

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

NASLOV VAŠEGA DELA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .

Kazalo

| | |
|--|-----|
| Program dela | vii |
| 1 Uvod | 1 |
| 2 Geometrijska zveznost | 1 |
| 3 G^1 zveznost | 4 |
| 4 Bézierjeve ploskve | 5 |
| 5 G^n -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama | 6 |
| 6 Primeri konstrukcij G^1 ploskev | 6 |
| Literatura | 7 |

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [3], [2], [4], [1].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

- [3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009
- [2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982
- [4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000
- [1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx>

Podpis mentorja:

Naslov vašega dela

POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu <http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx>

Ključne besede: ,

Keywords: ,

1 Uvod

2 Geometrijska zveznost

Definicija 2.1. Ploskev pripada razredu G^n oziroma je geometrijsko zvezna z redom n , če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda C^n .

definicija regularne ploskve razloži lokalnost?

Naj bosta $R : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $S : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji

Definicija 2.2. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n -zveznostjo vzdolž krivulje C , če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstaja lokalno regularna C^n reparametrizacijska funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, da je $f(x_0, y) = (u_0, y)$ za vsak $y \in I_0$ in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} R \Big|_{(x_0, y)} = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} (S \circ f) \Big|_{(x_0, y)} \quad \text{za } m+k = 1, \dots, n,$$

kjer je I_0 neka okolica y_0 .

Zaradi stikanja ploskev v krivulji C so delni odvodi parametrizacij po spremenljivki y vzdolž krivulje C enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le delne odvode po spremenljivki x . ali je to dovolj razloženo? najbrž moram dodati $y=v$!!!! (glej vir, dokaz izreka1) dodati sliko? Te delne odvode imenujemo **crossboundary derivatives**.

Oglejmo si pogoje za različne stopnje geometrijske zveznosti, ki nam jih ta definicija da. to še ni dokončno. zelo grdo ali naj to naredim kot primer? Če so parametrizaciji R in S , krivulja C in reparametrizacijska funkcija f kot v definiciji sklic, je za geometrijsko zveznost razreda G^0 med njima dovolj pogoj $R = S \circ f$ vzdolž C . oziroma kar $R=S$ vzdolž C ? Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje G^1 , mora poleg pogoja za G^0 veljati še $R_x = S_u u_x + S_v v_x$ vzdolž C , za G^2 mora poleg pogojev za G^0 in G^1 veljati še G^2 : $R_{xx} = S_{uu} u_x^2 + 2S_{uv} u_x v_x + S_{vv} v_x^2 + S_{uu} u_{xx} + S_{vv} v_{xx}$ vzdolž C in tako dalje.

Splošneje, grdo za geometrijsko zveznost stopnje n (ali se tako reče?), kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ velja naslednje:

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j} \Big|_C = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \Big|_C$$

za vsak $j = 0, 1, \dots, n$. Tu z A_{jkh} označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = j \\ m_1, \dots, m_k > 0}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} u_x^{m_1} \dots u_x^{m_h} v_x^{m_{h+1}} \dots v_x^{m_k} \Big|_C.$$

Z $u_x^{m_i}$ je označen m_i -ti delni odvod funkcije u po x . ali je treba to grozo dokazati?

kaj je s to lemo?

Lema 2.3. *?? ali je dokaz tega potreben?* Naj bo $f(u, v)$ funkcija razreda C^n in $u(t)$ in $v(t)$ reparametrizaciji razreda C^n . Potem

$$\frac{d^k f}{dt^k} = \sum_{i=1}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} u^{(m_1)} \dots u^{(m_h)}(v) v^{(m_{h+1})} \dots v^{(m_i)} \cdot \frac{\partial^i f}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer $k = 1, \dots, n$ ter

$\mathbf{m}_i = (m_1, m_2, \dots, m_i)$, $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \dots + m_i$ in $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i! m_1! \dots m_i!}$.

preoblikuj to lemo, da bo koeficient A kot zgoraj. dokaz najdeš nekje k piše v viru

zdaj si pogledamo ekvivalentno/alternativno definicijo G zveznosti? s pomočjo **junction functions**? Z uvedbo funkcij $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in β_1, \dots, β_n pridemo do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti. funkcije $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in β_1, \dots, β_n imenujemo **junction/connection functions**

Naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in β_1, \dots, β_n funkcije razreda C^n ene spremenljivke. Definirajmo:

$$u(x, y) = u_0 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \alpha_i(y) (x - x_0)^i$$

$$v(x, y) = y + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \beta_i(y) (x - x_0)^i$$

ali moram povsod pisati, kam te funkcije slikajo? recimo paramterizacije in alfa, beta itd.

Opazimo, da za $i = 1, \dots, k$ velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y),$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Stične funkcije lahko izberemo skoraj povsem poljubno. Upoštevati moramo le dva pogoja, ki omejujeta izbiro funkcije α_1 . Prvi pogoj sledi iz zahteve po regularnosti reparametrizacijske funkcije f .

def. regularnosti? kaj je lokalna regularnost?

Reparametrizacijska funkcija f je regularna vzdolž C , če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearne neodvisna, torej če velja $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0$.

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ vzdolž krivulje C in ju skušajmo zapisati s pomočjo stičnih funkcij. Za odvod po spremenljivki x velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y) \right) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)),$$

pri čemer smo uporabili opazko **sklic**. Če razpišemo odvod po spremenljivki y , pa dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) \right) = (0, 1).$$

Vektorski produkt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0, 1) = \alpha_1(y)$$

Sledi, da je reparametrizacija regularna, natanko tedaj **?**, ko za pripradajočo **junction?** funkcijo α_1 velja $\alpha_1(y) \neq 0$ vzdolž stične krivulje C . **ali je potreben podatek "vzdolž krivulje C"? to moraš nekako motivirati: zakaj si to sploh pogledamo? zato, ker to predstavlja pogoj za α_1 ?**

Drugo, na kar moramo paziti pri izbiri funkcije α_1 pa je njen predznak. Pri izbiri napačnega predznaka namreč lahko pride do stika v obliki "špice". **tega ne razumem čisto. tu bi bil potreben kakšen primer.**

Vpeljava stičnih funkcij nas pripelje do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti.

Definicija 2.4. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n -zveznostjo vzdolž krivulje C , če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstajajo take funkcije razreda C^n ene spremenljivke $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in β_1, \dots, β_n , da $\alpha_1(y) \neq 0$, pri čemer mora imeti α_1 ustrezen predznak **??**, in da velja

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j} \Big|_C = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \Big|_C$$

za vsak $j = 0, 1, \dots, n$. Tu z A_{jkh} označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = j \\ m_1, \dots, m_k > 0}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} \alpha_1 \dots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \dots \beta_{m_k} \Big|_C$$

popravi A, indekse pri alfah in betah

kaj je s tem izrekom?

Izrek 2.5. Naj bosta $R(u_r, v_r)$ in $S(u_s, v_s)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(v) = R(u_{r0}, v) = S(u_{s0}, v)$. Ploskvi R in S sta G^n -zvezni vzdolž skupnega roba natanko tedaj ko obstajajo funkcije $p_i(v)$, $q_i(v)$, $i = 1, \dots, n$, da velja

$$\frac{\partial^k S}{\partial u_s^k} \Big|_C = \sum_{i=1}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} p_{m_1}(v) \dots p_{m_h}(v) q_{m_{h+1}}(v) \dots q_{m_i}(v) \cdot \frac{\partial^i R}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer $k = 1, \dots, n$ ter

$\mathbf{m}_i = (m_1, m_2, \dots, m_i)$, $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \dots + m_i$ in $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i! m_1! \dots m_i!}$.

ta izrek je ubistvu isto kot ekvivalentna definicija. ali je bolje, da ekvivalentno definicijo zapišem kot izrek? pomembno!!: kaj so potrebni in kaj zadostni pogoji? kaj sledi iz česa? _____

3 G^1 zveznost

nekaj v stilu, da se bomo natančneje ukvarjali z G^1 zveznostjo. lahko povem, da je to zveznost tangentnih ravnin oz. zveznost enotskih normal in da si bomo ogledali, kako do tega pridemo.

Imejmo ploskvi $R(x, y)$ in $S(u, v)$, ki se v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$ stikata z geometrijsko zveznostjo G^1 . Sledi, da je $R_y(x_0, y) = S_y(x_0, y) = S_v(u_0, y)$. Kot smo že videli **ugh** v poglavju **sklic**, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri x .

Ker je stik obeh ploskev v C G^1 -zvezen, po definiciji **sklic** obstajata funkciji α_1 in β_1 , kjer je $\alpha_1(y) \neq 0$ za vsak y in ima ustrezen predznak, da velja:

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

Zgornja enačba nam pove, da so parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ v vsaki točki y linearno neodvisni. Torej so v vsaki točki y del iste tangentne ravnine na krivuljo C . Zato torej G^1 -zveznost imenujemo tudi zveznost tangentnih ravnin.

v predstavitvi sem šla tako: $R(x_0, y) = S(u_0, y)$, $R_x(x_0, y) = u_x(x_0, y)S_u(u_0, y) + v_x(x_0, y)S_v(u_0, y)$, $R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y)$ **na mestu najbrž kakšna slika**

Oglejmo si še, od kod pride poimenovanje "zveznost enotskih normal". Znova opazujemo enačbo

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

ali je bolje, da se tu samo skličem? Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z $R_y(x_0, y)$:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times R_y(x_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y) \times R_y(x_0, y).$$

Upoštevamo lahko, da je $R_y(x_0, y) = S_v(u_0, y)$. Dobimo:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y).$$

Od tod vidimo, da sta normalni na ploskvi R in S na njunu stični krivulji vzporedni. **grdo** Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normalni:

$$\frac{R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)}{\|R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)\|} = \frac{S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)}{\|S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)\|}.$$

tukaj pride nek vezni tekst? ali pa je to ok? Ker parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ ležijo na isti tangentni ravnini, velja tudi: **zelo grdo**

$$\det(R_x(x_0, y), S_u(u_0, y), S_v(u_0, y)) = 0.$$

Torej obstajajo funkcije povedati kakšne, iz kje kam? λ , μ in γ , da velja: ali moram to kaj bolj natančno utemeljiti? treba motivirati, zakaj to gledamo

$$\lambda(y)R_x(x_0, y) = \mu(y)S_u(u_0, y) + \gamma(y)S_v(u_0, y).$$

Če predpostavimo, da sta ploskvi R in S polinomski, lahko tudi za λ , μ in γ izberemo polinome, izberemo? ali niso točno določeni? kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

najbrž lahko poveš, da se bomo v naslednjih poglavjih ukvarjali z izbiro teh polinomov

mogoče moraš tu napisati, kako se pride do teh polinomov: tiste prve komponente. ampak tega ne razumem.

4 Bézierjeve ploskve

pogledamo si poseben primer polinomskih param ploskev, ki so tudi uporabne v praksi

i -ti Bernsteinov bazni polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1]$$

Lastnosti:

- $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$
- $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$

Definicija 4.1. Naj bodo dane točke $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$. Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{b}^{m,n} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo kontrolne točke, poligon, ki jih povezuje, pa kontrolni poligon.

Velja: $\mathbf{b}^{m,n}(0, 0) = \mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}^{m,n}(1, 0) = \mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b}^{m,n}(0, 1) = \mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b}^{m,n}(1, 1) = \mathbf{b}_{m,n}$

Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v),$$

kjer $\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$,

$\Delta^{0,1} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$,

$\Delta^{r,0} \mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i,j}$,

$\Delta^{0,s} \mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j}$.

5 G^n -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama

6 Primeri konstrukcij G^1 ploskev

Dve bikubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$R(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

ki se stikata v $C(v) = R(0, v) = S(0, v)$.

Literatura

- [1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx>.
- [2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.
- [3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.
- [4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

