

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

**NASLOV VAŠEGA DELA**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020



## **Zahvala**

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .



# Kazalo

Program dela	vii
1 Uvod	1
2 Geometrijska zveznost	1
3 $G^1$ zveznost	4
4 Bézierjeve ploskve	5
5 $G^n$ -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama	6
6 Primeri konstrukcij $G^1$ ploskev	11
Literatura	13



# Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [3], [2], [4], [1].

## Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

- [3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009
- [2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982
- [4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000
- [1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx>

Podpis mentorja:



## **Naslov vašega dela**

### **POVZETEK**

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razлага vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

### **English translation of the title**

### **ABSTRACT**

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2010):** oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu  
<http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx>

**Ključne besede:** ,

**Keywords:** ,



# 1 Uvod

## 2 Geometrijska zveznost

**Definicija 2.1.** Ploskev pripada razredu  $G^n$  oziroma je geometrijsko zvezna z redom  $n$ , če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda  $C^n$ .

definicija regularne ploskve razloži lokalnost?

Naj bosta  $R : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $S : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularni parametrizaciji

**Definicija 2.2.** Naj bosta  $R(x, y)$  in  $S(u, v)$  regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$ . Pravimo, da se  $R$  in  $S$  stikata z  $G^n$ -zveznostjo vzdolž krivulje  $C$ , če za vsako točko  $b_0 = C(y_0)$  obstaja lokalno regularna  $C^n$  reparametrizacijska funkcija  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , da je  $f(x_0, y) = (u_0, y)$  za vsak  $y \in I_0$  in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} R \Big|_{(x_0, y)} = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} (S \circ f) \Big|_{(x_0, y)} \text{ za } m + k = 1, \dots, n,$$

kjer je  $I_0$  neka okolica  $y_0$ .

Zaradi stikanja ploskev v krivulji  $C$  so delni odvodi parametrizacij po spremenljivki  $y$  vzdolž krivulje  $C$  enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le delne odvode po spremenljivki  $x$ . ali je to dovolj razloženo? najbrž moram dodati y=v??!! (glej vir, dokaz izreka1) dodati sliko? Te delne odvode imenujemo ??crossboundary derivatives.

Oglejmo si pogoje za različne stopnje geometrijske zveznosti, ki nam jih ta definicija da. to še ni dokončno. zelo grdo ali naj to naredim kot primer? Če so parametrizaciji  $R$  in  $S$ , krivulja  $C$  in reparametrizacijska funkcija  $f$  kot v definiciji sklic, je za geometrijsko zveznost razreda  $G^0$  med njima dovolj pogoj  $R = S \circ f$  vzdolž  $C$ . oziroma kar R=S vzdolž C?? Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje  $G^1$ , mora poleg pogoja za  $G^0$  veljati še  $R_x = S_u u_x + S_v v_x$  vzdolž  $C$ , za  $G^2$  mora poleg pogojev za  $G^0$  in  $G^1$  veljati še  $G^2$ :  $R_{xx} = S_{uu} u_x^2 + 2S_{uv} u_x v_x + S_{vv} v_x^2 + S_u u_{xx} + S_v v_{xx}$  vzdolž  $C$  in tako dalje.

Slošneje,grdo za geometrijsko zveznost stopnje  $n$  (ali se tako reče?), kjer je  $n \in \mathbb{N}_0$  velja naslednje:

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j} \Big|_C = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \Big|_C$$

za vsak  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tu z  $A_{jkh}$  označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = j \\ m_1, \dots, m_k > 0}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} u_x^{m_1} \cdots u_x^{m_h} v_x^{m_{h+1}} \cdots v_x^{m_k} \Big|_C.$$

Z  $u_x^{m_i}$  je označen  $m_i$ -ti delni odvod funkcije  $u$  po  $x$ . ali je treba to grozo dokazati?

---

kaj je s to lemo?

**Lema 2.3.** ?? ali je dokaz tega potreben? Naj bo  $f(u, v)$  funkcija razreda  $C^n$  in  $u(t)$  in  $v(t)$  reparametrizaciji razreda  $C^n$ . Potem

$$\frac{d^k f}{dt^k} = \sum_{i=1}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} u^{(m_1)} \dots u^{(m_h)}(v) v^{(m_{h+1})} \dots v^{(m_i)} \cdot \frac{\partial^i f}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer  $k = 1, \dots, n$  ter

$$\mathbf{m}_i = (m_1, m_2, \dots, m_i), |\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \dots + m_i \text{ in } A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i! m_1! \dots m_i!}.$$

preoblikuj to lemo, da bo koeficient A kot zgoraj. dokaz najdeš nekje k piše v viru

zdaj si pogledamo ekvivalentno/alternativno definicijo G zveznosti? s pomočjo junction functions? Z uvedbo funkcij  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$  pridemo do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti. funkcije  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$  imenujemo junction/connection functions

Naj bodo  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$  funkcije razreda  $C^n$  ene spremenljivke. Definirajmo:

$$u(x, y) = u_0 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \alpha_i(y) (x - x_0)^i$$

$$v(x, y) = y + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \beta_i(y) (x - x_0)^i$$

ali moram povsod pisati, kam te funkcije slikajo? recimo paramterizacije in alfa, beta itd.

Opazimo, da za  $i = 1, \dots, k$  velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y),$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Stične funkcije lahko izberemo skoraj povsem poljubno. Upoštevati moramo le dva pogoja, ki omejujeta izbiro funkcije  $\alpha_1$ . Prvi pogoj sledi iz zahteve po regularnosti reparametrizacijske funkcije  $f$ .

def. regularnosti? kaj je lokalna regularnost?

Reparametrizacijska funkcija  $f$  je regularna vzdolž  $C$ , če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearne neodvisne, torej če velja  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0$ .

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  vzdolž krivulje  $C$  in ju skušajmo zapisati s pomočjo stičnih funkcij. Za odvod po spremenljivki  $x$  velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y) \right) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)),$$

pri čemer smo uporabili opazko **sklic**. Če razpišemo odvod po spremenljivki  $y$ , pa dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) \right) = (0, 1).$$

Vektorski produkt  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$  je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0, 1) = \alpha_1(y)$$

Sledi, da je reparametrizacija regularna, natanko tedaj ?, ko za pripradajočo stično **junction?** funkcijo  $\alpha_1$  velja  $\alpha_1(y) \neq 0$  vzdolž stične krivulje  $C$ . ali je potreben podatek "vzdolž krivulje C"? to moraš nekako motivirati: zakaj si to sploh pogledamo? zato, ker to predstavlja pogoj za  $\alpha_1$ ?

Drugo, na kar moramo paziti pri izbiri funkcije  $\alpha_1$  pa je njen predznak. Pri izbiri napačnega predznaka namreč lahko pride do stika v obliki "špice". **tega ne razumem čisto. tu bi bil potreben kakšen primer.**

Vpeljava stičnih funkcij nas pripelje do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti.

**Definicija 2.4.** Naj bosta  $R(x, y)$  in  $S(u, v)$  regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$ . Pravimo, da se  $R$  in  $S$  stikata z  $G^n$ -zveznostjo vzdolž krivulje  $C$ , če za vsako točko  $b_0 = C(y_0)$  obstajajo take funkcije razreda  $C^n$  ene spremenljivke  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , da  $\alpha_1(y) \neq 0$ , pri čemer mora imeti  $\alpha_1$  ustrezni predznak ??, in da velja

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j} \Big|_C = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \Big|_C$$

za vsak  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tu z  $A_{jkh}$  označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = j \\ m_1, \dots, m_k > 0}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} \alpha_1 \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_k} \Big|_C$$

popravi A, indekse pri alfa in beta

kaj je s tem izrekom?

**Izrek 2.5.** Naj bosta  $R(u_r, v_r)$  in  $S(u_s, v_s)$  regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $C(v) = R(u_{r0}, v) = S(u_{s0}, v)$ . Ploskvi  $R$  in  $S$  sta  $G^n$ -zvezni vzdolž skupnega roba natanko tedaj ko obstajajo funkcije  $p_i(v)$ ,  $q_i(v)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , da velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k S}{\partial u_s^k} \Big|_C &= \sum_{i=1}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} p_{m_1}(v) \cdots p_{m_h}(v) q_{m_{h+1}}(v) \cdots q_{m_i} \\ &\quad \cdot \frac{\partial^i R}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}}, \end{aligned}$$

kjer  $k = 1, \dots, n$  ter

$\mathbf{m}_i = (m_1, m_2, \dots, m_i)$ ,  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$  in  $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$ .

ta izrek je ubistvu isto kot ekvivalentna definicija. ali je bolje, da ekvivalentno definicijo zapišem kot izrek? pomembno!!: kaj so potrebni in kaj zadostni pogoji? kaj sledi iz česa?

---

### 3 $G^1$ zveznost

nekaj v stilu, da se bomo natančneje ukvarjali z  $G^1$  zveznostjo. lahko povem, da je to zveznost tangentnih ravnin oz. zveznost enotskih normal in da si bomo ogledali, kako do tega pridemo.

Imejmo ploskvi  $R(x, y)$  in  $S(u, v)$ , ki se v krivulji  $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$  stikata z geometrijsko zveznostjo  $G^1$ . Sledi, da je  $R_y(x_0, y) = S_y(u_0, y) = S_v(u_0, y)$ . Kot smo že videli ugh v poglavju sklic, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri  $x$ .

Ker je stik obeh ploskev v  $C$   $G^1$ -zvezen, po definiciji sklic obstajata funkciji  $\alpha_1$  in  $\beta_1$ , kjer je  $\alpha_1(y) \neq 0$  za vsak  $y$  in ima ustrezni predznak, da velja:

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

Zgornja enačba nam pove, da so parcialni odvodi  $R_x(x_0, y)$ ,  $S_u(u_0, y)$  in  $S_v(u_0, y)$  v vsaki točki  $y$  linearne neodvisni. Torej so v vsaki točki  $y$  del iste tangentne ravnine na krivuljo  $C$ . Zato torej  $G^1$ -zveznost imenujemo tudi zveznost tangentnih ravnin.

v predstavitevi sem šla tako:  $R(x_0, y) = S(u_0, y)$ ,  $R_x(x_0, y) = u_x(x_0, y)S_u(u_0, y) + v_x(x_0, y)S_v(u_0, y)$ ,  $R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y)$  na mestu najbrž kašna slika

Oglejmo si še, od kod pride poimenovanje "zveznost enotskih normal". Znova opazujemo enačbo

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

ali je bolje, da se tu samo skličem? Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z  $R_y(x_0, y)$ :

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times R_y(x_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y) \times R_y(x_0, y).$$

Upoštevamo lahko, da je  $R_y(x_0, y) = S_v(u_0, y)$ . Dobimo:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y).$$

Od tod vidimo, da sta normali na ploskvi  $R$  in  $S$  na njunu stični krivulji vzporedni. grdo Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normali:

$$\frac{R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)}{\|R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)\|} = \frac{S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)}{\|S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)\|}.$$

tukaj pride nek vezni tekst? ali pa je to ok? Ker parcialni odvodi  $R_x(x_0, y)$ ,  $S_u(u_0, y)$  in  $S_v(u_0, y)$  ležijo na isti tangentni ravnini, velja tudi: zelo grdo

$$\det(R_x(x_0, y), S_u(u_0, y), S_v(u_0, y)) = 0.$$

Torej obstajajo funkcije povedati kakšne, iz kje kam?  $\lambda, \mu$  in  $\gamma$ , da velja: ali moram to kaj bolj natančno utemeljiti? treba motivirati, zakaj to gledamo

$$\lambda(y)R_x(x_0, y) = \mu(y)S_u(u_0, y) + \gamma(y)S_v(u_0, y).$$

tole tukaj je najbrž en bullshit —————— to poglavje bo najbrž treba prestaviti, ali pa spremeniti v podpoglavlje

Če predpostavimo, da sta ploskvi  $R$  in  $S$  polinomski, lahko tudi za  $\lambda, \mu$  in  $\gamma$  izberemo polinome, izberemo? ali niso točno določeni? kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

najbrž lahko poveš, da se bomo v naslednjih poglavjih ukvarjali z izbiro teh polinomov

mogoče moraš tu napisati, kako se pride do teh polinomov: tiste prve komponente. ampak tega ne razumem.

## 4 Bézierjeve ploskve

pogledamo si poseben primer polinomskih parametrizacij, ki so tudi uporabne v praksi

$i$ -ti Bernsteinov bazni polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1]$$

Lastnosti:

- $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$
- $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$

**Definicija 4.1.** Naj bodo dane točke  $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{b}^{m,n} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke  $\mathbf{b}_{i,j}$  imenujemo kontrolne točke, poligon, ki jih povezuje, pa kontrolni poligon.

Velja:  $\mathbf{b}^{m,n}(0, 0) = \mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{b}^{m,n}(1, 0) = \mathbf{b}_{m,0}$ ,  $\mathbf{b}^{m,n}(0, 1) = \mathbf{b}_{0,n}$ ,  $\mathbf{b}^{m,n}(1, 1) = \mathbf{b}_{m,n}$   
Odvod Bézierjeve ploskev iz tenzorskega produkta:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v),$$

kjer  $\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$ ,  
 $\Delta^{0,1} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$ ,  
 $\Delta^{r,0} \mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i,j}$ ,  
 $\Delta^{0,s} \mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j}$ .

## 5 $G^n$ -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama

Nekaj v smislu, da sedaj prevedemo že dobljene splošne pogoje na pogoje za biezrove ploskve oz. kako ti pogoji izgledajo za te ploskve.

izkaže se, da za funkcije alfa in beta v splošni definiciji lahko vzamemo polinome, ker gre pri bezierovih ploskvah tudi za polinomske parametrične ploskve.

Imejmo polinomski? Bézierjevi ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , podani na naslednji način:

$$\mathbf{R}(x, y) = \sum_{i=0}^{m_r} \sum_{j=0}^{n_r} \mathbf{P}_{ij} B_i^{m_r} B_j^{n_r}$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{m_s} \sum_{j=0}^{n_s} \mathbf{Q}_{ij} B_i^{m_s} B_j^{n_s},$$

kjer so  $\{\mathbf{P}_{i,j}, i = 1, \dots, m_r, j = 1, \dots, n_r\}$  in  $\{\mathbf{Q}_{i,j}, i = 1, \dots, m_s, j = 1, \dots, n_s\}$  kontrolne točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ ,  $x, y, u$  in  $v$  pa parametri na intervalu  $[0, 1]$ . grdo

Ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  se stikata v skupni robni? krivulji  $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0, v) = \mathbf{S}(0, v)$  pojasni, zakaj lahko to predpostavimo. zakaj?? ker lahko parametriziramo? poglej. pojasni še, kako je s tem, da sta ploskvi prav obrnjeni, da ni špice Robno krivuljo  $\mathbf{C}$  zapišemo kot Bézierjevo krivuljo na naslednji način:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{Z}_i B_i^{n_c},$$

kjer so  $\{\mathbf{Z}_i, i = 1, \dots, n_c\}$  njene kontrolne točke. Stopnja  $n_c$  krivulje  $\mathbf{C}$  ni nujno enaka stopnjama  $n_r$  ali  $n_s$ , velja pa, da je  $n_c \leq \min(n_r, n_s)$ . ali moram povedati, zakaj? ker ne vem

Naj bosta ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  regularni vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  da zadostimo pogoju iz definicije geometrijske zveznosti, torej naj bodo normale na ploskvi vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  neničelne:

$$N_r = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

$$N_s = \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

Nr(y)?

O pogojih za geometrijsko zveznost teh dveh ploskev govori naslednji izrek: ekvivalenten izreku iz prejšnjega poglavja

**Izrek 5.1.** Naj bosta  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  zgoraj definirani to ok? Bézierovi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji  $\mathbf{C}$  (kot zgoraj). Stik ploskev je  $G^n$ -zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi vir:polinomske funkcije  $D(y), E_i(y)$  in  $F_i(y)$ , da velja:

$$D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} = \sum_{i=0}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(v)$$

$$\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}},$$

kjer je  $i = 1, \dots, n$  vir:  $k ??$  in  $k = 1, \dots, n$ . Z  $A_{m_i}^k$  zopet označujemo  $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i!m_1!\cdots m_i!}$  in  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ . Velja še  $D(y)E_1(y) \neq 0$  za  $y \in [0, 1]$ , za stopnje polinomov pa velja:

$$st(D) \leq n_r + n_c - 1,$$

$$st(E_i) \leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1 \text{ in}$$

$$st(F_i) \leq (2i-1)n_r + in_s + (i-1)n_c - 2i + 1.$$

*Dokaz.* Najprej predpostavljajmo, da obstajajo polinomi  $D, E_i$  in  $F_i, i = 1, \dots, n$ , ki ustrezajo enačbi sklic in ostalim pogojem v izreku. Pokazati hočemo, da od tod sledi geometrijska zveznost ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ . V ta namen bomo uporabili izrek sklic izrek z alfami in betami.

Preoblikujmo enačbo

$$\begin{aligned} D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=0}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\quad \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned}$$

Če celotno enačbo delimo z  $D^{2k-1}$  (predpostavka, da  $D(y)E_1(y) \neq 0$  na  $[0, 1]$ , zago-tavlja neničelnost polinoma  $D$  na  $[0, 1]$ ), dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=0}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-2k}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\quad \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned}$$

Funkcijo  $D^{2k-i}$  lahko zapišemo kot produkt

$$D^{2k-i}(y) = D^{2m_1-1}(y) D^{2m_2-1}(y) \cdots D^{2m_h-1}(y) D^{2m_{h+1}}(y) \cdots D^{2m_i-1}(y).$$

saj je  $|m_i|=k$

Dobljeno vstavimo v enačbo sklic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=0}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(v)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\quad \cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned}$$

Definirajmo

$$\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)} \text{ in } \beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)},$$

kjer je  $i = 1, \dots, n$ . Če to vstavimo v zgornjo enačbo sklic? to je zelo grdo, dobimo enačbo kot v izreku sklic. Iz izreka sklic torej sledi, da se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stikata z geometrijsko zveznostjo  $G^n$ . S tem smo dokazali eno smer ekvivalenze? kako se to lepo reče

Sedaj dokažimo še drugo smer ekvivalenze v izreku. Predpostavimo, da se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , definirani kot zgoraj sklic stikata v robni krivulji  $\mathbf{C}$  z geometrijsko zveznostjo

$G^n$ . Pokazati hočemo, da od tod sledi obstoj polinomov  $D$ ,  $E_i$  in  $F_i$  z lastnostmi kot v izreku. Dokaza se lotimo z indukcijo po  $k$ . **vir:k**

Naj bo najprej  $k = 1$ . Ker je slik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen, torej vsaj  $G^1$ -zvezen, po izreku **sklic** obstajata funkciji  $\alpha_1(y)$  in  $\beta_1(y)$ , ki zadoščata enačbi

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{textbf{C}} + \beta_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}}.$$

Dobljeno enačbo **sklic?** z desne vektorsko množimo z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}$ . Dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}}(y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{textbf{C}}.$$

V poglavju **sklic** smo namreč že videli, da je  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$ .

Enačbo **sklic** sedaj z desne vektorsko množimo še z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$  in dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}}(y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(y) = \beta_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}}$$

Z  $\mathbf{W}(s)$  označimo vektor **vektorsko funkcijo?**  $\mathbf{W}(y) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}}$ ,

Prej dobljene enačbe **sklic** torej zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y) \mathbf{N}_r(y)$$

in

$$\mathbf{W}(y) = \beta_1(y) \mathbf{N}_r(y).$$

Stopnja  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}}$  je največ  $n_c - 1$ , saj je  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$ . Enako velja za  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}}$ . Stopnja  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}}$  je manjša ali enaka  $n_r$ , stopnja  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}}$  pa manjša ali enaka  $n_s$ . **razloži?** Od tod in iz enačb **sklic** sledi  $st(\mathbf{N}_r) \leq n_r + n_s - 1$ ,  $st(\mathbf{N}_s) \leq n_s + n_c - 1$  in  $st(\mathbf{W}) \leq n_r + n_s$ .

Videli smo že **sklic**, da sta zaradi predpostavke o regularnosti ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  funkciji  $\mathbf{N}_r(y)$  in  $\mathbf{N}_s(y)$  neničelni **vektorski funkciji**. **oziroma za vsak v na [0,1] sta to vektorja, različna od 0** Ker je  $\mathbf{N}_r(y)$  neničelna, mora biti vsaj ena izmed njenih koordinatnih funkcij neničeln polinom. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je neničelna  $x$ -koordinata, torej polinom  $N_{rx}$ . Če enačbe iz **sklic** razpišemo po koordinatah, za  $x$ -koordinato dobimo

$$N_{sx}(y) = \alpha_1(y) N_{rx}(y)$$

in

$$W_x(y) = \beta_1(y) N_{rx}(y),$$

kjer je  $N_{sx}$   $x$ -koordinata funkcije  $\mathbf{N}_s$ ,  $W_x$  pa  $x$ -koordinata funkcije  $\mathbf{W}$ .

Iz zgornjih enačb lahko vidimo, da so vse realne ničle polinoma  $N_{rx}(y)$  na intervalu  $[0, 1]$  tudi ničle polinomov  $N_{sx}(y)$  in  $W_x(y)$ , torej da polinom  $U(y)$ , ki je zgrajen kot produkt vseh linearnih faktorjev v polinomske razcepu polinoma  $N_{rx}(y)$ , deli polinoma  $N_{sx}(y)$  in  $W_x(y)$ . Da to res drži, lahko vidimo na naslednji način. Zapišimo  $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$ , kjer je  $U(y)$  produkt vseh linearnih faktorjev,  $D(y)$  pa produkt

vseh nelinearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma  $N_{rx}(y)$ . Predpostavimo, da  $U(y)$  ne deli polinoma  $N_{sx}(y)$ . Ker je  $N_{sx}(y) = \alpha_1(y)U(y)D(y)$ , je to mogoče le, če je  $\alpha_1(y)$  racionalna funkcija, katere imenovalec deli polinom  $U(y)$ . Funkcija  $\alpha_1(y)$  ima torej na intervalu  $[0, 1]$  pol. Ker velja  $\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_r(y)$  in so vse koordinatne funkcije **funkcij**  $\mathbf{N}_s(y)$  in  $\mathbf{N}_r(y)$  polinomi, mora veljati, da imenovalec funkcije  $\alpha_1(y)$  deli  $N_{rx}(y)$ ,  $N_{ry}(y)$  in  $N_{rz}(y)$ . Funkcija  $\alpha_1(y)$  ima pol, označimo ga z  $y_0$ . Sledi, da je  $y_0$  ničla polinomov  $N_{rx}(y)$ ,  $N_{ry}(y)$  in  $N_{rz}(y)$ , in zato je  $\mathbf{N}_r(y_0) = 0$ , kar pa je v nasprotju s predpostavko o regularnosti ploskve  $\mathbf{R}$ . Torej mora polinom  $U(y)$  deliti polinom  $N_{sx}(y)$ . Z enakimi sklepi trditev pokažemo še za polinom  $W_x(y)$ .

**vprašanje:** ali U vsebuje vse linearne faktorje ali samo tiste, ki imajo zvezo z ničlami na  $[0,1]???$

Polinom  $N_{rx}$  sedaj znova zapišimo kot produkt  $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$ , kjer sta polinoma  $U(y)$  in  $D(y)$  definirana kot zgoraj. Torej velja

$$N_{sx}(y) = U(y)\alpha_1(y)D(y)$$

in

$$W_x(y) = U(y)\beta_1(y)D(y).$$

Naj bo  $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$  in  $F_1(y) = \beta_1(y)D(y)$ . Pokazati moramo, da sta dobljeni funkciji  $E_1$  in  $F_1$  polinoma. Ker sta funkciji  $N_{sx}(y)$  in  $W_x(y)$  polinoma, morata imenovalca funkcij  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  deliti ali polinom  $U$  ali polinom  $D$ . Videli smo že, da  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  nimata polov na intervalu  $[0, 1]$ , torej njuna imenovalca ne delita polinoma  $U$ . Sledi, da morata njuna imenovalca deliti polinom  $D$ , s čimer smo pokazali, da sta  $E_1$  in  $F_1$  res polinoma.

Videli želimo še, da je  $D(y)E_1(y) \neq 0$  na intervalu  $[0, 1]$ . Polinom  $D(y)$  po definiciji vsebuje vse nelinearne faktorje v polinomskem razcepu polinoma  $N_{rx}(y)$ , torej na intervalu  $[0, 1]$  nima ničel. Polinom  $E_1(y)$  je enak  $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$ . Ker je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen, funkcija  $\alpha_1(y)$  na intervalu  $[0, 1]$  ni enaka nič (glej **sklic**), zato tudi  $E_1(y)$  na tem intervalu nima ničel.

Oglejmo si še stopnje polinomov  $D(y)$ ,  $E_1(y)$  in  $F_1(y)$ . Očitno velja:

$$st(D(y)) \leq st(N_{rx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_r(v)) \leq n_r + n_c - 1$$

$$st(E_1(y)) \leq st(N_{sx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_s(v)) \leq n_s + n_c - 1$$

$$st(F_1(y)) \leq st(W_x(y)) \leq st(\mathbf{W}(v)) \leq n_r + n_s,$$

s čimer dokažemo izrek za  $k = 1$ .

Lotimo se še dokaza za  $k > 1$ . Prepodstavimo, da izrek velja za vse  $k \leq m$ , kjer je  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ . Torej obstajajo polinomi  $D(y)$ ,  $E_1(y), \dots, E_m(y)$ ,  $F_1(y), \dots, F_m(y)$  z ustreznimi stopnjami, da velja enačba **sklic** za  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Izhajamo iz predpostavke, da je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen. Iz izreka **sklic**

sledi, da obstajajo funkcije  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$  in  $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ , da velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\Big|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je  $\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$  in  $\beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$  za  $i = 1, \dots, m$ . Uporabimo to v zgornji enačbi in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\Big|_{\mathbf{C}} &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\Big|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(y)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C = \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\Big|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-2}(y) D^{-2m} E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C, \end{aligned}$$

saj je  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = m + 1$  in zato je  $D^{-2m_1+1}(y) D^{-2m_2+1}(y) \cdots D^{-2m_i+1}(y) = D^{-2(m+1)}(y) D^i(y)$ .

Sedaj definirajmo **krivuljo?** vektorsko polinomska funkcija?  $\mathbf{S}_{m+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{m+1} &= D^{2m}(v) \frac{\partial^m \mathbf{S}}{\partial u^m}\Big|_{\mathbf{C}} - \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_{\mathbf{C}} \end{aligned}$$

Če enačbo **sklic** pomnožimo z  $D^{2m}(y)$  in jo nekoliko preoblikujemo, dobimo:

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m} \alpha_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\Big|_{\mathbf{C}} + D^{2m} \beta_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\Big|_{\mathbf{C}}.$$

Na dobljeni enačbi sedaj uporabimo podoben postopek, kot smo ga uporabili pri dokazu za  $k = 1$ .

□

## 6 Primeri konstrukcij $G^1$ ploskev

Dve bikubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$R(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

ki se stikata v  $C(v) = R(0, v) = S(0, v)$ .



## Literatura

- [1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx>.
- [2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.
- [3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.
- [4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

