta) \equiv e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}/2} = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) I - i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) (n_x X + n_y Y + n_z Z) \quad (4.8)$$

```
In[22]:= n[i_] := {x, y, z}[[i]];
```

```
In[23]:= MatrixExp[-I \frac{\theta}{2} Sum[n[i] * PauliMatrix[i], {i, 3}]] // Simplify[#, {x, y, z} \in Sphere[]] & // FullSimplify //
          MatrixForm
```

```
Out[23]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] - i z \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & (-i x - y) \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ (-i x + y) \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] + i z \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```

Hadamard 门

```
In[24]:= H = QuantumCircuitOperator["H"];
          %["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

```
Out[25]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```
In[26]:= QuantumOperator["H"] // TraditionalForm
          QuantumOperator["H"]@QuantumState[{1, 0}] // TraditionalForm
          QuantumOperator["H"]@QuantumState[{0, 1}] // TraditionalForm
```

```
Out[26]//TraditionalForm=
```

$$\frac{|0\rangle\langle 0|}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle\langle 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle\langle 0|}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle\langle 1|}{\sqrt{2}}$$

```
Out[27]//TraditionalForm=
```

$$\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

```
Out[28]//TraditionalForm=
```

$$\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

```
In[29]:= (H/*H)["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

```
Out[29]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[30]:= H[QuantumState[{1, 0}]] // TraditionalForm
          H[QuantumState[{0, 1}]] // TraditionalForm
```

```
Out[30]//TraditionalForm=
```

$$\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

```
Out[31]//TraditionalForm=
```

$$\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

用 H 门制作均匀(等系数)叠加态

```
In[32]:= QuantumCircuitOperator["HHH"][QuantumState[{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}]] // TraditionalForm
```

```
Out[32]//TraditionalForm=
```

$$\frac{|000\rangle}{2\sqrt{2}} + \frac{|001\rangle}{2\sqrt{2}} + \frac{|010\rangle}{2\sqrt{2}} + \frac{|011\rangle}{2\sqrt{2}} + \frac{|100\rangle}{2\sqrt{2}} + \frac{|101\rangle}{2\sqrt{2}} + \frac{|110\rangle}{2\sqrt{2}} + \frac{|111\rangle}{2\sqrt{2}}$$

相位门 S

```
In[33]:= QuantumOperator["S"]["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

```
Out[33]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

T 门

```
In[34]:= QuantumOperator["T"]["Matrix"] // Normal // MatrixForm
Out[34]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

```

单比特门的一般性质

将一个单比特门视为对qubit的一次旋转

任何单比特门($U(2)$)都是旋转 $R_{\hat{n}}(\theta)$ 乘一个相位

习题 4.8 对实数 α 和 θ , 三维实单位向量 \hat{n} , 任意一单量子比特酉算子可表示为

$$U = \exp(i\alpha)R_{\hat{n}}(\theta) \quad (4.9)$$

1. 证明上述事实。
2. 求出阿达玛门 H 对应的 α , θ 和 \hat{n} 。
3. 求出 S 门对应的 α , θ 和 \hat{n} 。

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

■ $u \in U(2)$, 存在 $s \in SU(2)$, 满足 $u = e^{i\alpha} s$

```
In[35]:= rnt2 =
  MatrixExp[-I  $\frac{\theta}{2}$  Sum[n[i] * PauliMatrix[i], {i, 3}]] // Simplify[#, {x, y, z} ∈ Sphere[]] & // FullSimplify;
% // MatrixForm
Out[36]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] - iz \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & (-ix - y) \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ (-ix + y) \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] + iz \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```

```
In[37]:= sol = Solve[rnt2 == {{α, β}, {-Conjugate[β], Conjugate[α]}}, {θ, x, y, z}] //
FullSimplify[#, C[1] == 0 && 0 < θ < 2 π] &
```

```
Out[37]=
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{2i(\beta - \text{Re}[\beta])}{\sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}}, \right. \right. \\ y \rightarrow -\frac{2\text{Re}[\beta]}{\sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}}, z \rightarrow \frac{2i(\alpha - \text{Re}[\alpha])}{\sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}}, \\ \left. \theta \rightarrow 2 \text{ArcTan}\left[2\text{Re}[\alpha], \sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}\right] \right\}, \\ \left\{ x \rightarrow -\frac{2i(\beta - \text{Re}[\beta])}{\sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}}, y \rightarrow \frac{2\text{Re}[\beta]}{\sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}}, \right. \\ \left. z \rightarrow -\frac{2i(\alpha - \text{Re}[\alpha])}{\sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}}, \right. \\ \left. \theta \rightarrow 2 \text{ArcTan}\left[2\text{Re}[\alpha], -\sqrt{4 + \alpha^2 - \text{Conjugate}[\alpha]^2 - 4\alpha \text{Re}[\alpha]}\right] \right\} \right\}$$

2. 哈达玛门

```
In[38]:= h = QuantumCircuitOperator["H"]["Matrix"] // Normal;
% // MatrixForm
Det[h]
sol /. {α → √Det[h] h[[1, 1]], β → √Det[h] h[[1, 2]]}
```

```
Out[39]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```
Out[40]=
```

-1

```
Out[41]=
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}, y \rightarrow 0, z \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}, \theta \rightarrow \pi \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, y \rightarrow 0, z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta \rightarrow -\pi \right\} \right\}$$

3. 相位门

```
In[42]:= s = QuantumCircuitOperator["S"]["Matrix"] // Normal;
% // MatrixForm
Det[s]
sol /. {α → √Conjugate@Det[s] s[[1, 1]], β → √Conjugate@Det[s] s[[1, 2]]} // Simplify
```

```
Out[43]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

```
Out[44]=
```

i

```
Out[45]=
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 1, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\}, \left\{ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow -1, \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2} \right\} \right\}$$

```
In[46]:=  $\sqrt{\text{Det}[s]}$  MatrixExp $\left[-i \frac{\pi}{4} \text{PauliMatrix}[3]\right]$  // MatrixForm // Simplify (*验证解出来的n,θ和α确实能得到S*)
```

```
Out[46]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

3维与2维的旋转的联系

```
In[47]:= 习题 4.6 (旋转的布洛赫球解释)  $R_{\hat{n}}(\theta)$  算子被称为旋转算子的一个原因是以下事实, 请读者证明。假设一单量子比特状态可由布洛赫向量  $\vec{\lambda}$  表示。则旋转  $R_{\hat{n}}(\theta)$  对该状态的作用是在布洛赫
```

```
In[48]:= 球上关于  $\hat{n}$  轴旋转角度  $\theta$ 。这个事实解释了旋转矩阵中貌似神秘的两个因子。
```

```
In[49]:= Clear[n]
```

```
In[50]:= n[i_] := {x, y, z}[[i]]; (*转轴*)
```

```
In[51]:= rnt2 =
```

```
MatrixExp $\left[-i \frac{\theta}{2} \text{Sum}[n[i] * \text{PauliMatrix}[i], \{i, 3\}]\right]$  // Simplify[#, {x, y, z} ∈ Sphere[]] & // FullSimplify;
```

```
% // MatrixForm
```

```
b1c2 = {Cos $\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ , Eiβ Sin $\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ }; (*变换前的qubit, α和β分别是Bloch矢量的极角与经度角*)
```

```
rp = rnt2.b1c2 // FullSimplify;
```

```
rp // MatrixForm
```

```
Out[52]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] - i z \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & (-i x - y) \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ (-i x + y) \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] + i z \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```
Out[55]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} (x - i y) \sin\left[\frac{\alpha}{2}\right] (-i \cos[\beta] + \sin[\beta]) \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] + \cos\left[\frac{\alpha}{2}\right] (\cos\left[\frac{\theta}{2}\right] - i z \sin\left[\frac{\theta}{2}\right]) \\ (-i x + y) \cos\left[\frac{\alpha}{2}\right] \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] + e^{i\beta} \sin\left[\frac{\alpha}{2}\right] (\cos\left[\frac{\theta}{2}\right] + i z \sin\left[\frac{\theta}{2}\right]) \end{pmatrix}$$

```
In[56]:= pblc = KroneckerProduct[rp, ConjugateTranspose[rp]] // FullSimplify[#, (θ | α | β | z | x | y) ∈ Reals] &; (*变换后的态*)
```

```
In[57]:= b1c3p = Table[Tr[pblc.PauliMatrix[i]], {i, 3}] // FullSimplify[#, {x, y, z} ∈ Sphere[]] &
```

```
Out[57]=
```

$$\begin{aligned} & \{ \cos[\beta] (1 + y^2 (-1 + \cos[\theta]) + z^2 (-1 + \cos[\theta])) \sin[\alpha] - x (-1 + \cos[\theta]) (z \cos[\alpha] + y \sin[\alpha] \sin[\beta]) + \\ & (y \cos[\alpha] - z \sin[\alpha] \sin[\beta]) \sin[\theta], -\cos[\alpha] (y z (-1 + \cos[\theta]) + x \sin[\theta]) + \\ & \sin[\alpha] ((y^2 (1 - \cos[\theta]) + \cos[\theta]) \sin[\beta] + \cos[\beta] (x y - x y \cos[\theta] + z \sin[\theta])), \\ & \cos[\alpha] (z^2 (1 - \cos[\theta]) + \cos[\theta]) + \\ & \sin[\alpha] (-z (-1 + \cos[\theta]) (x \cos[\beta] + y \sin[\beta]) + (-y \cos[\beta] + x \sin[\beta]) \sin[\theta]) \} \end{aligned}$$

```
In[58]:= m[1] = I D[RotationMatrix[θ, {1, 0, 0}], θ] /. θ → 0;
```

```
m[2] = I D[RotationMatrix[θ, {0, 1, 0}], θ] /. θ → 0;
```

```
m[3] = I D[RotationMatrix[θ, {0, 0, 1}], θ] /. θ → 0;
```

$$\begin{aligned} M_1 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{In[61]:= } M_3 &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Out[61]= } M_1 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_3 &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

```
In[62]:= rnt3 = MatrixExp[-I θ Sum[n[i] * m[i], {i, 3}]] // FullSimplify[#, {x, y, z} ∈ Sphere[]] & // FullSimplify;
rnt3 // MatrixForm
```

$$\text{Out[63]//MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + y^2 (-1 + \cos[\theta]) + z^2 (-1 + \cos[\theta]) & x y - x y \cos[\theta] - z \sin[\theta] & x z - x z \cos[\theta] + y \sin[\theta] \\ x y - x y \cos[\theta] + z \sin[\theta] & y^2 + \cos[\theta] - y^2 \cos[\theta] & y z - y z \cos[\theta] - x \sin[\theta] \\ x z - x z \cos[\theta] - y \sin[\theta] & y z - y z \cos[\theta] + x \sin[\theta] & z^2 + \cos[\theta] - z^2 \cos[\theta] \end{pmatrix}$$

```
In[64]:= blc3 = CoordinateTransformData["Spherical" → "Cartesian", "Mapping", {1, α, β}]
```

$$\text{Out[64]= } \{\cos[\beta] \sin[\alpha], \sin[\alpha] \sin[\beta], \cos[\alpha]\}$$

```
In[65]:= blc3pp = rnt3.blc3 // FullSimplify[#, {x, y, z} ∈ Sphere[]] &;
% // MatrixForm(*旋转后的Bloch矢量*)
```

$$\text{Out[66]//MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} \cos[\alpha] (x z - x z \cos[\theta] + y \sin[\theta]) + \sin[\alpha] (\cos[\beta] (1 + y^2 (-1 + \cos[\theta]) + z^2 (-1 + \cos[\theta])) - \sin[\beta] (x y (-1 + \cos[\theta]) + y^2 (1 - \cos[\theta]) + \cos[\theta]) \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] (y z (-1 + \cos[\theta]) + x \sin[\theta]) + \cos[\beta] \sin[\alpha] (x y - x y \cos[\theta]) \\ \cos[\alpha] (z^2 (1 - \cos[\theta]) + \cos[\theta]) + \sin[\alpha] (-z (-1 + \cos[\theta]) (x \cos[\beta] + y \sin[\beta]) + (-y \cos[\beta] + x \sin[\beta]) \end{pmatrix}$$

```
In[67]:= blc3pp - blc3p // FullSimplify[#, {x, y, z} ∈ Sphere[]] & // MatrixForm
```

$$\text{Out[67]//MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

用类似的方法可以完成下面的习题

习题 4.15 (单量子比特运算组合) 布洛赫表示对旋转结合提供了一种可见效果的方法。

1. 证明如果先绕轴 \hat{n}_1 旋转角度 β_1 , 再绕轴 \hat{n}_2 旋转角度 β_2 , 则整个旋转过程可表示为绕轴 \hat{n}_{12} 旋转角度 β_{12} , 其中

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2 \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 \quad (4.19)$$

$$s_{12} \hat{n}_{12} = s_1 c_2 \hat{n}_1 + c_1 s_2 \hat{n}_2 + s_1 s_2 \hat{n}_2 \times \hat{n}_1 \quad (4.20)$$

In[68]:=

这里 $c_i = \cos(\beta_i/2)$, $s_i = \sin(\beta_i/2)$, $c_{12} = \cos(\beta_{12}/2)$, $s_{12} = \sin(\beta_{12}/2)$ 。

2. 证明若 $\beta_1 = \beta_2$ 且 $\hat{n}_1 = \hat{z}$, 则等式可简化为

$$c_{12} = c^2 - s^2 \hat{z} \cdot \hat{n}_2 \quad (4.21)$$

$$s_{12} \hat{n}_{12} = s c (\hat{z} + \hat{n}_2) + s^2 \hat{n}_2 \times \hat{z} \quad (4.22)$$

这里 $c = c_1$, $s = s_1$ 。

Out[68]=

习题 4.15 (单量子比特运算组合) 布洛赫表示对旋转结合提供了一种可见效果的方法。

1. 证明如果先绕轴 \hat{n}_1 旋转角度 β_1 , 再绕轴 \hat{n}_2 旋转角度 β_2 , 则整个旋转过程可表示为绕轴 \hat{n}_{12} 旋转角度 β_{12} , 其中

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2 \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 \quad (4.19)$$

$$s_{12} \hat{n}_{12} = s_1 c_2 \hat{n}_1 + c_1 s_2 \hat{n}_2 + s_1 s_2 \hat{n}_2 \times \hat{n}_1 \quad (4.20)$$

这里 $c_i = \cos(\beta_i/2)$, $s_i = \sin(\beta_i/2)$, $c_{12} = \cos(\beta_{12}/2)$, $s_{12} = \sin(\beta_{12}/2)$ 。

2. 证明若 $\beta_1 = \beta_2$ 且 $\hat{n}_1 = \hat{z}$, 则等式可简化为

$$c_{12} = c^2 - s^2 \hat{z} \cdot \hat{n}_2 \quad (4.21)$$

$$s_{12} \hat{n}_{12} = s c (\hat{z} + \hat{n}_2) + s^2 \hat{n}_2 \times \hat{z} \quad (4.22)$$

这里 $c = c_1$, $s = s_1$ 。

不失一般性, 假设转轴沿着 z 方向

```
In[69]:= rnt2 = MatrixExp[-I *  $\frac{\theta}{2}$  * PauliMatrix[3]] // Simplify[#, {x, y, z} ∈ Sphere[]] & // FullSimplify;
```

```
% // MatrixForm
```

```
b1c2 = {Cos[ $\frac{\alpha}{2}$ ], E^I  $\beta$  Sin[ $\frac{\alpha}{2}$ ]}; (*变换前的qubit,  $\alpha$ 和 $\beta$ 分别是Bloch矢量的极角与经度角*)
```

```
rp = rnt2.b1c2 // FullSimplify;
```

```
rp // MatrixForm
```

Out[70]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

Out[73]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} \cos\left[\frac{\alpha}{2}\right] & \\ e^{\frac{i\theta}{2}} i(2\beta + \theta) \sin\left[\frac{\alpha}{2}\right] & \end{pmatrix}$$

```

In[74]:=  $\rho_{blc} = \text{KroneckerProduct}[\rho_p, \text{ConjugateTranspose}[\rho_p]] //$ 
 $\text{FullSimplify}[\#, (\theta | \alpha | \beta | z | x | y) \in \text{Reals}] \&; (*\text{变换后的态}*)$ 

In[75]:=  $\text{blc3p} = \text{Table}[\text{Tr}[\rho_{blc}.\text{PauliMatrix}[i]], \{i, 3\}] // \text{FullSimplify}[\#, \{x, y, z\} \in \text{Sphere}[]] \&$ 
Out[75]=
 $\{\text{Cos}[\beta + \theta] \text{Sin}[\alpha], \text{Sin}[\alpha] \text{Sin}[\beta + \theta], \text{Cos}[\alpha]\}$ 

In[76]:=  $\mathbf{m}[3] = \text{I D[RotationMatrix}[\theta, \{0, 0, 1\}], \theta] /. \theta \rightarrow 0;$ 


$$M_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

In[77]:=

$$M_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$


Out[77]=

$$M_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$


$$M_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$


In[78]:=  $\mathbf{rnt3} = \text{MatrixExp}[-\text{I } \theta \mathbf{m}[3]] // \text{FullSimplify}[\#, \{x, y, z\} \in \text{Sphere}[]] \& // \text{FullSimplify};$ 
 $\mathbf{rnt3} // \text{MatrixForm}$ 
Out[79]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] & 0 \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[80]:=  $\text{blc3} = \text{CoordinateTransformData}["\text{Spherical}" \rightarrow "\text{Cartesian}", "\text{Mapping}", \{1, \alpha, \beta\}]$ 
Out[80]=
 $\{\text{Cos}[\beta] \text{Sin}[\alpha], \text{Sin}[\alpha] \text{Sin}[\beta], \text{Cos}[\alpha]\}$ 

In[81]:=  $\text{blc3pp} = \mathbf{rnt3}.\text{blc3} // \text{FullSimplify}[\#, \{x, y, z\} \in \text{Sphere}[]] \&;$ 
 $\% // \text{MatrixForm} (*\text{旋转后的Bloch矢量}*)$ 
Out[82]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\beta + \theta] \text{Sin}[\alpha] \\ \text{Sin}[\alpha] \text{Sin}[\beta + \theta] \\ \text{Cos}[\alpha] \end{pmatrix}$$


In[83]:=  $\text{blc3pp} - \text{blc3p} // \text{FullSimplify}[\#, \{x, y, z\} \in \text{Sphere}[]] \& // \text{MatrixForm}$ 
Out[83]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


```

- 如何理解发生在Hilbert空间中的旋转？
- 量子现象发生在实验室的仪器中，与我们生活在相同的宇宙中，而不是发生在希尔伯特空间中，当粒子的z方向自旋角动量为 $\frac{\hbar}{2}$ ，即粒子处于 $|0\rangle$ 态，然后我们建立新坐标系使得新的x'轴与原来的z轴重合，那么新的量子态有确定的x方向自旋角动量，态应该变为 $|+\rangle$

- 描述因为旋转参考系空间的导致的态的变换，需要使用SO(3)的以单比特希尔伯特空间为表示空间的某个群表示，即SU(2)
- SO(3)作用在3维线性空间上，SU(2)作用在2维希尔伯特空间上，群作用的概念使得我们能将旋转的概念从3维的实空间迁移到qubit生活的希尔伯特空间上。
- 演示the Belt Trick

$SL(2, \mathbb{C})$ 是 $SO^\uparrow(1, 3)$ 的二重覆盖。2-1 同态 $\kappa: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^\uparrow(1, 3), X \mapsto Y$ 由

$$Y_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_i X \sigma_j X^\dagger) \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (18.5)$$

给出¹³。 κ 也是 $SL(2, \mathbb{C})$ 的四维表示。为了简化记号，在不至于混淆的地方，通常使用“物理”的写法，对 $A \in SL(2, \mathbb{C})$ ，定义 $A(x) := \kappa(A)(x)$

对 z 方向的 Boost 和绕 z 轴的旋转分别有¹⁴

$$\kappa(\exp s\sigma_3/2) = B^s$$

$$\kappa(\exp(-i\theta\sigma_3/2)) = R_\theta$$

将 κ 从 $SL(2, \mathbb{C})$ 限制到 $SU(2)$ 即得映射到 $SO(3)$ 的 2-1 同态。我们称 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的“正确版本”，因为 $SO(3)$ 群的投影表示是 $SU(2)$ 群的真正的线性表示，类似地， $SL(2, \mathbb{C})$ 是 $SO^\uparrow(1, 3)$ 的正确版本。

$SL(2, \mathbb{C})$ 是 $SO^\uparrow(1, 3)$ 的二重覆盖。2-1 同态 $\kappa: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^\uparrow(1, 3), X \mapsto Y$ 由

$$Y_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_i X \sigma_j X^\dagger) \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (18.5)$$

给出¹³。 κ 也是 $SL(2, \mathbb{C})$ 的四维表示。为了简化记号，在不至于混淆的地方，通常使用“物理”的写法，对 $A \in SL(2, \mathbb{C})$ ，定义 $A(x) := \kappa(A)(x)$

对 z 方向的 Boost 和绕 z 轴的旋转分别有¹⁴

$$\kappa(\exp s\sigma_3/2) = B^s$$

$$\kappa(\exp(-i\theta\sigma_3/2)) = R_\theta$$

将 κ 从 $SL(2, \mathbb{C})$ 限制到 $SU(2)$ 即得映射到 $SO(3)$ 的 2-1 同态。我们称 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的“正确版本”，因为 $SO(3)$ 群的投影表示是 $SU(2)$ 群的真正的线性表示，类似地， $SL(2, \mathbb{C})$ 是 $SO^\uparrow(1, 3)$ 的正确版本。

将单比特门视为三次旋转的复合：单比特门的 z-y-z 分解与欧拉角

定理 4.1（单量子比特的 $Z-Y$ 分解） 假设 U 是单量子比特上的酉操作，存在实数 α, β, γ 和 δ 使得

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) \quad (4.11)$$

证明

由于 U 是酉算子，则其行、列正交，故存在实数 α, β, γ 和 δ 使满足

$$U = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

由旋转矩阵定义和矩阵乘法易得式 (4.11)。

□

Out[85]=

定理 4.1 (单量子比特的 $Z-Y$ 分解) 假设 U 是单量子比特上的酉操作, 存在实数 α, β, γ 和 δ 使得

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) \quad (4.11)$$

证明

由于 U 是酉算子, 则其行、列正交, 故存在实数 α, β, γ 和 δ 使满足

$$U = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

由旋转矩阵定义和矩阵乘法易得式 (4.11)。

□

```
In[86]:= QuantumOperator[{"U3",  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ }]["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

Out[86]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] & -e^{i\delta} \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ e^{i\beta} \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & e^{i(\beta+\delta)} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] \end{pmatrix}$$

```
In[87]:=  $\mathbf{zyz} = e^{\frac{1}{2}i(\beta+\delta)}$ 
```

```
QuantumOperator[{"RZ",  $\beta$ }]@QuantumOperator[{"RY",  $\theta$ }]@QuantumOperator[{"RZ",  $\delta$ ];
u3 =  $\mathbf{zyz}$ ["Matrix"] // Normal // FullSimplify(*定理4.1*);
u3 // MatrixForm(*根据矩阵确定转轴和转角?*)
```

Out[88]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] & -e^{i\delta} \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] \\ e^{i\beta} \sin\left[\frac{\theta}{2}\right] & \cos\left[\frac{\theta}{2}\right] (\cos[\beta + \delta] + i \sin[\beta + \delta]) \end{pmatrix}$$

```
In[89]:= Det[u3] // Simplify
```

Out[89]=

$$\cos[\beta + \delta] + i \sin[\beta + \delta]$$

```
In[90]:= RollPitchYawMatrix[{ $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ }, {1, 2, 3}] == EulerMatrix[{ $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ }, {3, 2, 1}]
```

Out[90]=

True

习题 4.4 给定一个 φ , 将阿达玛门 H 表示为旋转算子 R_x 、 R_z 和 $e^{i\varphi}$ 的积。

```
In[91]:=  $\left( e^{\frac{1}{2}i(\pi)} \text{QuantumOperator}\left[\left\{ \text{"RZ"}, \frac{\pi}{2} \right\} \right] @ \text{QuantumOperator}\left[\left\{ \text{"RX"}, \frac{\pi}{2} \right\} \right] @ \right.$ 
 $\left. \text{QuantumOperator}\left[\left\{ \text{"RZ"}, \frac{\pi}{2} \right\} \right] \right)$ ["Matrix"] // Normal // Simplify // MatrixForm
```

Out[91]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

将 H 分解成 R_y 、 R_z 和相位因子的积

```
In[92]:= Is = QuantumOperator["H"]["YZ"] // QuantumShortcut
QuantumOperator[%]["Matrix"] // Normal // MatrixForm
```

```
Out[92]=
```

$$\left\{ \left\{ U, \frac{\pi}{2}, 0, \pi \right\} \rightarrow \{1\} \right\}$$

```
Out[93]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```
In[94]:= 
$$e^{i(\pi)/2} \text{QuantumOperator}[\{"RZ", 0\}] @ \text{QuantumOperator}[\{"RY", \frac{\pi}{2}\}] @ \text{QuantumOperator}[\{"RZ", \pi\}] [$$

"Matrix"] // Normal // Simplify // MatrixForm
```

```
Out[94]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

不存在通用非门

通用非门：将任意 ψ 变为 ψ^{normal}

1.2 多比特量子门 $U(2^n)$ 与受控操作

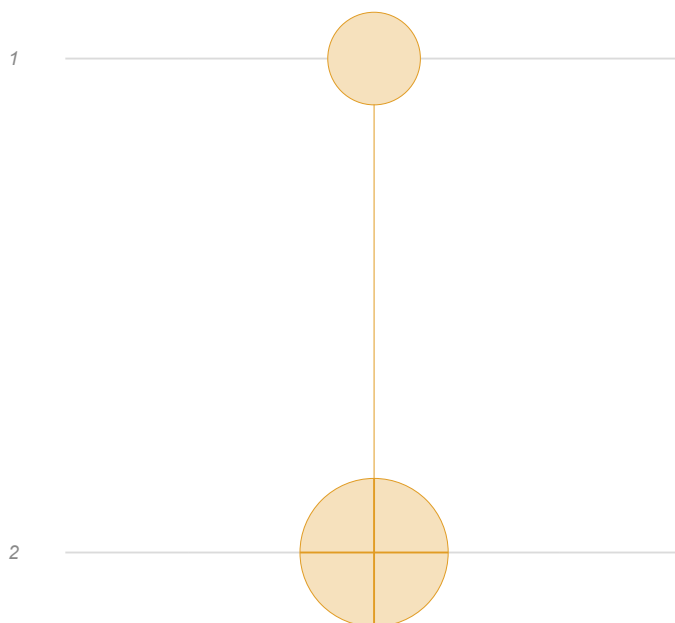
CNOT (controlled-NOT) 门

```
In[96]:= QuantumOperator[{"CNOT" → {1, 2}}] // TraditionalForm(*模2加法*)
QuantumCircuitOperator["CNOT"] // TraditionalForm
```

```
Out[96]//TraditionalForm=
```

$$|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|$$

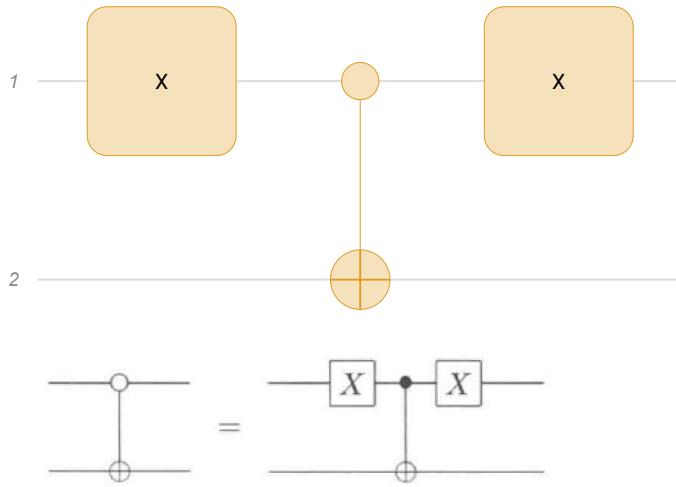
```
Out[97]//TraditionalForm=
```



In[113]:=

QuantumCircuitOperator[{"X", "CNOT", "X"}] // TraditionalForm

Out[113]//TraditionalForm=



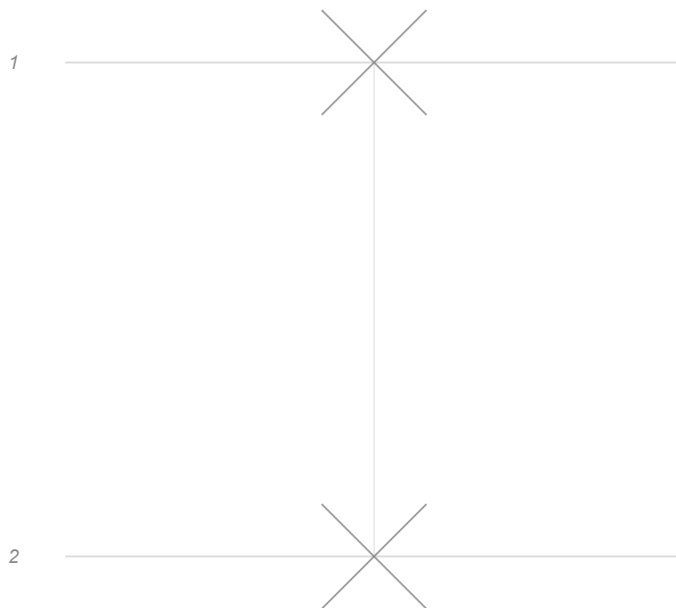
交换门

In[98]:= **QuantumOperator["SWAP"] // TraditionalForm****QuantumCircuitOperator["SWAP"] // TraditionalForm**

Out[98]//TraditionalForm=

$$|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|$$

Out[99]//TraditionalForm=



SWAP门拆成三个CNOT门

In[100]:=

**QuantumCircuitOperator[{"CNOT" → {1, 2}, "CNOT" → {2, 1}, "CNOT" → {1, 2}}] ==
 QuantumCircuitOperator["SWAP"]**

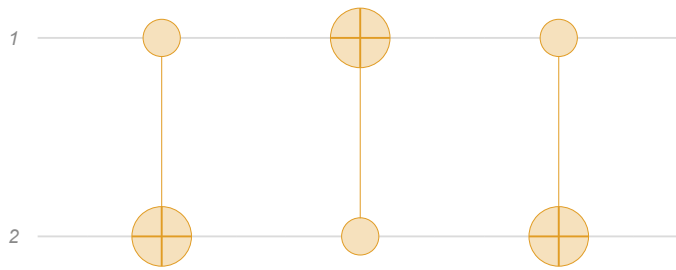
Out[100]=

True

In[101]:=

```
QuantumCircuitOperator[{QuantumOperator["CNOT", {1, 2}],
  QuantumOperator["CNOT", {2, 1}], QuantumOperator["CNOT", {1, 2}]}][["Diagram"]]
```

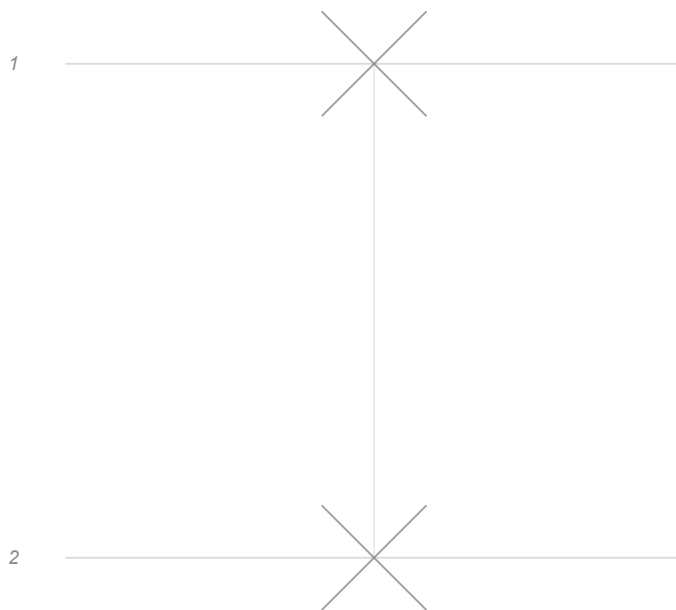
Out[101]=



In[102]:=


```
QuantumCircuitOperator["SWAP"][["Diagram"]]
```

Out[102]=

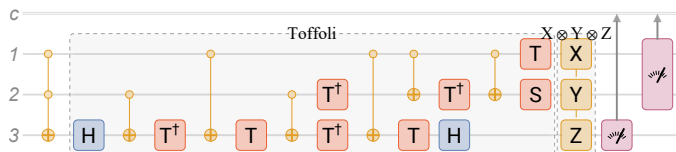


Toffoli 门和测量

In[103]:=

```
QuantumCircuitOperator[{QuantumOperator[ Picture: Schrödinger Arity: 3
Dimension: 8→8 Qudits: 3→3],
  QuantumCircuitOperator["Toffoli"], QuantumCircuitOperator[{"XYZ"}],
  QuantumMeasurementOperator["X", {3}],
  QuantumMeasurementOperator["X", {1, 2}]}][["Diagram"]]
```

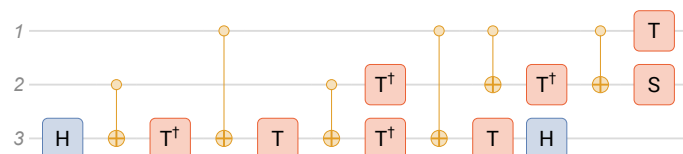
Out[103]=



In[104]:=

QuantumCircuitOperator["Toffoli"]["Diagram"]


Out[104]=



In[105]:=

tfl[a_, b_, c_] := {a, b, Mod[c + a b, 2]}

In[106]:=

 QuantumOperator[ Picture: Schrödinger
Dimension: 8→8 Arity: 3
Qudits: 3→3]["Matrix"] // Normal // MatrixForm

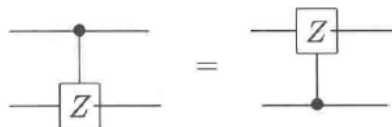
Out[106]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CZ门

In[107]:=

习题 4.18 证明



In[108]:=

QuantumOperator[{"Z" → {1, 2}}] // TraditionalForm

QuantumOperator[{"Z" → {2, 1}}] // TraditionalForm

Out[108]//TraditionalForm=

$$|00\rangle\langle 00| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|$$

Out[109]//TraditionalForm=

$$|00\rangle\langle 00| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|$$

一般的受控U门，单比特控制单比特

In[110]:=

我们当前的目标是了解如何只使用单量子比特运算和受控非门实现对任意单量子比特 U 的受控 U 运算。基于推论 4.2 中给出的分解 $U = e^{i\alpha}AXBXC$ ，策略分为两部分。

推论 4.2 设 U 是作用在单量子比特上的一个酉门，则单量子比特上存在酉算子 A, B, C 使得

$ABC = I$ 且 $U = e^{i\alpha}AXBXC$ ，其中 α 为某个全局相位因子。

x是泡利x矩阵

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad |10\rangle \rightarrow e^{i\alpha}|10\rangle, \quad |11\rangle \rightarrow e^{i\alpha}|11\rangle$$

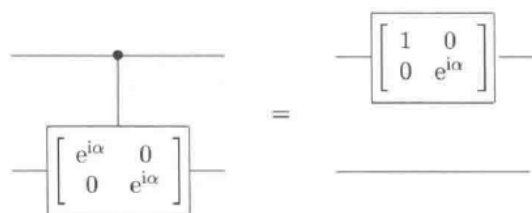
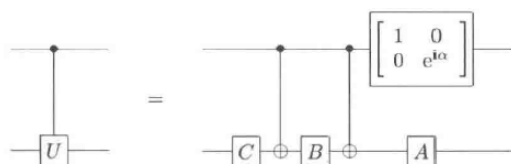


图 4-5 受控相移门及其两量子比特等价电路

图 4-6 单量子比特 U 的受控 U 运算电路, 其中 A, B, C 和 α 满足 $U = e^{i\alpha}AXBXC, ABC = I$

量子线路的特性

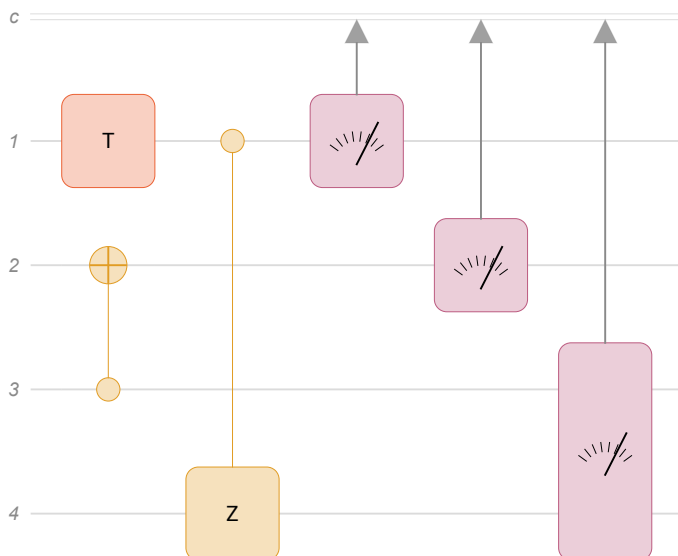
- 不出现回路, 无环
- 不允许扇入扇出, 扇入不可逆, 扇出是量子克隆

1.3 测量

In[134]:=

```
qc = QuantumCircuitOperator[{"T", "CNOT" → {3, 2}, "CZ" → {1, 4}, {1}, {2}, {3, 4}}];
% // TraditionalForm
```

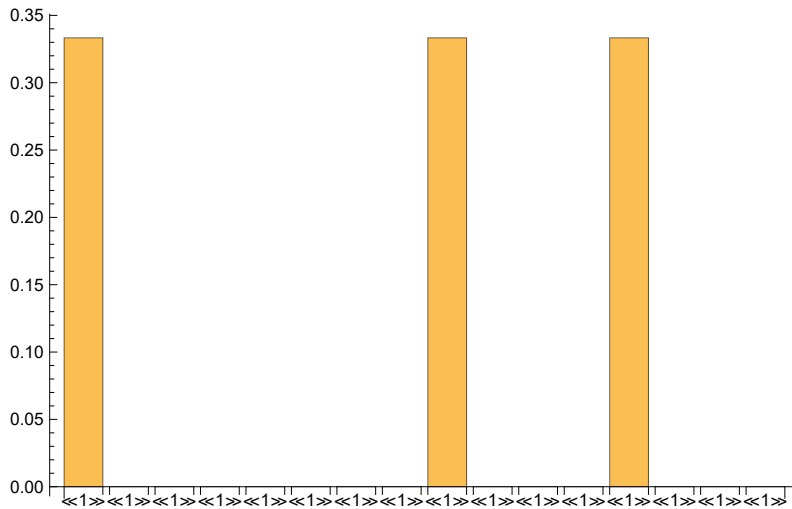
Out[135]//TraditionalForm=



In[148]:=

```
qc@QuantumState[{1, 0, 1, 1}];
%["ProbabilityPlot"]
%%["StateAssociation"] // TraditionalForm
```

Out[149]=



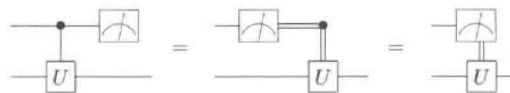
Out[150]//TraditionalForm=

$$\langle |0000\rangle \rightarrow |0000\rangle, |1000\rangle \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}} |1000\rangle, |1100\rangle \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}} |1100\rangle \rangle$$

延迟测量原理与经典的if-then语句

延迟测量原理：测量总是可以从量子电路的中间阶段移到电路末端；如果测量结果在电路某个阶段使用，那么经典条件运算可以用量子条件运算来代替。

习题 4.35（测量与控制交换） 延迟测量原理的结果是，当被测量的量子比特是一个控制量子比特时，测量与量子门交换，即：



（回忆双线代表这个图中的经典比特）。证明第一个等式。最右侧电路只是一种方便的记法，用来描述使用测量结果来经典地控制量子门。

$$Q_1 = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I}, \quad Q_2 = |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{I}.$$

$$\begin{aligned} C_U Q_i &= (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes U) |i\rangle\langle i| \otimes \mathbb{I} \\ &= |i\rangle\langle i| \otimes \mathbb{I} (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes U) \\ &= Q_i C_U \end{aligned}$$

$$\text{初态 } \rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \tilde{\rho} = C_U \rho C_U^\dagger$$

经过线路后

$$\rho'_{\text{lhs}} = \sum_i \text{tr}(\tilde{\rho} Q_i) \frac{Q_i \tilde{\rho} Q_i}{\text{tr}(\tilde{\rho} Q_i)}$$

$$= \sum_i Q_i \tilde{\rho} Q_i$$

$$= \sum_i Q_i C_U |\psi\rangle\langle\psi| C_U^\dagger Q_i$$

$$= \sum_i C_U Q_i |\psi\rangle\langle\psi| Q_i C_U^\dagger$$

$$= Q_1 |\psi\rangle\langle\psi| Q_1 + (\mathbb{I} \otimes U) Q_2 |\psi\rangle\langle\psi| Q_2 (\mathbb{I} \otimes U^\dagger)$$

$$= \rho'_{\text{rhs}}$$

In[262]:=

```
inis = (QuantumCircuitOperator["HH"]@QuantumState[{1, 0, 0, 0}])["Normalized"];
% // TraditionalForm
```

Out[263]//TraditionalForm=

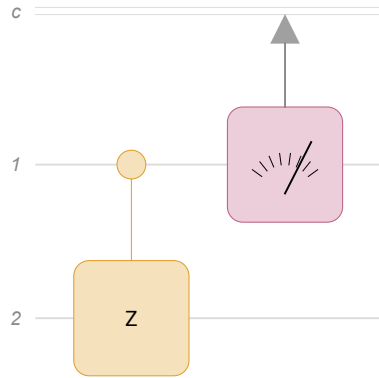
$$\frac{|00\rangle}{2} + \frac{|01\rangle}{2} + \frac{|10\rangle}{2} + \frac{|11\rangle}{2}$$

左侧

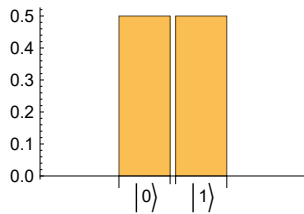
In[292]:=

```
qc1 = QuantumCircuitOperator[{"CZ", {1}}];
qc1 // TraditionalForm
qmr = qc1 @ inis;
qmr["ProbabilityPlot"]
dst = qmr["Distribution"][[1, 1]];
qmr["StateAssociation"];
% // TraditionalForm
```

Out[293]//TraditionalForm=



Out[295]=



Out[298]//TraditionalForm=

$$\left\langle \left| 0 \right\rangle \rightarrow \frac{\left| 00 \right\rangle}{2} + \frac{\left| 01 \right\rangle}{2}, \left| 1 \right\rangle \rightarrow \frac{\left| 10 \right\rangle}{2} - \frac{\left| 11 \right\rangle}{2} \right\rangle$$

In[334]:=

```
Normal[#, {"Normalized"}["DensityMatrix"]] & /@ qmr["StateAssociation"] // Values (*测量后的态*)
dst.% // MatrixForm
```

Out[334]=

$$\left\{ \left\{ \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \left\{ 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \right\} \right\}$$

Out[335]//MatrixForm=

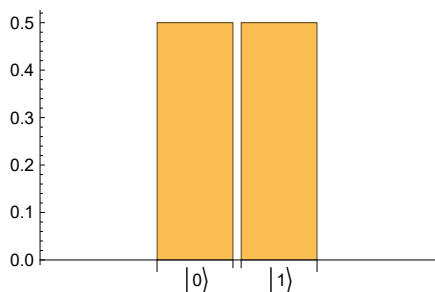
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

右侧

In[303]:=

```
qmr1 = QuantumMeasurementOperator[{1}]@inis;
qmr1["ProbabilityPlot"]
dst1 = qmr1["Distribution"][[1, 1]];
qmr1["StateAssociation"];
% // TraditionalForm
```

Out[304]=



Out[307]//TraditionalForm=

$$\left\langle \left| 0 \right\rangle \rightarrow \frac{\left| 00 \right\rangle}{2} + \frac{\left| 01 \right\rangle}{2}, \left| 1 \right\rangle \rightarrow \frac{\left| 10 \right\rangle}{2} + \frac{\left| 11 \right\rangle}{2} \right\rangle$$

In[317]:=

```
cz = QuantumOperator["CZ"]["Matrix"] // Normal
```

Out[317]=

```
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, -1}}
```

In[336]:=

```
Normal[#, {"Normalized"}["DensityMatrix"]] & /@ qmr1["StateAssociation"] // Values (*测量后的态*)
dst1[[1]] * %[[1]] + dst1[[2]] cz.%[[2]].ConjugateTranspose[cz] // TraditionalForm
```

Out[336]=

$$\left\{ \left\{ \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \right\} \right\}$$

Out[337]//TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

隐含测量原理

隐含测量原理：不失一般性，可以假定在量子电路末端的任何未终止的量子线（未被测量的量子比特）都将被测量。

习题 4.32 设 ρ 是描述两量子比特系统的密度矩阵。假设我们在第二个量子比特的计算基上进行投影测量。设 $P_0 = |0\rangle\langle 0|$, $P_1 = |1\rangle\langle 1|$ 分别是第二个量子比特到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 状态的投影。令 ρ' 是由不知道测量结果的观察者在测量后赋给系统的密度矩阵。证明

$$\rho' = P_0 \rho P_0 + P_1 \rho P_1 \quad (4.40)$$

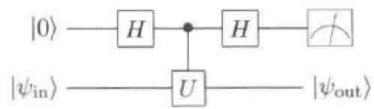
此外证明第一个量子比特的约化密度矩阵不受测量的影响，即 $\text{tr}_2(\rho) = \text{tr}_2(\rho')$ 。

在分析量子算法时带来一些便利。

Bell 基的测量

测量算符 U

习题 4.34



稳定子码：多比特，测量稳定子