

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Katarina Černe

Permutacije in konvergenca številskih vrst

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, 2016

KAZALO

1. Uvod	3
1.1. Permutacije z lastnostjo λ	3
2. Primer konstrukcije λ -permutacije	4
3. Lastnosti λ -permutacij	5
3.1. Ohranjanje konvergence in vsote	5
3.2. Množici \mathcal{O} in \mathcal{N}	9
4. Množica vseh λ -permutacij	10
4.1. Moč množice λ permutacij	10
4.2. Omejenost množice λ permutacij	11
5. Pogojno divergentne vrste in λ -permutacije	11
6. Še dva primera...	15
7. Zaključek	17
Literatura	17

1. UVOD

Številna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neskončna vsota členov zaporedja realnih števil $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. *Zaporedje delnih vsot* številne vrste je definirano kot zaporedje $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s členi $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$. Pravimo, da številna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira*, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vsota te vrste je enaka limiti zaporedja delnih vsot. Konvergentne vrste ločimo na *absolutno konvergentne* in *pogojno konvergentne*. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira absolutno*, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pogojno pa konvergira, če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pa divergira, pa rečemo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno konvergentna*. V zvezi s konvergenco vrst je potrebno omeniti tudi dva pomembna izreka.

Izrek 1.1. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna. Potem za vsako permutacijo π konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ in velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}.$$

Izrek 1.2. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna vrsta. Potem za vsako število $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ obstaja taka permutacija π , da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A.$$

Vidimo torej, da lahko v absolutno konvergentnih vrstah poljubno premešamo člene, ne da bi kakorkoli vplivali na vsoto ali konvergenco vrste, medtem ko za pogojno konvergentne vrste obstajajo permutacije, ki spremenijo vrstni red členov tako, da lahko dobljena vrsta konvergira h kateremukoli realnemu številu, ali pa celo divergira. Pri tem se pojavi vprašanje, kakšne so te permutacije. Se jih da kako klasificirati? Imajo kakšne skupne lastnosti? V nadaljevanju se bomo ukvarjali predvsem s permutacijami na členih pogojno konvergentnih vrst, ki ohranjajo konvergenco. Primer takih permutacij so t. i. λ -permutacije.

1.1. Permutacije z lastnostjo λ .

Definicija 1.3. Permutacijo naravnih števil σ imenujemo λ -permutacija oz. *permutacija z lastnostjo λ* , če velja:

- (1) Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.
- (2) Obstaja vsaj ena divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$ konvergira.

Opomba 1.4. V nadaljevanju bomo divergentne vrste, za katere obstaja kakršnakoli permutacija, ki vrstni red elementov spremeni tako, da novonastala vrsta konvergira, imenovali kar *pogojno divergentne vrste*.

Naravno se ob definiciji λ -permutacij pojavi kar nekaj vprašanj. Najprej se lahko vprašamo, kako težko je skonstruirati tako permutacijo, oziroma ali kakšna taka permutacija sploh obstaja. Nadalje, koliko takih permutacij obstaja. Kaj še lahko povemo o permutacijah z lastnostjo λ in množici vseh λ -permutacij? Eno izmed pomembnejših vprašanj, ki se porajajo ob raziskovanju lastnosti množice λ -permutacij, je vprašanje njene omejenosti. Če je ta množica navzgor omejena, namreč obstaja

optimalna λ -permutacija, ki ustvari največ konvergentnih vrst. Če je to res in če je ta optimalna permutacija različna od identitete, bi bilo bolje, da bi, kar se tiče seštevanja vrst, namesto običajnega uporabljali drugačno zaporedje naravnih števil, torej zaporedje, ki ga narekuje dobljena optimalna permutacija? Nazadnje pa se lahko vprašamo še, ali nam λ permutacije lahko pomagajo pri vsaki pogojno divergentni vrsti oziroma ali za vsako pogojno divergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obstaja λ -permutacija σ , da $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergira. To so vprašanja, na katera bo odgovorjeno v tej diplomski nalogi.

2. PRIMER KONSTRUKCIJE λ -PERMUTACIJE

Oglejmo si primer konstrukcije permutacije z lastnostjo λ . S tem bomo tudi pokazali, da množica λ -permutacij ni prazna. Naravna števila najprej razvrstimo v bloke naraščajoče velikosti na naslednji način:

$$1 \quad 2 \ 3 \ 4 \quad 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \quad 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \quad 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ \dots \quad (1)$$

Bloki imajo liho število elementov. Moč vsakega bloka je za 2 večja od moči predhodnega bloka. Sedaj pa vsak blok preoblikujemo tako, da na začetek postavimo število na sredini bloka. Na drugem mestu bo število, ki je za 1 večje od srednjega števila, sledi število, ki je od srednjega za 1 manjše, potlej število za 2 večje od srednjega, in tako dalje dokler ne preuredimo vseh števil v bloku. Dobimo naslednje zaporedje:

$$1 \quad 3 \ 4 \ 2 \quad 7 \ 8 \ 6 \ 9 \ 5 \quad 13 \ 14 \ 12 \ 15 \ 11 \ 16 \ 10 \quad 21 \ 22 \ 20 \ 23 \ 19 \ 24 \ 18 \ 25 \ 17 \ \dots \quad (2)$$

Permutacijo, ki na zaporedje naravnih števil deluje na zgoraj opisani način, označimo s σ .

Permutacijo σ uporabimo na členih številске vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Njene delne vsote bomo označili s S_n . Opazimo lahko, da je vsaka delna vsota \tilde{S}_n permutirane vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ linearna kombinacija največ treh delnih vsot prvotne vrste. Natančneje, velja, da je

$$\tilde{S}_N = S_{q^2} + (S_B - S_A). \quad (3)$$

Tu je q^2 največji popolni kvadrat, manjši od N , in $A \geq q^2$, $B \geq q^2$ ter $A \leq B$. Vsak blok v zaporedju (1) se namreč konča s popolnim kvadratom, tako da so indeksi členov v delni vsoti $S_{q^2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{q^2}$ vsa števila iz blokov od prvega do vključno tistega, ki se konča s q^2 . Ker se permutiranje členov izvaja samo znotraj blokov, bo imela delna vsota \tilde{S}_{q^2} enake člene kot S_{q^2} , le v drugačnem vrstnem redu. Delna vsota S_4 na primer izgleda tako:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

medtem ko je \tilde{S}_4 taka:

$$\tilde{S}_4 = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)} + a_{\sigma(4)} = a_1 + a_3 + a_4 + a_2.$$

Vidimo, da sta obe delni vsoti enaki, saj vsebujeta vse člene z indeksi iz prvih dveh blokov. Za delne vsote permutirane vrste torej velja:

$$\tilde{S}_n = \tilde{S}_{q^2} + Q = S_{q^2} + Q,$$

kjer je q^2 največji popolni kvadrat, manjši od n , Q pa vsebuje člene z indeksi, večjimi od q^2 . Po konstrukciji permutacije σ velja, da če Q vsebuje člena a_C in a_B , kjer je

$C < B$, potem bo vseboval tudi vse člene a_i , kjer je $C < i < B$. Torej lahko zapišemo $Q = S_B - S_{C-1}$, od koder sledi enačba (3).

Po Cauchyjevem kriteriju za konvergenco zaporedij vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natančno tedaj, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak par indeksov $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ velja

$$|S_m - S_n| < \epsilon$$

. Ker je vsaka delna vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ končna linearna kombinacija delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, bo Cauchyjev kriterij, če bo veljal za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, veljal tudi za $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. S tem je zadoščeno prvi točki iz definicije λ -permutacije.

Da pokažemo, da je σ res λ -permutacija, moramo poiskati še pogojno divergentno vrsto, iz katere bo permutacija σ ustvarila pogojno konvergentno vrsto. Primer take divergente vrste je:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \\ + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

Ko na zgornji vrsti uporabimo permutacijo σ , dobimo:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \pm \dots$$

Dobljena vrsta konvergira po Leibnizevem testu za alternirajoče vrste, ki pravi, da alternirajoča vrsta konvergira, kadar ima zaporedje absolutnih vrednosti njenih členov limito 0.

Našli smo pogojno divergentno vrsto, ki jo σ spremeni v konvergentno. Permutacija σ torej zadošča obema točkama v definiciji λ -permutacije. S tem smo dokazali, da obstaja vsaj ena λ -permutacija. Je to edina λ -permutacija ali obstaja še kakšna? Da odgovorimo na to vprašanje, si moramo najprej ogledati nekaj lastnosti λ -permutacij.

3. LASTNOSTI λ -PERMUTACIJ

3.1. Ohranjanje konvergence in vsote.

Definicija 3.1. Pravimo, da permutacija *ohranja konvergenco*, kadar iz konvergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, in *ohranja vsoto*, kadar velja, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Za lažje obravnavanje lastnosti λ -permutacij vpeljimo notacijo

$$[c, d]_{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{Z}^+; c \leq x \leq d\},$$

kjer sta c in d naravni števili, za kateri velja $c \leq d$.

Z notacijo $[2, 5]$ na primer označimo množico $\{2, 3, 4, 5\}$.

Naj bo sedaj σ neka permutacija naravnih števil in n naravno število. Zapišemo lahko:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = [c_1^n, d_1^n]_{\mathbb{Z}} \cup [c_2^n, d_2^n]_{\mathbb{Z}} \cup \dots \cup [c_{b_n}^n, d_{b_n}^n]_{\mathbb{Z}}, \quad (4)$$

pri čemer je $c_i^n \leq d_i^n$ in $c_{i+1}^n \geq d_i^n + 2$. Z b_n smo označili število blokov oblike $[c_i^n, d_i^n]_{\mathbb{Z}}$, ki sestavljajo zgornjo unijo. Za permutacijo σ lahko definiramo zaporedje

$\{b_n\}_{n=1}^\infty$, ki ga imenujemo *zaporedje števil blokov*. V nadaljevanju bomo rabili še notacijo

$$M_n = d_{b_n}^n + 1 = \max(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}) + 1,$$

kjer je $d_{b_n}^n$ število, s katerim se konča zadnji blok v notaciji 4.

Primer 3.2. Vzemimo permutacijo σ , ki smo jo skonstruirali v poglavju 2, torej

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 8 & \dots \end{pmatrix}.$$

Potem lahko zapišemo

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(8)\} = \{1, 3, 4, 2, 7, 8\} = [1, 4]_{\mathbb{Z}} \cup [7, 8]_{\mathbb{Z}}.$$

V tem primeru je število blokov $b_8 = 2$, saj lahko $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(8)\}$ zapišemo kot unijo najmanj dveh blokov oblike $[c_i^n, d_i^n]_{\mathbb{Z}}$. Oglejmo si še zaporedje števil blokov za permutacijo σ . Očitno je $b_1 = 1$. Ker je

$$\{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{1, 3\} = [1, 1]_{\mathbb{Z}} \cup [3, 3]_{\mathbb{Z}},$$

je $b_2 = 2$. Za $n = 3$ velja

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\} = \{1, 3, 4\} = [1, 1]_{\mathbb{Z}} \cup [3, 4]_{\mathbb{Z}},$$

torej je $b_3 = 2$, in tako dalje. Zaporedje števil blokov za permutacijo σ je torej videti tako:

$$1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ \dots$$

Zgoraj vpeljane notacije bodo zelo uporabne pri dokazu sledeče trditve, ki govori o povezavi med ohranjanjem konvergence in vsote.

Trditev 3.3. *Naj bo σ permutacija naravnih števil. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- (1) *permutacija σ ohranja konvergenco*
- (2) *zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ je omejeno*
- (3) *permutacija σ ohranja vsoto*

Dokaz. Da iz (3) sledi (1) je očitno.

Dokažimo sedaj, da iz (1) sledi (2). Naj bo σ neka permutacija naravnih števil, ki ohranja konvergenco. Dokaza se lotimo s protislovjem. Predpostavimo, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ permutacije σ neomejeno. Poiskali bomo tako konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^\infty a_n$, da bo $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)}$ divergentna, kar je v protislovju s predpostavko, da σ ohranja konvergenco.

Izberimo tak $n_1 \in \mathbb{N}$, da je $c_1^{n_1} = 1$, kjer je $c_1^{n_1}$ število, s katerim se začne prvi blok v izrazu $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_1)\} = [c_1^{n_1}, d_1^{n_1}]_{\mathbb{Z}} \cup [c_2^{n_1}, d_2^{n_1}]_{\mathbb{Z}} \cup \dots \cup [c_{b_n}^{n_1}, d_{b_n}^{n_1}]_{\mathbb{Z}}$. Drugače rečeno, naj bo $1 \in \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_1)\}$. Za tak n_1 za vsak $k \in \mathbb{N}$, za katerega velja $1 \leq k \leq M_{n_1}$ definiramo člen a_k zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$ na naslednji način:

$$a_k = \begin{cases} 1 & ; \quad k = d_i^{n_1} \text{ za nek } i, 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ -1 & ; \quad k = d_i^{n_1} + 1 \text{ za nek } i, 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Če imamo na primer permutacijo σ kot v poglavju 2 in $n_1 = 6$, potem je

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(6)\} = \{1, 3, 4, 2, 7, 8\} = [1, 4]_{\mathbb{Z}} \cup [7, 8]_{\mathbb{Z}},$$

za zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^9$ pa velja, da je

$$a_4 = 1, \quad a_5 = -1, \quad a_8 = 1 \text{ in } a_9 = -1,$$

vsi ostali členi pa so enaki nič.

Oglejmo si nekaj značilnosti tega zaporedja. Najprej opazimo, da velja enakost

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_{\sigma(k)} = b_{n_1} \geq 1$$

. Členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, ki so enaki -1 namreč zagotovo niso vključeni v to vsoto. Členi, enaki $a_k = -1$, so namreč tisti, za katere je $k = d_i^{n_1} + 1$, $d_i^{n_1} + 1$ pa za noben i ni element množice $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_1)\}$, saj mora biti med $d_i^{n_1}$ in $c_{i+1}^{n_1}$ vsaj eno število, ki ni v množici $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_1)\}$. V nasprotnem primeru bi namesto $[c_i^{n_1}, d_i^{n_1}] \cup [c_{i+1}^{n_1}, d_{i+1}^{n_1}]$ v izrazu 4 pisali kar $[c_i^{n_1}, d_{i+1}^{n_1}]$.

Členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, ki so enaki $a_k = 1$, so zagotovo vsi vključeni v zgornjo vsoto, saj zanje velja, da je $k = d_i^{n_1}$ za $1 \leq i \leq b_{n_1}$, $d_i^{n_1}$ pa je za vsak tak i element množice $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_1)\}$. Ta množica torej vsebuje ravno b_{n_1} elementov oblike $d_i^{n_1}$, torej bo v vsoti $\sum_{k=1}^{n_1} a_{\sigma(k)}$ ravno b_{n_1} členov, ki bodo enaki 1, vsi ostali pa bodo ničelni. Od tod torej sledi $\sum_{k=1}^{n_1} a_{\sigma(k)} = b_{n_1}$, da je $b_{n_1} \geq 1$, pa je očitno.

Poleg tega vidimo še, da je

$$\sum_{k=1}^{M_{n_1}} a_k = 0.$$

Členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, ki so enaki 1 in -1 namreč vselej nastopajo v parih. Če je $a_i = 1$, potem je $a_{i+1} = -1$. Zadnji člen vsote je $a_{M_{n_1}} = -1$, saj je $M_{n_1} = d_{b_{n_1}}^{n_1} + 1$. V vsoti $\sum_{k=1}^{M_{n_1}} a_k = 0$ je tako enako število členov, enakih 1 in členov, enakih -1 , ki se med sabo odštejejo, vsi ostali členi v vsoti pa so ničelni.

Na podoben način pokažemo tudi, da je

$$\sum_{k=1}^n a_k = 0 \text{ ali } 1,$$

kjer za n velja $1 \geq n \geq M_{n_1}$. Za tako vsoto namreč obstajajo tri možnosti: ali je zadnji člen enak 0 ali 1 ali pa -1 . Če je enak 0 ali -1 , bo število členov, enakih 1, enako številu členov, enakih -1 in bo vsota enaka nič. Če pa je zadnji člen enak 1, bo število členov, enakih 1, za eno večje od števila členov, enakih -1 , (-1 namreč vedno sledi takoj za 1), torej bo vsota enaka 1.

Do sedaj smo skonstruirali zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{M_{n_1}}$, radi pa bi imeli zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Preostanek zaporedja konstruiramo rekurzivno: za vsak $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$ moramo izbrati n_j , da je $M_{n_j} > M_{n_{j-1}}$ in za vsak k , ki ustreza $M_{n_{j-1}} < k \leq M_{n_j}$ moramo definirati a_k tako, da bo veljalo $\sum_{k=1}^{M_{n_j}} a_k = 0$.

Recimo, da je $j > 1$ in da smo v prejšnjem koraku že izbrali tak n_{j-1} in take a_k za $1 \leq k \leq M_{n_j}$, da je veljalo $\sum_{k=1}^{M_{n_{j-1}}} a_k = 0$. Ker smo predpisali, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ permutacije σ neomejeno, lahko izberemo tak n_j , da je $d_1^{n_j} > M_{n_{j-1}}$ in $b_{n_j} \geq j^2$. Definirajmo sedaj a_k za $M_{n_{j-1}} < k \leq M_{n_j}$:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j} & ; \quad k = d_i^{n_j} \text{ za nek } i, 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ -\frac{1}{j} & ; \quad k = d_i^{n_j} + 1 \text{ za nek } i, 1 \leq i \leq b_{n_1} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Podobno kot pri $j = 1$ tudi tu vidimo, da je

$$\sum_{k=1}^{n_j} a_{\sigma(k)} = \frac{b_{n_j}}{j} \geq j, \quad \sum_{k=1}^{M_{n_1}} a_k = 0$$

in

$$\sum_{k=1}^n a_k = 0 \text{ ali } \frac{1}{j} \text{ za } M_{n_{j-1}} < n < M_{n_j}.$$

Če sedaj pošljemo j proti neskončno, dobimo, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$. Ta vrsta torej konvergira. Po drugi strani pa $\sum_{k=1}^{M_{n_1}} a_{\sigma(k)}$ divergira, saj je $\sum_{k=1}^{n_j} a_{\sigma(k)} \geq j$ za vsak j . Torej σ ne ohranja konvergence, kar je v nasprotju z začetno predpostavko. Sledi, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno.

Zadnja implikacija, ki jo moramo dokazati, je, da iz (2) sledi (3). Imejmo permutacijo naravnih števil σ in naj bo $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ njeno zaporedje števil blokov, ki je omejeno. Naj bo $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje, da velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L \in \mathbb{R}.$$

Pokazati hočemo, da pri takih pogojih σ ohranja vsoto, torej, da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = L.$$

Označimo s

$$S(n) = \sum_{k=1}^n a_k$$

delne vsote vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Iz definicije vsote vrste sledi, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = L.$$

Oglejmo si sedaj delovanje permutacije σ . Naj bo n tako velik, da bo v zapisu $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = [c_1^n, d_1^n]_{\mathbb{Z}} \cup [c_2^n, d_2^n]_{\mathbb{Z}} \cup \dots \cup [c_{b_n}^n, d_{b_n}^n]_{\mathbb{Z}}$ veljalo, da je c_1^n enak 1. Potem je

$$\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k + \sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k = S(d_1^n) + \sum_{i=2}^{b_n} (S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)). \quad (5)$$

Ko pošljemo n proti neskončno, gre d_1^n proti neskončno. Torej gre $S(d_1^n)$ proti L . Oglejmo si še limito izraza $(S(d_i^n) - S(c_i^n - 1))$. Ko gre d_1^n proti neskončno, se blok $[c_1^n, d_1^n]_{\mathbb{Z}}$ večja in zavzema vedno več števil, posledično pa se ostali bloki manjšajo. Torej sta števili d_i^n in $c_i^n - 1$, ko gre n proti neskončno, vedno bližje eno drugemu. Zato gre $(S(d_i^n) - S(c_i^n - 1))$ proti 0. Dobimo torej

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = L.$$

□

Enakost 5, ki smo jo uporabili v zgornjem dokazu, ima naslednjo posledico:

Posledica 3.4. Naj bo σ permutacija, ki ohranja konvergenco in $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta. Potem obstaja tako število $B \in \mathbb{N}$, da je vsaka delna vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ linearna kombinacija največ B delnih vsot prvotne vrste.

Dokaz. Naj bo σ permutacija, ki ohranja konvergenco. Potem je njeno zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno, torej obstaja njegova limita $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = C \in \mathbb{R}$. Naj bo $\tilde{S}(n) = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$ neka delna vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. Po enakosti 5 velja:

$$\tilde{S}(n) = S(d_1^n) + \sum_{i=2}^{b_n} (S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)) \leq S(d_1^n) + C(S(d_i^n) - S(c_i^n - 1)).$$

Vidimo, da je $\tilde{S}(n)$ linearna kombinacija $B = 2C + 1$ delnih vsot $S(i)$ prvotne vrste. \square

3.2. Množici \mathcal{O} in \mathcal{N} . Naj bo \mathcal{O} množica vseh permutacij naravnih števil, ki ohranjajo konvergenco, vendar niso λ -permutacije, z \mathcal{N} pa označimo množico vseh λ -permutacij. Oglejmo si nekaj njunih lastnosti.

Trditev 3.5. Velja:

- (1) če je permutacija σ element množice \mathcal{N} , potem σ^{-1} ni element \mathcal{O}
- (2) če je permutacija σ element množice \mathcal{N} in β element množice \mathcal{O} , potem je tudi $\sigma \circ \beta$ element \mathcal{N}
- (3) če je permutacija σ element \mathcal{N} , potem je tudi $\sigma \circ \sigma$ element \mathcal{N}
- (4) množica \mathcal{N} je polgrupa za kompozitum permutacij, ni pa grupa
- (5) permutacija σ je element množice \mathcal{O} natanko tedaj ko tako σ kot tudi σ^{-1} ohranjata konvergenco.

Dokaz. (1) Naj bo σ permutacija iz množice \mathcal{N} . Ker σ ohranja konvergenco, obstaja neka pogojno divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(a_n)$ konvergentna. Delujmo sedaj na vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(a_n)$ s permutacijo σ^{-1} . Dobimo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^{-1}(\sigma(a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ki je divergentna. Permutacija σ^{-1} torej ne ohranja konvergenca in zato ni element množice \mathcal{O} .

(2) Naj bo $\sigma \in \mathcal{N}$ in $\beta \in \mathcal{O}$. Tako σ kot tudi β ohranjata konvergenco, od koder sledi, da tudi njun kompozitum $\sigma \circ \beta$ ohranja konvergenco. Ker je σ element množice \mathcal{N} , obstaja neka pogojno divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(a_n)$ konvergira. Ker permutacija β ohranja konvergenco, je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \beta(\sigma(a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta \circ \sigma)(a_n)$ konvergentna. Torej obstaja pogojno divergentna vrsta, ki jo permutacija $\beta \circ \sigma$ spremeni v konvergentno. Sledi, da je $\beta \circ \sigma \in \mathcal{N}$.

(3) Imejmo permutacijo $\sigma \in \mathcal{N}$. Ker σ ohranja konvergenco, jo ohranja tudi $\sigma \circ \sigma$. Ker je $\sigma \in \mathcal{N}$, pa obstaja tudi pogojno divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(a_n)$ konvergira. To isto vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tudi $\sigma \circ \sigma$ preslika v konvergentno, saj σ ohranja konvergenco. Sledi, da je $\sigma \circ \sigma \in \mathcal{N}$.

(4) Najprej dokažimo, da je množica \mathcal{N} polgrupa za kompozitum. Dokazati moramo zaprtost operacije in asociativnost. Asociativnost kompozituma je očitna, zaprtost operacije pa sledi iz točke 3 v trditvi 3.5. Pokažimo še, da \mathcal{N} ni grupa za kompozitum. Opazimo, da \mathcal{N} ne vsebuje enote, torej identitete. Identiteta namreč nobene pogojno divergentne vrste ne preslika v pogojno konvergentno. Poleg tega po točki 1 v trditvi 3.5 množica \mathcal{N} ne vsebuje inverza nobenega svojega elementa, saj za elemente množice \mathcal{N} velja, da njihovi inverzi ne ohranjajo konvergenca.

□

Posledica prejšnje trditve nam pravzaprav podaja alternativno definicijo λ -permutacij.

Posledica 3.6. *Permutacija naravnih števil σ je λ -permutacija natanko tedaj ko ohranja konvergenco, njen inverz pa ne.*

4. MNOŽICA VSEH λ -PERMUTACIJ

4.1. Moč množice λ permutacij. Pokazali smo že, da množica λ -permutacij ni prazna. O njeni moči govori naslednji izrek.

Izrek 4.1. $\text{card}(\mathcal{N}) = \text{card}(\mathcal{O}) = 2^{\aleph_0}$

Dokaz. Naj bo množica X poljubna podmnožica množice naravnih števil \mathbb{N} . Naj bo τ_X permutacija, ki transponira števili $2m - 1$ in $2m$, če je $m \in X$, ostala števila pa preslika sama vase.

Oglejmo si primera dveh takih permutaciji τ_X in τ_Y . Naj bo $X = \{m\}$ in $Y = \{m, m + 1\}$. Permutacija τ_X je videti tako:

$$\tau_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m-1 & 2m & 2m+1 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m & 2m-1 & 2m+1 & \cdots \end{pmatrix}$$

Permutacija τ_X je torej transpozicija $\tau_X = (2m - 1 \ 2m)$. Potem velja naslednje:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\} = [1, k]_{\mathbb{Z}}$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$, različen od $2m - 1$ za $m \in X$. Za $k = 2m - 1$ pa velja:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(2m - 1)\} = [1, 2m - 2]_{\mathbb{Z}} \cup [2m, 2m - 2]_{\mathbb{Z}}$$

Permutacija τ_Y pa izgleda tako:

$$\tau_Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m-1 & 2m & 2m+1 & 2m+2 & 2m+3 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2m-2 & 2m & 2m-1 & 2m+2 & 2m+1 & 2m+3 & \cdots \end{pmatrix},$$

torej je τ_Y produkt transpozicij $\tau_Y = (2m - 1 \ 2m) (2m + 1 \ 2m + 2)$. V tem primeru pa je

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\} = [1, k]_{\mathbb{Z}}$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$, različen od $2m + 1$ in od $2m - 1$ za $m \in Y$. Za $k = 2m + 1$ oziroma $k = 2m - 1$ pa velja:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(2m + 1)\} = [1, 2m]_{\mathbb{Z}} \cup [2m + 2, 2m + 2]_{\mathbb{Z}}$$

in

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(2m + 1)\} = [1, 2m]_{\mathbb{Z}} \cup [2m + 2, 2m + 2]_{\mathbb{Z}}$$

Iz teh dveh primerov je razvidno, da je tako definirana permutacija τ_X vedno enaka produktu transpozicij oblike $(2m - 1 \ 2m)$ za $m \in X$ in da za njeno zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ zato velja:

$$b_n = \begin{cases} 2 & ; \quad n = 2m - 1 \text{ za nek } m \in X \\ 1 & ; \quad \text{sicer.} \end{cases}$$

Njeno zaporedje števil blokov je torej omejeno, od koder po trditvi 3.3 sledi, da permutacija τ_X na številskih vrstah ohranja konvergenco in vsoto. Torej je $\tau_X \in \mathcal{O}$.

Za različne množice $X \subseteq \mathbb{N}$ dobimo različne permutacije τ_X . Ker je podmnožica množice naravnih števil ravno 2^{\aleph_0} , imamo tudi 2^{\aleph_0} permutacij oblike τ_X . Sledi, da je

$\text{card}(\mathcal{O}) \geq 2^{\aleph_0}$. Po drugi strani pa vemo, da ima množica vseh permutacij naravnih števil moč 2^{\aleph_0} , torej lahko velja le $\text{card}(\mathcal{O}) \leq 2^{\aleph_0}$. Sledi, da je $\text{card}(\mathcal{O}) = 2^{\aleph_0}$.

Oglejmo si še, kako je z močjo množice λ -permutacij oziroma množice \mathcal{N} . Iz trditve 3.5 je razvidno, da je kompozicija permutacije iz množice \mathcal{O} z λ -permutacijo spet λ -permutacija. Naj bo σ neka λ -permutacija (v poglavju 2 smo pokazali, da obstaja vsaj ena λ -permutacija) in naj bo τ_X prej definirana permutacija, ki je, kot smo pokazali, element množice \mathcal{O} . Torej je kompozitum obeh permutacij $\tau_X \circ \sigma$ spet λ -permutacija. Enako kot pri računanju moči množice \mathcal{O} , tudi tu opazimo, da mora biti moč množice λ -permutacij vsaj 2^{\aleph_0} , saj je toliko vseh množic $X \subseteq \mathbb{N}$, hkrati pa ne more biti večja od moči množice vseh permutacij naravnih števil. Tako da je tudi $\text{card}(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$. \square

4.2. Omejenost množice λ permutacij. Ali ima množica vseh λ -permutacij zgornjo mejo, tj. ali obstaja permutacija, ki ustvari največ konvergentnih vrst?

Da bomo lahko odgovorili na to vprašanje, najprej definirajmo relacijo delne urejenosti na množici \mathbb{N} . Naj bosta σ_1 in σ_2 λ -permutaciji. Rečemo, da je $\sigma_1 < \sigma_2$, če za vsako vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, za katero $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_2(n)}$ konvergira, konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_1(n)}$.

Pokazali smo že (trditev 3.5), da če je σ λ -permutacija, potem je tudi $\sigma \circ \sigma$ λ -permutacija. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergira, torej konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma \circ \sigma(n)}$. Velja torej $\sigma < \sigma \circ \sigma$, od tod pa induktivno sledi: $\sigma < \sigma \circ \sigma < \sigma \circ \sigma \circ \sigma < \dots$. Za vsako λ -permutacijo lahko najdemo novo λ -permutacijo, ki bo »večja« od nje. Torej množica vseh λ -permutacij nima zgornje meje.

5. POGOJNO DIVERGENTNE VRSTE IN λ -PERMUTACIJE

V tem razdelku bomo poskušali odgovoriti še na vprašanje, ali za vsako pogojno divergentno vrsto obstaja λ -permutacija, taka, da vrsta s spremenjenim vrstnim redom členov konvergira. V ta namen za vsako pogojno konvergento oziroma pogojno divergentno vrsto definirajmo množico

$$S = \left\{ L \in \mathbb{R} : \text{obstaja } \lambda\text{-permutacija } \sigma, \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L \right\}.$$

Na vprašanje bomo odgovorili s pomočjo protiprimera, torej primera pogojno divergentne številske vrste, za katero je $S = \emptyset$.

Oglejmo si naslednjo številsko vrsto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{33} - \frac{1}{2} + \dots \quad (6)$$

Zaporedje a_n , ki ga seštevamo, je zgrajeno iz med sabo prepletenih zaporedij $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Začne se s prvimi nekaj členi zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Teh mora biti toliko, da je njihova vsota večja ali enaka 2. Sledi prvi element zaporedja $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, nato pa naslednjih nekaj členov zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, spet toliko, da njihova vsota doseže ali preseže 2, potem pa drugi element zaporedja $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ in tako dalje. Vrsta je pogojno divergentna. Da je divergentna vidimo, če si ogledamo njeno zaporedje delnih vsot. Da je pogojno divergentna, pa sledi iz dejstva, da obstaja pogojno konvergentna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right),$$

sestavljena iz popolnoma enakih členov kot vrsta (6). Ta konvergira po testu za alternirajoče vrste. Torej mora obstajati nekakšna permutacija, ki preuredi člene vrste (6), da dobimo pogojno konvergentno vrsto. Trdimo, da tega ni mogoče storiti z nobeno λ -permutacijo, torej da za je to vrsto $S = \emptyset$.

Zakaj je temu tako, bomo pokazali s protislovjem. Naj bo σ neka poljubna λ -permutacija, s katero delujemo na vrsto (6), in naj bo zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno z B . Če delne vsote vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ zapišemo kot v enakosti (5), dobimo:

$$\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k + \sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k \geq \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k - (b_n - 1) \geq \sum_{k=1}^{d_1^n} a_k - (B - 1).$$

Očitno je namreč, da vsota katerihkoli zaporednih členov zgoraj definirane zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nikoli ni manjša od -1 . Torej velja, da je

$$\sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k \geq -1.$$

Sledi:

$$\sum_{i=2}^{b_n} \sum_{k=c_i^n}^{d_i^n} a_k \geq \sum_{i=2}^{b_n} (-1) = -(b_n - 1).$$

Ko pošljemo n proti neskončno, gre tudi d_1^n proti neskončno (kar smo videli že v dokazu izreka ??). Vrste oblike $\sum_{k=1}^{d_1^n} a_k$ so delne vsote vrste (6), katerih zaporedje gre proti neskončno, ko gre d_1^n proti neskončno, saj vrsta (6) divergira. Sledi, da tudi zaporedje delnih vsot $\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$ divergira. Ker je bila izbira permutacije σ poljubna, lahko zaključimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ne konvergira za nobeno λ -permutacijo σ .

Izrek 1.2 pravi, da je v vsaki pogojno konvergentni vrsti mogoče spremeniti vrstni red členov tako, da dobljena vrsta divergira ali pa konvergira proti kateremukoli realnemu številu. Zgolj z uporabo λ -permutacij lahko to dosežemo pri naslednji vrsti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{33} - \frac{1}{5} - \dots \quad (7)$$

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tudi v tem primeru zgrajeno iz med sabo prepletenih zaporedij $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Začne se s prvimi nekaj členi zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, takimi, da je njihova vsota enaka s_1 . Tu je s_1 najmanjše število, da velja $s_1 \geq 1$. Sledi prvih nekaj števil zaporedja $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, takih, da je njihova vsota enaka $-t_1$, pri čemer je t_1 najmanjše možno število, za katero velja $t_1 \geq s_1 + 1$. Nadaljujemo z elementi zaporedja $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, ki jih je toliko, da je njihova vsota enaka s_2 , pri čemer je $s_2 \geq t_1 + 1$, in tako dalje.

Za lažjo obravnavo pozitivne člene zaporedja a_n , katerih vsota je s_i imenujmo i -ti *pozitivni blok*, negativne člene, katerih vsota je $-t_i$ pa i -ti *negativni blok*,

Da je ta vrsta pogojno konvergentna, vidimo podobno kot pri prejšnjem primeru.

Trdimo, da za vsako število $L \in \mathbb{R}$ obstaja λ -permutacija, ki iz zgornje (divergentne) vrste (7) ustvari konvergentno vrsto z vsoto L , torej da je za to vrsto $S = \mathbb{R}$.

Naj bo torej L neko realno število. Poiskali bomo λ -permutacijo σ , ki bo ustrezno preoblikovala vrsto (7).

Najprej poiščimo tak indeks m_1 , da bo za prej definirano zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ veljalo

$$a_{m_1} > 0 \text{ in } L > \sum_{k=1}^{m_1} a_k \geq L + 1.$$

Tak indeks m_1 zagotovo obstaja. Iz konstrukcije zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ namreč sledi, da delne vsote vrste (7) stalno nihajo z vedno večjo frekvenco med pozitivnimi in negativnimi celimi števili. Za prvo delno vsoto te vrste na primer velja $S(1) \geq 1$, za drugo velja, da je $S(2) \leq -1$, sledi $S(3) \geq 2$, $S(4) \leq -2$, in tako dalje.

Definirajmo permutacijo σ na prvih m_1 elementih naravnih števil kot identiteto, torej

$$\sigma(k) = k \text{ za } k \leq m_1.$$

Predpostavimo sedaj, da je a_{m_1} del j -tega pozitivnega bloka, torej eden izmed členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, katerih vsota je s_j . Člen a_{m_1} je namreč pozitivno število. Nadaljujmo s konstrukcijo permutacije σ . Vrednost $\sigma(m_1 + 1)$ naj bo taka, da je člen $a_{\sigma(m_1+1)}$ enak prvemu še ne uporabljenemu (v tem primeru kar prvemu) členu zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki pripada j -temu negativnemu bloku, torej bloku števil z vsoto $-t_j$. Preostanek permutacije σ skonstruiramo po podobnem principu. Recimo, da smo do sedaj določili m_i členov zaporedja $\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Če za njihovo vsoto velja

$$\sum_{n=1}^{m_i} a_{\sigma(n)} \leq L,$$

bomo vrednost $\sigma(m_i + 1)$ določili tako, da bo $a_{\sigma(m_i+1)}$ enak prvemu še neuporabljenemu pozitivnemu členu zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Če pa je

$$\sum_{n=1}^{m_i} a_{\sigma(n)} > L,$$

bo vrednost $\sigma(m_i + 1)$ taka, da bo člen $a_{\sigma(m_i+1)}$ enak prvemu še ne uporabljenemu negativnemu členu zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, ki jo dobimo, ko končamo s konstrukcijo permutacije σ ima vsoto L . Permutacijo σ smo namreč skonstruirali tako, da delne vsote $\tilde{S}(n)$ vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ stalno nihajo okrog L . Dve zaporedni delni vsoti $\tilde{S}(k)$ in $\tilde{S}(k)$ se torej nahajata na intervalu $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ za nek $\epsilon > 0$. Poleg tega pa se, ko raste n , členi $a_{\sigma(n)}$ manjšajo, torej je razlika med dvema zaporednima delnima vsotama vedno manjša. Interval, na katerem se nahajata zaporedni delni vsoti, se torej manjša. Z drugimi besedami: ko gre n proti neskončnosti, gre ϵ proti 0 in posledično vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ proti L .

Opazimo pa, da velja tudi

$$L - 1 < \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \geq L + 1 \text{ za } n \geq m_1.$$

Členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ namreč vsi ležijo na intervalu $[-1, 1]$, zato tudi ϵ v intervalu $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, na katerem ležita zaporedni delni vsoti vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, nikoli ni večji od 1. Vsaka delna vsota $\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$ od m_1 -te dalje torej leži na nekem podintervalu intervala $[L - 1, L + 1]$.

Sedaj moramo dokazati še, da je dobljena permutacija σ λ -permutacija. Omenimo najprej nekaj koristnih opažanj. Vidimo lahko, da je $a_{\sigma(m_1+1)}$ enak ravno prvemu členu $(j + 1)$ -tega negativnega bloka. Ker je za $k \leq m_1$ $\sigma(k) = k$ in ker je $\sigma(m_1)$

element j -tega pozitivnega bloka, pred $\sigma(m_1)$ v zaporedju $\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ni nastopilo nobeno število iz $(j+1)$ -tega negativnega bloka. Torej je v tem primeru prvi člen $(j+1)$ -tega negativnega bloka ravno prvi še neuporabljeni člen tega bloka. Poleg tega vidimo tudi, da prvih m_1 členov vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ vsebuje vse člene prvotne vrste do vključno $(j-1)$ -tega bloka (in morda še kakšnega iz j -tega pozitivnega bloka).

Trdimo sedaj, da se v vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ prvi člen $(j+1)$ -tega pozitivnega bloka pojavi pred prvim členom $(j+1)$ -tega negativnega bloka. Dokaza se lotimo s protislovjem. Recimo, da se prvi člen $(j+1)$ -tega negativnega bloka pred prvim členom $(j+1)$ -tega pozitivnega bloka in naj se pojavi na $m'+1$ -tem mestu permutirane vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. Potem mora biti za vsako vrednost k , ki zadošča pogoju $m_1 < k \leq m'$, k -ti člen permutirane vrste ali iz j -tega pozitivnega bloka ali iz j -tega negativnega bloka. Poleg tega morajo za tak k med člene oblike $a_{\sigma(k)}$ spadati ravno vsi elementi j -tega negativnega bloka, saj lahko pri konstrukciji permutacije σ oziroma zaporedja $\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ začnemo uporabljati elemente $(j+1)$ -tega negativnega bloka šele po tem, ko uporabimo vse elemente j -tega negativnega bloka. Vidimo tudi, da mora biti

$$\sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)} > L,$$

saj je šele takrat, ko je delna vsota permutirane vrste večja od L , naslednji člen v permutirani vrsti lahko negativen. Vidimo tudi, da vrsta $\sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)}$ zajema člene iz vseh blokov do vključno j -tega negativnega bloka. Vrsta $\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)}$ pa zagotovo zajema vse člene do vključno $(j-1)$ -tega negativnega bloka in morda še kakšen člen iz j -tega bloka. Zato je vsota

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} + s_j - t_j,$$

kjer je s_j vsota j -tega pozitivnega bloka in $-t_j$ vsota j -tega negativnega bloka, večja ali enaka vsoti $\sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)}$. Iz konstrukcije permutacije σ sledi, da je

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} \leq L + 1,$$

iz lastnosti vrste (7) pa, da je $s_j - t_j \leq -1$. Imamo torej:

$$L < \sum_{k=1}^{m'} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_1} a_{\sigma(k)} + s_j - t_j \leq L + 1 - 1 = L.$$

Pridemo v protislovje.

Pokazali smo torej, da se prvi člen $(j+1)$ -tega pozitivnega bloka v permutirani vrsti pojavi pred prvim členom $(j+1)$ -tega negativnega bloka. Recimo, da se pojavi na (m_2+1) -tem mestu. Velja, da prvih m_2 členov permutirane vrste vključuje vse člene originalne vrste do vključno j -tega pozitivnega bloka in nekaj členov j -tega negativnega bloka. Na podoben način kot prej vidimo, da je prvi člen $(j+1)$ -tega negativnega bloka uporabljen pred prvim členom $(j+2)$ -tega pozitivnega bloka. Po indukciji sledi, da je prvi člen vsakega bloka uporabljen pred prvim členom naslednjega bloka.

Od tod vidimo, da je zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ za permutacijo σ omejeno z 2. Po izreku (ref ??) sledi, da permutacija σ ohranja konvergenco, torej ustreza prvi

točki iz definicije λ -permutacij. Ker smo permutacijo σ zgradili tako, da pogojno divergentno vrsto preoblikuje v pogojno konvergentno, torej ustreza tudi drugi točki iz definicije λ -permutacij. Permutacija σ je torej λ -permutacija.

Ogledali smo si taka primera pogojno divergentnih vrst, da je za eno veljalo $S = \emptyset$, za drugo pa $S = \mathbb{R}$. Pojavi se vprašanje, ki naj ostane neodgovorjeno: Je lahko S še kaj drugega kot le \mathbb{R} in \emptyset .

6. ŠE DVA PRIMERA...

Za konec si oglejmo še dva primera λ -permutacij.

Primer 6.1. Razdelimo naravna števila v bloke na naslednji način:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 ...

V bloke smo jih razdelili tako, da ima vsak blok razen prvega dolžino $2n$, kjer je n zaporedna številka bloka. Drugi blok ima torej dolžino 4, tretji blok ima dolžino 6 in tako dalje.

Zaradi lažje obravnave poimenujmo bloke tako:

$$\begin{aligned} B_1 &= 1 \\ B_2 &= 2\ 3\ 4\ 5 \\ B_3 &= 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sedaj vsak blok B_i razdelimo na dva enako velika boka B_i^1 in B_i^2 in ju prepletamo med sabo. Blok $B_3 = 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11$ na primer razdelimo na bloka $B_3^1 = 6\ 7\ 8$ in $B_3^2 = 9\ 10\ 11$ ter ju prepletamo tako, da na prvo mesto postavimo prvo število bloka B_3^1 , torej 6, na drugo mesto prvo število bloka B_3^2 , torej 9, na tretje mesto drugo število bloka B_3^1 in tako dalje. Ko opisani postopek izvedemo na vseh blokkih v zaporedju, dobimo:

1 2 4 3 5 6 9 7 10 8 11 12 16 13 17 14 18 15 19 ...

Oziroma:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= 1 \\ \tilde{B}_2 &= 2\ 4\ 3\ 5 \\ \tilde{B}_3 &= 6\ 9\ 7\ 10\ 8\ 11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pokažimo, da je permutacija (označimo jo s σ_1), ki jo implicira zgornja preureditev števil, λ -permutacija.

Najprej si bomo ogledali zaporedje števil blokov $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ permutacije σ_1 in pokazali, da je omejeno. Če je omejeno, namreč permutacija σ_1 po izreku (ref ??) ohranja konvergenco, torej zadošča prvi točki iz definicije λ -permutacij.

Naj bo $B_i = m, m+1, \dots, m+n-1, m+n$ nek poljuben blok. Na tem bloku uporabimo permutacijo σ_1 . Razdelimo ga na bloka $B_i^1 = m, m+1, \dots, m+\frac{n}{2}-1$ in $B_i^2 = m+\frac{n}{2}, m+\frac{n}{2}+1, \dots, m+n$, ki ju prepletamo med sabo in dobimo blok $\tilde{B}_i = m, m+\frac{n}{2}, m+1, \dots, m+n-1, m+\frac{n}{2}-1, m+n$. Opazimo lahko, da

se blok \tilde{B}_i zaradi načina kako prepletemo bloka B_i^1 in B_i^2 začne z istim številom kot blok B_i in konča prav tako z istim številom kot B_i , torej velja $\sigma_1(m) = m$ in $\sigma_1(m+n) = m+n$. Ker permutiranje oziroma sprememba vrstnega reda števil poteka samo znotraj posameznega bloka in ne med različnimi bloki, blok \tilde{B}_i vsebuje enaka števila kot B_i , torej ravno vsa naravna števila med m in $m+n$, le da v drugačnem vrstnem redu. Zato velja

$$\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+n)\} = [m, m+n]_{\mathbb{Z}}.$$

Naj bosta sedaj $B_i = m, m+1, \dots, m+n-1, m+n$ in $B_{i-1} = m-k, m-k+1, \dots, m-2, m-1$ zaporedna bloka. Potem je

$$\begin{aligned} & \{\sigma_1(m-k), \sigma_1(m-k+1), \dots, \sigma_1(m+n)\} = \\ & = \{\sigma_1(m-k), \sigma_1(m-k+1), \dots, \sigma_1(m-1)\} \cup \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+n)\} = \\ & = [m-k, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup [m, m+n]_{\mathbb{Z}} = [m-k]_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Od tod lahko induktivno sklepamo, da je

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots, \sigma_1(m+n)\} = [1, m+n]_{\mathbb{Z}},$$

kjer je $m+n$ število, s katerim se konča nek blok B_i . Za tako število je torej $m+n$ -ti element zaporedja števil blokov enak $b_{m+n} = 1$.

Podobno vidimo, da je tudi za število m , s katerim se začne nek blok B_i , m -ti element zaporedja števil blokov enak $b_m = 1$. S številom $m-1$ se namreč konča blon B_{i-1} , torej od prej sledi

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots, \sigma_1(m-1)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}}.$$

Torej je

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots, \sigma_1(m)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup \{\sigma(m)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup \{m\} = [1, m]_{\mathbb{Z}}.$$

Kako pa je z ostalimi elementi zaporedja števil blokov? Naj bo $m+k$ število, ki ni ne na začetku in ne na koncu bloka B_i in naj bo $m+k \in [m, m+n]_{\mathbb{Z}}$ oziroma $\sigma_1(m+k) \in \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+n)\}$. Iščemo b_{m+k} , ki je število blokov oblike $[c, d]_{\mathbb{Z}}$, unija katerih je enaka množici $\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots, \sigma_1(m+k)\}$. Od prej vemo, da je

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots, \sigma_1(m+k)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}.$$

Oglejmo si množico $\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}$. Vsebuje števila iz bloka \tilde{B}_i , torej se v njej izmenjujejo števila iz blokov B_i^1 in B_i^2 . Števila iz vsakega izmed obeh blokov si sledijo po vrsti, torej, če sta števili n_1 in n_2 obe vsebovani na primer v bloku B_i^1 in je $n_1 < n_2$, bo tudi v permutiranem bloku \tilde{B}_i število n_1 nastopilo pred številom n_2 . Enako velja, če sta obe vsebovani v bloku B_i^2 . Sledi, da se množica vseh števil iz bloka B_i^1 , ki so vsebovana v množici $\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}$, da zapisati kot $[m, m+j]$, kjer je

$$m = \min\{B_i^1 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}\}$$

in

$$m+j = \max\{B_i^1 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}\}$$

in mnoica vseh števil iz bloka B_i^2 , ki so vsebovana v množici $\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}$, da zapisati kot $[m+o, m+p]$, kjer je

$$m+o = \min\{B_i^2 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}\}$$

in

$$m + p = \max\{B_i^2 \cap \{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\}\}.$$

Sledi

$$\{\sigma_1(m), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\} = [m, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}}.$$

Dobimo torej, da je

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\} = [1, m-1]_{\mathbb{Z}} \cup [m, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}} = [1, m+j]_{\mathbb{Z}} \cup [m+o, m+p]_{\mathbb{Z}}.$$

Če je $m+j+1 < m+o$, je dobljeni zapis končen in za $m+k$ -ti element zaporedja števil blokov velja $b_{m+k} = 2$. Če pa je $m+j+1 = m+o$, se da zgornji zapis poenostaviti na

$$\{\sigma_1(1), \sigma_1(m+1), \dots, \sigma_1(m+k)\} = [1, m+k]_{\mathbb{Z}}$$

in v tem primeru je $b_{m+k} = 1$. Ker je bila izbira števila $m+k$ poljubna, sledi, da so vsi členi zaporedja števil blokov za permutacijo σ_1 enaki ali 1 ali 2, torej je zaporedje števil blokov omejeno in po izreku (ref??) permutacija σ_1 ohranja konvergenco.

Da pokažemo, da je σ_1 λ -permutacija, moramo dokazati še, da zadošča drugi točki iz definicije λ -permutacij, torej da obstaja neka pogojno divergentna vrsta, ki ji σ_1 preuredi člene tako, da dobimo pogojno konvergentno vrsto. Primer take pogojno konvergentne vrste je naslednji:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = & 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \\ & + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Zaporedje delnih vsot te vrste je videti tako:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = -\frac{1}{2}, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = \frac{1}{2}, \quad S_5 = 1, \quad S_6 = \frac{2}{3}, \quad S_7 = \frac{1}{3}, \quad S_8 = 0, \quad \dots$$

Vidimo, da to zaporedje delnih vsot med drugim vsebuje podzaporedje, sestavljeno iz samih enk, in podzaporedje sestavljeno iz samih ničel. Zaporedje ima torej dve različni stekališči, 1 in 0, od koder sledi, da ni konvergentno.

Če sedaj člene vrste (8)

Primer 6.2. Zopet začnemo z zaporedjem naravnih števil, razdeljenim v bloke:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 ...

Drugi blok preoblikujemo tako, da prepletamo med sabo bloka 2 3 in 4. V tretjem bloku prepletamo bloka 5 6 7 8 in 9 10. V četrtem bloku prepletamo 11 12 13 14 15 16 in 17 18 19. Tako dobimo:

1 2 4 3 5 6 9 7 8 10 11 12 17 13 14 18 15 16 19 ...

7. ZAKLJUČEK

LITERATURA

- [1] S. G. Krantz in J. D. McNeal, *Creating more convergent series*, Amer. Math. Monthly **111** (2004) 32-38.
- [2] D. Velleman, *A note on λ -permutations*, Amer. Math. Monthly **113** (2006) 173-178.
- [3] P. Schaefer, *Sum-preserving rearrangements of infinite series*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 33-40.

- [4] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2010.