UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

NASLOV VAŠEGA DELA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [3], [2], [4], [1].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009

[2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982

[4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000

[1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`

Podpis mentorja:

Naslov vašega dela

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: ,

Keywords: ,

1 Uvod

2 Geometrijska zveznost

Definicija 2.1. Ploskev pripada razredu G^n oziroma je geometrijsko zvezna z redom n, če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda C^n.

definicija regularne ploskve razloži lokalnost?
Naj bosta $R : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ in $S : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji

Definicija 2.2. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje C, če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstaja lokalno regularna C^n reparametrizacijska funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, da je $f(x_0, y) = (u_0, y)$ za vsak $y \in I_0$ in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} R\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k}(S \circ f)\Big|_{(x_0,y)} \quad \text{za } m + k = 1, \dots, n,$$

kjer je I_0 neka okolica y_0.

Zaradi stikanja ploskev v krivulji C so delni odvodi parametrizacij po spremenljivki y vzdolž krivulje C enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le delne odvode po spremenljivki x. ali je to dovolj razloženo? razloži kot v poglavju G1? dodati sliko? Te delne odvode imenujemo ??crossboundary derivatives.

Oglejmo si pogoje za različne stopnje geometrijske zveznosti, ki nam jih ta definicija da. to še ni dokončno. zelo grdo Če so parametrizaciji R in S, krivulja C in reparametrizacijska funkcija f kot v definiciji sklic, je za geometrijsko zveznost razreda G^0 med njima dovolj pogoj $R = S \circ f$ vzdolž C. oziroma kar R=S vzdolž C?? Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje G^1, mora poleg pogoja za G^0 veljati še $R_x = S_u u_x + S_v v_x$ vzdolž C, za G^2 mora poleg pogojev za G^0 in G^1 veljati še G^2: $R_x x = S_{uu} u_x^2 + 2S_{uv} u_x v_x + S_{vv} v_x^2 + S_u u_{xx} + S_v v_{xx}$ vzdolž C in tako dalje.

Splošneje,grdo za geometrijsko zveznost stopnje n (ali se tako reče?), kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ velja naslednje:

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j}\Big|_C = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=0}^{k} A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}}\Big|_C$$

za vsak $j = 0, 1, \dots, n$. Tu z A_{jkh} označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=j \\ m_1,\dots,m_k>0}} \frac{j!}{k! m_1! \cdots m_k!} u_{x^{m_1}} \cdots u_{x^{m_h}} v_{x^{m_{h+1}}} \cdots v_{x^{m_k}}\Big|_C.$$

Z $u_x^{m_i}$ je označen m_i-ti delni odvod funkcije u po x. ali je treba to grozo dokazati?

---

kaj je s to lemo?

Lema 2.3. *?? ali je dokaz tega potreben? Naj bo $f(u,v)$ funkcija razreda C^n in $u(t)$ in $v(t)$ reparametrizaciji razreda C^n. Potem*

$$\frac{d^k f}{dt^k} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} u^{(m_1)} \cdots u^{(m_h)}(v) v^{(m_{h+1})} \cdots v^{(m_i)} \cdot \frac{\partial^i f}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer $k = 1, \ldots, n$ ter
$\mathbf{m_i} = (m1, m2, \ldots, m_i)$, $|\mathbf{m_i}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ *in* $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$.

---

zdaj si pogledamo ekvivalentno/alternativno definicijo G zveznosti? s pomočjo junction functions? Z uvedbo funkcij $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$ pridemo do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti. funkcije $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$ imenujemo junction/connection functions

Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$ funkcije razreda C^n ene spremenljivke. Definirajmo:

$$u(x,y) = u_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \alpha_i(y)(x - x_0)^i$$

$$v(x,y) = y + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \beta_i(y)(x - x_0)^i$$

ali moram povsod pisati, kam te funkcije slikajo? recimo paramterizacije in alfa, beta itd.

Opazimo, da za $i = 1, \ldots, k$ velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y),$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Stične funkcije lahko izberemo skoraj povsem poljubno. Upoštevati moramo le dva pogoja, ki omejujeta izbiro funkcije α_1. Prvi pogoj sledi iz zahteve po regularnosti reparametrizacijske funkcije f.

def. regularnosti? kaj je lokalna regularnost?

Reparametrizacijska funkcija f je regularna vzdolž C, če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearno neodvisna, torej če velja $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0$.

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ vzdolž krivulje C in ju skušajmo zapisati s pomočjo stičnih funkcij. Za odvod po spremenljivki x velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y)) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)),$$

pri čemer smo uporabili opazko sklic. Če razpišemo odvod po spremenljivki y, pa dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y)) = (0, 1).$$

Vektorski produkt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0, 1) = \alpha_1(y)$$

Sledi, da je reparametrizacija regularna, natanko tedaj ?, ko za pripradajočo stično junction? funkcijo α_1 velja $\alpha_1(y) \neq 0$ vzdolž stične krivulje C. ali je potrben podatek "vzdolž krivulje C"? to moraš nekako motivirati: zakaj si to sploh pogledamo? zato, ker to predstavlja pogoj za α_1?

Drugo, na kar moramo paziti pri izbiri funkcije α_1 pa je njen predznak. Pri izbiri napačnega predznaka namreč lahko pride do stika v obliki "špice". tega ne razumem čisto. tu bi bil potreben kakšen primer.

Vpeljava stičnih funkcij nas pripelje do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti.

Definicija 2.4. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje C, če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstajajo take funkcije razreda C^n ene spremenljivke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$, da $\alpha_1(y) \neq 0$, pri čemer mora imeti α_1 ustrezen predznak ??, in da velja

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j}\Big|_C = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=0}^{k} A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}}\Big|_C$$

za vsak $j = 0, 1, \ldots, n$. Tu z A_{jkh} označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=j \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{j!}{k! m_1! \cdots m_k!} \alpha_1 \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_k}\Big|_C$$

---

kaj je s tem izrekom?

Izrek 2.5. *Naj bosta $R(u_r, v_r)$ in $S(u_s, v_s)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(v) = R(u_{r0}, v) = S(u_{s0}, v)$. Ploskvi R in S sta G^n-zvezni vzdolž skupnega roba natanko tedaj ko obstajajo funkcije $p_i(v)$, $q_i(v)$, $i = 1, \ldots, n$, da velja*

$$\frac{\partial^k S}{\partial u_s^k}\Big|_C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} p_{m_1}(v) \cdots p_{m_h}(v) q_{m_{h+1}}(v) \cdots q_{m_i} \cdot \frac{\partial^i R}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer $k = 1, \ldots, n$ ter
$\mathbf{m_i} = (m1, m2, \ldots, m_i)$, $|\mathbf{m_i}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ *in* $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$.

---

3 G^1 zveznost

nekaj v stilu, da se bomo natančneje ukvarjali z G1 zveznostjo. lahko povem, da je to zveznost tangentnih ravnin oz. zveznost enotskih normal in da si bomo ogledali, kako do tega pridemo.

Imejmo ploskvi $R(x, y)$ in $S(u, v)$, ki se v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$ stikata z geometrijsko zveznostjo G^1. Sledi, da je $R_y(x_0, y) = S_y(x_0, y) = S_v(x_0, y)$. Kot smo že videli ugh v poglavju sklic, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri x.

Ker je stik obeh ploskev v C G^1-zvezen, po definiciji sklic obstajata funkciji α_1 in β_1, kjer je $\alpha_1(y) \neq 0$ za vsak y in ima ustrezen predznak, da velja:

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

Zgornja enačba nam pove, da so parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ v vsaki točki y linearno neodvisni. Torej so v vsaki točki y del iste tangentne ravnine na krivuljo C. Zato torej G^1-zveznost imenujemo tudi zveznost tangentnih ravnin.

v predstavitvi sem šla tako: $R(x_0, y) = S(u_0, y)$, $R_x(x_0, y) = u_x(x_0, y)S_u(u_0, y) + v_x(x_0, y)S_v(u_0, y)$, $R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y)$ na mestu najbrž kakšna slika

Oglejmo si še, od kod pride poimenovanje "zveznost enotskih normal". Znova opazujemo enačbo

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

ali je bolje, da se tu samo skličem? Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z $R_y(x_0, y)$:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times R_y(x_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y) \times R_y(x_0, y).$$

Upoštevamo lahko, da je $R_y(x_0, y) = S_v(u_0, y)$. Dobimo:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y).$$

Od tod vidimo, da sta normali na ploskvi R in S na njunu stični krivulji vzporedni. grdo Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normali:

$$\frac{R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)}{||R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)||} = \frac{S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)}{||S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)||}.$$

tukaj pride nek vezni tekst? ali pa je to ok? Ker parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ ležijo na isti tangentni ravnini, velja tudi: zelo grdo

$$\det(R_x(x_0, y), S_u(u_0, y), S_v(u_0, y)) = 0.$$

Torej obstajajo funkcije povedati kakšne, iz kje kam? λ, μ in γ, da velja: ali moram to kaj bolj natančno utemeljiti? treba motivirati, zakaj to gledamo

$$\lambda(y)R_x(x_0, y) = \mu(y)S_u(u_0, y) + \gamma(y)S_v(u_0, y).$$

Če predpostavimo, da sta ploskvi R in S polinomski, lahko tudi za λ, μ in γ izberemo polinome, izberemo? ali niso točno določeni? kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

najbrž lahko poveš, da se bomo v naslednjih poglavjih ukvarjali z izbiro teh polinomskih krivulj

mogoče moraš tu napisati, kako se pride do teh polinomov: tiste prve komponente. ampak tega ne razumem.

4 Bézierjeve ploskve

pogledamo si poseben primer polinomskih param ploskev, ki so tudi uporabne v praksi

i-ti Bernsteinov bazni polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ t \in [0,1]$$

Lastnosti:

- $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$
- $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$

Definicija 4.1. Naj bodo dane točke $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{b}^{m,n} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{b}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b_{i,j}} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo kontrolne točke, poligon, ki jih povezuje, pa kontrolni poligon.

Velja: $\mathbf{b^{m,n}}(0,0) = \mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b^{m,n}}(1,0) = \mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b^{m,n}}(0,1) = \mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b^{m,n}}(1,1) = \mathbf{b}_{m,n}$

Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u,v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v),$$

kjer $\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,s}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j}$.

5 Primeri konstrukcij G^1 ploskev

Dve bikubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$R(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

ki se stikata v $C(v) = R(0,v) = S(0,v)$.

Literatura

[1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`.

[2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.

[3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.

[4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.