Gagner au Monopoly par les chaînes de Markov

Minko Benjamin

PROMOTEUR : M. SEGERS JOHAN

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUE
2021–2022

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Vous êtes-vous déjà retrouvé en famille ou entre amis à jouer au Monopoly et vous demander quelle stratégie adopter pour maximiser vos chances de gagner la partie ? Saviez-vous qu'il existe un moyen efficace permettant d'augmenter vos chances de gagner la plupart des jeux auxquels vous jouez ?

En effet, il y a plus de cent ans aujourd'hui que le célèbre mathématicien A. A. Markov a créé une nouvelle branche de la théorie des probabilités en appliquant les mathématiques à la poésie.[**2**] Plongé dans le texte d'Alexandre Pouchkine dans le verset *Eugène Onéguine*, Markov a passé des heures entières à passer au crible des modèles de voyelles et de consonnes. Le 23 janvier 1913, il résume ses découvertes dans un discours à l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg. Son analyse n'a pas modifié la compréhension ou l'appréciation du poème de Pouchkine, mais la technique qu'il a dévéloppée, maintenant connue sous le nom de *chaîne de Markov*, a étendu la théorie des probabilités dans une nouvelle direction.

La méthodologie de Markov est allée au-delà des situations de lancer de pièces et de dés (où chaque évènement est indépendant des autres) à des chaînes d'évènements liés (où ce qui se passe dans le futur ne dépend que de l'état actuel des choses). Le domaine d'application des chaînes de Markov est très varié. Nous pouvons citer d'une part, la biologie, notamment en épidémiologie où on peut être amené à étudier l'évolution d'une maladie. D'autre part, la reconnaissance de la parole, la reconnaissance de l'écriture etc.

Dans ce travail, nous nous motiverons de leur application sur le jeu de Monopoly au chapitre 3. On verra qu'il est tout à fait possible d'établir une stratégie permettant au joueur de mettre toutes les chances de son côté afin de gagner la partie. Il sera donc de notre devoir, de parcourir dans un premier temps, la théorie sur les chaînes de Markov (voir chapitre 2), avant d'aborder le sujet proprement dit.

On suppose par la suite que le lecteur a au minimum un niveau en probabilité d'un étudiant en deuxième année mathématique, pour la bonne compréhension de ce travail.

Chapitre 2

Les chaînes de Markov en temps discret

Les chaînes de Markov sont des outils permettant de caractériser des phénomènes évoluant dans le temps. L'étude de tels phénomènes sera modélisée par une famille de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ appelée *processus stochastique*, à valeurs dans un espace discret, c'est-à-dire, un ensemble fini ou dénombrable S, muni de la tribu de toute ses parties. Encore appelé, *espace d'états*.

Dans ce chapitre, nous définirons les notions de chaînes de Markov dans la section 1, de *probabilité* et *matrice de transition* dans la section 2. On parlera ensuite de la distribution d'une chaîne de Markov dans la section 3, puis on définira les notions de *transience* et *récurrence* dans la section 4. Les sections 5 et 6 quant à elles, parleront respectivement du critère de distribution stationnaire, et de convergence vers l'équilibre.

Vous trouverez en bibliographie la totalité des livres qui nous ont inspiré pour la rédaction de ce travail [**6**], [**5**].

1. Propriété de Markov

Nous définissons dans cette première section la notion de chaîne de Markov.

DÉFINITION 2.1. *Considérons l'espace d'états S, et l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S est une chaîne de Markov ou processus de Markov si pour tout $i_0,i_1,\ldots,i_{n+1}\in S$:*

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n\right]=\mathbb{P}\left[X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n\right]. \tag{2.1}$$

La variable aléatoire X_n représente l'état du processus à l'instant n. L'égalité (2.1) nous dit que, dans l'évolution au cours du temps, l'état du processus à un instant futur ne dépend que de celui à l'instant présent, mais non de ses états antérieurs. Cette propriété est connue sous le nom de *propriété de Markov.*

2. Probabilité et matrice de transition

Notre objectif dans cette section est de caractériser les chaînes de Markov par leur probabilité et matrice de transition. Nous verrons ensuite les propriétés qui en découlent.

DÉFINITION 2.2. *On considère l'espace d'états S, et i, j des éléments de S. On appelle probabilité de transition d'un état i à un état j à l'instant n le nombre non négatif* $p_n(i,j)$*, défini par :*

$$p_n(i,j) = \mathbb{P}\big[X_{n+1} = j \mid X_n = i\big], \quad n \geq 0, \tag{2.2}$$

et on dit qu'une chaîne de Markov est homogène si la probabilité de transiter d'un état à un autre ne dépend pas de l'instant auquel se fait la transition. C'est-à-dire :

$$p_n(i,j) = p(i,j) = \mathbb{P}\big[X_{n+1} = j \mid X_n = i\big], \quad n \geq 0. \tag{2.3}$$

On parle alors de probabilité de transition stationnaire.

Dans la suite, nous supposerons toujours que la chaîne de Markov est homogène et nous ne le mentionnerons plus explicitement. Pour une question de lisibilité, on notera parfois la probabilité de transiter d'un état i à un état j par p_{ij}.

DÉFINITION 2.3. *Considérons l'espace d'états S. Étant donnée une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$*, on lui associe une matrice de transition*

$$P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}, \tag{2.4}$$

où chaque ligne de la matrice correspond à une loi de probabilité. Et ses coefficients correspondent à la probabilité de transiter d'un état i à un état j.

La matrice de transition P est une matrice carré de taille card(S) × card(S). Sa taille est finie ou infinie selon que S soit fini (Exemple 2.8) ou infini (Exemple 2.9).

REMARQUE 2.3.1. *Une matrice de transition P telle que :*

$$\sum_{j\in S} p(i,j) = 1 \text{ , } i \in S \text{ } \textit{ et } \text{ } p(i,j) \geq 0, \tag{2.5}$$

est appelée matrice stochastique.

PROPOSITION 2.4. *La matrice de Transition* $P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$ *associée à une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans S est stochastique.*

DÉMONSTRATION. Les éléments de chaque lignes de la matrice de transition P sont positives, car une probabilité conditionnelle est une probabilité. Donc,

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left[X_{n+1} = j \mid X_n = i\right] \geq 0.$$

De plus, en appliquant la formule des probabilités conditionnelles, puis la formule de probabilités totales [**1**], on obtient :

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = \frac{\sum_{j\in S} \mathbb{P}\left[\{X_{n+1} = j\} \cap \{X_n = i\}\right]}{\mathbb{P}\left[X_n = i\right]} = \frac{\mathbb{P}\left[X_n = i\right]}{\mathbb{P}\left[X_n = i\right]} = 1.$$

Ce qui conclut la preuve. □

PROPOSITION 2.5. *Toute matrice stochastique admet 1 comme valeur propre et* $\mathbf{e}$ *comme vecteur propre associé, où les coordonnées du vecteur* $\mathbf{e}$ *sont égales à 1.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'espace d'états S, $P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$ une matrice stochastique et $\mathbf{e}$ un vecteur ne contenant que des 1. On doit montrer que :

$$P\mathbf{e} = \mathbf{e}.$$

Il suffit de remarquer que pour tout $i, j \in S$,

$$(P\mathbf{e})(i) = \sum_{j\in S} p_{ij}\mathbf{e}(j) = \sum_{j\in S} p_{ij} = 1.$$

Ce qui conclut la preuve. □

PROPOSITION 2.6. *Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'espace d'états S, et les deux matrices $P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$ et $Q = \{q_{ij}\}_{i,j\in S}$ stochastiques. Nous allons montrer que leur produit $R = PQ = \{r_{ij}\}_{i,j\in S}$ est une matrice stochastique.

— La quantité r_{ij} est non négative, puisque qu'il s'agit à chaque fois de la somme de produit de coefficients positifs.

— De plus, $\sum_{j\in S} r_{ij} = 1$.

En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in S} r_{ij} &= \sum_{j\in S}\left(\sum_{k\in S} p_{ij}q_{ki}\right)\\ &= \sum_{k\in S}\left(\sum_{j\in S} p_{ij}q_{ki}\right),\end{aligned}$$

en raison de la non négativité, on peut changer l'ordre de la sommation. Ainsi,

$$= \sum_{j\in S} p_{ij}\underbrace{\left(\sum_{k\in S} q_{ki}\right)}_{=1} = \sum_{j\in S} p_{ij} = 1,$$

Ce qui conclut la preuve. □

Nous avons de ce qui précède la conséquence suivante.

COROLLAIRE 2.7. *Soient l'espace d'états S et $P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$ une matrice stochastique, alors pour tout $n \geq 0$, la matrice $P^n = \{p_{ij}^{(n)}\}_{i,j\in S}$ contenant les probabilités de passer d'un état à un autre en n transitions est une matrice stochastique, où $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left[X_n = j \mid X_0 = i\right]$. De plus, pour tout couple (m,n) d'entiers non négatifs,*

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = j \mid X_0 = i] = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION. La propriété est vraie à l'ordre 0 (il s'agit de la matrice identité) et 1, la matrice P étant une matrice stochastique. Supposons cet énoncé vrai à l'ordre $n-1$ (hypothèse de récurrence). Nous avons par définition du produit matriciel à l'ordre n :

$$P^n = PP^{n-1},$$

ce qui indique que la matrice P^n est une matrice stochastique comme produit de deux matrices stochastiques : P et P^{n-1}.

L'égalité (2.6) découle de l'associativité d'une matrice

$$P^{n+m} = P^n P^m, \text{ pour tout } m,n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$p_{ij}^{(m+n)} = \mathbb{P}[X_{n+m} = j \mid X_0 = i] = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \quad m,n \geq 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

EXEMPLE 2.8. [**7**] Dans une région, s'il pleut un certain jour alors il pleut également le lendemain avec une probabilité égale 0.7. De plus, s'il ne pleut pas un certain jour alors il pleut le lendemain avec une probabilité égale à 0.2. On choisit au hasard une journée. On définit par X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 s'il pleut au n-ième jour, et 0 s'il ne pleut pas au jour n.

Il est clair que l'espace d'états ici est $S = \{0,1\}$. La famille de variables aléatoires est bien une chaîne de Markov, puisque pour savoir quel temps il fera demain (pleuvoir ou pas) nous avons seulement besoin de savoir quel temps il fait aujourd'hui. Ainsi, les probabilités de transition pour tout $n \geq 0$, sont données par :

$$\begin{aligned}
p_{0,0} &= \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0\right] = 0.8,\\
p_{0,1} &= \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0\right] = 0.2,\\
p_{1,0} &= \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1\right] = 0.3,\\
p_{1,1} &= \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\right] = 0.7.
\end{aligned}$$

Sa matrice de transition est alors $P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que P est stochastique.

EXEMPLE 2.9. (La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes et de même loi, et Y_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendante des $(Y_n)_{n\geq 1}$. On Pose :

$$\begin{cases} X_0 & = Y_0 \\ X_{n+1} & = X_n + Y_{n+1} = \sum_{n=0}^{n+1} Y_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

L'espace d'états ici est $S = \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $i_0, \dots, i_n \in S$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\right]}{\mathbb{P}\left[X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n, X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\right]}{\mathbb{P}\left[X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\right]} \\
&\text{par indépendance des variables } (Y_n)_{n\geq 1}, \\
&= \mathbb{P}\left[Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n\right]\mathbb{P}\left[X_n = i_n\right]}{\mathbb{P}\left[X_n = i_n\right]} \\
&\text{De nouveau, par indépendance des variables } (Y_n)_{n\geq 1}, \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n, X_n = i_n\right]}{\mathbb{P}\left[X_n = i_n\right]} \\
&\text{par la formule de probabilité conditionnelle,} \\
&= \mathbb{P}\left[Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n \mid X_n = i_n\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. De plus, nous avons montré que, pour tout $i, j \in S$,

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = j \mid X_n = i\right] = \mathbb{P}\left[Y_{n+1} = j - i\right] = \mathbb{P}\left[Y_1 = j - i\right].$$

La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est identiquement distribuée, cette quantité ne dépend pas de n, la chaîne est donc homogène.

2) On suppose maintenant que Y_1 est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de loi :

$$\mathbb{P}\left[Y_1 = 1\right] = p, \quad \mathbb{P}\left[Y_1 = -1\right] = 1 - p.$$

Lorsque $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, *on parle de marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$.

La matrice de transition $P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$ est de taille infinie. Pour tout $i, j \in S$, on a :

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left[X_{n+1} = j \mid X_n = i\right] = \mathbb{P}\left[Y_1 = j - i\right].$$

Alors, pour tout $i \in S = \mathbb{Z}$, la i-ème ligne a pour seuls coefficients non nuls,

$$p_{ii+1} = p, \quad p_{ii-1} = 1 - p.$$

Sa matrice de transition est donc :

$$P = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. Distribution d'une chaîne de Markov

Dans cette section, il sera question dans un premier temps, de caractériser la distribution d'une chaîne de Markov par sa matrice de transition et sa loi initiale, puis d'étudier son évolution dans le temps. Enfin, introduire la notion de *réversibilité*.

DÉFINITION 2.10. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus de Markov à valeurs dans S. Nous appelons loi initiale, la loi α de la variable aléatoire X_0, tel que*

$$\alpha_i = \mathbb{P}[X_0 = i], \textit{ pour tout } i \in S.$$

THÉORÈME 2.11. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans S, et $P = \{p_{ij}\}_{i,j\in S}$ la matrice de transition qui lui est associée. Ainsi, pour tout $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$, la distribution de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est donnée par*

$$\mathbb{P}[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{2.7}$$

DÉMONSTRATION. Pour démontrer cette égalité, il suffit d'appliquer le théorème de Bayes et utiliser le fait que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = i_0]\mathbb{P}[X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0] \cdots \mathbb{P}[X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] \\ &= \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

COROLLAIRE 2.12. *La distribution d'une chaîne de Markov est invariante par translation dans le temps. Autrement dit, pour tout $i_0, \ldots, i_{n+m} \in S$, avec*

$\mathbb{P}[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] > 0$, *on a :*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_{n+m} = i_{n+m}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0] \\
&= \mathbb{P}[X_{n+m} = i_{n+m}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_n] \\
&= p_{i_n i_{n+1}} \cdots p_{i_{n+m-1} i_{n+m}}.
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. En appliquant la formule de probabilités conditionnelles et le Théorème 2.11, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_{n+m} = i_{n+m}, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0] \\
&= \frac{\mathbb{P}[X_{n+m} = i_{n+m}, \ldots, X_0 = i_0]}{\mathbb{P}[X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0]} \\
&\text{Par le Théorème 2.11,} \\
&= \frac{\alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n+m-1} i_{n+m}}}{\alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}} \\
&= p_{i_n i_{n+1}} \cdots p_{i_{n+m-1} i_{n+m}} \\
&\text{De nouveau, par le Théorème 2.11,} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X_m = i_{n+m}, \ldots, X_0 = i_n]}{\mathbb{P}[X_0 = i_n]} \\
&= \mathbb{P}[X_m = i_{n+m}, \ldots, X_1 = i_{n+1} \mid X_0 = i_n],
\end{aligned}$$

nous obtenons bien l'égalité voulue. □

DÉFINITION 2.13. *Considérons la chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans* S*, et de loi initiale* α*. On parle de distribution stationnaire lorsque pour tout* $j \in S$

$$\sum_{i\in S} \alpha_i p_{ij} = \alpha_j, \tag{2.8}$$

et on la note π*.*

Un raisonnement par induction nous permet d'avoir une formule de la distribution stationnaire après n transitions,

$$\sum_{i\in S} \alpha_i p_{ij}^{(n)} = \alpha_j, \;\; j \in S, \;\; n = 0, 1, 2 \ldots. \tag{2.9}$$

La loi α_i est la probabilité que $X_0 = i$, et le membre de gauche de l'égalité 2.9 est la probabilité que $X_n = j$. Les égalités 2.8 et 2.9 nous permettent d'affirmer que, dans une distribution stationnaire, la probabilité que $X_n = j$ après n transitions ne varie pas quelque soit $n \geq 0$.

Certaines mesures satisfont à une loi plus forte, la *réversibilité*, qui implique la stationnarité. Cette condition a l'avantage d'être plus simple à vérifier ; elle est adaptée aux chaînes de Markov qui sont réversibles dans le temps.

DÉFINITION 2.14. *Soit μ une mesure non négative, et non identiquement nulle sur l'espace d'états S telle que $\mu_i < +\infty$ pour tout $i \in S$. On dit que μ est une mesure réversible, si pour tout $(i,j) \in S^2$*

$$\mu_i p_{ij} = \mu_j p_{ji}.$$

PROPOSITION 2.15. *Toute mesure réversible est stationnaire.*

DÉMONSTRATION. On considère l'espace d'états S, et la matrice de transition P. On a pour tout $j \in S$,

$$\sum_{i \in S} \mu_i p_{ij} = \sum_{i \in S} \mu_j p_{ji} = \mu_j \sum_{i \in S} p_{ji} = \mu_j,$$

on utilise le fait que P est stochastique pour avoir la dernière égalité. □

PROPOSITION 2.16. *Soit la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans l'espace d'états S, de loi initiale α. Si α est réversible, alors pour tout $n \geq 0$, et $(i,j) \in S^2$,*

$$\mathbb{P}[X_n = j \mid X_{n+1} = i] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i].$$

DÉMONSTRATION. Si α est réversible, elle est alors stationnaire et on a, pour tout $n \geq 0$, et $i \in S$, $\mathbb{P}[X_n = i] = \mathbb{P}[X_0 = i] = \alpha_i$. De plus, par le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_n = j \mid X_{n+1} = i] &= \frac{\mathbb{P}[X_{n+1} = i \mid X_n = j]\mathbb{P}[X_n = j]}{\mathbb{P}[X_{n+1} = i]} \\
&= \frac{p_{ji}\alpha_j}{\alpha_i} \\
&= \frac{p_{ij}\alpha_i}{\alpha_i} && \text{car } \alpha \text{ est réversible} \\
&= p_{ij} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i],
\end{aligned}$$

on obtient bien l'égalité voulue. □

L'existence d'une distribution stationnaire indique que la chaîne est stable. Nous verrons par la suite qu'il est tout à fait possible de déduire l'existence d'un état stationnaire par certains comportements de la chaîne, nous verrons même que celle-ci est unique. On établira aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne soit au régime stationnaire.

4. Récurrence et Transience

L'espace des états étant souvent de grande taille, il est utile de le partitionner en des sous-ensembles dont les éléments ont les mêmes comportements au regard de propriétés importantes.

Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Nous travaillerons par la suite (dans cet espace) avec la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans l'espace d'états S, et ne le mentionnerons pas toujours explicitement.

Dans cette section on étudiera le comportement à long terme d'une chaîne de Markov, dont les notions importantes sont la *transience* et la *récurrence*. Pour ce faire, introduisons d'abord une relation d'équivalence sur les états.

DÉFINITION 2.17. *Soient $i, j \in S$ deux états. Nous dirons que i conduit à j ou que j est accessible depuis i, et noterons $i \to j$ si :*

$$\exists n \in \mathbb{N},\ p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i] > 0. \tag{2.10}$$

On dira que i communique avec j, noté $i \leftrightarrow j$, si chacun des états est accessible depuis l'autre, c'est-à-dire $i \to j$ et $j \to i$.

PROPOSITION 2.18. *La relation de communication est une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. Réflexivité. On a que $p_{ii}^{(0)} = \mathbb{P}[X_0 = i \mid X_0 = i] = 1 > 0$.

Symétrie. Évident par définition. En effet, si $i \leftrightarrow j$ alors $j \to i$ et $i \to j$.

Transitivité. Si $i \leftrightarrow j$ et $i \leftrightarrow k$, nous devons montrer que $i \leftrightarrow k$. Il suffit de montrer que $i \to k$. Puisque $i \to j$ et $j \to k$, alors il existent $n, m \in \mathbb{N}$: tels que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{jk}^{(m)} > 0$. Ainsi, par l'égalité 2.6 du Corolaire 2.7 nous avons :

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{k' \in S} p_{ik'}^{(n)} p_{k'k}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

EXEMPLE 2.19. Une puce se déplace aléatoirement d'un trou à l'autre comme indique la figure 1. Chaque seconde, elle saute dans l'un des trous voisins avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, et une fois dans le trou 5, elle démeure emprisonnée. On désigne par X_n la position de la puce à la n-ième seconde.

$(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On distingue 2 classes de communication pour ce problème : $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{5\}$.

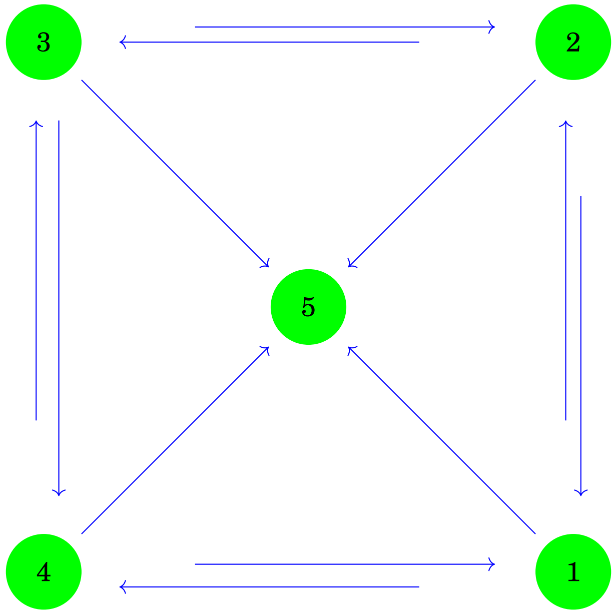

FIGURE 1. Déplacements aléatoires d'une puce.

DÉFINITION 2.20. *Une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans l'espace d'états* S *et sa matrice de transition* P *sont irréductibles si tout état est accessible à partir de n'importe quel autre état, c'est-à-dire ,*

$$\forall\ i,j \in\ S,\ \exists n \in \mathbb{N}:\ p_{ij}^{(n)} > 0. \tag{2.11}$$

La définition ci-dessus nous dit que, s'il n'y a qu'une classe de communication, la chaîne de Markov et sa matrice de transition sont dits irréductibles. Dans l'exemple 2.19 précédent, la chaîne n'est pas irréductible.

DÉFINITION 2.21. *Un état* i *tel que* $p_{ii} = 1$ *est dit fermé. Plus généralement, un ensemble* C *d'états tel que* $\sum_{j\in C} p_{ij} = 1$ *pour tout* $i \in C$ *est dit fermé.*

Dans l'exemple 2.19 ci-dessus l'état 5 est fermé.

DÉFINITION 2.22. *La période* t_i *de l'état* $i \in S$ *est par définition*

$$t_i = \mathrm{PGCD}\{n \geq 1:\ p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

avec pour convention $t_i = +\infty$ *si un tel* n *n'existe pas. Si* $t_i = 1$*, l'état* i *est apériodique.*

THÉORÈME 2.23. *Si deux états* i *et* j *communiquent, ils ont la même période.*

DÉMONSTRATION. Soient i et j deux états de période respective t_i et t_j tels que $i \leftrightarrow j$. Montrons que t_j divise t_i, c'est-à-dire que t_j divise tout $n \geq 1$

qui satifait $p_{ii}^{(n)} > 0$. Soit donc un tel n ; puisque $i \leftrightarrow j$, il existe $k, l \geq 1$ tels que $p_{ij}^{(l)} > 0$ et $p_{ji}^{(k)} > 0$. Ainsi,

$$p_{jj}^{(n+l+k)} \geq p_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(l)} > 0 \quad \text{et} \quad p_{jj}^{(l+k)} \geq p_{ji}^{(k)} p_{ij}^{(l)} > 0.$$

De ce qui précède, t_j divise $n + l + k$ et $l + k$, il divise par conséquent n, donc t_j divise t_i. Un raisonnement analogue permet de montrer que t_i divise t_j. Ce qui conclut la preuve. $\square$

L'état 1 de l'exemple 2.19 a une période $t_1 = 2$, par le théorème 2.23, les éléments de la classe de communication $C = \{1, 2, 3, 4\}$ sont de période 2. Tandis que l'état 5 est apériodique.

Soit A un évènement et S un espace d'états. Pour tout $i \in S$, nous noterons par la suite $\mathbb{P}[A \mid X_0 = i]$ par $\mathbb{P}_i(A)$ et $\mathbb{E}[A \mid X_0 = i] = \mathbb{E}_i[A]$, et supposerons toujours que $\mathbb{P}[X_0 = i] > 0$.

DÉFINITION 2.24. *Soient la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans l'espace d'états S, et $i \in S$ un état de la chaîne. Le temps d'atteinte de i est le premier instant où i est visité après le départ.*

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, \quad T_i(\omega) = \begin{cases} \inf\{n > 0 : X_n(\omega) = i\} & \text{si un tel entier existe.} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la chaîne part de l'état i lui-même, nous employons le terme de temps de retour. On définit par $f_{ji} = \mathbb{P}_j(T_i < +\infty)$, la probabilité de retourner en i partant de j.

DÉFINITION 2.25. *Soit l'espace d'états S. Un état $i \in S$ est dit récurrent si*

$$f_{ii} = 1.$$

L'état est transient ou transitoire sinon, en d'autres termes,

$$f_{ii} < 1.$$

Ainsi, un état est récurrent si on est sûr d'y revenir, et transient sinon. Dans l'exemple 2.19 les états 1, 2, 3, 4 sont transients. Contrairement à l'état 5 qui est récurrent.

DÉFINITION 2.26. *Considérons l'espace d'états S, et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans S. L'état $i \in S$ est dit récurrent positif si*

$$\mathbb{E}_i[T_i] < +\infty,$$

il est récurrent nul si

$$\mathbb{E}_i[T_i] = +\infty.$$

L'état 5 de l'exemple 2.19 est donc récurrent positif. La notion de récurrence regorge une foultitude de propriétés intéressantes pour une chaîne de Markov. Nous ne verrons pas en détails toutes ces propriétés. Toutefois, une manière de caractériser les notions de transience et récurrence est d'utiliser le nombre de visites, notion que nous introduisons maintenant.

DÉFINITION 2.27. *Soit la chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *à valeurs dans l'espace d'états* S. *Le nombre de visites en un état* i *est la variable aléatoire* N_i *définie par :*

$$N_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}.$$

La quantité $G_{ij} = \mathbb{E}_i[N_j]$, *pour tout* $i, j \in S$, *est l'espérance du nombre de visites en* j *partant de* i. *Cette quantité* G *s'appelle le noyau de Green, le noyau potentiel ou simplement la fonction de Green.*

Nous avons les propriétés suivantes.

PROPOSITION 2.28. *Pour tout état* i,

— *Si* $f_{ii} = 1$,

$$P_i[N_i = r] = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } r \geq 0. \\ 1 & \text{pour } r = \infty. \end{cases}$$

Et bien entendu $G_{ii} = \mathbb{E}_i[N_i] = +\infty$.

— *Si* $f_{ii} < 1$, *on a* $\sum_{r=0}^{\infty} P_i[N_i = r] = 1$, *et donc* $P_i[N_i = \infty] = 0$; *d'autre part,* $G_{ii} = \mathbb{E}_i[N_i] = f_{ii}/1 - f_{ii}$.

DÉMONSTRATION. On a

$$\mathbb{P}_j[N_i = 0] = 1 - f_{ji}.$$

Et, lorsque $r \geq 1$,

$$\mathbb{P}_j[N_i = r] = f_{ji} \times (f_{ii})^{r-1} \times (1 - f_{ii})$$

En effet, cette probabilité est égale à la probabilité de visiter i au moins une fois (f_{ji}) multiplié par la probabilité de visiter i encore $r-1$ fois $\left((f_{ii})^{r-1}\right)$ en succession, et enfin après la r-ième visite de ne plus jamais revenir en i $(1 - f_{ii})$. En particulier,

$$\mathbb{P}_i[N_i = r] = (f_{ii})^r \times (1 - f_{ii}). \tag{2.12}$$

On vérifie alors facilement les conditions. □

PROPOSITION 2.29. *Pour tout* $(i,j) \in S^2$*, nous avons l'égalité :*

$$G_{ij} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

DÉMONSTRATION. On a :

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbb{E}_i\left[N_j\right] \\ &= \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right], \\ &\text{par convergence monotone,} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_i\left[\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right], \\ &\text{par définition de l'espérance d'une fonction indicatrice,} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_i\left[X_n=j\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ij}^{(n)}, \end{aligned}$$

on obtient bien l'égalité voulue. □

COROLLAIRE 2.30. *Pour que l'état i soit récurrent, il faut et il suffit que :*

$$G_{ii} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est directe. En effet, par les propositions 2.28, et 2.29, nous avons que $f_{ii} = 1$ est équivalent à :

$$G_{ii} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty,$$

ce qui conclut la preuve. □

DÉFINITION 2.31. *Une classe d'équivalence est dite récurrente (respectivement transiente), si l'un de ses états est récurrent (respectivement transient).*

La classe $C = \{5\}$ dans l'exemple 2.19 est récurrente.

PROPOSITION 2.32. *Une classe récurrente est fermée, autrement dit, la probabilité d'en sortir est nulle.*

DÉMONSTRATION. Soit i un état quelconque appartenant à la classe de récurrence C. Supposons qu'il existe $j \notin C$ tel que $i \to j$ et montrons que l'on a une contradiction. Remarquons d'abord que j ne conduit à aucun état de C, car sinon on aurait $j \to i$ et donc $i \leftrightarrow j$ et $j \in C$. De plus, on a l'équivalence entre $i \to j$ et

$$\mathbb{P}_i[T_j < +\infty] > 0,$$

or la probabilité $\mathbb{P}_i[T_i = +\infty]$ de ne pas revenir un i est bornée inférieurement par celle de revenir en j en temps fini (vu j ne conduit à aucun état de C). Ainsi,

$$\mathbb{P}_i[T_i = +\infty] \geq \mathbb{P}_i[T_j < +\infty] > 0,$$

d'où $\mathbb{P}_i[T_i < +\infty] < 1$, ce qui est une contradiction car i est récurrent. □

PROPOSITION 2.33. *Toute classe fermée et de cardinal fini est récurrente.*

DÉMONSTRATION. Soit C cette classe fermée, et soit $i \in C$, alors,

$$\sum_{j\in C} G_{ij} = \sum_{j\in C}\sum_{n\geq 0} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = +\infty,$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i[X_n \in C] = 1$; puisque la classe C est fermée nous ne la quittons pas.

Supposons que pour tout $j \in C$, j est transient, alors, $G_{ij} < \infty$. Par hypothèse la classe C est de cardinal fini, ce qui implique que $\sum_{j\in C} G_{ij} < \infty$ et on obtient une contradiction. En conséquence, il existe un état $j \in C$ récurrent et la classe C est donc récurrente. □

COROLLAIRE 2.34. *Une chaîne de Markov définie sur un espace d'états fini admet au moins un état récurrent.*

DÉMONSTRATION. Ceci découle du fait que si l'espace d'état est fini, il doit y avoir au moins une classe fermée. □

THÉORÈME 2.35. *Soit une chaîne de Markov de matrice de transition P. Deux états qui communiquent sont, soit tous les deux récurrents, soit tous les deux transitoires. En particulier si P est irréductible, les états sont soit tous récurrents, soit tous transitoires. La chaîne (ou sa matrice de transition) est alors dite, respectivement, récurrente, transiente.*

DÉMONSTRATION. Si i et j communiquent, il existe $m, d \in \mathbb{N}$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(d)} > 0$. Posons $\beta = p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(d)} > 0$. On a les inégalités

$$p_{ii}^{(m+n+d)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(d)} \geq \beta p_{jj}^{(d)}, \;\; n \geq 0.$$

En effet, le premier membre est la probabilité d'aller de i en j en exactement $m+n+d$ étapes, tandis que le second membre est la probabilité d'aller de i en j en exactement $m+n+d$ étapes, mais de façon particulière, avec la contrainte que $X_m = j$ et $X_{m+n} = j$. De manière similaire,

$$p_{jj}^{(m+n+d)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ji}^{(d)} \geq \beta p_{ii}^{(d)}, \;\; n \geq 0.$$

Donc, si i et j communiquent, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ ont le même comportement. Les états i et j sont donc d'après le Corollaire 2.30, soit tous les deux transitoires, soit tous les deux récurrents. □

Il suffit donc par le Théorème 2.35 ci-dessus, que l'un des états d'une chaîne irréductible soit récurrent (respectivement transient), pour que la chaîne toute entière soit récurrente (respectivement transiente).

5. Critère de distribution stationnaire

Dans cette section, on cherche à établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne de Markov admette une distribution stationnaire.

Puisqu'une chaîne de Markov est entièrement déterminée par sa loi initiale et sa matrice de transition (voir Théorème 2.11), ceci signifie que la chaîne de Markov et celle retournée dans le temps ont la même loi. Pour tout $i \in S$, définissons une mesure positive μ_i sur S telle que, pour tout $j \in S$, $\mu_i(j)$ est l'espérance du nombre de visites en j pour tout i jusqu'au premier retour en i :

$$\mu_i(j) = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{T_i} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right).$$

THÉORÈME 2.36. *Soit une chaîne de Markov irréductible et récurrente, alors la mesure μ_i est stationnaire et strictement positive.*

DÉMONSTRATION. Stationnarité. Il faut montrer que pour tout $j \in S$:

$$\sum_{k\in S} \mu_i(k) p_{kj} = \mu_i(j).$$

Nous avons que,

$$\mu_i(j) = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{T_i} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right) = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_i\geq n\}}\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{\{T_i\geq n\}\cap\{X_n=j\}}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\left[T_i \geq n, X_n = j\right].$$

Or si $n=1$, $\mathbb{P}_i[T_i \geq n, X_n = j] = \mathbb{P}_i[T_i \geq 1, X_1 = j] = p_{ij}$, et si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i[T_i \geq n, X_n = j]\\
&= \mathbb{P}_i[X_n = j, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i],\\
&\text{en appliquant la formule de probabilités totales,}\\
&= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} \mathbb{P}_i[X_n = j, X_{n-1} = k, X_{n-2} \neq i, \dots, X_1 \neq i]\\
&= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} \mathbb{P}_i[X_n = j \mid X_{n-1} = k, \dots, X_1 \neq i]\mathbb{P}_i[X_{n-1} = k, \dots, X_1 \neq i],\\
&\text{par la Definition 2.1 et l'hypothèse d'homogénéité,}\\
&= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} p_{kj}\mathbb{P}_i[X_{n-1} = k, \dots, X_1 \neq i]\\
&= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} p_{kj}\mathbb{P}[T_i \geq n-1, X_{n-1} = k].
\end{aligned}$$

Ainsi, en mettant ceci dans la définition de $\mu_i(j)$ on obtient :

$$\mu_i(j) = p_{ij} + \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k\in S\setminus\{i\}} p_{kj}\mathbb{P}[T_i \geq n-1, X_{n-1} = k].$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k\in S\setminus\{i\}} p_{kj}\mathbb{P}[T_i \geq n-1, X_{n-1} = k] &= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} p_{kj}\sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}[T_i \geq n-1, X_{n-1} = k]\\
&= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} p_{kj}\mu_i(k).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\mu_i(i) = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{T_i} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right) = \mathbb{P}_i[X_0 = i] = 1.$$

On conclut que

$$\mu_i(j) = p_{ij}\cdot 1 + \sum_{k\in S\setminus\{i\}} p_{kj}\mu_i(k) = \sum_{k\in S} p_{kj}\mu_i(k).$$

Stricte positivité. Il faut montrer que pour tout $j \in S$, $0 < \mu_i(j) < \infty$. Puisque la chaîne de Markov est irréductible, pour tout $i, j \in S$, il existe $m, n \geq 0$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(n)} > 0$. De plus, la mesure μ_i étant stationnaire on a que $\mu_i(j) = \sum_{k\in S}\mu_i(k)p_{kj}^{(n)}$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
1 = \mu_i(i) &= \sum_{k\in S}\mu_i(k)p_{ki}^{(n)} \geq \mu_i(j)p_{ji}^{(n)}, \text{ donc } \mu_i(j) < +\infty\\
\mu_i(j) &= \sum_{k\in S}\mu_i(k)p_{kj}^{(m)} \geq \mu_i(i)p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(m)} > 0, \text{ donc } \mu_i(j) > 0,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

REMARQUE 2.36.1. Dans le théorème précédent, la mesure stationnaire est unique à une constante multiplicative près. La démonstration se trouve dans le livre cité en bibliographie [**5**]

COROLLAIRE 2.37. *Soit une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Alors,*

— *Soit, pour tout $i \in S$, $\mathbb{E}_i(T_i) < +\infty$ et il existe une unique probabilité stationnaire π donnée par*

$$\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}, \text{ pour tout } i \in S.$$

— *Soit, pour tout $i \in S$, $\mathbb{E}_i(T_i) = +\infty$ et toute mesure stationnaire a une masse totale infinie.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'espace d'états S, si la chaîne de Markov est irréductible et récurrente, d'après le Théorème 2.36 (et l'unicité) toutes les mesures sont proportionnelles : elles ont toutes soit une masse finie, soit une masse infinie. Fixons donc $i \in S$ et considérons la mesure stationnaire μ_i. Alors,

$$\mu_i(S) = \sum_{j \in S} \mu_i(j) = \sum_{j \in S} \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{T_i} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\right) = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{T_i} \sum_{j \in S} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\right) = \mathbb{E}_i(T_i).$$

Ainsi, si $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$, on est dans le premier cas et l'unique probabilité stationnaire π satisfait, pour tout $i, j \in S$, $\pi_j = \frac{\mu_i(j)}{\mathbb{E}_i(T_i)}$. En prenant $i = j$, on obtient pour tout $i \in S$,

$$\pi_i = \frac{\mu_i(i)}{\mathbb{E}_i(T_i)} = \frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}.$$

Si $\mathbb{E}_i(T_i) = +\infty$, on est dans le deuxième cas. □

PROPOSITION 2.38. *Soient i et j deux états récurrents qui communiquent, alors ils sont tous les deux soit récurrents positifs, soit récurrents nuls.*

DÉMONSTRATION. Si la chaîne de Markov est irréductible, cela découle du Corollaire 2.37. Si ce n'est pas le cas, on applique le même raisonnement à chacune des classes récurrentes. □

DÉFINITION 2.39. *Une classe d'équivalence est dite récurrente positive si un de ses états est récurrent positif; elle est dite récurrente nulle sinon.*

PROPOSITION 2.40. *Une chaîne de Markov irréductible est récurrente positive si et seulement si elle admet une probabilité stationnaire. En particulier, toute chaîne de Markov irréductible définie sur un espace d'états de cardinal fini est récurrente positive.*

DÉMONSTRATION. Démontrons la première partie. Le sens direct provient du Corollaire 2.37. Pour la réciproque, supposons qu'il existe une probabilité stationnaire π et soit $i \in S$ tel que $\pi_i > 0$. On démontre que pour tout $i, j \in S$, $G_{ij} \leq G_{jj}$, autrement dit,

$$\sum_{n\geq 0} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{n\geq 0} p_{jj}^{(n)} = G_{jj}. \tag{2.13}$$

La démonstration de cette inégalité repose sur le fait que pour tout $i, j \in S$

$$G_{ii} = \delta_{\{i=j\}} + \mathbb{P}[T_j < \infty] G_{jj} \tag{2.14}$$

$$\leq G_{jj}. \tag{2.15}$$

Pour démontrer l'égalité 2.14 on utilise la Proposition 2.29, puis on applique les formules de probabilités conditionnelles et totales, ainsi que le Corollaire 2.12.

En multipliant par π_i, en sommant sur i, en appliquant le théorème de Fubini et le fait que la probabilité π soit stationnaire, on obtient pour le membre de gauche,

$$\sum_{i\in S} \pi_i \sum_{n\geq 0} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n\geq 0} \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{n\geq 0} \pi_j = +\infty.$$

En multipliant par π_i et en sommant sur i, le membre de droite devient,

$$\pi(S) \times G_{jj} = G_{jj}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité 2.13, $G_{jj} = +\infty$ et on déduit par le Corollaire 2.30 que l'état j est récurrent et donc récurrent positif puisqu'il existe une probabilité stationnaire.

La deuxième partie découle du fait que toute chaîne de Markov irréductible défini sur un espace d'état fini est récurrente (voir Corollaire 2.34), ce qui implique l'existence d'une mesure stationnaire (Théorème 2.36) ; et puisque l'espace des états est fini, toute mesure stationnaire a forcément une masse finie. □

6. Convergence vers l'équilibre

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ irréductible et récurrente positive, elle possède donc une unique probabilité invariante π. On a vu que si la loi initiale de la chaîne est la probabilité stationnaire π, alors la loi reste la même à chaque instant n (voir l'équation 2.9), et la chaîne est en régime stationnaire. Si maintenant la loi initiale n'est pas la probabilité stationnaire, que se passe-t-il ? Le but de cette section est donc d'apporter une réponse à cette question.

Le théorème suivant montre que si la chaîne est de plus apériodique, alors la chaîne de Markov suit asymptotiquement une loi stationnaire.

THÉORÈME 2.41. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique, à valeurs dans l'espace d'états S. Alors pour tout état $i \in S$, et toute loi initiale α,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[X_n = i] = \pi_i$$

où π est la probabilité stationnaire de la chaîne.

Afin de démontrer ce théorème, nous allons d'abord montrer le lemme qui va suivre.

LEMME 2.42. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible et apériodique à valeurs dans l'espace d'états S. Alors, pour tout $(i,j) \in S^2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

DÉMONSTRATION. Étant donné que la chaîne est irréductible, il suffit de montrer que, pour tout $i \in S$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $p_{ii}^{(n)} > 0$. La chaîne étant apériodique, il existe $l \geq 1$ et $n_1,\ldots,n_l \geq 1$, tels qu'on ait $\text{pgcd}(n_1,\ldots,n_l) = 1$ et $p_{ii}^{(n_1)} > 0,\ldots,p_{ii}^{(n_l)} > 0$.

D'après le théorème de Bezout, si $\text{pgcd}(n_1,\ldots,n_l) = d$, alors, nous avons pour tout $n \geq n_1 \times \ldots \times n_l$, il existe $a_1,\ldots,a_l \in \mathbb{N}$ tels que

$$a_1 n_1 + \ldots + a_l n_l = nd.$$

Dans notre cas on a $d = 1$. Posons $N = n_1 \times \ldots \times n_l$, alors pour tout $n \geq N$, il existe $a_1,\ldots,a_l \in \mathbb{N}$ tel que $a_1 n_1 \times \ldots \times a_l n_l = n$. D'autre part, par l'égalité 2.6 du corollaire 2.7 on a :

$$p_{ii}^{(n)} \geq p_{ii}^{(a_1 n_1)} \times \ldots \times p_{ii}^{(a_l n_l)} > 0.$$

Ce qui conclut la preuve. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.41. Admettons que,

$$\forall (i,j) \in S^2, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i[X_n = j] = \pi_j. \tag{2.16}$$

Alors, pour tout $j \in S$, et pour toute loi initiale α,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = j] = \sum_{i\in S} \alpha_i \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i[X_n = j] = \left(\sum_{i\in S} \alpha_i\right) \pi_j = \pi_j.$$

N Montrons donc l'équation 2.16. Pour cela, introduisons une chaîne de Markov $\left(Y_n = \left(X_n, X'_n\right)\right)_{n\geq 0}$ définie sur l'espace d'états S^2, formée de deux copies indépendantes X_n, X'_n de X_n. Montrons que la chaîne $(Y_n)_{\geq 0}$ est irréductible et récurrente positive. Étant donné $(i,i') \in S^2$, notons $\mathbb{P}_{(i,i')}$ la probabilité conditionnelle de Y_n sachant que $\{(X_0, X'_0) = (i,i')\}$. $(Y_n)_{\geq 0}$ est irréductible. En utilisant l'indépendance de X_n et X'_n, les probabilités de transitions de la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont données pour tout $(i,i'),(j,j') \in S^2$ par

$$\mathbb{P}_{(i,i')}\left[Y_n = (j,j')\right] = \mathbb{P}_i\left[X_n = j\right]\mathbb{P}_{i'}\left[X_n = j'\right] = p_{ij}^{(n)} p_{i'j'}^{(n)}.$$

Ainsi, en utilisant le lemme 2.42 pour chacune des chaînes X_n, X'_n, on a $\mathbb{P}_{(i,i')}\left[Y_n = (j,j')\right] > 0$ pour $n > \max\{N, N'\}$. Ainsi, la chaîne $(Y_n)_{\geq 0}$ est bien irréductible.

$(Y_n)_{\geq 0}$ est récurrente positive. D'après la Proposition 2.40, il suffit de voir que la chaîne admet une probabilité stationnaire. La chaîne $(X_n)_{\geq 0}$ étant récurrente positive, elle admet une probabilité stationnaire, notée π. Définissons la probabilité $\bar{\pi}$ sur S^2 par :

$$\forall (i,i') \in S^2, \;\; \bar{\pi}(i,i') = \pi_i \pi_{i'}.$$

Alors, par indépendance de X_n et X'_n, et par stationnarité de π pour $(X_n)_{n\geq 0}$,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,i')\in S^2} \bar{\pi}\left(i,i'\right)\mathbb{P}_{(i,i')}\left[Y_1 = \left(j,j'\right)\right] &= \left(\sum_{i\in S} \pi_i \mathbb{P}_i\left[X_n = j\right]\right)\left(\sum_{i'\in S} \pi_{i'}\mathbb{P}_{i'}\left[X_n = j'\right]\right) \\ &= \pi_i \pi_{i'} = \bar{\pi}\left(j,j'\right).\end{aligned}$$

Comme la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et récurrente positive, pour tout $\left(i,i'\right),\left(j,j'\right) \in S^2$, $\mathbb{P}_{(i,i')}\left[T_{(j,j')} < \infty\right] = 1$, d'où $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{(i,i')}\left[T_{(j,j')} > n\right] = 0$.

Preuve proprement dite. On se fixe $k \in S$ et on considère,

$$T := T_{(k,k)} = \inf\{n > 0 : Y_n = (k,k)\} = \inf\{n > 0 : X_n = X'_n = k\}.$$

Remarquons que, pour tout $n \geq 0$, les deux chaînes $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ et $\left(X'_{T+n}\right)_{n\geq 0}$ ont la même loi car elles ont le même état initial k et la même matrice de transition. On peut donc écrire, pour tout $i, i', j \in S$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i\left[X_n = j\right] &= \mathbb{P}_{(i,i')}\left[X_n = j\right] \\ &= \mathbb{P}_{(i,i')}\left[X_n = j, T \leq n\right] + \mathbb{P}_{(i,i')}\left[X_n = j, T > n\right] \\ &= \mathbb{P}_{(i,i')}\left[X'_n = j, T \leq n\right] + \mathbb{P}_{(i,i')}\left[X_n = j, T > n\right] \\ &\leq \mathbb{P}_{(i,i')}\left[X'_n = j\right] + \mathbb{P}_{(i,i')}\left[T > n\right] \\ &= \mathbb{P}_{i'}\left[X'_n = j\right] + \mathbb{P}_{(i,i')}\left[T > n\right].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\mathbb{P}_i\left[X_n = j\right] - \mathbb{P}_{i'}\left[X'_n = j\right]| \leq \mathbb{P}_{(i,i')}\left[T > n\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

On en déduit que, pour tout $(i,j) \in S^2$,

$$\begin{aligned} |\pi_j - \mathbb{P}_i[X_n = j]| &= \left| \sum_{i' \in S} \pi_{i'} \left(\mathbb{P}_{i'}\left[X'_n = j\right] - \mathbb{P}_i[X_n = j] \right) \right| \\ &\leq \sum_{i' \in S} \pi_{i'} |\mathbb{P}_{i'}\left[X'_n = j\right] - \mathbb{P}_i[X_n = j]| \\ &\leq \sum_{i' \in S} \pi_{i'} \mathbb{P}_{(i,i')}[T > n] \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Le résultat de la dernière inégalité s'obtient par convergence dominée. $\square$

Chapitre 3

Application des chaînes de Markov sur le jeu de Monopoly

Dans ce chapitre, nous voulons par les chaînes de Markov, modéliser le jeu de Monopoly (voir la Figure1) et mettre en place une stratégie permettant au joueur de maximiser ses chances de gagner la partie. En effet, le but du jeu est, soit d'acquérir toutes les propriétés immobilières du plateau, soit de devenir le plus riche ou alors, être le dernier joueur à ne pas faire faillite. Nous remarquons premièrement pour des raison évidentes, qu'il est difficile d'acquérir toutes les propriétés immobilières du plateau. De plus, l'on pourrait croire qu'en investissant uniquement sur des propriétés dont le loyer est à prix élevé serait une bonne stratégie, mais il existe une faille à cette stratégie. En effet, investir sur une propriété ne vous garantit pas vraiment que celle-ci sera très souvent visitée, pour ainsi amasser le plus d'argent et ne jamais faire faillite. Vous l'aurez donc deviné, au lieu d'investir uniquement sur les propriétés dont le prix du loyer est très élevé et prendre le risque qu'elles ne soient pas très souvent visitées, nous investirons d'abord sur celles qui sont les plus visitées, et pourquoi pas par après investir sur les autres si possible. On se fixe alors l'objectif dans ce chapitre, de déterminer sur quelles propriétés investir en tenant compte de leurs probabilités de visites, et ceci par le biais des chaînes de Markov.

Nous supposons par la suite que le lecteur connaît déjà les règles du Monopoly. Rappelons tout de même celles qui nous seront utiles à la modélisation du plateau.

1. Règles du jeu et modélisation

Dans cette section et dans les autres, notre raisonnement sera entièrement basé sur les règles du jeu tirées du site *regle2jeux.fr* [**8**]. Et pour simplifier nos calculs, on ne considèrera que les mouvements d'un seul joueur dans le plateau.

Le jeu de Monopoly est constitué de 40 cases (voir Figure 2), où lors d'une partie, le joueur se déplace suivant la somme obtenue par un lancer de deux

FIGURE 1. Image du monopoly version Française 2015. [**4**]

dés numérotés de 1 à 6 chacun. Il semble naturelle de prendre comme unité de temps le nombre de tours et l'ensemble des positions du joueur comme espace d'états. Le problème est que, prendre le nombre de tour comme unité de temps rendra notre modélisation non-Markovienne. En effet, si le joueur est en prison (case 10 voir Figure 2) il a le choix entre payer une amende de $F20000$, ou croiser les doigts et faire un double (si les dés affichent le même chiffre) pour sortir de prison. Le choix de rester en prison pour essayer de faire un double dépend des deux tours précédents. Si le joueur passe deux tours en prison, il est obligé de payer l'amende au 3^e tour. Un autre aspect qui pourrait rendre notre modélisation non-Markovienne serait les cartes *chances* (cases 7, 22 et 36), et les cartes *caisse de communauté* (cases 2, 17, 33). Il existe 16 cartes *chance* et *caisse de communauté*. Pendant que 7 cartes *chance* nécessitent un déplacement du joueur :

— Rendez-vous à la Rue de la Paix (case 39),
— avancer jusqu'à la case départ (case 0),
— rendez-vous à l'Avenue Henri-Martin (case 24),
— avancez au Boulevard de La Villette (case 11),
— avancez jusqu'à la Gare de Lyon (case 15),
— allez en prison (case 10)
— reculez de trois cases (case 33, 19, 4).

Seulement 4 cartes *caisse de communauté* nécessitent un déplacement du joueur :

— Placez-vous sur la case départ (case 0),

— aller en prison (case 10),

— retournez à Belleville (case 1),

— Rendez-vous à la gare la plus proche (case 5, 25, 35).

Le tirage de l'une de ces cartes ne dépend que de l'ordre dans lequel elles ont été empilées. Pour palier à ces problèmes nous prendrons le nombre de lancers comme unité de temps et l'ensemble des positions du joueur comme espace d'états. Nous introduirons aussi un paramètre $0 \leq a \leq 1$ déterminant si le joueur décide de payer ou pas l'amende au premier tour passer en prison. Les valeurs de a proches de 1 correspondent au début de la partie lorsque le joueur désir encore acquérir des propriétés, à contrario, les valeurs de a proches de 0 correspondent à une fin de partie où le joueur voit en la prison un refuge plutôt qu'une sanction.

Ensuite, nous ne nous intéresserons qu'aux cartes qui invitent le joueur à se déplacer.

Enfin, pour distinguer la simple visite en prison (case 10) de la prison proprement dite, et modéliser la règle qui permet au joueur de sortir de prison en faisant un double, nous introduirons ici trois cases virtuelles 40, 41, 42, telles que :

— En 42, le joueur se trouve en prison pour au plus trois tours,

— en 41, le joueur se trouve en prison pour au plus deux tours,

— en 40, le joueur sort de prison au prochain tour.

Le joueur ne pourra atteindre la case *simple visite* (case 10), que par un simple lancer de dés. Il faut aussi noter qu'il existe plusieurs façons de se retrouver en prison, soit via les cartes *chances* ou *caisse de communauté*, soit via la case 30 *Aller en prison*, ou encore en faisant trois doubles consécutifs. Nous ne tiendront pas vraiment compte de la case 30 lors de nos calculs, car une fois qu'on y arrive, on est directement envoyé en prison (case 42). Afin de modéliser au mieux notre problème il est préférable de le découper en sous problèmes, dans lesquelles nous introduirons au fur et à mesure chaque règle.

Dans la suite, on considère l'ensemble des positions du joueur après n lancers par la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans l'espace d'états $S = \{0,1,2,\ldots,29,31,\ldots,42\}$. Nous voulons déterminer la matrice de transition $P = \{p_{ij}\}$, où p_{ij} est la probabilité de transiter de la case i à j en lançant une seule fois les dés. Pour modélisez tout ce qui va suivre, nous avons utiliser les langages python (pour les codes) et r (pour les graphes), le lien se trouve dans la bibliographie [**3**].

2. Modèle 1

Dans cette section, nous n'allons tenir compte que des probabilités de transiter d'une case i à une case j par un simple lancer des deux dés, via une carte spéciale *(chance ou communauté)*. Pour ce faire, nous avons numéroter le plateau de 0 à 39 (voir Figure2) La matrice P est une matrice de taille 42×42 (la case 30 n'apparaîtra pas dans la matrice).

FIGURE 2. Image anotée du monopoly

On écrira :

$$p_{ij} = pd_{ij} + pch_{ij} + pcc_{ij}, \quad i, j \in S, \tag{3.1}$$

où,

— pd_{ij}, est la probabilité de transiter de i à j par les dés ou par les cartes sans déplacement.

— pch_{ij}, est la probabilité de transiter de i à j en tirant une carte *chance*.

— pcc_{ij}, est la probabilité de transiter de i à j en tirant une *carte caise de communauté*.

Puisque c'est la somme des valeurs retournées par chaque dé qui permet au joueur de transiter d'une case à une autre, il est alors nécessaire de connaitre la probabilité d'arriver à une case via le lancer des dés. Soit $q(i)$ la probabilité d'obtenir un total de i avec les dés, nous avons :

$$\begin{aligned}
q(2) = q(12) &= 1/36,\\
q(3) = q(11) &= 2/36,\\
q(4) = q(10) &= 3/36,\\
q(5) = q(9) &= 4/36,\\
q(6) = q(8) &= 5/36,\\
q(7) &= 6/36,\\
q(i) = 0 \ &\text{ pour les autres } i.
\end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $i, j \in S \setminus \{40, 41, 42\}$

— si $i < j$, le total des dés vaut $j - i$,

— si $i > j$, le total des dés vaut $j - i + 40$.

Dans la suite on ne précisera pas si $i > j$ ou si $i < j$. On suppose que lorsqu'on tire une carte de déplacement il n'y a pas d'arrêt sur la case *(caisse de communauté ou chance)* intermédiaire entre i et j. D'autre part, lorsqu'une carte n'invite pas au déplacement, nous considérons que nous n'en avons pas tiré, et la probabilité de transiter de i à j est celle donnée par la fonction $q(j-i)$, que nous avons codé par le biais du langage python. De plus nous supposons qu'une fois que le joueur retourne la carte spéciale dans la pile de cartes correspondante, le banquier les mélange à nouveaux, nous avons donc une probabilité de 1/16 de tirer une carte *chance ou de communauté*.

Calculons dès à présent les composantes de p_{ij} (voir l'égalité 3.1).

a) Calcul des pd_{ij}.

Pour tout $i \in [0, 39]$, $i \neq 30$

— Si $j = 42$, $pd_{ij} = q(30 - i)$: on peut aller en prison via la case 30.

— Si $j \in \{2, 17, 33\}$, $pd_{ij} = q(j - i) \times 12/16$: on transite vers une carte spéciale si on ne tire pas de carte de déplacement (12/16 pour les cartes *caisse de communauté* et 9/16 pour les cartes *chance*).

— Si $j \in \{7, 22, 36\}$, $pd_{ij} = q(j - i) \times 9/16$: voir les explications plus haut.

— Si $j \in \{30, 40, 41\}$, $pd_{ij} = 0$: les cases prisons 40 et 41 ne peuvent pas encore être atteintes, et la case 30 ne pourra jamais être atteinte car elle envoie directement le joueur en prison (case 42).

— Sinon $pd_{ij} = q(j - i)$: on rappelle que la règle des trois doubles n'est pas encore prise en compte.

b) Calcul des pcc_{ij}.

Lorsque le lancer de dés amène le joueur à la case 2, 17, ou 33, celui-ci tire une *caisse de communauté* avec une probabilité de 1/16. Ainsi, Pour tout $i \in [0,39],\ i \neq 30$:

— si $j \in \{0,1,42\}$, $pcc_{ij} = (q(2-i) + q(17-i) + q(33-i)) \times 1/16$.

— Si $j = 5$, $pcc_{ij} = q(2-i) \times 1/16$: rendez vous à la gare la plus proche, on ne peut transiter vers la case 5 via la carte *caisse de communauté* que si on peut aller vers la case 2 et tirer la carte spéciale correspondante, qui a une probabilité de 1/16 d'être tirée.

— Si $j = 25$, $pcc_{ij} = q(25-i) \times 1/16$: même raisonnement que plus haut.

— Si $j = 35$, $pcc_{ij} = q(35-i) \times 1/16$: même raisonnement.

— Sinon $pcc_{ij} = 0$.

Pour ce qui en est de la probabilité pch_{ij} le raisonnement est similaire. On rappelle aussi qu'on ne prend pas en compte dans ce modèle les déplacements causés par le tirage d'une carte $caisse\ communaut$é à la case 33 après avoir reculé de trois cases à partir de la case 36 via la carte chance correspondante.

b) Calcul des pch_{ij}.

Pour tout $i \in [0,39],\ i \neq 30$

— Si $j \in \{0,42,11,15,24,39\}$, $pch_{ij} = (q(7-i) + q(22-i) + q(36-i)) \times 1/16$.

— Si $j = 4$, $pch_{ij} = q(7-i) \times 1/16$.

— Si $j = 19$, $pch_{ij} = q(22-i) \times 1/16$.

— Si $j = 33$, $pch_{ij} = q(36-i) \times 1/16$.

— Sinon $pch_{ij} = 0$.

En appliquant l'égalité 3.1 on obtient ainsi une matrice de transition P.

Dans les calculs précédents, nous n'avons pas pris en compte les déplacements causés par le tirage d'une carte *caisse communauté* à la case 33 après avoir reculé de trois cases à partir de la case 36 via la carte chance correspondante. Pour ce faire, il suffit de modifier les pch_{ij} de la manière suivante :

Pour tout $i \in [0,39],\ i \neq 30$

— si $j \in \{0,1,42,35\}$, on ajoute le parcours $q(36-i) \times 1/16 \times 1/16$: on arrive en 36 ($q(36-i)$), on tire une carte de déplacement (1/16), puis on arrive en 33 on tire de nouveau une carte de déplacement (1/16) et on arrive en j.

— si $j = 33$, on retire $q(36-i) \times 4/16$, on retire juste le parcours qui mène aux cases 0, 42, 1, 35.

On pose toujours

$$p_{ij} = pd_{ij} + pch_{ij} + pcc_{ij} \quad i,j \in S,$$

Et on obtient donc une nouvelle matrice P.

3. Modèle 2

Dans ce modèle, on introduit la règle permettant au joueur de sortir de prison, soit en payant une amende, soit en faisant un double. On rappelle qu'il a une probabilité de a de payer l'amende, par conséquent $1-a$ de ne pas la payer. De plus, la probabilité de faire un double est de 1/6 soit une probabilité de 5/6 de ne pas en faire.

Calcul des $prison(i,j)$: On ne prend en compte que les déplacements qui se font depuis les cases 40, 41, et 42 ne faisant pas intervenir les cartes spéciales.

Si $i = 40$,

— si $j \in \{12,13,14,15,16,18,19,20,21\}$, $prison(i,j) = q(10-i)$,

— si $j = 17$, $prison(i,j) = q(7) \times 12/16$,

— si $j = 22$, $prison(i,j) = q(12) \times 9/16$.

Si i=41, ou 42,

— si $j \in \{12,14,16,18,20\}$, $prison(i,j) = (1-a) \times 1/36 + a \times q(j-10)$,

— si $j = 17$, $prison(i,j) = a \times q(17-10) \times 12/16$,

— si $j = 22$, $prison(i,j) = a/36 \times 9/16 + (1-a) \times 1/36 \times 9/16$,

— si $j \in \{13,15,19,21\}$, $prison(i,j) = a \times q(j-10)$,

— si $i = 42,\ j = 41$, $prison(i,j) = (1-a) \times 5/6$,

— si $i = 41,\ j = 40$, $prison(i,j) = (1-a) \times 5/6$.

Et, $prison(i,j) = 0$ sinon.

Calcul des $prison\_cc(i,j)$: Il s'agit ici des déplacements ayant comme points de départ 40, 41, ou 42 vers $j \in S$ via la carte *caisse de communauté* se trouvant à la case 17. Ainsi,

si $j \in \{0,42,1,25\}$,

— si $i = 40$, $prison\_cc(i,j) = q(7) \times 1/16$,

— si $i \in \{41,42\}$, $prison\_cc(i,j) = a \times q(7) \times 1/16$,

et, $prison\_cc(i,j)$=0 sinon.

Calcul des $prison\_ch(i,j)$: On s'intéresse uniquement aux déplacement ayant comme points de départ 40, 41, ou 42 vers $j \in S$ via la carte *chance* se trouvant à la case 22. Ainsi,

si $j \in \{0,42,15,11,24,39,19\}$,

— si $i = 40$, $prison\_ch(i,j) = q(12) \times 1/16$,

— si $i \in \{41,42\}$; $prison\_ch(i,j) = a \times q(12) \times 1/16 + (1-a) \times 1/36 \times 12/16$.

Enfin, $prison\_ch(i,j) = 0$ sinon.

Pour terminer, on ajoute au modèle précédent *prison(i,j)*, *prison_cc(i,j)*, et *prison_ch(i,j)*. Nous obtenons alors une nouvelle matrice de transition P de taille 42×42.

4. Modèle 3

Nous introduisons dès lors la règle des 3 doubles consécutifs. Celle-ci envoie immédiatement le joueur en prison après qu'il ait réalisé 3 doubles consécutivement. La probabilité de réaliser 3 doubles consécutifs est de 1/216 car la probabilité de réaliser un double est de 1/6. On remarque qu'on ne peut aller en prison par cette règle qu'en effectuant un total pair. Nous allons donc modifier $q(2)$, $q(4)$, $q(6)$, $q(8)$, $q(10)$, $q(12)$, on va les remplacer par les probabilités de faire un tel total lors du lancer des dés et que ce jet ne soit pas un troisième double, que nous noterons $q\_2(i)$. La probabilité de réaliser deux doubles consécutifs est de 1/36. Donc

$$
\begin{aligned}
&q\_2(2i)\\
&= \mathbb{P}[\text{ le total des dés est } 2i \text{ et le lancer des dés n'est pas un troisième double }]\\
&= \mathbb{P}[\text{ le total des dés est } 2i] - \mathbb{P}[\text{réaliser 3 doubles dont le } 1^{er} \text{ total est } 2i]\\
&= q(2i) - \frac{1}{36} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = q(2i) - \frac{1}{1296}.
\end{aligned}
$$

Dans notre code, cette fonction renvoie les mêmes valeurs que q, sauf pour les valeurs pairs de i. La seule modification à apporter au reste est la probabilité d'arriver en prison par les dés qui devient :

— si $j = 42$ et $i \notin \{40, 41, 30, 42\}$, $pd_{ij} = q(30 - i) + 1/216$: ajout de la probabilité de réaliser 3 doubles.

Après ces modifications on obtient finalement notre matrice $P = \{p_{ij}\}$ de taille 42×42.

5. Recherche de la distribution stationnaire

Pour la précision des calculs, nous avons utilisé le module `fractions` de python qui gère très bien les fractions. Ensuite, on a vérifié que notre matrice est stochastique (voir l'égalité 2.5). La matrice P est homogène par définition (voir Définition 2.2).

De plus, pour toute valeur de a (probabilité de payer l'amende), lorsqu'on calcule P^3, on remarque que toutes ses lignes sont strictement positives, donc tous les états communiquent entre eux (Définition 2.17), notre matrice est donc irréductible (voir Définition2.20).

Remarquons aussi que l'état 0 est de période 1 (voir Définition 2.22) puisqu'on peut revenir en 0 après un lancer (en tirant une carte spéciale nous invitant à revenir à la case départ), Sachant que les états de notre matrice communiquent entre eux, on en déduit du Théorème 2.23 que la chaîne est apériodique (Définition 2.22). On démontre de la même manière que la chaîne est récurrente (voir Théorème 2.35). Elle est aussi récurrente positive (voir Définition 2.31), ce qui nous permet d'affirmer par la Proposition 2.40 et la Remarque 2.36.1, que notre chaîne admet une unique probabilité stationnaire π.

Notre chaîne étant irréductible, apériodique et récurrente positive, le Théorème 2.41 nous garantit que sa loi initiale $\alpha_i,\ i \in S$ convergera vers sa probabilité stationnaire π_i. Nous avons donc conçu un code python pour calculer la distribution stationnaire de notre chaîne pour toute valeur de $0 \leq a \leq 1$. Numériquement, pour une valeur de a fixé à 1/1000, nous atteignons la distribution stationnaire (voir Définition 2.13) après 273 lancers de dés.

6. Résultats

Nous nous sommes intéressés aux propriétés achetables (voir sur le site regle2jeux.fr [**8**]). Nous avons donc dans un premier temps, fait un classement des propriétés les plus visitées (voir Figure 3,ou Tableau1 en Annexe), ce qui nous a permis de faire le top 5 des cases les plus visités : l'Avenue Henri-Martin (case 24), Boulevard Saint-Michel (case 18), Gare De Lyon (case 15), Place Pigalle (case 19), et la Gare Du Nord (case 25). Notez que les compagnies sont en gris. Puis nous avons regroupé les cases de mêmes couleurs,

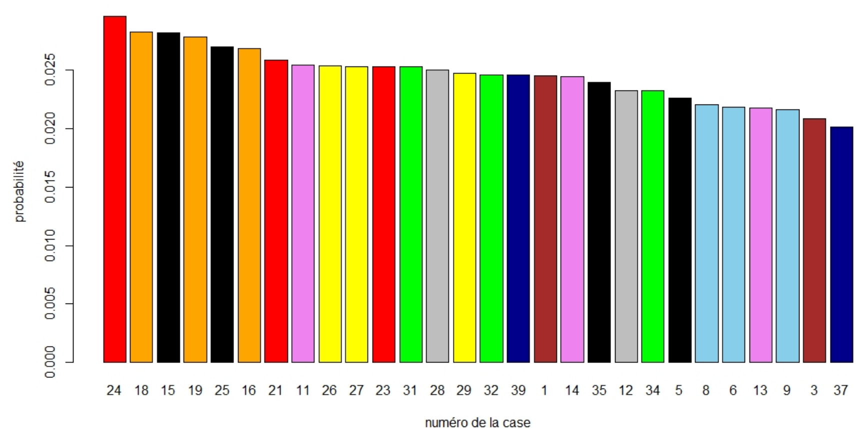

FIGURE 3. Barplot des propriétés les plus visitées pour $a = 1/1000$

pour ainsi faire un classement des couleurs les plus visitées (voir Figure4). Il s'avère donc que les propriétés de couleurs oranges sont en générales les plus visitées, suivies des celles en rouge. En effet, sachant que la case prison *simple visite* (case 10) étant la plus visitée (voir Table 1), et qu'une étude sur le lancer de dés a prouvé qu'en lançant deux dés plusieurs fois, il y a une grande probabilité d'obtenir le chiffre 7, suivi des chiffre 8 et 6, puis 9 et 5, on comprend mieux pourquoi les propriétés oranges (cases 18,19,16) sont en générales plus visitées que d'autres, et que la gare de Lyon (case 15) soit plus visitée que les autres gares.

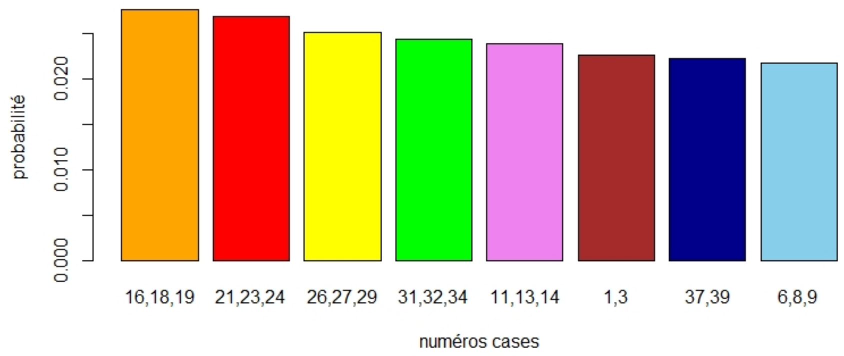

FIGURE 4. Barplot des couleurs les plus visitées pour $a = 1/1000$

Pour terminer, Nous avons fait un classement des cases les plus rentables, en appliquant la formule suivante :

$$r = \text{revenu} \times \text{probabilité de visite.}$$

En admettant dans un premier temps qu'on place 4 maisons dans chaque propriété, nous obtenons le tableau 2 (voir en annexe). Puis, en admettant qu'on place un hôtel par propriété, on obtient le tableau 3 (voir en annexe). On observe dans les deux cas que les propriétés oranges (16, 18, 19) sont les plus rentables. Ainsi, si le joueur en face de vous applique la stratégie de n'investir que sur les cases dont le loyer est très élevé, une façon de le contrer serait d'investir sur les cases ayant les plus grandes probabilités de visites et les plus rentables possible, comme par exemple les cases de couleur orange (16,18,19). Dans le meilleur des cas, le joueur pourrait non seulement investir sur une couleur rentable et très souvent visitée, mais ajouter à cela une couleur dont le prix du loyer est élevé. Notez aussi que, sachant que le nombre de maisons est limité sur le plateau, le joueur pourrait opter pour la stratégie de ne pas construire d'hôtels pour ainsi avoir le monopole sur les maisons.

7. Limites de notre modélisation

Certains aspects du jeu n'ont pas pu être abordés, comme par exemple la carte spéciale qui libère le joueur de prison. Il s'agit là d'une facette non-Markovienne du Monopoly que nous ne pourrons pas cette fois contourner en introduisant une probabilité constante b de posséder cette carte, sous peine de s'éloigner fortement de la réalité.

De plus, dans le modèle 4 on ne prend en compte que les lancers qui ne sont pas des 3^e doubles consécutifs, pour garder en mémoire les deux lancers précédents, il suffit de tripler chaque cases (sauf évidement les cases 40,41,42 échappant à la règle). Par exemple, la case 0 deviendrait :

— 0_a : on arrive en 0 par un deuxième double.

— 0_b : on arrive en 0 après un premier double.

— 0_c : on arrive en 0 sans double.

La matrice de transition serait donc de taille 120×120, et son écriture deviendrait fastidieuse. Toutefois, notre modèle reste une bonne approximation de la réalité.

Enfin, nous n'avons pas pu intégrer ici les cartes qui amendent le joueur lorsqu'elles sont tirées. En effet, le renouvellement constant de la situation immobilière et financière des joueurs ne permet pas de définir une chaîne de Markov homogène.

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce travail, on avait pour ambition de mettre en place une stratégie permettant à un joueur de gagner une partie de Monopoly par le biais des chaînes de Markov. Il a fallu dans un premier temps, parcourir la théorie sur les chaînes de Markov, où, on a pu constater qu'il est possible de déterminer le caractère à long terme d'une chaîne de Markov, plus précisément sa distribution stationnaire, ce qui s'est avéré très intéressant dans le cadre de son application au Monopoly.

À travers cette étude, nous avons pu constater la pertinence de l'application de la théorie des chaînes de Markov au Monopoly. Nous avons vu que la stratégie de n'investir que sur des propriétés à loyers élevés est risquée dans la mesure où elle ne garantit pas que notre propriété sera très souvent visitée. C'est donc pour cette raison que nous nous sommes intéressés dans un premier temps, aux propriétés les plus visitées, nous avons donc fait un classement, et avons constater qu'en général, pour des raisons que nous avons détaillées à la Section 6 du Chapitre 3 , les propriétés de couleur orange (case 16,18,19) sont en général les plus visitées du plateau.

Puis, nous nous sommes intéressés à la rentabilité de chacune des propriétés achetables du plateau. Nous avons pu constater que les propriétés oranges (case 16,18,19) sont les plus rentables du plateau. Elles sont donc non seulement les plus visitées, mais aussi les plus rentables.

Au regard de tous ces résultats, nous sommes parvenus à la conclusion que, pour mettre toutes les chances de son côté, le joueur devra investir en priorité sur les propriétés oranges (16,18,19) qui sont les plus rentables et les plus visitées, et opter pour la stratégie de posséder le plus de maisons et donc le moins d'hôtels possible, afin d'avoir le monopole sur les maisons et limiter l'investissement immobilier des autres joueurs.

Pour terminer, je tiens à adresser mes sincères remerciements à mon promoteur et professeur Monsieur Johan Segers qui de part sa disponibilité, m'a été d'une grande aide pour la réalisation de ce travail. Je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont relu ce travail, chacune de leurs remarques m'ont aidé à améliorer ce projet.

ANNEXE

TABLE 1. Tableau de probabilités des propriétés les plus visitées par ordre décroissant pour $a = 1/1000$

Probabilité	propriété	N°
0.09631	Prison	40,41,42
0.02956	AVENUE HENRI-MARTIN	24
0.02823	BOULEVARD SAINT-MICHEL	18
0.02819	GARE DE LYON	15
0.02783	PLACE PIGALLE	19
0.02694	GARE DU NORD	25
0.02685	AVENUE MOZART	16
0.02581	AVENUE MATIGNON	21
0.02541	BOULEVARD DE LA VILLETTE	11
0.02538	FAUBOURG SAINT-HONORÉ	26
0.02526	PLACE DE LA BOURSE	27
0.02526	BOULEVARD MALSHERBES	23
0.02524	AVENUE DE BRETEUIL	31
0.02498	COMPAGNIE DE DISTRIBUTION DES EAUX	28
0.02474	RUE DE LA FAYETTE	29
0.02459	AVENUE FOCH	32
0.02456	RUE DE LA PAIX	39
0.02452	BOULEVARD DE BELLEVILLE	1
0.02440	RUE DE PARADIS	14
0.02391	GARE SAINT-LAZARE	35
0.02324	COMPAGNIE DE DISTRIBUTION D'ÉLECTRICITÉ	12
0.02323	BOULEVARD DES CAPUCINES	34
0.02258	GARE MONTPARNASSE	5
0.02203	RUE DE COURCELLES	8
0.02180	RUE DE VAUGIRARD	6
0.02176	AVENUE DE NEUILLY	13
0.02162	AVENUE DE LA RÉPUBLIQUE	9
0.02083	RUE LECOURBE	3
0.02016	AVENUE DES CHAMPS-ÉLYSÉES	37

TABLE 2. Tableau de rentabilités des propriétés par ordre décroissant pour $a = 1/1000$: en plaçant 4 maisons sur chaque rue.

Propriété	Rentabilité	N°
Orange	0.037278	16,18,19
Bleu Ciel	0.031565	6,8,9
Violet	0.030950	11,13,14
Rouge	0.030444	21,23,24
Marron	0.028860	1,3
Jaune	0.028141	26,27,29
Bleu Foncé	0.027212	37,39
Gares	0.025406	5,15,25,35
Vert	0.025325	31,32,34

TABLE 3. Tableau de rentabilités des propriétés par ordre décroissant pour $a = 1/1000$: en plaçant un hotel sur chaque rue.

Propriété	Rentabilité	N°
Orange	0.055917	16,18,19
Bleu Ciel	0.047348	6,8,9
Violet	0.046425	11,13,14
Rouge	0.045666	21,23,24
Jaune	0.042212	26,27,29
Vert	0.037988	31,32,34
Marron	0.028860	1,3
Bleu Foncé	0.027212	37,39

Bibliographie

[1] Bibm@th.net, *Formule de probabilités totales* (1999), available at https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./p/probatot.html. [En ligne ; page consultée le 11 avril 2021]. ↑4

[2] B. Hayes, *First links in the Markov Chain*, the magazine of Sigma Xi, The Scientific Research Society **101** (2013), 5–305. ↑1

[3] B. Minko, *Codes python* (2022), available at https://github.com/Katakurisamaa/Cha-nes-de-Markov.git. ↑26

[4] Docteur Mops, *Les vraie valeurs du monopoly* (2015), available at https://www.trictrac.net/actus/les-vraies-valeurs-du-monopoly. [En ligne ; page consultée le 04 avril 2022]. ↑25

[5] P. Brémaud, *Initiation aux probabilités et aux chaînes de Markov*, Deuxième édition, Springer, 2000. ↑2, 19

[6] P. Billingsley, *Probability and measure*, II Series, The university of Chicago, 1995. ↑2

[7] jaicomprisMaths, *Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov ? Graphe orienté pondéré associé - Terminale* (2012), available at https://www.youtube.com/watch?v=e0ZHDK4DSEI. [Sur youtube ; chaîne consulté le 26 février 2022]. ↑6

[8] *Jeux de société monopoly* (2015), available at https://regles2jeux.fr/liste-des-cartes-chance-et-caisse-de-communaute-au-monopoly/. [En ligne ; page consultée le 04 avril 2022]. ↑24, 32