**Разработка модели движения Земли и Луны по орбите в гелиоцентрической системе координат**

Рассмотрим модель движения Земли и Луны в гелиоцентрической системе координат в общем виде как классическую задачу трёх тел (Рис.1) [1].

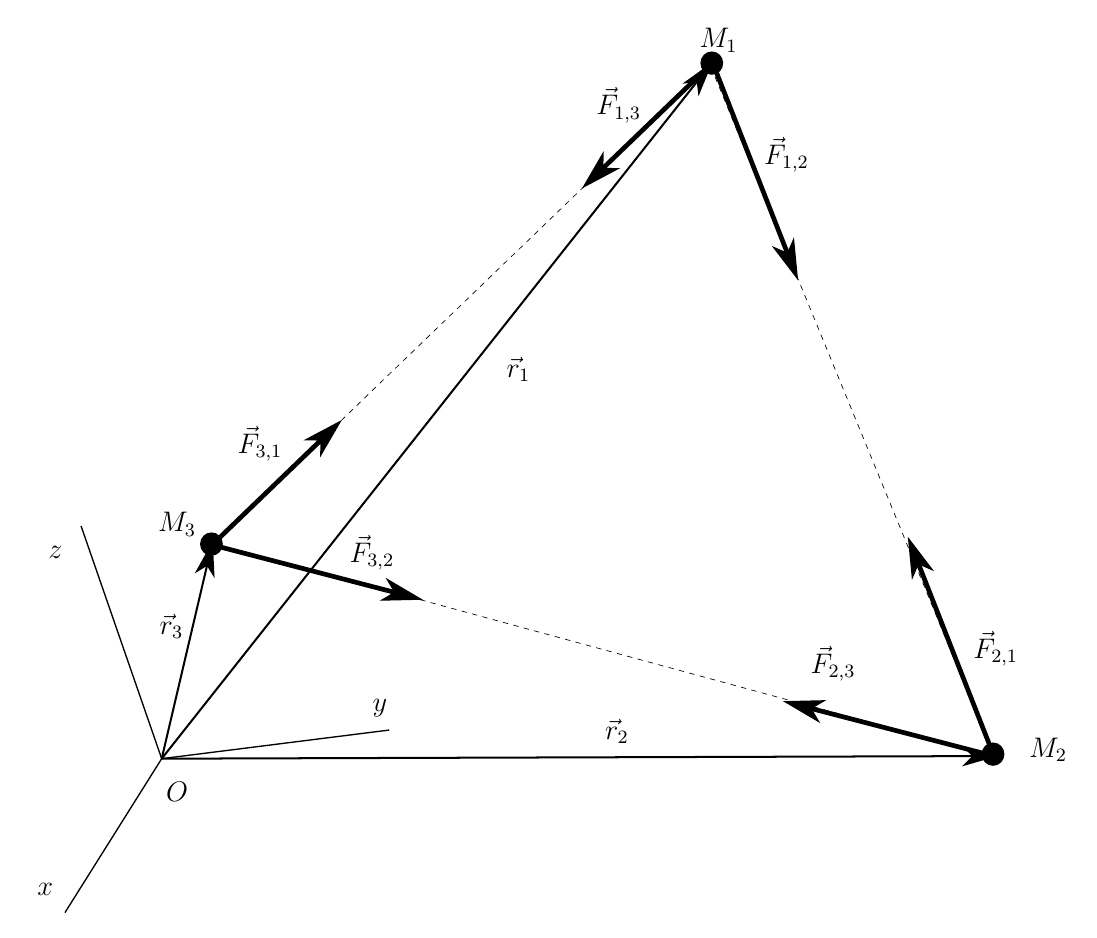


Рисунок 1 Задача трёх тел в произвольной инерциальной системе координат

Рассмотрим три тела, имеющих массы , движущиеся под действием сил взаимного гравитационного притяжения в произвольной инерциальной системе координат . Тела будем рассматривать как материальные точки, чье положение задано радиус-векторами соответственно. В соответствии с 3-м законом Ньютона на каждое тело действует сила гравитационного притяжения

Тогда уравнения движения каждой точки запишутся следующим образом:

Перепишем систему (2) с учетом (1):

Силы гравитационного взаимодействия между рассматриваемыми телами направлены вдоль следующих векторов (Рис.1):

Для удобства зададим орты . По закону всемирного тяготения сила взаимодействия двух тел массой и выражается формулой , из чего можем записать:

Перепишем систему (3) с учетом (5):

В небесной механике существует понятие гравитационный параметр притягивающего центра . С учетом этого уравнения движения (6) принимают окончательный вид:

Для удобства моделирования приведем систему уравнений (7) к безразмерному виду, как это показано в [2]. Для этого введем абстрактное тело с гравитационным параметром , пусть второе тело вращается вокруг него по эллиптической орбите с большой полуосью и периодом . Эти величины связаны соотношением:

Пусть – безразмерный радиус-вектор, *i*-й точки, ее безразмерный гравитационный параметр, безразмерное время. Сделаем замену параметров для положения точек в системе, гравитационных параметров тел и времени:

(9)

С учетом (9) пересчитаем ускорения точек в системе:

Подставим (10) в (7):

Итак, система (11) является искомой математической моделью. Теперь необходимо задаться реальными значениями параметров и определить начальные условия.

Для дальнейшего моделирования воспользуемся данными [3]. В качестве масштаба координат возьмем астрономическую единицу. Массы Земли и Луны будем нормировать к массе Солнца (). В качестве масштаба времени – период обращения Земли вокруг Солнца. В качестве начала координат выберем центр масс системы, пренебрегая влиянием прочих небесных тел:

Учитывая, что

Для скоростей:

Выполним моделирование в Matlab. Как упоминалось ранее, исходные данные и начальные условия взяты из источника [3].

Для численного интегрирования системы уравнений (11) приведем ее к форме Коши. С учетом введенных ранее обозначений:

Вектор состояний системы в виде позволяет свести (12) к одному векторному уравнению

Которое может быть проинтегрировано при помощи одного из имеющихся в Matlab решателей. В данном случае был использован решатель, реализующий метод Рунге-Кутты [4].

*Листинг 1 Исходные данные и начальные условия*

% Гравитационная постоянная

G = 6.67e-11;

% Массы тел (Луна, Земля, Солнце)

m = [7.349e22, 5.792e24, 1.989e30];

% Расчитываем гравитационные параметры тел

mu = G\*m;

% Нормируем гравитационные параметры к Солнцу

kappa = mu/mu(3);

% Астрономическая единица

a = 1.495978707e11;

% Масштаб безразмерного времени, c

T = 2 \* pi \* a \* sqrt(a / mu(3));

% Координаты NASA для Луны

xL = 5.771034756256845E-01;

yL = -8.321193799697072E-01;

zL = -4.855790760378579E-05;

xi\_10 = [xL, yL, zL]; % Начальное положение Луны, а.е.

% Координаты NASA для Земли

xE = 5.755663665315949E-01;

yE = -8.298818915224488E-01;

zE = -5.366994499016168E-05;

xi\_20 = [xE, yE, zE]; % Начальное положение Земли, а.е.

% Расчитываем начальное положение Солнца, полагая что начало координат - в центре масс всей системы

xi\_30 = - kappa(1)\* xi\_10 - kappa(2)\* xi\_20; % Начальное положение Солнца, а.е.

% Вводим константы для вычисления безразмерных скоростей

Td = 86400.0;

u = sqrt(mu(3) / a) / 2 / pi;

% Начальная скорость Луны

vxL = 1.434571674368357E-02;

vyL = 9.997686898668805E-03;

vzL = -5.149408819470315E-05;

vL0 = [vxL, vyL, vzL];

vL0 = vL0 \* a / Td; % Начальная скорость Луны, м/с

uL0 = vL0 / u; % Начальная скорость Луны, безразмерная

% Начальная скорость Земли

vxE = 1.388633512282171E-02;

vyE = 9.678934168415631E-03;

vzE = 3.429889230737491E-07;

vE0 = [vxE, vyE, vzE];

vE0 = vE0 \* a / Td; % Начальная скорость Земли, м/с

uE0 = vE0 / u; % Начальная скорость Земли, безразмерная

% Начальная скорость Солнца

vS0 = - kappa(1) \* vL0 - kappa(2) \* vE0; % Начальная скорость Солнца, м/с

uS0 = - kappa(1) \* uL0 - kappa(2) \* uE0; % Начальная скорость Солнца, безразмерная

*Листинг 2 Обобщенные ускорения Луны, Земли и Солнца (11)*

function a = calcAccel(xi)

k = 4 \* pi ^ 2;

xi12 = xi(2) - xi(1);

xi13 = xi(3) - xi(1);

xi23 = xi(3) - xi(2);

s12 = sqrt(xi12 \* xi12);

s13 = sqrt(xi13 \* xi13);

s23 = sqrt((xi23 \* xi23));

a1 = (k \* kappa(2) / s12 ^ 3) \* xi12 + (k \* kappa(3) / s13 ^ 3) \* xi13;

a2 = -(k \* kappa(1) / s12 ^ 3) \* xi12 + (k \* kappa(3) / s23 ^ 3) \* xi23;

a3 = -(k \* kappa(1) / s13 ^ 3) \* xi13 - (k \* kappa(2) / s23 ^ 3) \* xi23;

a = [a1 a2 a3];

end

*Листинг3 Система уравнений в нормальной форме Коши*

function dydt = f(t,y)

n = 9;

dydt = zeros((2 \* n),1);

xi1 = y(1:3);

xi2 = y(4:6);

xi3 = y(7:9);

temp = calcAccel([xi1 xi2 xi3]);

dydt(1:n)=y(10:18);

dydt(10:end)=temp;

end

*Листинг4 Интегрирование системы уравнений (12)*

AstroData;

%% Начальные условия задачи Коши

y0 = [xi\_10 xi\_20 xi\_30...

uL0 uE0 uS0];

y0 = y0';

%% Интегрируем уравнения движения

% Начальное время

t\_begin = 0;

% Конечное время

t\_end = 1 ;% \* Td / T;

% Интересующее нас число точек траектории

N\_plots = 1000;

% Шаг времени между точкими

step = (t\_end - t\_begin) / N\_plots;

tspan = t\_begin:step:t\_end;

% [t,y] = ode45(@f,[t\_begin t\_end],y0);

[t,y] = ode23(@f,tspan,y0);

В результате работы программы вычисляются траектория Земли и Луны в гелиоцентрической системе координат (строго говоря, началом координат выбран не центр Солнца, а центр масс системы Луна-Земля-Солнце, но в силу соотношения масс данным отклонением можно пренебречь).

На рис.2 приведена траектория движения Земли и Луны вокруг Солнца. Масштаб приведен к астрономическим единицам.

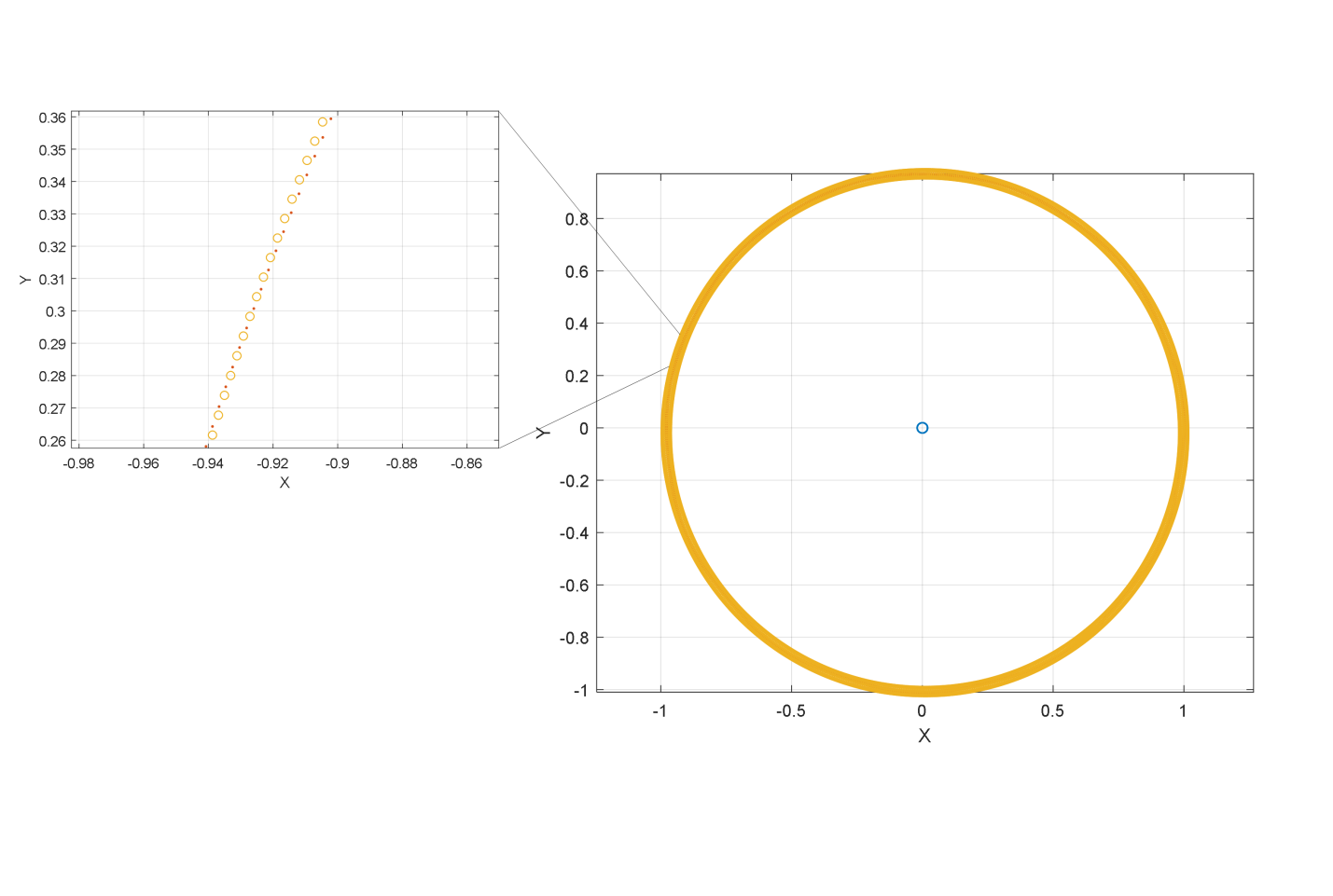


Рисунок 2 Траектории движения Земли и Луны в Гелиоцентрической системе координат, рассчитанные моделью

На рис.3 можно видеть смещение траектории движения Луны вокруг Земли под действием гравитации Солнца. Масштаб приведен в астрономических единицах.



Рисунок 3 Траектория движения Луны вокруг Земли

Выводы

Разработанная модель движения Земли и Луны по орбитам в гелиоцентрической системе координат. Математическая модель реализована как программа в Matlab, которая осуществляет интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающей траекторий движения Земли, Луны и Солнца под действием взаимного гравитационного притяжения в рамках задачи трех тел.

Библиографический список

1. Маршал К. Задача трёх тел. — Ижевск: РХД, 2004. — 640 с.
2. Электронный ресурс: https://habr.com/ru/post/420133/ (дата обращения 20.04.2020)
3. Электронный ресурс: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top> (дата обращения 20.04.2020)
4. Bogacki, P. and L. F. Shampine, “A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas,” *Appl. Math. Letters*, Vol. 2, 1989, pp. 321–325.