UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

NASLOV VAŠEGA DELA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot .

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

Podpis mentorja:

Naslov vašega dela

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: ,

Keywords: ,

1 Uvod

začneš s tem, da bi radi različne oblike opisali s čim bolj enostavnimi elementi. v ta namen uporabljamo enostavne parametrične ploskve (zelo pogosto polinomske npr. bezierove), ki jih nato lepimo skupaj v kompleksnejše oblike. želimo, da bi bil stik dveh takih ploskev videti gladek, ploskvi morata biti zato prek skupne meje zvezni. predstaviš običajno zveznost, poveš, zakaj ni ustrezna

lahko najprej poveš, kaj je c zveznost, potem pa navedeš primer, kjer c zveznost ne pride v poštev

geometrijska zveznost je zelo uporabna v praksi, ker lahko modeliramo različne situacije, kjer c zveznost odpove (npr. zvezda, suitcase corner, house corner)

je invarianta za parametrične transformacije, tj neodvisna od parametrizacije

geometrijska zveznost je posplošitev c zveznosti. torej vse nedegenerirane (kaj to pomeni?) ploskve, ki so c zvezne, so tudi geometrisko zvezne, niso pa vse geometrijsko zvezne ploskve tudi c zvezne

s čim se to delo ukvarja in kaj bo v kakšnem poglavju

2 Geometrijska zveznost parametrično podanih krivulj in ploskev

nek uvodni tekst?

Krivulje in ploskve lahko podajamo na različne načine: eksplicitno, implicitno ali parametrično. V nadaljevanju se bomo ukvarjali s parametrično podanimi krivuljami in ploskvami, omejili pa se bomo tudi na krivulje in ploskve, ki so regularne. Oglejmo si definicijo parametrično podane krivulje in regularne parametrizacije krivulje.

Definicija 2.1. Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval in

$$\begin{aligned}&\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3,\\ &\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))\end{aligned}$$

injektivna preslikava razreda C^1. Tedaj je $\mathbf{R} = \{\mathbf{g}(t); t \in I\}$ *parametrično podana krivulja v* $\mathbb{R}^3$. Pravimo, da je v okolici točke $t_0 \in I$ parametrizacija $\mathbf{g}$ *regularna*, če velja

$$g_1'(t_0)^2 + g_2'(t_0)^2 + g_3'(t_0)^2 \neq 0.$$

Parametrizacija $\mathbf{g}$ je *regularna parametrizacija krivulje* $\mathbf{R}$, če velja

$$g_1'(t)^2 + g_2'(t)^2 + g_3'(t)^2 \neq 0 \text{ za } t \in I.$$

Podobno definiramo tudi parametrično podane ploskve in njihove regularne parametrizacije.

Definicija 2.2. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica in

$$\begin{aligned}&\mathbf{F} : K \to \mathbb{R}^3,\\ &\mathbf{F}(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))\end{aligned}$$

injektivna preslikava razreda C^1. Potem je $\mathbf{S} = \{\mathbf{F}(u,v); (u,v) \in K\}$ *parametrično podana ploskev v* $\mathbb{R}^3$. Pravimo, da je v okolici točke $(u_0, v_0) \in K$ parametrizacija $\mathbf{F}$ *regularna*, če je rang njene Jacobijeve matrike v tej točki maksimalen, torej če velja

$$\operatorname{rang}(D\mathbf{F})(u_0,v_0) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial 2}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{bmatrix} = 2.$$

Parametrizacija $\mathbf{F}$ je *regularna parametrizacija ploskve* $\mathbf{S}$, če velja

$$\operatorname{rang}(D\mathbf{F})(u,v) = 2 \text{ za } (u,v) \in K.$$

Opomba 2.3. Pogoj v definiciji 2.2, da je za parametrizacijo ploskve $\mathbf{F}$ rang njene Jacobijeve matrike $\operatorname{rang}(D\mathbf{F})(u,v) = 2$, je enakovreden pogoju, da sta v vsaki točki ploskve tangentna vektorja

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_3}{\partial u}(u,v) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$$

na ploskev linearno neodvisna oziroma če je v vsaki točki normala na ploskev neničelna.

2.1 Geometriska zveznost krivulj

Preden se lotimo geometrijske zveznosti ploskev, si najprej oglejmo nekoliko bolj intuitivno definicijo geometrijske zveznosti stika dveh krivulj. To bomo v nadaljevanju posplošili na definicijo geometrijske zveznosti stika dveh ploskev.

Definicija 2.4. Naj bosta $\mathbf{p} : I_1 \to \mathbb{R}^d$ 2? ali d? in $\mathbf{q} : I_2 \to \mathbb{R}^d$ parametrično podani krivulji, kjer sta I_1 in I_2 intervala v $\mathbb{R}$. Krivulji $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ naj se stikata v neki točki, torej naj obstajata parametra $t_1 \in I_1$ in $t_2 \in I_2$, da je $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{q}(t_2)$. Pravimo, da se krivulji v skupni točki stikata z *geometrijsko zveznostjo reda* n oziroma z G^n*-zveznostjo*, če v okolici I_0 parametra t_1 obstaja regularna reparametrizacijska funkcija $f : I_0 \to I_2$, da velja $f(t_1) = t_2$, $\frac{df}{dt}(t_1) > 0$?? ter

$$\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{p}(t)\Big|_{t=t_1} = \frac{d^k}{dt^k}(\mathbf{q} \circ f)(t)\Big|_{t=t_1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

slika

Da sta krivulji $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ G^0-zvezni, mora veljati le, da se ujemata v skupni točki, oziroma da je $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{q}(t_2)$. Za G^1 zveznost mora poleg pogoja za G^0-zveznost veljati še naslednje:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_1) = \frac{d}{dt}(\mathbf{q} \circ f)(t_1) = \frac{d}{dt}(\mathbf{q} \circ f)(t_1)\frac{df}{dt}(t_1). \tag{2.1}$$

Za G^2 pa mora poleg pogojev za G^0-zveznost in G^1-zveznost veljati še

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p}(t_1) = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{q} \circ f)(t_1)\left(\frac{df}{dt}(t_1)\right)^2 + \frac{d}{dt}(\mathbf{q} \circ f)(t_1)\frac{d^2 f}{dt^2}(t_1).$$

V splošnem pogoj za G^n-zveznost krivulj zapišemo kot

$$\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{p}(t_1) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i}\frac{d^{m_1}f}{dt^{m_1}}(t_1)\cdots\frac{d^{m_i}f}{dt^{m_i}}(t_1)\frac{d^i}{dt^i}\mathbf{q}(t_1)$$

za $k = 1, \ldots, n$, kjer je $A^k_{m_i} = \frac{k!}{i!m_1!\cdots m_i!}$.

Oglejmo si, kakšna je geometrijska interpretacija G^1-zveznosti. Iz enačbe (2.1) je razvidno, da sta vektorja $\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_1)$ in $\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t_1)$, ki predstavljata odvoda obeh krivulj v stični točki, vzporedna. Ker smo v definiciji 2.4 zahtevali, da je odvod reparametrizacijske funkcije f v stični točki strogo pozitiven, imata tangenti na krivulji isto smer. Torej velja, da imata obe krivulji v skupni točki enako enotsko normalo:

$$\frac{\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_1)}{||\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_1)||} = \frac{\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t_1)}{||\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t_1)||}.$$

Enotska normala se torej vzdolž obeh krivulj zvezno spreminja.

2.2 Geometrijska zveznost ploskev

Najprej si oglejmo povsem splošno definicijo geometrijske zveznosti neke ploskve.

Definicija 2.5. Ploskev pripada razredu G^n oziroma je *geometrijsko zvezna z redom* n, če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda C^n.

V nadaljevanju se bomo ukvarjali s ploskvami, ki so same po sebi že geometrijsko zvezne, zanimalo nas bo le, kakšni pogoji morajo veljati, da je tudi stik dveh takih ploskev geometrijsko zvezen, torej da je celotna ploskev, ki jo dobimo, ko zlepimo dve ploskvi, geometrijsko zvezna.

Definicija 2.6. Naj bosta $\mathbf{R}(x, y)$ in $\mathbf{S}(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $\mathbf{C}(y) = \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u_0, y)$. Pravimo, da se $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ *stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje* $\mathbf{C}$, če za vsako točko $b_0 = \mathbf{C}(y_0)$ obstaja lokalna regularna C^n reparametrizacijska funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, da je $f(x_0, y) = (u_0, y)$ za vsak $y \in I_0$ in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k}\mathbf{R}(x_0, y) = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k}(\mathbf{S}\circ f)(x_0, y) \quad \text{za } m + k = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

kjer je I_0 neka okolica y_0.

Zaradi stikanja ploskev v krivulji $\mathbf{C}$ oziroma, ker vzdolž krivulje $\mathbf{C}$ velja $y = v$, so parcialni odvodi parametrizacij po spremenljivki y vzdolž krivulje $\mathbf{C}$ enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le parcialne odvode po spremenljivki x. dodati sliko? Te parcialne odvode imenujemo crossboundary derivatives.

Oglejmo si, kakšni pogoji morajo veljati v primeru, ko želimo, da je stik med dvema ploskvama G^2 zvezen.

Primer 2.7. Naj bodo dane parametrizaciji ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, krivulja $\mathbf{C}$ in reparametrizacijska funkcija f kot v definiciji 2.6. Vpeljimo še oznako $E = \{(x_0, y); y \in [0,1]\}$ za del domene, nad katerim je definirana krivulja $\mathbf{C}$. Da bo stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^2-zvezen, mora po definiciji 2.6 in ugotovitvi, da je dovolj obravnavati le odvode po spremenljivki x, veljati

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(x_0, y) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}(\mathbf{S} \circ f)(x_0, y) \quad \text{za } k = 0, 1, 2,$$

za vsak y v neki okolici točke y_0. Da dosežemo zgolj geometrijsko zveznost razreda G^0, je dovolj, da med ploskvama $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ velja pogoj

$$\mathbf{R}(x_0, y) = (\mathbf{S} \circ f)(x_0, y), \text{ oziroma } \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u(x_0, y), v(x_0, y)).$$

Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje G^1, mora poleg pogoja za G^0 veljati še

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(x_0, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{S} \circ f)(x_0, y) \quad y \in [0, 1].$$

Če ustrezno razpišemo parcialni odvod funkcije $\mathbf{S} \circ f$, se ta pogoj prepiše v

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(x_0, y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u(x_0, y), v(x_0, y))\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u(x_0, y), v(x_0, y))\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y), \quad y \in [0, 1].$$

Za G^2 mora poleg pogojev za G^0 in G^1 veljati še

$$\left.\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^2}\right|_E = \left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right|_E + 2\left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right|_E + \left.\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right|_E + \\ + \left.\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_E + \left.\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_E.$$

V splošnem se pogoj za geometrijsko zveznost stopnje n, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$, zapiše kot:

$$\left.\frac{\partial^k \mathbf{R}}{\partial x^k}\right|_E = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \frac{\partial^{m_1} u}{\partial x^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_h} u}{\partial x^{m_h}} \frac{\partial^{m_{h+1}} v}{\partial x^{m_{h+1}}} \cdots \left.\frac{\partial^{m_i} v}{\partial x^{m_i}} \frac{\partial^i \mathbf{S}}{\partial u^h \partial v^{i-h}}\right|_E \tag{2.3}$$

za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$. Tu z $A^k_{m_i}$ iznačujemo koeficient

$$A^k_{m_i} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}.$$

Z $u_x^{m_i}$ je označen m_i-ti delni odvod funkcije u po x, z oznako $|m_i|$ pa označimo vsoto $|m_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$, kjer velja $m_j > 0$ za vsak $j = 1, \ldots, i$.

dokaz z indukcijo?

Taka definicija geometrijske zveznosti med dvema ploskvama sama po sebi pri konstrukciji geometrijsko zveznih ploskev ni najbolj koristna. V nadaljevanju bo veliko uporabnejši naslednji izrek.

Izrek 2.8. *Naj bosta* $\mathbf{R}(x,y)$ *in* $\mathbf{S}(u,v)$ *regularni* C^n *parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji* $\mathbf{C}(y) = \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u_0, y)$. *Ploskvi* $\mathbf{R}$ *in* $\mathbf{S}$ *sta vzdolž skupnega roba* G^n*-zvezni natanko tedaj, ko obstajajo* C^n *funkcije* $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)$ *in* $\beta_1(y) \ldots, \beta_n(y)$, *da velja*

$$\left.\frac{\partial^k \mathbf{R}}{\partial x^k}\right|_{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_i} \left.\frac{\partial^i \mathbf{S}}{\partial u^h \partial v^{i-h}}\right|_{\mathbf{C}}, \tag{2.4}$$

za $k = 1, \ldots, n$, *kjer je* $A^k_{m_i} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$. *Veljati mora tudi, da je* $\alpha_1(y) \neq 0$ *za* $y \in [0,1]$ *in da ima na* $[0,1]$ *pozitiven predznak, če sta ploskvi enako parametrizirani, oziroma negativen predznak, če sta nasprotno parametrizirani.*

Opomba 2.9. Ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ sta enako parametrizirani, če velja $\mathbf{R}(1,y) = \mathbf{S}(0,y)$ ali $\mathbf{R}(0,y) = \mathbf{S}(1,y)$. V tem primeru mora biti predznak funkcije $\alpha_1(y)$ pozitiven. Nasprotno sta parametrizirani, če velja $\mathbf{R}(0,y) = \mathbf{S}(0,y)$ ali $\mathbf{R}(1,y) = \mathbf{S}(1,y)$. V tem primeru mora biti predznak funkcije $\alpha_1(y)$ negativen. Če bi napačno izbrali predznak funkcije $\alpha_1(y)$, bi imeli ploskvi na stiku obliko "špice".

Opomba 2.10. Funkcije $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)$ in $\beta_1(y) \ldots, \beta_n(y)$ imenujemo *stične funkcije* junction/connection functions

Dokaz. Najprej prodpostavimo, da obstajajo C^n funkcije $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)$ in $\beta_1(y) \ldots, \beta_n(y)$, za katere velja enakost (2.4) v izreku, in da je $\alpha_1(y) \neq 0$. Dokazati želimo, da od tod sledi G^n-zveznost stika ploskev $\mathbf{R}(x,y)$ in $\mathbf{S}(u,v)$.

Definirajmo reparametrizacijsko funkcijo $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ na naslednji način:

$$u(x,y) = u_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \alpha_i(y)(x - x_0)^i,$$

$$v(x,y) = y + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \beta_i(y)(x - x_0)^i.$$

Ker so po predpostavki funkcije α_i in β_i, $i = 1, \ldots, n$ razreda C^n, tudi funkcija f pripada temu razredu. Opazimo še, da za $i = 1, \ldots, k$ velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y), \qquad \frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Če dobljeno vstavimo v enačbo (2.4), dobimo ravno enačbo (2.3), od koder zaradi ujemanja ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ v krivulji $\mathbf{C}$ sledi tudi enakost (2.2). Pokazati moramo le še, da je f lokalno regularna.

Vemo, da je reparametrizacijska funkcija f regularna vzdolž $\mathbf{C}$, če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearno neodvisna, torej če velja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0.$$

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ vzdolž krivulje $\mathbf{C}$ in ju skušajmo zapisati s pomočjo stičnih funkcij. Za odvod po spremenljivki x velja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y)\right) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)).$$

Če razpišemo odvod po spremenljivki y, pa dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y)\right) = (0, 1).$$

Vektorski produkt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0, 1) = \alpha_1(y).$$

Vektorski produkt obeh parcialnih odvodov prvega reda je torej različen od 0 natanko tedaj, ko je $\alpha_1(y) \neq 0$, kar pa velja po začetni predpostavki. Sledi, da je reparametrizacijska funkcija f regularna.

Pokazali smo torej, da obstaja lokalno regularna reparametrizacijska funkcija f, ki ustreza pogojem iz definicije 2.6, od koder sledi, da se ploskvi **R** in **S** stikata z G^n-zveznostjo.

Dokažimo izrek še v drugo smer. Če predpostavimo, da sta ploskvi R in S na stiku G^n-zvezni, obstoj funkcij $\alpha_1(y), \dots, \alpha_n(y)$ in $\beta_1(y) \dots, \beta_n(y)$ in enačba (2.4) sledjo neposredno iz definicije 2.6 in enačbe (2.3), če definiramo $\alpha_i(y) = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y)$ in $\beta_i(y) = \frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y)$ za $i = 1, \dots, n$.

Ker je stik ploskev **R** in **S** G^n-zvezen, po definiciji 2.6 obstaja lokalno regularna reparametrizacijska funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, ki ustreza pogojem iz definicije 2.6. Videli smo že, da je funkcija f regularna natanko tedaj, ko je $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) = \alpha_1(y) \neq 0$. Torej smo okazali še neničelnost funkcije α_1, s čimer je dokaz končan. □

nekaj za zaključek poglavja in napeljavo na novo poglavje

2.3 Geometrijska interpretacija G^1-zveznosti

V nadaljevanju se bomo nekoliko natančneje ukvarjali z G^1-zveznostjo med ploskvami. V tem podpoglavju si oglejmo geometrijsko interpretacijo G^1-zveznosti, ki bo kasneje služila tudi v praktičnih primerih.

Imejmo regularni C^1 parametrizaciji ploskev $\mathbf{R}(x, y)$ in $\mathbf{S}(u, v)$, ki se v krivulji $\mathbf{C}(y) = \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u_0, y)$ stikata z geometrijsko zveznostjo G^1. Sledi, da je $\mathbf{R}_y(x_0, y) = \mathbf{S}_y(x_0, y) = \mathbf{S}_v(x_0, y)$. Kot smo že videli v poglavju 2, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri x.

Ker je stik obeh ploskev v **C** G^1-zvezen, po izreku 2.8 obstajata funkciji α_1 in β_1, kjer je $\alpha_1(y) \neq 0$ za vsak y in ima ustrezen predznak, da velja:

$$\mathbf{R}_x(x_0, y) = \alpha_1(y)\mathbf{S}_u(u_0, y) + \beta_1(y)\mathbf{S}_v(u_0, y). \tag{2.5}$$

Zgornja enačba nam pove, da parcialni odvodi $\mathbf{R}_x(x_0, y)$, $\mathbf{S}_u(u_0, y)$ in $\mathbf{S}_v(u_0, y)$ v vsaki točki y ležijo v isti tangentni ravnini na krivuljo **C**. Tangentna ravnina na ploskev **R** se na krivulji **C** ujema s tangentno ravnino na ploskev **S**, kar pomeni, da se tangentna ravnina zvezno spreminja vzdolž zlepka obeh ploskev. Zato torej G^1-zveznost imenujemo tudi *zveznost tangentnih ravnin*.

slika

Še eno ime za G^1-zveznost je *zveznost enotskih normal.* Oglejmo si, od kod pride to poimenovanje. Znova opazujemo enačbo (2.5). Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z $\mathbf{R}_y(x_0, y)$:

$$\mathbf{R}_x(x_0, y) \times \mathbf{R}_y(x_0, y) = \alpha_1(y)\mathbf{S}_u(u_0, y) \times \mathbf{R}_y(x_0, y) + \beta_1(y)\mathbf{S}_v(u_0, y) \times \mathbf{R}_y(x_0, y).$$

Upoštevamo, da je $\mathbf{R}_y(x_0, y) = \mathbf{S}_v(u_0, y)$ in dobimo:

$$\mathbf{R}_x(x_0, y) \times \mathbf{R}_y(x_0, y) = \alpha_1(y)\mathbf{S}_u(u_0, y) \times \mathbf{S}_v(u_0, y). \tag{2.6}$$

Vektorski produkt $\mathbf{R}_x(x_0, y) \times \mathbf{R}_y(x_0, y)$ predstavlja normalo na ploskev $\mathbf{R}$ v točki (x_0, y) na krivulji $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}_u(u_0, y) \times \mathbf{S}_v(u_0, y)$ pa normalo na ploskev $\mathbf{S}$ na krivulji $\mathbf{C}$. Enačba (2.6) pove, da sta normali na ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ na njunu skupni krivulji $\mathbf{C}$ vzporedni in imata enako smer, kar nam zagotovi ustrezno izbran predznak funkcije $\alpha_1(y)$. Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normali:

$$\frac{\mathbf{R}_x(x_0, y) \times \mathbf{R}_y(x_0, y)}{||\mathbf{R}_x(x_0, y) \times \mathbf{R}_y(x_0, y)||} = \frac{\alpha_1(y)\mathbf{S}_u(u_0, y) \times \mathbf{S}_v(u_0, y)}{||\alpha_1(y)\mathbf{S}_u(u_0, y) \times \mathbf{S}_v(u_0, y)||}.$$

Enotska normala se zato zvezno spreminja vzdolž zlepka obeh ploskev, od koder poimenovanje *zveznost enotskih normal.*

Pogoj, da parcialni odvodi $\mathbf{R}_x(x_0, y)$, $\mathbf{S}_u(u_0, y)$ in $\mathbf{S}_v(u_0, y)$ ležijo na isti tangentni ravnini, je možno izraziti tudi na naslednja dva načina. Zgornji parcialni odvodi so del iste tangentne ravnine natanko tedaj ko velja

$$\det(\mathbf{R}_x(x_0, y), \mathbf{S}_u(u_0, y), \mathbf{S}_v(u_0, y)) = 0.$$

Ta pogoj pa je ekvivalenten pogoju, da obstajajo skalarne funkcije λ, μ in γ, da velja

$$\lambda(y)\mathbf{R}_x(x_0, y) = \mu(y)\mathbf{S}_u(u_0, y) + \gamma(y)\mathbf{S}_v(u_0, y).$$

Če predpostavimo, da sta ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ polinomski, lahko tudi za λ, μ in γ izberemo polinome ali racionalne funkcije, kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

V nadaljevanju tega dela se bomo ukvarjali z vrsto parametričnih ploskev, imenovano Bézierjeve ploskve, in s pogoji, ki morajo veljati zanje, da je stik med njimi geometrijsko zvezen.

3 Konstrukcija geometrijsko zveznih Bezierjevih ploskev iz tenzorskega produkta

3.1 Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta

V tem podpoglavju bodo predstavljene Bézierjeve krivulje in Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta. povej, v katerem viru so dokazi itd. Bézierove krivulje in ploskev so polinomske, podajamo jih s pomočjo Bernsteinovih baznih polinomov.

Definicija 3.1. Za $i = 0, 1, \ldots, n$ je i-ti *Bérnsteinov bazni polinom* stopnje n definiran kot

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1].$$

Za Bernsteinove bazne polinome velja, da je $B_i^n(0) = 0$ za vse vrednosti i razen za $i = 0$. Podobno je $B_i^n(1) = 0$ za vse vrednosti i razen za $i = n$. Poleg tega velja še $B_i^n(t) \geq 0$ za $t \in [0,1]$. Ena izmed lastnosti teh polinomov je še, da tvorijo particijo enote, torej da je $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$. Še en pomemben izrek, ki velja zanje pa je naslednji.

Izrek 3.2. *Bernsteinovi bazni polinomi sestavljajo bazo prostora polinomov stopnje največ n oziroma prostora $\mathbb{P}_n = Lin\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$.*

Dokaz. Dokaza se lotimo z indukcijo po n. Za $n = 0$ izrek očitno velja. Naj bo sedaj $n = 1$. Imamo dva Bernsteinova bazna polinoma stopnje 1, $B_0^1(t) = 1 - t$ in $B_1^1(t) = t$. Pokazali bomo, da lahko bazo prostora $\mathbb{P}_1$, torej polinoma 1 in t izrazimo kot linearno kombinacijo polinomov $B_0^1(t)$ in $B_1^1(t)$. Velja $1 = B_0^1(t) + B_1^1(t) \text{ter} t = B_1^1(t)$, kar pomeni, da lahko vsak element prostora $\mathbb{P}_1$ izrazimo z $B_0^1(t)$ in $B_1^1(t)$, torej ta dva polinoma tvorita bazo prostora $\mathbb{P}_1$.

Sedaj predpostavimo, da izrek velja za stopnjo $n-1$. Pokazali bomo, da potem velja tudi za stopnjo n. Najprej pokažimo, da so polinomi $B_i^n(t)$, kjer je $i = 0, 1, \ldots, n$, linearno neodvisni. Naj bo

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i^n(t) = 0, \tag{3.1}$$

kjer je $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Pokazali bomo, da je to velja natanko tedaj, ko je $\alpha_i = 0$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Najprej v enačbo (3.1) vstavimo $t = 0$ in dobimo $\alpha_0 = 0$. Če vstavimo $t = 1$ pa dobimo $\alpha_n = 0$. Če sedaj odvajamo izraz v (3.1), dobimo $\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d}{dt} B_i^n(t) = 0$. Najprej si posebej oglejmo, kako se izraža odvod Bernsteinovega polinoma. Velja

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \binom{n}{i} t^i (n-i)(1-t)^{n-i-1} = \\
&= n(\binom{n-1}{i-1} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1}) = \\
&= n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).
\end{aligned}$$

Torej velja

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= n \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) = n \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_{i-1}^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^{n} B_i^{n-1}(t) = \\
&= n \sum_{i=-1}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \alpha_{i+1} - n \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i B_i^{n-1}(t) = \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i^{n-1}(t) = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Tu smo v drugi vrstici upoštevali, da je $B_n^{n-1} \equiv 0$ in v tretji, da je $B_{-1}^{n-1} \equiv 0$, ter izvedli premik indeksa.

Izpeljali smo, da je izraz, ki ga dobimo v (3.2) enak 0 natanko tedaj, ko velja $\alpha_{i+1} - \alpha_i = 0$, saj so po indukcijski predpostavki polinomi $B_i^{n-1}(t)$, kjer je $i = 0, 1, \ldots, n-1$, linerano neodvisni. Ker velja $\alpha_0 = \alpha_n = 0$, je tudi $\alpha_i = 0$ za $i = 1, \ldots, n-1$, s čimer smo pokazali, da so Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n med sabo linearno neodvisni. Ker imamo $n+1$ Bernsteinovih baznih polinomov stopnje n, zato tvorijo bazo prostora $\mathbb{P}_n$. □

V bazi iz Bernsteinovih baznih polinomov podajamo Bézierjeve krivulje, ki so definirane na naslednji način.

Definicija 3.3. Naj bodo dane točke $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d, i = 0, 1, \ldots, n$. *Bézierova krivulja* je parametrično podana krivulja

$$\mathbf{B}_n : [0,1] \to \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{B}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Točke $\mathbf{b}_i$ imenujemo *kontrolne točke krivulje*, poligon, ki jih povezuje, pa *kontrolni poligon.*

Pomembna lastnost Bézierjevih krivulj, ki sledi iz lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov, je, da interpolirajo prvo in zadnjo kontrolno točko. Torej velja $\mathbf{B}_n(0) = \mathbf{b}_0$ in $\mathbf{B}_n(1) = \mathbf{b}_n$.

V nekaterih primerih v nadaljevanju bo, da dosežemo ujemanje stopenj Bézierjevih krivulj v enačbah, potrebno zvišati oziroma znižati stopnjo Bézierjeve krivulje, torej opisati oziroma aproksimirati dano krivuljo s krivuljo višje oziroma nižje stopnje. Naj bodo $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ kontrolne točke Bézierjeve krivulje stopnje n. To krivuljo lahko opišemo s krivuljo stopnje $n+k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$, njene kontrolne točke pa se izražajo na naslednji način:

$$\mathbf{b}_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{k}{i-j}}{\binom{n+k}{i}}. \tag{3.3}$$

V nadaljevanju, ko bomo preučevali geometrijsko zveznost Bézierjevih ploskev, bomo imeli opravka predvsem z odvodi Bézierjevih krivulj in ploskev. Imejmo Bézierjevo krivuljo $\mathbf{B}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ in naj bo $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Potem se n-ti odvod te krivulje izračuna kot

$$\frac{d^r}{dt^r}\mathbf{B}_n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_i B_i^{n-r}(t).$$

Z Δ označujemo operator, ki deluje na kontrolnih točkah in se izraža rekurzivno:

$$\begin{aligned}
&\Delta^0 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i, \\
&\Delta^1 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i, \\
&\Delta^k \mathbf{b}_i = \Delta(\Delta^{k-1} \mathbf{b}_i), \ \text{kjer je } k \in \mathbb{N}, \ k > 1.
\end{aligned}$$

Parametrizacije Bézierjevih krivulj so bile podane v bazi prostora $\mathbb{P}_n$, sestavljeni iz Bernsteinovih baznih polinomov stopnje n. Parametrizacije Bézierjevih ploskev pa podajamo v bazi prostora polinomov dveh spremenljivk. Prostor polinomov dveh spremenljivk lahko izberemo na različne načine. Lahko ga konstruiramo kot tenzorski produkt dveh prostorov polinomov ene spremenljivke. Tenzorski produkt prostorov $\mathbb{P}_m = \mathrm{Lin}\{u^i; i = 0, \ldots, m\}$ in $\mathbb{P}_n = \mathrm{Lin}\{v^j; j = 0, \ldots, n\}$ zapišemo kot $\mathbb{P}_m \otimes \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{m,n} = \mathrm{Lin}\{u^i v^j; i = 0, \ldots, m; j = 0, \ldots, n\}$. Vsebuje torej vse polinome, katerih stopnja je v prvi spremenljivki enaka največ m, v drugi spremenljivki pa največ n. Bazo tega prostora lahko skonsktruiramo kot tenzorski produkt baz prostorov $\mathbb{P}_m$ in $\mathbb{P}_n$. Če sta $\{B_i^m(u); i = 0, \ldots, m\}$ in $\{B_j^n(v); j = 0, \ldots, n\}$ bazi prostorov $\mathbb{P}_m$ in $\mathbb{P}_n$, je torej množica $\{B_i^m(u)B_j^n(v); i = 0 \ldots, m; j = 0, \ldots, n\}$ baza prostora $\mathbb{P}_{m,n}$.

Alternativna izbira za prostor polinomov dveh spremenljivk je prostor $\mathbb{P}_n^2 = \mathrm{Lin}\{u^i v^j; 0 \leq i+j \leq n\}$. Njegovo bazo tvorijo Bernsteinovi polinomi dveh spremenljivk, ki bodo definirani v poglavju ref. Bézierjeve ploskve, podane v bazi prostora $\mathbb{P}_n^2$, imenujemo *trikotne Bézierjeve ploskve*. Podrobneje bodo predstavljene v poglavju ref Bézierjeve ploskve, ki jih podajamo v bazi iz tenzorskih produktov, pa pravimo *Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta*. Definirane so na naslednji način.

Definicija 3.4. Naj bodo dane točke $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. *Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta* je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{B}_{m,n} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{B}_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b_{i,j}} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo *kontrolne točke*, mrežo, ki jih povezuje, pa *kontrolna mreža* ploskve $\mathbf{B}_{m,n}$.

slika

Opazimo lahko, da za Bézierjevo ploskev iz tenzorskega produkta velja naslednje: $\mathbf{B_{m,n}}(0,0) = \mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{B_{m,n}}(1,0) = \mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{B_{m,n}}(0,1) = \mathbf{b}_{0,n}$ in $\mathbf{B_{m,n}}(1,1) = \mathbf{b}_{m,n}$. Parametrizacija torej interpolira vogalne kontrolne točke.

Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta se izraža kot:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{B}_{m,n}(u,v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v), \tag{3.4}$$

Tu z Δ ponovno označujemo rekurzivno definirani operator na kontrolnih točkah:

$$\begin{aligned}
\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}, \\
\Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}, \\
\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i,j}, \\
\Delta^{0,s}\mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j}.
\end{aligned}$$

3.2 C^n-zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama iz tenzorskega produkta

Najprej si oglejmo, kakšni pogoji morajo veljati za dve Bézierjevi ploskvi, da je njun stik C^n-zvezen. Dobljeni rezultat bomo v nadaljevanju primerjali s pogoji za G^n-zveznost.

Imejmo dve Bézierjevi ploskvi

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{r}_{i,j} B_i^m\left(\frac{u-u_1}{u_0-u_1}\right) B_j^n\left(\frac{v-v_0}{v_1-v_0}\right), \qquad u \in [u_0,u_1],\ v \in [v_0,v_1],$$

in

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{s}_{i,j} B_i^m\left(\frac{u-u_1}{u_2-u_1}\right) B_j^n\left(\frac{v-v_0}{v_1-v_0}\right), \qquad u \in [u_1,u_2],\ v \in [v_0,v_1].$$

Ploskvi naj se stikata v krivulji $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(u_1,v) = \mathbf{S}(u_1,v)$, torej naj velja $\mathbf{r}_{0,j} = \mathbf{s}_{0,j}$ za $j = 0,\ldots,n$. S tem dosežemo C^0-zveznost. Da se bosta ploskvi stikali s C^r-zveznostjo, se morajo ujemati njuni odvodi pri $u = u_1$. !?!? do odvoda stopnje r. Zaradi stikanja v krivulji $\mathbf{C}$ je dovolj obravnavati le odvode po spremenljivki u. Veljati mora

$$\frac{\partial^k}{\partial u^k}\mathbf{R}(u,v)|_{u=u_0} = \frac{\partial^k}{\partial u^k}\mathbf{S}(u,v)|_{u=u_0},\ k = 1,\ldots,r.$$

Uporabimo formulo (3.4) za odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(u_0-u_1)^k}\sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{n}\Delta^{k,0}\mathbf{r}_{i,j}B_i^{m-k}\left(\frac{u-u_1}{u_0-u_1}\right)B_i^n\left(\frac{v-v_0}{v_1-v_0}\right)|_{u=u_1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(u_2-u_1)^k}\sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{n}\Delta^{k,0}\mathbf{s}_{i,j}B_i^{m-k}\left(\frac{u-u_1}{u_2-u_1}\right)B_i^n\left(\frac{v-v_0}{v_1-v_0}\right)|_{u=u_1},$$

$$k = 1,\ldots,r.$$

zamiki Sledi

$$\frac{1}{(u_0-u_1)^k}\sum_{j=0}^{n}\Delta^{k,0}\mathbf{r}_{0,j}B_i^n\left(\frac{v-v_0}{v_1-v_0}\right) = \frac{1}{(u_2-u_1)^k}\sum_{j=0}^{n}\Delta^{k,0}\mathbf{s}_{0,j}B_i^n\left(\frac{v-v_0}{v_1-v_0}\right),$$

$$k = 1,\ldots,r.$$

Za vsak $j = 1,\ldots,n$ primerjajmo koeficiente pred baznim polinomom $B_j^n(\frac{v-v_0}{v_1-v_0})$ in dobimo pogoje, ki morajo veljati med kontrolnimi točkami dveh ploskev, da sta na stiku C^r-zvezni:

$$\frac{1}{(u_0-u_1)^k}\Delta^{k,0}\mathbf{r}_{0,j} = \frac{1}{(u_2-u_1)^k}\sum_{j=0}^{n}\Delta^{k,0}\mathbf{s}_{0,j},\ k = 1,\ldots,r. \tag{3.5}$$

3.3 G^n-zveznost med dvema Bézierovima ploskvama iz tenzorskega produkta

V tem podpoglavju si bomo ogledali, kako se splošni pogoji za geometrijsko zveznost med dvema ploskvama, ki smo jih izpeljali v poglavju 2, odražajo na Bézierjevih ploskvah iz tenzorskega produkta.

Ker so Bézierjeve ploskve polinomske, se lahko pri izbiri stičnih funkcij omejimo na racionalne funkcije, kar močno olajša konstrukcijo v praktičnih primerih. O tem bo govoril izrek, predstavljen v tem podpoglavju.

Imejmo dve polinomski Bézierjevi ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, podani na naslednji način:

$$\mathbf{R}(x,y) = \sum_{i=0}^{m_r}\sum_{j=0}^{n_r} \mathbf{p}_{ij} B_i^{m_r}(x) B_j^{n_r}(y)$$

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m_s}\sum_{j=0}^{n_s} \mathbf{p}_{ij} B_i^{m_s}(u) B_j^{n_s}(v),$$

kjer so $\{\mathbf{p}_{i,j}, i = 1,\dots,m_r, j = 1,\dots,n_r\}$ in $\{\mathbf{q}_{i,j}, i = 1,\dots,m_s, j = 1,\dots,n_s\}$ kontrolne točke ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, x, y, u in v pa parametri z vrednostmi na intervalu $[0,1]$.

Ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ naj se stikata v skupni robni krivulji $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0,v) = \mathbf{S}(0,v)$ pojasni, zakaj lahko to predpostavimo. ker lahko parametriziramo? poglej. pojasni še, kako je s tem, da sta ploskvi prav obrnjeni, da ni špice Robno krivuljo $\mathbf{C}$ zapišemo kot Bézierjevo krivuljo na naslednji način:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{z}_i B_i^{n_c},$$

kjer so $\{\mathbf{z}_i, i = 1,\dots n_c\}$ njene kontrolne točke. Stopnja n_c krivulje $\mathbf{C}$ ni nujno enaka stopnjama n_r ali n_s, velja pa, da je $n_c \leq \min(n_r, n_s)$.

Naj bosta ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ regularni vzdolž krivulje $\mathbf{C}$, torej naj bodo normale na ploskvi vzdolž krivulje $\mathbf{C}$ neničelne:

$$N_R = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right)\bigg|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

$$N_S = \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}\right)\bigg|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

Oglejmo si dva izreka, ki govorita o pogojih za geometrijsko zveznost teh dveh ploskev. Prvi se bo omejil na pogoje za G^1-zveznost med ploskvama, drugi pa bo govoril o pogojih za G^n-zveznost.

Izrek 3.5. *Naj bosta* $\boldsymbol{R}$ *in* $\boldsymbol{S}$ *zgoraj definirani Bézierjevi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji* $\boldsymbol{C}$. *Stik ploskev je* G^1*-zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi* $D(y)$, $E_1(y)$ *in* $F_1(y)$, *da velja*

$$D(y)\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(0,y) = E_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0,y) + F_1(y)\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial y}(0,y), \tag{3.6}$$

kjer je $i = 1,\dots n$. *Velja še* $D(y)E_1(y) \neq 0$ *za* $y \in [0,1]$, *za stopnje polinomov pa velja*

$$\begin{aligned} deg(D) &\leq n_r + n_c - 1, \\ deg(E_1) &\leq n_s + n_c - 1, \\ deg(F_1) &\leq n_r + n_s. \end{aligned}$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da je pogoj v (3.6) zadosten za G^1-zveznost med ploskvama $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$. Naj obstajajo polinomi $D(y)$, $E_1(y)$ in $F_1(y)$, ki ustrezajo enačbi (3.6) in ostalim pogojem v izreku. Preoblikujmo enačbo (3.6) tako, da jo delimo z $D(y)$. To lahko storimo po predpostavki, da je $D(y)E_1(y) \neq 0$, ki zagotavlja neničelnost polinoma $D(y)$. Dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,y) = \frac{E_1(y)}{D(y)}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0,y) + \frac{F_1(y)}{D(y)}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0,y). \tag{3.7}$$

Naj bo

$$\alpha_1(y) = \frac{E_1(y)}{D(y)} \qquad\qquad \beta_1(y) = \frac{F_1(y)}{D(y)}.$$

Potem ima enačba (3.7) enako obliko kot enačba (2.4) v izreku 2.8, pri $n = 1$. Iz izreka 2.8 torej sledi, da se ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ na skupnem robu stikata z G^1-zveznostjo. S tem smo pokazali zadostnost pogoja (3.6) za G^1-zveznost. Pokažimo še, da je tudi potreben.

Naj se ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, definirani kot zgoraj, stikata v robni krivulji $\mathbf{C}$ z geometrijsko zveznostjo G^1. Pokazali bomo, da od tod sledi obstoj polinomov D, E_1 in F_1 z lastnostmi kot v izreku.

Ker je slik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^1-zvezen, po izreku 2.8 obstajata C^1 funkciji $\alpha_1(y)$ in $\beta_1(y)$, ki zadoščata enačbi

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,y) = \alpha_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0,y) + \beta_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0,y). \tag{3.8}$$

Dobljeno enačbo z desne vektorsko pomnožimo z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}$. in dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0,y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,y) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0,y) = \alpha_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0,y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0,y). \tag{3.9}$$

V poglavju 2 smo namreč že videli, da je $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0,y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0,y) = \mathbf{C}'(y)$.

Enačbo (3.8) sedaj z desne vektorsko množimo še z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$ in dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0,y) = \beta_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0,y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0,y). \tag{3.10}$$

Z $\mathbf{W}(y)$ označimo vektorsko funkcijo $\mathbf{W}(y) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0,y) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,y)$, z $\mathbf{N}_R$ in $\mathbf{N}_S$ pa normalo na ploskev $\mathbf{R}$ oziroma $\mathbf{S}$ v neki točki na mejni krivulji $\mathbf{C}$.

Prej dobljeni enačbi (3.9) in (3.10) torej zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{N}_S(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_R(y), \qquad\qquad \mathbf{W}(y) = \beta_1(y)\mathbf{N}_R(y). \tag{3.11}$$

|C??Stopnja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$ je največ $n_c - 1$, saj je $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$. Enako velja za $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}|_{\mathbf{C}}$. Stopnja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}$ je manjša ali enaka n_r, stopnja $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{\mathbf{C}}$ pa manjša ali enaka n_s. Od tod in iz definicij funkcij $\mathbf{N}_R$, $\mathbf{N}_S$ in $\mathbf{W}$ sledi $\deg(\mathbf{N}_R) \leq n_r + n_s - 1$, $\deg(\mathbf{N}_S) \leq n_s + n_c - 1$ in $\deg(\mathbf{W}) \leq n_r + n_s$.

Videli smo že, da sta zaradi predpostavke o regularnosti ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ funkciji $\mathbf{N}_R(y)$ in $\mathbf{N}_S(y)$ za vsak $y \in [0,1]$ različni od 0. Ker je $\mathbf{N}_R(y)$ neničelna, mora biti vsaj ena izmed njenih koordinatnih funkcij neničeln polinom. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je neničelna x-koordinata, torej polinom $N_{R,1}(y)$. Če enačbi iz (3.11) razpišemo po koordinatah, za x-koordinato dobimo

$$N_{S,1}(y) = \alpha_1(y)N_{R,1}(y), \qquad\qquad W_1(y) = \beta_1(y)N_{R,1}(y),$$

kjer je $N_{S,1}$ x-koordinata funkcije $\mathbf{N}_S$, W_1 pa x-koordinata funkcije $\mathbf{W}$.

Iz zgornjih enačb lahko vidimo, da so vse realne ničle polinoma $N_{R,1}(y)$ na intervalu $[0,1]$ tudi ničle polinomov $N_{S,1}(y)$ in $W_1(y)$, torej da polinom $U(y)$, ki je zgrajen kot produkt vseh linearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma $N_{R,1}(y)$, deli polinoma $N_{S,1}(y)$ in $W_1(y)$. Da to res drži, lahko vidimo na naslednji način. Zapišimo $N_{R,1}(y) = U(y)D(y)$, kjer je $U(y)$ produkt vseh linearnih faktorjev, $D(y)$ pa produkt vseh nelinearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma $N_{R,1}(y)$. Predpostavimo, da $U(y)$ ne deli polinoma $N_{S,1}(y)$. Ker je $N_{S,1}(y) = \alpha_1(y)U(y)D(y)$, je to mogoče le, če je $\alpha_1(y)$ racionalna funkcija, katere imenovalec deli polinom $U(y)$. Funkcija $\alpha_1(y)$ ima torej na intervalu $[0,1]$ pol. Ker velja $\mathbf{N}_S(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_R(y)$ in so vse koordinatne funkcije funkcij $\mathbf{N}_S(y)$ in $\mathbf{N}_R(y)$ polinomi, mora veljati, da imenovalec funkcije $\alpha_1(y)$ deli $N_{R,1}(y)$, $N_{R,2}(y)$ in $N_{R,3}(y)$. Funkcija $\alpha_1(y)$ ima pol, označimo ga z y_0. Sledi, da je y_0 ničla polinomov $N_{R,1}(y)$, $N_{R,2}(y)$ in $N_{R,3}(y)$, in zato je $\mathbf{N}_R(y_0) = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko o regularnosti ploskve $\mathbf{R}$. Torej mora polinom $U(y)$ deliti polinom $N_{S,1}(y)$. Z enakimi sklepi trditev pokažemo še za polinom $W_1(y)$.

Polinom $N_{R,1}$ sedaj znova zapišimo kot produkt $N_{R,1}(y) = U(y)D(y)$, kjer sta polinoma $U(y)$ in $D(y)$ definirana kot zgoraj. Torej velja

$$N_{S,1}(y) = U(y)\alpha_1(y)D(y), \qquad\qquad W_1(y) = U(y)\beta_1(y)D(y).$$

Naj bo $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$ in $F_1(y) = \beta_1(y)D(y)$. Pokazati moramo, da sta dobljeni funkciji E_1 in F_1 polinoma. Ker sta funkciji $N_{S,1}(y)$ in $W_1(y)$ polinoma, morata imenovalca funkcij α_1 in β_1 deliti ali polinom U ali polinom D. Videli smo že, da α_1 in β_1 nimata polov na intervalu $[0,1]$, torej njuna imenovalca ne delita polinoma U. Sledi, da morata njuna imenovalca deliti polinom D, s čimer smo pokazali, da sta E_1 in F_1 res polinoma.

Videti želimo še, da je $D(y)E_1(y) \neq 0$ na intervalu $[0,1]$. Polinom $D(y)$ po definiciji vsebuje vse nelinearne faktorje v polinomskem razcepu polinoma $N_{rx}(y)$, torej na intervalu $[0,1]$ nima ničel. Polinom $E_1(y)$ je enak $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$. Ker je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^n-zvezen, funkcija $\alpha_1(y)$ po izreku 2.8 na intervalu $[0,1]$ ni enaka nič, zato tudi $E_1(y)$ na tem intervalu nima ničel.

Oglejmo si še stopnje polinomov $D(y)$, $E_1(y)$ in $F_1(y)$. Očitno velja

$$\begin{aligned}
\deg(D(y)) &\leq \deg(N_{rx}(y)) \leq \deg(\mathbf{N}_r(v)) \leq n_r + n_c - 1 \\
\deg(E_1(y)) &\leq \deg(N_{sx}(y)) \leq \deg(\mathbf{N}_s(v)) \leq n_s + n_c - 1 \\
\deg(F_1(y)) &\leq \deg(W_x(y)) \leq st(\mathbf{W}(v)) \leq n_r + n_s,
\end{aligned}$$

s čimer dokažemo izrek. □

Sedaj si oglejmo še posplošitev izreka 3.5, torej izrek ki govori o pogojih za G^n-zveznost med ploskvama, kjer je $n \geq 2$.

Izrek 3.6. *Naj bosta* $\boldsymbol{R}$ *in* $\boldsymbol{S}$ *zgoraj definirani Bézierjevi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji* $\boldsymbol{C}$*. Stik ploskev je* G^n*-zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi* $D(y)$*,* $E_i(y)$ *in* $F_i(y)$*, da velja*

$$
\begin{aligned}
D^{2k-1}(y)\frac{\partial^k \boldsymbol{S}}{\partial u^k}(0,y) = &\sum_{i=0}^{k}\sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}} \sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v)\cdots E_{m_h}(y) \\
&\cdot F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \boldsymbol{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0,y),
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

kjer je $i = 1,\dots n$ *in* $k = 1,\dots n$*. Z* $A^k_{m_i}$ *zopet označujemo* $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$ *in* $|\mathbf{m_i}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$*. Velja še* $D(y)E_1(y) \neq 0$ *za* $y \in [0,1]$*, za stopnje polinomov pa velja*

$$
\begin{aligned}
deg(D) &\leq n_r + n_c - 1, \\
deg(E_i) &\leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1, \\
deg(F_i) &\leq (2i-1)n_r + in_s + (i-1)n_c - 2i + 2.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Prvega dela dokaza se lotimo podobno kot v dokazu izreka 3.5. Najprej predpostavimo, da obstajajo polinomi D, E_i in F_i, $i = 1,\dots n$, ki ustrezajo enačbi (3.12) in ostalim pogojem v izreku. Pokazati hočemo, da od tod sledi geometrijska zveznost ploskev **R** in **S**. V ta namen bomo uporabili izrek 2.8.

Preoblikujmo enačbo (3.12). Predpostavka, da je $D(y)E_1(y) \neq 0$ na $[0,1]$, zagotavlja neničelnost polinoma D na $[0,1]$, zato lahko celotno enačbo (3.12) delimo z $D^{2k-1}(y)$ in dobimo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}(0,y) = &\sum_{i=0}^{k}\sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}} \sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h} D^{i-2k}(y) E_{m_1}(v)\cdots E_{m_h}(y) \\
&\cdot F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0,y).
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Funkcijo D^{2k-i} lahko zapišemo kot produkt
$D^{2k-i}(y) = D^{2m_1-1}(y)D^{2m_2-1}(y)\cdots D^{2m_h-1}(y)D^{2m_{h+1}}(y)\cdots D^{2m_i-1}(y)$, saj je $|\mathbf{m_i}| = k$. Dobljeno vstavimo v enačbo (3.13):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}(0,y) = &\sum_{i=0}^{k}\sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(v)}{D^{2m_1-1}(y)}\cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\
&\cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)}\cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)}\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0,y).
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Definirajmo

$$
\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)} \text{ in } \beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}, \quad i = 1,\dots,n.
$$

Potem enačba (3.14) dobi enako obliko kot enačba (2.4) v izreku 2.8. Iz izreka 2.8 torej sledi, da se ploskvi **R** in **S** stikata z geometrijsko zveznostjo G^n. S tem smo dokazali, da je pogoj (3.12) zadosten za G^n-zveznost na stiku ploskev **R** in **S**.

Sedaj dokažimo še, da je pogoj (3.12) tudi potreben. Predpostavimo, da se ploskvi **R** in **S**, definirani kot zgoraj, stikata v robni krivulji **C** z geometrijsko zveznostjo G^n. Pokazati hočemo, da od tod sledi obstoj polinomov D, E_i in F_i z lastnostmi kot v izreku. Dokaza se lotimo z indukcijo po k. Za $k = 1$ smo izrek že dokazali v dokazu izreka 3.5. Preostane nam se še dokaz za $k > 1$.

Prepodstavimo, da izrek velja za vse $k \leq m$, kjer je $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Torej obstajajo polinomi $D(y)$, $E_1(y), \ldots, E_m(y)$, $F_1(y), \ldots, F_m(y)$ z ustreznimi stopnjami, da velja enačba (3.12) za $k = 1, 2, \ldots, m$.

Izhajamo iz predpostavke, da je stik ploskev **R** in **S** G^n-zvezen. Iz izreka 2.8 sledi, da obstajajo funkcije $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ in $\beta_1 \ldots, \beta_{m+1}$, da velja

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}(0,v) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1}(v) \cdots \alpha_{m_h}(v) \cdot \\
\cdot \beta_{m_{h+1}}(v) \beta_{m_i}(v) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0,v) = \\
= \alpha_{m+1}(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0,v) + \beta_{m+1}(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0,v) + \\
+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1}(v) \cdots \alpha_{m_h}(v) \cdot \\
\cdot \beta_{m_{h+1}}(v) \cdots \beta_{m_i}(v) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0,v).
\end{aligned}
$$

Po indukcijski predpostavki je $\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$ in $\beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$ za $i = 1, \ldots, m$. Uporabimo to v zgornji enačbi in dobimo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\Big|_{\mathbf{C}} &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\
&+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(y)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\
&\cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C = \\
&= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\
&+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-2}(y) D^{-2m} E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\
&\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

saj je $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = m + 1$ in zato je

$$
D^{-2m_1+1}(y) D^{-2m_2+1}(y) \cdots D^{-2m_i+1}(y) = D^{-2(m+1)}(y) D^i(y).
$$

Sedaj definirajmo vektorsko polinomsko funkcijo $\mathbf{S}_{m+1}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{m+1}(y) =& D^{2m}(y)\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}(0,y) - \sum_{i=2}^{m+1}\sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A^{m+1}_{m_i}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}D^{i-1}(y)\cdot \\ &\cdot E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\dots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i\mathbf{R}}{\partial x^h\partial y^{i-h}}(0,y).\end{aligned}$$

Če enačbo (3.15) pomnožimo z $D^{2m}(y)$ in jo nekoliko preoblikujemo, dobimo

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m}(y)\alpha_{m+1}(y)\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y) + D^{2m}(y)\beta_{m+1}(y)\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}(0,y). \tag{3.16}$$

Na dobljeni enačbi sedaj uporabimo podoben postopek, kot smo ga uporabili pri dokazu za $k=1$. Enačbo (3.16) z leve vektorsko množimo z $\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y)$ in dobimo

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y)\times\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m}(y)\beta_{m+1}(y)\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y)\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}(0,y).$$

Če pa enačbo (3.16) z desne pomnožimo z $\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}(0,y)$, dobimo

$$\mathbf{S}_{m+1}(y)\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y) = D^{2m}(y)\alpha_{m+1}(y)\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y)\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}(0,y).$$

Označimo

$$\overline{\mathbf{W}}(y) = \mathbf{S}_{m+1}(y)\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}(0,y) \tag{3.17}$$

in

$$\overline{\overline{\mathbf{W}}}(y) = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y)\times\mathbf{S}_{m+1}(y) \tag{3.18}$$

ter kakor prej $N_R = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}(0,y)\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}(0,y)$. Kot v primeru za $k=1$, spet lahko predpostavimo, da je polinom $N_{R,1}(y)$ neničeln in ga zapišemo kot $N_{R,1}(y) = U(y)D(y)$. Velja $\overline{W_1} = D^{2m+1}(y)U(y)\alpha_{m+1}(y)$ in $\overline{\overline{W_1}} = D^{2m+1}(y)U(y)\beta_{m+1}(y)$ in enaki argumenti kot v primeru za $k=1$ nas pripeljejo do razulatata, da sta

$$E_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\alpha_{m+1}(y), \quad F_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\beta_{m+1}(y)$$

res polinoma.

Pokazati moramo še, da je $\deg(E_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1$ in $\deg(F_{m+1}) \leq (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m$. Tega se lotimo tako, da si najprej ogledamo stopnjo $\mathbf{S}_{m+1}$.

Očitno je

$$\begin{aligned}\deg\left(D^{2m}(y)\left.\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\right|_{\mathbf{C}}\right) &\leq 2m(n_r+n_c-1)+n_s \\ &\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m,\end{aligned}$$

kjer v prvi neenakosti uporabimo dejstvo, da je $\deg(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$ in $\deg(\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) \leq n_s$, v drugi neenakosti pa, da je $n_c \leq n_s$.

Oglejmo si še, kakšna je

$$\deg\left(D^{i-1}E_{m_1}\cdots E_{m_h}F_{m_{h+1}}\dots F_{m_i}\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\bigg|_{\mathbf{C}}\right).$$

Najprej si jo oglejmo za $h=0$:

$$\begin{aligned}&\deg\left(D^{i-2}F_{m_1}\cdots F_{m_i}\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}\bigg|_{\mathbf{C}}\right)\leq\\ &\leq (i-2)\deg(D)+\sum_{j=1}^{i}\deg(F_{m_j})+\deg\left(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}\bigg|_{\mathbf{C}}\right)\end{aligned}$$

Vemo, da je $\deg(D)\leq n_r+n_c-1$ in $\deg(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}})\leq n_c-i$, po indukcijski predpostavki pa velja še

$$\begin{aligned}&\deg(E_i)\leq(2i-2)n_r+in_s+in_c-2i+1),\\ &\deg(F_i)\leq(2i-1)n_r+in_s+(i-1)n_c-2i+2),\quad i=1,\dots,m.\end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned}&\deg\left(D^{i-2}F_{m_1}\cdots F_{m_i}\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}\bigg|_{\mathbf{C}}\right)\leq(i-2)(n_r+n_c-1)+\\ &+\sum_{j=1}^{i}((2m_j-1)n_r+m_jn_s+(m_j-1)n_c-2m_j+2)+(n_c-i)=\\ &=(i-2)(n_r+n_c-1)+2(m+1)n_r-in_r+(m+1)n_s+(m+1)n_c-in_c-\\ &-2(m+1)+2i+n_c-i=\\ &=2mn_r+(m+1)n_s+mn_c-2m-in_r\leq\\ &\leq 2mn_r+(m+1)n_s+mn_c-2m.\end{aligned}$$

Tu smo uporabili, da je $\sum_{j=1}^{i}m_j=m+1$.

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je $h>1$.

$$\begin{aligned}&\deg\left(D^{i-2}E_{m_1}\cdots E_{m_h}F_{m_{h+1}}\cdots F_{m_i}\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\bigg|_{\mathbf{C}}\right)\leq\\ &\leq(i-2)\deg(D)+\sum_{j=1}^{h}\deg(E_{m_j})+\sum_{j=h+1}^{i}\deg(F_{m_j})+\\ &+\deg\left(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\bigg|_{\mathbf{C}}\right).\end{aligned}$$

Zopet uporabimo indukcijsko predpostavko za stopnje polinomov E_i in F_i, kjer je

$i = 1, \ldots, m$, ter dejstvo, da je $\deg \left(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \bigg|_{\mathbf{C}} \right) = n_r - i + h$, in dobimo

$$\begin{aligned}
&\deg \left(D^{i-2} E_{m_1} \cdots E_{m_h} F_{m_{h+1}} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \bigg|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
&\leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r \sum_{j=1}^{h} m_j - 2n_r h + n_s \sum_{j=1}^{h} m_j + +n_c \sum_{j=1}^{h} m_j - \\
&- 2 \sum_{j=1}^{h} m_j + h + 2n_r \sum_{j=h+1}^{i} m_j - (i-h)n_r + n_s \sum_{j=h+1}^{i} m_j + n_c \sum_{j=h+1}^{i} -(i-h)n_c - \\
&- 2 \sum_{j=h+1}^{i} +2(i-h) + n_r - i + h = \\
&= (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
&- 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h.
\end{aligned}$$

V zadnji enakosti smo uprabili, da je $\sum_{j=1}^{i} m_j = m + 1$. Nadaljujmo z računom:

$$\begin{aligned}
&\deg \left(D^{i-2} E_{m_1} \cdots E_{m_h} F_{m_{h+1}} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \bigg|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
&\leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
&- 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h \leq \\
&\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - n_r h + n_c h - n_c + n_r = \\
&= 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m + (h-1)(n_c - n_r) \leq \\
&\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

V zadnji neenakosti smo uporabili, da je $n_c \leq n_r$, torej je $n_c - n_r \leq 0$. S tem smo torej pokazali, da je

$$\deg(\mathbf{S}_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m.$$

Iz enačbe (3.17) in definicije polinoma E_{m+1} je razvidno naslednje:

$$\begin{aligned}
&\deg(E_{m+1}) \leq \deg(\overline{W_1}) \leq \deg(\overline{\mathbf{W}}) \leq \deg(\mathbf{S}_{m+1}) + \deg \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \bigg|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
&\leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + (n_c - 1) = \\
&= 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo iz enačbe (3.18) in definicije polinoma F_{m+1} oceno za stopnjo polinoma F_{m+1}:

$$\begin{aligned}
&\deg(F_{m+1}) \leq \deg(\overline{\overline{W_1}}) \leq \deg(\overline{\overline{\mathbf{W}}}) \leq \deg(\mathbf{S}_{m+1}) + \deg \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \bigg|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
&\leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + n_r = \\
&= (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

S tem smo dokazali izrek še za $k > 1$. □

4 Primeri konstrukcij geometrijsko zveznih ploskev iz tenzorskega produkta

nek uvod, navezava na prejšnje poglavje

4.1 Konstrukcija G^1-zveznih Bézierjevih ploskev iz tenzorskega produkta

V tem podpoglavju si bomo ogledali, kako na različne načine konstruirati ploskvi, ki sta na stiku G^1-zvezni, torej kakšne pogoje prinesejo različni načini konstrukcije na njune kontrolne točke. Pri tem bomo predpostavljali, da so robovi obeh ploskev vnaprej določeni. Pogoje, ki jih prinese zahteva G^1-zveznosti bomo primerjali s C^1-zveznostjo.

Imejmo dve bi-kubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

kjer velja $u, v \in [0,1]$.

Ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ naj se stikata v $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0,v) = \mathbf{S}(0,v)$, torej naj velja

$$\mathbf{C}(v) = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{Z}_i B_i^{n_c}(v),$$

kjer so $\mathbf{Z}_i = \mathbf{P}_{0,i} = \mathbf{Q}_{0,i}$ kontrolne točke krivulje $\mathbf{C}$. Predpostavili bomo, da so robne krivulje ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ že določene na tak način, da bomo imeli na robu zahtevano zveznost. Zanimalo nas bo, kakšne zveze v teh primerih veljajo za notranje kontrolne točke, torej za $\mathbf{P}_{1,1}$, $\mathbf{P}_{1,2}$, $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$., da bo stik ploskev G^1-zvezen. V nadaljevanju bomo uporabljali še naslednje oznake za kontrolne vektorje obeh ploskev in robne krivulje: $\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}$, $\mathbf{q}_{i,j} = \mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j}$ in $\mathbf{z}_i = \mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i$.

Najprej si oglejmo, kakšne pogoje in omejitve nam da zahteva C^1-zveznosti na stiku teh dveh ploskev. To bomo nato primerjali s pogoji, ki nam jih da G^1-zveznost.

Primer 4.1. Domena ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ je kvadrat $[0,1]\times[0,1]$. Da lahko obravnavamo C^1-zveznost stika ploskev, moramo najprej reparametrizirati ploskev $\mathbf{R}$ tako, da bo njena domena $[-1,0]\times[0,1]$ in bosta obe domeni skupaj po stiku tvorili pravokotnik $[-1,1]\times[0,1]$. Da to dosežemo, moramo ploskev $\mathbf{R}$ zapisati na naslednji način:

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(-u) B_j^3(v),$$

kjer je $u \in [-1,0]$ in $v \in [0,1]$.

Da je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ C^0-zvezen, se morata krivulji ujemati v kontrolnih točkah, ki določajo stično krivuljo: $\mathbf{P}_{0,j} = \mathbf{Q}_{0,j}$ za $j = 0,\ldots,3$. V podpoglavju 3.2

smo videli, da se morata za dosego C^1-zveznosti poleg tega ujemati še odvoda obeh ploskev v u-smeri v robnih točkah: $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}(u,v)|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u,v)|_{u=0}$. Če razpišemo oba parcialna odvoda oziroma se sklicujemo na enakost (3.5), dobimo naslednje pogoje za C^1-zveznost med ploskvama:

$$-(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) = \mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}$$

oziroma

$$\mathbf{q}_{0,j} = -\mathbf{p}_{0,j}$$

za $j = 0, \ldots, 3$.

Vidimo torej, da morata biti za dosego C^1-zveznosti zlepka ploskev vektorja $\mathbf{p}_{0,j}$ in $\mathbf{q}_{0,j}$ kolinearna za vsak $j = 0, \ldots, 3$, poleg tega pa morata biti njuni dolžini v razmerju, ki ga določata parametrizaciji obeh ploskev. Kar se tiče oblike ploskve, ki jo na ta način lahko konstruiramo kot zlepek ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, torej nimamo ravno veliko izbire. Nekoliko več svobode imamo le pri izbiri notranjih kontrolnih točk. Kontrolni točki $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$ sta točno določeni z izbiro kontrolnih točk $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$, medtem ko sta $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ prosti. Ker zahtevamo zgolj zveznost stopnje 1, so proste tudi kontrolne točke $\mathbf{Q}_{2,1}$, $\mathbf{Q}_{2,2}$, $\mathbf{P}_{2,1}$ in $\mathbf{P}_{2,2}$.

Sedaj si oglejmo nekaj primerov konstrukcij G^1-zveznih ploskev in jih primerjajmo z rezultatom, dobljenim v primeru 4.1. Izrek 2.8 pravi, da je stik obeh ploskev G^1-zvezen, natanko tedaj ko obstajata C^1 funkciji $\alpha_1(v)$ in $\beta_1(v)$, da velja

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,v) = \alpha_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0,v) + \beta_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0,v), \tag{4.1}$$

kjer je $\alpha_1(v) \neq 0$ na intervalu $[0,1]$ in ima ustrezen predznak. V našem primeru gre za polinomske ploskve, zato lahko uporabimo izrek 3.6, ki pove, da to velja natanko tedaj, ko obstajajo polinomi $D(v)$, $E_1(v)$ in $F_1(v)$, kjer sta polinoma D in E_1 stopnje največ 5, polinom F_1 pa stopnje največ 6, da velja $D(v)E_1(v) \neq 0$ na $[0,1]$ ter

$$D(v)\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,v) = E_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0,v) + F_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0,v). \tag{4.2}$$

Razpišimo prve odvode parametrizacij ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0,v) = 3\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j})B_i^2(0)B_j^3(v) = 3\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j})B_j^3(v),$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0,v) = 3\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j})B_i^2(0)B_j^3(v) = 3\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^3(v),$$

in

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0,v) = 3\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{2}(\mathbf{Q}_{i,j+1} - \mathbf{Q}_{i,j})B_i^2(0)B_j^3(v) = 3\sum_{j=0}^{2}(\mathbf{Q}_{0,j} - \mathbf{Q}_{0,j+1})B_j^2(v).$$

Dobljeno vstavimo v enačbo (4.2). Vidimo, da mora veljati:

$$\begin{aligned} D(v)&\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j})B_j^3(v) = \\ &= E_1(v)\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^3(v) + F_1(v)\sum_{j=0}^{2}(\mathbf{Q}_{0,j} - \mathbf{Q}_{0,j+1})B_j^2(v). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Najprej si oglejmo, kakšni pogoji v primeru G^1 zveznosti veljajo za robne kontrolne točke ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$. V enačbo (4.3) vstavimo vrednosti $v = 0$ in $v = 1$. Pri vrednosti $v = 0$ dobimo

$$d_0(\mathbf{Q}_{1,0} - \mathbf{Q}_{0,0}) = e_0(\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}) + f_0(\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}),$$

oziroma

$$d_0\mathbf{q}_{0,0} = e_0\mathbf{p}_{0,0} + f_0\mathbf{z}_0. \tag{4.4}$$

Tu smo z d_0 označili vrednost $D(0)$, z e_0 vrednost $E_1(0)$, z f_0 pa vrednost $F_1(0)$. Pri vrednosti $v = 1$ pa dobimo

$$d_1\mathbf{Q}_{1,3} = e_1(\mathbf{P}_{1,3} - \mathbf{P}_{0,3}) + f_1(\mathbf{P}_{0,3} - \mathbf{P}_{0,2}),$$

oziroma

$$d_1\mathbf{q}_{0,3} = e_1\mathbf{p}_{0,3} + f_1\mathbf{z}_2. \tag{4.5}$$

Tu smo z d_1 označili vrednost $D(1)$, z e_1 vrednost $E_1(1)$ in z f_1 vrednost $F_1(1)$.

Pogoji, ki veljajo za robne kontrolne točke, so enaki neglede na način konstrukcije G^1-zveznega zlepka ploskev. Pogoji, ki veljajo za notranje kontrolne točke, število svobodnih parametrov, ki določajo obliko dobljene ploskve, in število prostih kontrolnih točk, pa so odvisni od izbire načina konstrukcije, natančneje, od izbire stopnje koeficientnih polinomskih funkcij in stopnje odvodov parametrizacij ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$.

Izbira stopenj koeficientnih funkcij ni povsem poljubna, temveč je odvisna od stopnje geometrijske zveznosti, ki jo zahtevamo, pa tudi od stopenj odvodov $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0}$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ in $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0}$ oziroma $\mathbf{C}'(v)$.

V praksi se običajno uporabljajo koeficientne funkcije čim nižje stopnje, saj s tem dobimo manj pogojev za kontrolne točke. V primeru, da sta funkciji $D(v)$ in $E(v)$ konstantni, funkcija $F(v)$ pa kvečjemu linearna, dobimo pogoje le za dve notranji kontrolni točki, vse ostale pa so proste, podobno kot v primeru C^1-zveznosti (primer 4.1). Če za koeficientne funkcije izberemo polinome višjih stopenj, se lahko zgodi, da dobimo pogoje za tri ali štiri kontrolne točke.

Najprej si oglejmo situacijo, v kateri za koeficientne funkcije izberemo polinome minimalne stopnje.

Primer 4.2. Da zagotovimo G^1-zveznost na stiku ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, mora poleg pogoja, da se ploskvi stikata v robni krivulji, veljati enakost (4.3), oziroma

$$D(v)\sum_{j=0}^{3}\mathbf{q}_j B_j^3(v) = E_1(v)\sum_{j=0}^{3}\mathbf{p}_j B_j^3(v) + F_1(v)\sum_{j=0}^{2}\mathbf{z}_j B_j^2(v). \tag{4.6}$$

Ker je stopnja krivulj $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0}$ in $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ enaka 3, stopnja krivulje $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0}$ pa 2 in če njihovih stopenj ne nižamo oziroma višamo, bodo stopnje polinomov $D(v)$, $E_1(v)$ in $F_1(v)$ minimalne, če bosta $D(v)$ in $E_1(v)$ konstantna polinoma, $F_1(v)$ pa linearen. V tem primeru namreč obe strani enačbe predstavljata Bézierjevo krivuljo stopnje 3.

Brez škode za splošnost lahko izberemo, da je $D(v) \equiv 1$. Potem je $E_1(v) \equiv e_0 = e_1$. Ker predpostavimo, da je $F_1(v)$ linearen in da velja $F_1(0) = f_0$ ter $F_1(1) = f_1$, mora za F_1 veljati

$$F_1(v) = f_0(1-v) + f_1 v.$$

Vstavimo polinome D, E_1 in F_1 v enačbo (4.8) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3} \mathbf{q}_j B_j^3(v) &= e_0 \sum_{j=0}^{3} \mathbf{p}_j B_j^3(v) + (f_0(1-v) + f_1 v) \sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j B_j^2(v) = \\
&= e_0 \sum_{j=0}^{3} \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + \sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j f_1 \binom{2}{j} v^{j+1}(1-v)^{2-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} e_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + \sum_{j=1}^{3} f_1 \mathbf{z}_{j-1} \binom{2}{j-1} v^j (1-v)^{3-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} e_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} f_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3} \binom{3}{j} v^j (1-v)^{3-j} + \sum_{j=1}^{3} f_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} \binom{3}{j} v^3 (1-v)^{3-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} e_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} f_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} f_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v)
\end{aligned}$$

V tretji vrstici zgornjega računa smo uporabili dejstvo, da je v vsoti

$$\sum_{j=0}^{3} \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j}$$

člen pri $j = 3$ enak 0 in je zato

$$\sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j}.$$

Podobno smo v zadnji vrstici upoštevali, da je v vsoti

$$\sum_{j=0}^{3} b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v)$$

člen pri $j = 0$ enak 0 in je zato

$$\sum_{j=1}^{3} f_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} \binom{3}{j} v^3 (1-v)^{3-j} = \sum_{j=0}^{3} b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v).$$

Od tod dobimo pogoje za kontrolna vektorja $\mathbf{q}_{1,1}$ in $\mathbf{q}_{1,2}$:

$$\mathbf{q}_{1,1} = e_0 \mathbf{p}_{1,1} + \frac{1}{3} f_1 \mathbf{z}_0 + \frac{2}{3} f_0 \mathbf{z}_1, \qquad \mathbf{q}_{1,2} = e_0 \mathbf{p}_{1,2} + \frac{2}{3} f_1 \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3} f_0 \mathbf{z}_2.$$

Najprej opazimo, da za razliko od primera 4.1, tu ni več potrebe po kolinearnosti vektorjev $\mathbf{q}_{1,1}$ in $\mathbf{p}_{1,1}$ oziroma vektorjev $\mathbf{q}_{1,2}$ in $\mathbf{p}_{1,2}$, zahtevamo le še koplanarnost. Ena izmed omejitev, ki veljajo za parametre e_0, f_0 in f_1, je, da mora biti $e_0 < 0$, saj bi imel v nasprotnem primeru stik ploskev obliko špice. Parametri so določeni z enačbama (4.4) in (4.5) na naslednji način. Zapišimo enačbo (4.4) kot

$$\mathbf{q}_{0,0} = e_1\mathbf{p}_{0,0} + f_1\mathbf{z}_0 + g\mathbf{n},$$

kjer $\mathbf{n}$ označuje normalo na ravnino, ki jo določajo vektorji $\mathbf{q}_{0,0}$, $\mathbf{p}_{0,0}$ in $\mathbf{z}_0$, v točki $(0,0)$. Matrika $[\mathbf{p}_{0,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]$ je nesingularna, saj sta vektorja $\mathbf{p}_{0,0}$ in $\mathbf{z}_0$ nekolinearna in pravokotna na $\mathbf{n}$, zato je mogoče na enoličen način izraziti neznanke e_1, f_1 in g. ker je vektor $\mathbf{q}_{0,0}$ del iste ravnine kot $\mathbf{p}_{0,0}$ in $\mathbf{z}_0$, mora biti $g = 0$, vrednosti e_0 in f_0 pa izračunamo s pomočjo Cramerjevih formul:

$$e_0 = \frac{\det[\mathbf{q}_{0,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{0,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]}, \qquad f_0 = \frac{\det[\mathbf{p}_{0,0}, \mathbf{q}_{0,0}, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{0,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]}.$$

Na enak način iz enačbe (4.5) dobimo še parametra e_1 in f_1

$$e_1 = \frac{\det[\mathbf{q}_{0,3}, \mathbf{z}_2, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{0,3}, \mathbf{z}_2, \mathbf{n}]}, \qquad f_1 = \frac{\det[\mathbf{p}_{0,3}, \mathbf{q}_{0,3}, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{0,3}, \mathbf{z}_2, \mathbf{n}]}.$$

Če bi imeli robne krivulje ploskev izbrane na tak način, da bi veljalo $e_0 = -1$, $f_0 = 0$ in $f_1 = 0$, bi dobili enak rezultat kot v primeru 4.1, v katerem smo iskali pogoje za C^1-zveznost. Z drugačno izbiro robnih krivulj in posledično drugačnimi vrednostmi parametrov pa lahko dosežemo poljuben kot med vektorjema $q_{1,1}$ in $p_{1,1}$, biti morata samo del iste ravnine. Vidimo torej, da je zahteva G^1-zveznosti kar se tiče oblike dobljenega zlepka ploskev prinese veliko več možnosti kot zahteva C^1-zveznosti.

V danem primeru, kjer so stopnje koeficientnih polinomov minimalne, je tudi število prostih kontrolnih točk enako kakor v primeru C^1-zveznosti. Kontrolni točki $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$ sta točno določeni z izbiro točk $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$, z robnimi kontrolnimi točkami ter izbiro parametrov e_0, f_0 in f_1, kontrolni točki $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ pa sta prosti. Enako velja za vse ostale notranje kontrolne točke.

Primer 4.3. Oglejmo si še nekoliko drugačen primer konstrukcije G^1-zveznih zlepkov dveh ploskev. Stopnja polinoma $D(v)$ naj bo znova 0, stopnja $F_1(v)$ pa 1, medtem ko naj bo polinom $E_1(v)$ stopnje 1. Da bomo v tem primeru na obeh straneh enačbe (4.3) dobili Bézierjevo krivuljo stopnje 3, moramo znižati stopnjo krivulje $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$. Videli bomo, da v tem primeru sicer dobimo drugačne možnosti, kar se tiče oblike, kakor v primeru 4.2 več možnosti?, vendar se pri tem pojavi dodatna omejitev za notranje kontrolne točke.

Naj krivuljo $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ določajo kontrolni vektorji $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_m$ in $\mathbf{p}_3$:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{p}_{1,i} B_i^3(v) = (1-v)^2\mathbf{p}_{1,0} + 2(1-v)v\mathbf{p}_m + v^2\mathbf{p}_{1,3}$$

Po formulah za višanje stopnje krivulje velja

$$\mathbf{p}_{1,1} = \frac{2}{3}\mathbf{p}_m + \frac{1}{3}\mathbf{p}_{1,0}$$

$$\mathbf{p}_{1,2} = \frac{2}{3}\mathbf{p}_m + \frac{1}{3}\mathbf{p}_{1,3},$$

oziroma

$$\mathbf{p}_m = \frac{3}{2}\mathbf{p}_{1,1} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_{1,0} = \frac{3}{2}\mathbf{p}_{1,2} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_{1,3}. \tag{4.7}$$

Enačba (4.3) se torej v tem primeru preoblikuje v

$$D(v)\sum_{j=0}^{3}\mathbf{q}_{1,j}B_j^3(v) = E_1(v)\sum_{j=0}^{2}\tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + F_1(v)\sum_{j=0}^{2}\mathbf{s}_j B_j^2(v), \tag{4.8}$$

kjer smo označili $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_{1,0}$, $\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_m$ in $\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_{1,3}$.

Polinom $D(v)$ naj bo konstanten, znova lahko predpostavimo $D(v) \equiv 1$. Polinoma $E_1(v)$ in $F_1(v)$ naj bosta linearna, zanju naj velja še $E_1(0) = e_0$, $E_1(1) = e_1$, $F_1(0) = f_0$, $F_1(1) = f_1$. Torej mora veljati

$$E_1(v) = e_0(1-v) + e_1 v$$

$$F_1(v) = f_0(1-v) + f_1 v.$$

Vstavimo polinoma v enačbo (4.8) in na podoben način kot v primeru 4.2 dobimo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{3}\mathbf{q}_{1,j}B_j^3(v) = (a_0(1-v)+a_1 v)\sum_{j=0}^{2}\tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + (b_0(1-v)+b_1 v)\sum_{j=0}^{2}\mathbf{s}_j B_j^2(v) = \\
&= a_0\sum_{j=0}^{2}\tilde{\mathbf{p}}_j\binom{2}{j}v^j(1-v)^{3-j} + a_1\sum_{j=0}^{2}\tilde{\mathbf{p}}_j\binom{2}{j}v^{j+1}(1-v)^{2-j} + \\
&+ b_0\sum_{j=0}^{2}\tilde{\mathbf{z}}_j\binom{2}{j}v^j(1-v)^{3-j} + b_1\sum_{j=0}^{2}\tilde{\mathbf{z}}_j\binom{2}{j}v^{j+1}(1-v)^{2-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3}(a_1\tilde{\mathbf{p}}_{j-1}\frac{j}{3} + a_0\tilde{\mathbf{p}}_j\frac{3-j}{3} + b_1\mathbf{z}_{j-1}\frac{j}{3} + b_0\mathbf{z}_j\frac{3-j}{3})B_j^3(v).
\end{aligned}$$

Od tod sledijo pogoji za vektorja $\mathbf{q}_{1,1}$ in $\mathbf{q}_{1,2}$.

$$\mathbf{q}_{1,1} = \frac{1}{3}(e_1\mathbf{p}_{1,0} + 2e_0\mathbf{p}_m + f_1\mathbf{z}_0 + 2f_0\mathbf{z}_1)$$

$$\mathbf{q}_{1,2} = \frac{1}{3}(e_0\mathbf{p}_{1,3} + 2e_1\mathbf{p}_m + 2f_1\mathbf{z}_1 + f_0\mathbf{z}_2).$$

Če še izrazimo vektor $\mathbf{p}_m$ z vektorjema $\mathbf{p}_{1,0}$ in $\mathbf{p}_{1,1}$ oziroma vektorjema $\mathbf{p}_{1,2}$ in $\mathbf{p}_{1,3}$, dobimo naslednji enačbi:

$$\mathbf{q}_{1,1} = e_0\mathbf{p}_{1,1} + \frac{1}{3}(e_1 - e_0)\mathbf{p}_{1,0} + \frac{1}{3}f_1\mathbf{z}_0 + \frac{2}{3}f_0\mathbf{z}_1$$
$$\mathbf{q}_{1,2} = e_1\mathbf{p}_{1,2} + \frac{1}{3}(e_0 - e_1)\mathbf{p}_{1,3} + \frac{2}{3}f_1\mathbf{z}_1 + \frac{1}{3}f_0\mathbf{z}_2.$$

Da se izognemo možnosti, kjer ima dobljeni zlepek obliko špice, mora veljati omejitev $E_1(v) < 0$ za $v \in [0,1]$, s čimer dobimo nekaj omejitev za izbiro parametrov e_0 in e_1. Polinom $E_1(v)$ zapišimo kot $E_1(v) = (e_1 - e_0)v + e_0$. Na intervalu $[0,1]$ bo $E_1(v) < 0$, če bo njegov maksimum na tem intervalu manjši od 0. Obravnavajmo dve možnosti. Prva možnost je, da je $e_1 - e_0 < 0$ oziroma $e_1 < e_0$. V tem primeru je $E_1(v)$ padajoča funkcija, zato ima na $[0,1]$ maksimum v $v = 0$. Torej bo v tem primeru $E_1(v) < 0$, če bo $E_1(0) = e_0 < 0$. Druga možnost je, da je $e_1 - e_0 > 0$. V tem primeru je $E_1(v)$ naraščajoča funkcija in ima maksimum v $v = 1$. Torej bo v tem primeru $E_1(v) < 0$, če bo $E_1(1) = e_1 < 0$. Omejitev za parametra e_0 in e_1 je torej, da sta oba negativna.

Parametri e_0, e_1, f_0 in f_1 so tudi v tem primeru določeni iz enačb (4.4) in (4.5) na enak način kot v primeru 4.2.

V trenutnem primeru imamo nekoliko manj svobode, kar se tiče izbire kontrolnih točk, kot v primerih 4.1 in 4.2. Kontrolni točki $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$ sta kot v primeru 4.2 določeni s točkama $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ ter robnimi kontrolnimi točkami, kontrolni točki $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ pa nista več obe prosti. Prosta je le še ena izmed njiju, druga pa je določena z enačbo (4.7). to pomeni, da v splošnem ne moremo konstruirati ploskve S poljubne stopnje, če je R podana, saj dobimo pogoje za kontrolne točke R

primer s stopnjo 3 in 2? ali pa samo omeni, da je v tem primeru veliko več parametrov, ampak da so vse kontrolne točke odvisne od robnih, polinomi višje stopnje se v bistvu ne splačajo? uporabni so samo, kadar imamo stik ploskev različnih stopenj

4.2 Konstrukcija G^2-zveznih Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta

naredim tudi C^2?

V tem podpoglavju si oglejmo še primer konstrukcije dveh ploskev, ki sta na skupnem robu G^2-zvezni.

Naj bosta $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ Bézierovi ploskvi iz tenzorskega produkta stopnje $(5,5)$:

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} \mathbf{P}_{i,j} B_i^5(u) B_j^5(v)$$

in

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} \mathbf{Q}_{i,j} B_i^5(u) B_j^5(v),$$

kjer je $u, v \in [0,1]$. Stikata naj se v krivulji $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0,v) = \mathbf{S}(0,v)$ s kontrolnimi točkami $\{\mathbf{Z}_i; i = 0,\ldots,5\}$, kjer je $\mathbf{Z}_i = \mathbf{P}_{0,i} = \mathbf{Q}_{0,i}$. Tako kot v podpoglavju 4.1 predpostavljajmo, da imamo že vnaprej določene robne krivulje obeh ploskev, znova nas zanima, kakšne pogoje prinese zahteva G^2-zveznosti za notranje kontrolne točke. Ker gre sedaj za zveznost stopnje 2, bomo poleg kontrolnih točk $\mathbf{P}_{1,i}$ in $\mathbf{Q}_{i,1}$, $i = 1,2$, opazovali tudi kontrolne točke $\mathbf{P}_{2,i}$ in $\mathbf{Q}_{2,i}$, $i = 1,2$. Poleg oznak za kontrolne vektorje $\mathbf{p}_{1,j}$, $\mathbf{q}_{1,j}$ in $\mathbf{z}_i$, kjer je $j = 0,\ldots,5$ in $i = 0,\ldots,4$, že predstavljenih v podpoglavju 4.1, vpeljimo še oznake za kontrolne vektorje, ki nastopajo v drugih odvodih obeh ploskev. Naj bo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}_{2,j} = \mathbf{P}_{2,j} - 2\mathbf{P}_{1,j} + \mathbf{P}_{0,j},\\
&\mathbf{q}_{2,j} = \mathbf{Q}_{2,j} - 2\mathbf{Q}_{1,j} + \mathbf{Q}_{0,j} \text{ za } j = 0, \ldots, 5,\\
&\mathbf{s}_k = \mathbf{P}_{k+2} - 2\mathbf{P}_{k+1} + \mathbf{P}_k \text{ za } k = 0, \ldots, 3\\
&\text{ter}\\
&\mathbf{v}_j = \mathbf{P}_{1,j+1} - \mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{1,j} + \mathbf{P}_{0,j} \text{ za } j = 0, \ldots, 4.
\end{aligned}$$

Po izreku 2.8 bosta ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^2-zvezni na skupnem robu, natanko tedaj, ko bodo obstajale C^2-funkcije $\alpha_1(v)$, $\beta_1(v)$, $\alpha_2(v)$ in $\beta_2(v)$, kjer je $\alpha_1(v) \neq 0$ in ustreznega predznaka na intervalu $[0, 1]$, da bo veljala enakost (4.1) ter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}(0, v) =& \alpha_2(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) + \beta_2(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) + \alpha_1^2(v)\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}(0, v)+\\
&+ 2\alpha_1(v)\beta_1(v)\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u \partial v}(0, v) + \beta_1^2(v)\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial v^2}(0, v).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ker gre znova za Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta, lahko uporabimo izrek 3.6, po katerem sta ploskvi G^2-zvezni na skupnem robu natanko tedaj, ko obstajajo polinomi $D(v)$, $E_1(v)$, $F_1(v)$, $E_2(v)$ in $E_2(v)$, kjer je $D(v)E_1(v) \neq 0$ in polinom $E_1(v)$ ustreznega predznaka na intervalu $[0, 1]$, da velja enakost (4.2) ter

$$\begin{aligned}
D^3(v)\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}(0, v) =& E_2(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) + F_2(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) + D(v)E_1^2(v)\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}(0, v)+\\
&+ 2D(v)E_1(v)F_1(v)\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u \partial v}(0, v) + D(v)F_1^2(v)\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial v^2}(0, v).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Pri tem mora za stopnje polinomov veljati naslednje: $st(D) \leq 9$, $st(E_1) \leq 9$, $st(F_1) \leq 10$, $st(E_2) \leq 27$ in $st(F_2) \leq 28$.

Zaradi enostavnosti naj bo stopnja polinoma $D(v)$ enaka 0. Torej lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $D(v) \equiv 1$. Stopnje preostalih polinomov bomo izbrali v nadaljevanju.

Po enakosti (3.4) dobimo naslednje rezultate za parcialne odvode parametrizacij ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ v $u = 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) = 5\sum_{j=0}^{5} \mathbf{p}_{1,j} B_j^5(v) && \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) = 5\sum_{j=0}^{4} \mathbf{z}_j B_j^4(v)\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}(0, v) = 20\sum_{j=0}^{5} \mathbf{q}_{2,j} B_j^5(v) && \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}(0, v) = 20\sum_{j=0}^{5} \mathbf{p}_{2,j} B_j^5(v)\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial v^2}(0, v) = 20\sum_{j=0}^{3} \mathbf{s}_j B_j^3(v) && \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u \partial v}(0, v) = 25\sum_{j=0}^{4} \mathbf{v}_j B_j^4(v).
\end{aligned}$$

Dobljene izraze za odvode vstavimo v enačbi (4.2) in (4.10). Oglejmo si, kakšne pogoje nam ti dve enačbi data pri vrednostih $v = 0$ in $v = 1$, torej kakšni pogoji morajo veljati na robovih obeh ploskev, da bo njun stik G^2-zvezen. Pri vrednosti $v = 0$ dobimo

$$\mathbf{q}_{1,0} = e_{10}\mathbf{p}_{1,0} + f_{10}\mathbf{z}_0 \tag{4.11}$$

in

$$\mathbf{q}_{2,0} = \frac{1}{4}e_{20}\mathbf{p}_{1,0} + \frac{1}{4}f_{20}\mathbf{z}_0 + e_{10}^2\mathbf{p}_{2,0} + \frac{5}{2}e_{10}f_{10}\mathbf{v}_0 + f_{10}^2\mathbf{s}_0. \tag{4.12}$$

Tu smo vpeljali oznake $e_{10} = E_1(0)$, $f_{10} = F_1(0)$, $e_{20} = E_2(0)$ in $f_{20} = F_2(0)$. Pri vrednosti $v = 1$ pa dobimo

$$\mathbf{q}_{1,5} = e_{11}\mathbf{p}_{1,5} + f_{11}\mathbf{z}_4 \tag{4.13}$$

in

$$\mathbf{q}_{2,5} = \frac{1}{4}e_{21}\mathbf{p}_{1,5} + \frac{1}{4}f_{21}\mathbf{z}_4 + e_{11}^2\mathbf{p}_{2,5} + \frac{5}{2}e_{11}f_{11}\mathbf{v}_4 + f_{11}^2\mathbf{s}_3, \tag{4.14}$$

kjer smo vpeljali oznake $e_{11} = E_1(1)$, $f_{11} = F_1(1)$, $e_{21} = E_2(1)$ in $f_{21} = F_2(1)$.

Po izreku 3.6 mora za polinom $E_1(v)$ veljati, da je za $v \in [0, 1]$ različen od 0, da zagotovimo, da ploskvi ne bosta imeli stika v obliki špice, pa mora veljati še $E_1(v) < 0$ na intervalu $[0, 1]$. Sledi, da mora veljati $e_{10} < 0$ in $e_{11} < 0$.

Ker smo predpostavili, da imamo vnaprej določene robove obeh ploskev, so vsi kontrolni vektorji, ki nastopajo v zgornjih enačbah((4.11)-(4.14)), razen vektorjev $\mathbf{v}_0$ in $\mathbf{v}_4$ znani. Enačbi (4.11) in (4.13) enolično določata vrednosti parametrov e_{10}, f_{10}, e_{11} in f_{11}, izračunamo jih s pomočjo Cramerjevih formul, kot v primeru 4.2. Proste parametre oziroma kontrolne točke nam bosta prinesli le enačbi (4.12) in (4.14).

Najprej si oglejmo enačbo (4.12) in obravnavajmo dva primera. V prvem primeru naj bodo robovi krivulj izbrani na tak način, da je koeficient pred vektorjem $\mathbf{v}_0$ enak 0, torej da je $f_{10} = 0$, v drugem primeru pa je različen od 0. Z $\mathbf{n}_1$ bomo označili enotsko normalo na ploskev v točki $\mathbf{P}_{0,0}$. Če je $f_{10} = 0$, izgubimo člen, ki vsebuje $\mathbf{v}_0$. To pomeni, da so vsi vektorji, ki nastopajo v enačbi, že določeni. V enačbi se nam pojavita le dva še neznana parametra e_{20} in f_{20}, ki ju lahko določimo iz enačbe. V tem primeru nam enačba (5.8) ne da nobenih prostih parametrov ali kontrolnih točk. Če pa je $f_{10} \neq 0$, imamo na voljo dva različna scenarija. Prva možnost je, da projekcijo vektorja $\mathbf{v}_0$ na normalo $\mathbf{n}_1$ ter parametra e_{20} in f_{20} določimo iz enačbe (4.12), projekcija vektorja $\mathbf{v}_0$ na tangentno ravnino na ploskev v točki $\mathbf{P}_{0,0}$ pa je prosta. Druga možnost pa je, da sta parametra e_{20} in f_{20} prosta, vektor $\mathbf{v}_0$ pa je določen z enačbo (4.12).

Na enak način lahko analiziramo enačbo (4.14). V prvem primeru, kjer je $f_{11} = 0$, člen, ki vsebuje vektor $\mathbf{v}_4$, izgine, parametra e_{21} in f_{21} pa sta določena z enačbo (4.14). Če je $f_{11} \neq 0$ pa znova dobimo dve situaciji. Lahko določimo projekcijo vektorja $\mathbf{v}_4$ na normalo $\mathbf{n}_2$ na ploskev v točki $\mathbf{P}_{0,5}$ ter parametra e_{21} in $f_{2,1}$ iz enačbe (4.14), projekcija vektorja $\mathbf{v}_4$ na tangentno ravnino na ploskev v točki $\mathbf{P}_{0,5}$ pa je prosta, ali pa sta prosta parametra e_{21} in f_{21}, vektor $\mathbf{v}_4$ pa je določen z enačbo (4.14).

Sedaj moramo izbrati polinome E_1, E_2, F_1 in F_2. Izbira njihovih stopenj je v primeru G^2-zveznosti nekoliko težja kot v primeru G^1-zveznosti, saj so odvisni od stopenj Bézierjevih krivulj tako v enačbi (4.2) kot v enačbi (4.10). Če bi želeli minimalne stopnje koeficientnih polinomov, bi lahko za $E_1(v)$ in $E_2(v)$ izbrali konstanti, polinoma F_1 in F_2 pa bi izbrali linearna. V tem primeru bi za prvih nekaj kontrolnih točk ploskve $\mathbf{S}$ dobili enake pogoje, kot v primeru 4.2, kontrolne točke ploskve $\mathbf{R}$ pa bi bile proste. V nadaljevanju pa si bomo raje ogledali, kako poteka konstrukcija, če sta polinoma $E_1(v)$ in $E_2(v)$ stopnje 2, polinoma $F_1(v)$ in $F_2(v)$ pa linearna. Naj torej velja:

$$\begin{aligned} E_1(v) &= e_{10}(1-v)^2 + 2e_{1m}v(1-v) + e_{11}v^2 \\ F_1(v) &= f_{10}(1-v) + f_{11}v \\ E_2(v) &= e_{20}(1-v)^2 + 2e_{1m}v(1-v) + e_{21}v^2 \\ F_2(v) &= f_{20}(1-v) + f_{21}v. \end{aligned}$$

Da se bodo pri taki izbiri koeficientnih polinomov stopnje Bézierjevih krivulj v enačbah (4.2) in (4.10) ujemale, moramo znižati stopnji parcialnih odvodov $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}$ in $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}$, stopnja krivulje $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}$ naj bo 3, stopnja krivulje $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}$ pa naj bo 1.

$$\frac{1}{5}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = \sum_{i=0}^{5} \mathbf{p}_{1,i} B_i^5(v) = \sum_{i=0}^{3} \tilde{\mathbf{p}}_i B_i^3(v),$$

$$\frac{1}{20}\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}|_{u=0} = \sum_{i=0}^{5} \mathbf{p}_{2,i} = (1-v)\mathbf{p}_{2,0} + v\mathbf{p}_{2,5}.$$

Kontrolne vektorje $\mathbf{p}_{1,i}$, $i = 0, \ldots, 5$ lahko izrazimo z vektorji $\tilde{\mathbf{p}}_i$ s pomočjo enačb za višanje stopnje Bézierjeve krivulje na naslednji način:

$$\mathbf{p}_{1,1} = \frac{1}{5}(3\tilde{\mathbf{p}}_1 + 2\mathbf{p}_{1,0}), \qquad \mathbf{p}_{1,2} = \frac{1}{10}(6\tilde{\mathbf{p}}_1 + 3\tilde{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{p}_{1,0}), \tag{4.15}$$

$$\mathbf{p}_{1,3} = \frac{1}{10}(3\tilde{\mathbf{p}}_1 + 6\tilde{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{p}_{1,5}), \qquad \mathbf{p}_{1,4} = \frac{1}{5}(3\tilde{\mathbf{p}}_2 + 2\mathbf{p}_1, 5). \tag{4.16}$$

Seveda velja $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_{1,0}$, $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{3} = \mathbf{p}_{1,5}$. Iz enačb (4.15) lahko izrazimo še vektorja $\tilde{\mathbf{p}}_1$ in $\tilde{\mathbf{p}}_2$ kot

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_{1,0} + \frac{5}{3}\mathbf{v}_0, \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_{1,5} - \frac{5}{3}\mathbf{v}_4.$$

Tu smo uporabili dejstvo, da je $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_{1,1} - \mathbf{p}_{10}$ in $\mathbf{v}_4 = \mathbf{p}_{1,5} - \mathbf{p}_{1,4}$.

Enako lahko s pomočjo enačb za višanje stopnje kontrolne vektorje $\mathbf{p}_{2,i}$, $i = 0, \ldots, 5$ izrazimo z vektorjema $\mathbf{p}_{2,0}$ in $\mathbf{p}_{2,5}$:

$$\mathbf{p}_{2,1} = \frac{1}{5}(4\mathbf{p}_{2,0} + \mathbf{p}_{2,5}), \qquad \mathbf{p}_{2,2} = \frac{1}{10}(6\mathbf{p}_{2,0} + 4\mathbf{p}_{2,5}), \tag{4.17}$$

$$\mathbf{p}_{2,3} = \frac{1}{10}(4\mathbf{p}_{2,0} + 6\mathbf{p}_{2,5}), \qquad \mathbf{p}_{2,4} = \frac{1}{5}(\mathbf{p}_{2,0} + 4\mathbf{p}_{2,5}). \tag{4.18}$$

S temi enačbami so torej natančno določeni kontrolni vektorji $\mathbf{p}_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 0, \ldots, 5$ ploskve $\mathbf{R}$, torej tudi njene kontrolne točke $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, \ldots, 5$.

Ostale notranje kontrolne točke so proste saj zahtevamo le geometrijsko zveznost stopnje 2.

Za določitev pogojev, ki morajo veljati za kontrolne vektorje ploskve $\mathbf{S}$ moramo uporabiti enačbi (4.2) in (4.10), ki predstavljata pogoja za G^1 in G^2-zveznost. Ko v enačbo (4.2) vstavimo polinoma $E_1(v)$ in $F_1(v)$, preoblikujemo dobljeno enačbo, da na obeh straneh dobimo Bézierjevo krivuljo stopnje 5 ter primerjamo koeficiente pred baznimi polinomi, dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{1,1} &= \frac{1}{5}(3e_{10}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 2e_{1m}\mathbf{p}_{1,0} + f_{11}\mathbf{z}_0 + 4f_{10}\mathbf{z}_1),\\
\mathbf{q}_{1,2} &= \frac{1}{10}(6e_{1m}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 3e_{10}\tilde{\mathbf{p}}_2 + e_{11}\mathbf{p}_{1,0} + 4f_{11}\mathbf{z}_1 + 6f_{10}\mathbf{z}_2),\\
\mathbf{q}_{1,3} &= \frac{1}{10}(3e_{11}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 6e_{1m}\tilde{\mathbf{p}}_2 + e_{10}\mathbf{p}_{1,5} + 6f_{11}\mathbf{z}_2 + 4f_{10}\mathbf{z}_3),\\
\mathbf{q}_{1,4} &= \frac{1}{5}(3e_{11}\tilde{\mathbf{p}}_2 + 2e_{1m}\mathbf{p}_{1,5} + 4f_{11}\mathbf{z}_3 + f_{10}\mathbf{z}_4).
\end{aligned}$$

Ko enak postopek ponovimo še z enačbo (4.10), pa dobimo:

$$\begin{aligned}
5\mathbf{q}_{2,1} =& 4e_{10}e_{1m}\mathbf{p}_{2,0} + e_{10}^2\mathbf{p}_{2,5} + e_{10}f_{10}(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) + (2e_{1m}f_{10} + e_{10}f_{11})\mathbf{v}_0 + 3f_{10}^2\mathbf{s}_1 +\\
&+ 2f_{10}f_{11}\mathbf{s}_0 + \frac{1}{4}(3e_{20}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 2e_{2m}\mathbf{p}_{1,0} + f_{21}\mathbf{z}_0 + 4f_{20}\mathbf{z}_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10\mathbf{q}_{2,2} =& (2e_{10}e_{11} + 4e_{1m}^2)\mathbf{p}_{2,0} + 4e_{10}e_{1m}\mathbf{p}_{2,5} + +(e_{10}f_{11} + 2e_{1m}f_{10})(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) +\\
&+ (2e_{1m}f_{11} + e_{11}f_{10})\mathbf{v}_0 + e_{10}f_{10}\mathbf{v}_4 + 3f_{10}^2\mathbf{s}_2 + 6f_{10}f_{11}\mathbf{s}_1 + f_{11}^2\mathbf{s}_0 +\\
&+ \frac{1}{4}(6e_{2m}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 3e_{20}\tilde{\mathbf{p}}_2 + e_{21}\mathbf{p}_{1,0} + 4f_{21}\mathbf{z}_1 + 6f_{20}\mathbf{z}_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10\mathbf{q}_{2,3} =& (2p_{10}p_{11} + 4p_{1m}^2)\mathbf{p}_{2,5} + 4p_{10}p_{1m}\mathbf{p}_{2,0} + +(p_{11}q_{10} + 2p_{1m}q_{11})(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) +\\
&+ (2p_{1m}q_{10} + p_{10}q_{11})\mathbf{v}_4 + p_{11}q_{11}\mathbf{v}_0 + 3q_{11}^2\mathbf{s}_1 + 6q_{10}q_{11}\mathbf{s}_2 + q_{10}^2\mathbf{s}_3 +\\
&+ \frac{1}{4}(6p_{2m}\tilde{\mathbf{p}}_2 + 3p_{21}\tilde{\mathbf{p}}_1 + p_{20}\mathbf{p}_{1,5} + 4q_{21}\mathbf{z}_3 + 6q_{21}\mathbf{z}_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5\mathbf{q}_{2,4} =& 4p_{10}p_{1m}\mathbf{p}_{2,5} + p_{11}^2\mathbf{p}_{2,5} + p_{11}q_{11}(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) + (2p_{1m}q_{11} + p_{11}q_{10})\mathbf{v}_4 + 3q_{11}^2\mathbf{s}_2 +\\
&+ 2q_{10}q_{11}\mathbf{s}_3 + \frac{1}{4}(3p_{21}\tilde{\mathbf{p}}_2 + 2p_{2m}\mathbf{p}_{1,5} + q_{21}\mathbf{z}_3 + 4q_{20}\mathbf{z}_4).
\end{aligned}$$

Parametra p_{1m} in p_{2m} sta prosta. Po izbiri parametrov so točno določeni še kontrolni vektorji $\mathbf{q}_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 0, \ldots, 5$ ploskve $\mathbf{S}$, oziroma kontrolne točke $\mathbf{Q}_{i,j}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, \ldots, 5$.

drugi možen pristop? če nista prosta p1m in p2m ampak projekcija enega od vektorjev?

5 Konsrtrukcija G^1-zveznih trikotnih Bézierjevih ploskev

5.1 Trikotne Bézierjeve ploskve

povej, kje je možno najti dokaze trditev v tem podpoglavju

Trikotne Bézierjeve ploskve so tip Bézierjevih ploskev s parametrizacijo, definirano nad domeno, sestavljeno iz trikotnikov. Ko imamo opravka s trikotnimi domenami, uporaba običajnega kartezičnega koordinatnega sistema ni najbolj praktična, zato bomo točke znotraj takih domen raje zapisovali z baricentričnimi koordinatami.

Definicija 5.1. Naj bo T trikotnik z oglišči $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ in $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3)$, oziroma $T = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$. Velja, da je vsako točko $\mathbf{p} = (x, y)$ mogoče enolično zapisati kot $\mathbf{p} = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3$, kjer je $u+v+w = 1$. Trojico $\mathbf{u} = (u, v, w)$ imenujemo *baricentrične koordinate* točke $\mathbf{p}$ glede na trikotnik T. Krajše to zapišemo kot $\mathbf{u} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}, T)$.

Trikotne Bézierove ploskve definiramo na naslednji način.

Definicija 5.2. *Trikotna Bézierova ploskev stopnje n nad trikotnikom $T = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$*lomljenje? je podana s parametrizacijo

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{b}_{i,j,k} B^n_{i,j,k}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}, T)$$

kjer so $\mathbf{b}_{i,j,k}$, $i + j + k = n$, kontrolne točke te ploskve. Trikotnik T je domena te parametrizacije. Z $B^n_{i,j,k}$ označujemo Bernsteinove bazne polinome v dveh spremenljivkah, ki so definirani na naslednji način:

$$B^n_{i,j,k}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

kjer velja $i + j + k = n$ ter $i \geq 0$, $j \geq 0$ in $k \geq 0$.

Koordinate poljubne točke na trikotni Bézierovi ploskvi lahko izračunamo s pomočjo de Casteljaujevega algoritma.

decasteljaujev algoritem? ali samo sklic na vir?

V nadaljevanju si bomo ogledali še definicijo smernega odvoda trikotne Bézierjeve ploskve in pogoje za C^n-zveznost med dvema trikotnima Bézierjevima ploskvama, v ta namen pa moramo najprej definirati pojem trikotniškega razcveta.

Definicija 5.3. izberemo točke $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ z baricentričnimi koordinatami $\mathbf{u}_i = Bar(\mathbf{p}_i; T)$, $i = 1, \ldots, n$. Če v de Casteljaujevem algoritmu na i-tem koraku namesto z baricentričnimi koordinatami $\mathbf{u}$ računamo z $\mathbf{u}_i$, kot rezultat algoritma dobimo polinom več spremenljivk, ki ga imenujemo *trikotniški razcvet* in ga označujemo z $\mathbf{b}[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n; T]$ oziroma $\mathbf{b}[\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n]$.

Kontrolne točke neke ploskve nad trikotnikom T lahko izrazimo s trikotniškim razcvetom na naslednji način: $\mathbf{b}_{i,j,k} = \mathbf{b}[\mathbf{e}_1^{\langle i \rangle}, \mathbf{e}_2^{\langle j \rangle}, \mathbf{e}_3^{\langle k \rangle}]$.

S pomočjo trikotniškega razcveta lahko izrazimo kontrolne točke ploskve glede na različne trikotnike v domeni. Imejmo trikotnika $T_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ in $T_2 =< \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 >$. Naj bodo $\mathbf{b}_{i,j,k}$, $i+j+k=n$ kontrolne točke ploskve $\mathbf{P}$ glede na trikotnik T_1 in naj bo $\mathbf{s}_1 = Bar(r_1; T_1)$, $\mathbf{s}_2 = Bar(r_2; T_1)$ ter $\mathbf{s}_3 = Bar(r_3; T_1)$. Potem se kontrolne točke ploskve $\mathbf{P}$ glede na trikotnik T_2 izražajo na naslednji način: $c_{i,j,k} = \mathbf{b}[\mathbf{s}_1^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}_2^{\langle j \rangle}, \mathbf{s}_3^{\langle k \rangle}]$, $i+j+k=n$. Tu s $\mathbf{s}_1^{\langle i \rangle}$ označujemo i-kratno ponovitev $\mathbf{s}_1$.

Če imamo domeno, sestavljeno iz dveh trikotnikov, ki se na enem robu stikata, torej če imamo trikotnika $T_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ in $T_2 = \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \rangle$, ter ploskev, podano s kontrolnimi točkami glede na trikotnik T_1: $b_{i,j,k}$, $i+j+k=n$, lahko kontrolne točke ploskve glede na trikotnik T_2 zapišemo tako: $\mathbf{c}_{i,j,k} = \mathbf{b}[\mathbf{e}_1^{\langle i \rangle}, \mathbf{e}_2^{\langle j \rangle}, \alpha^{\langle k \rangle}; T]$. Tu je $\alpha = Bar(\mathbf{p}_4; T_1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ in $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$.

Oglejmo si še formulo za smerni odvod parametrizacije trikotne Bézierjeve ploskve. Imejmo ploskev $\mathbf{P}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k} \mathbf{b}_{i,j,k} B^n_{i,j,k}(\mathbf{u})$ nad trikotnikom T, kjer je $\mathbf{u} = Bar(\mathbf{p}; T)$. Recimo, da odvajamo v smeri vektorja $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ ter $\alpha = Bar(\mathbf{a}; T)$ in $\beta = Bar(\mathbf{b}; T)$. Potem so baricentrične koordinate vektorja $\mathbf{d}$ enake $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \beta - \alpha$. Velja $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$. Odvod parametrizacije $\mathbf{P}$ v smeri vektorja $\mathbf{p}$ izračunamo na naslednji način:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbf{p}) &= n \sum_{i+j+k=n-1} (\mu_1 \mathbf{b}_{i+1,j,k} + \mu_2 \mathbf{b}_{i,j+1,k} + \mu_3 \mathbf{b}_{i,j,k+1}) B^{n-1}_{i,j,k}(\mathbf{u}) \\ &= n\mathbf{b}[\mu, \mathbf{u}^{\langle n-1 \rangle}; T]. \end{aligned}$$

Pokazati je mogoče tudi, da za smerni odvod trikotne ploskve velja:

$$D_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbf{p}) = n(\mu_1 \mathbf{b}^{n-1}_{1,0,0}(\mathbf{u}) + \mu_2 \mathbf{b}^{n-1}_{0,1,0}(\mathbf{u}) + \mu_3 \mathbf{b}^{n-1}_{0,0,1}(\mathbf{u})),$$

kjer so $\mathbf{b}^{n-1}_{1,0,0}(\mathbf{u})$, $\mathbf{b}^{n-1}_{0,1,0}(\mathbf{u})$ in $\mathbf{b}^{n-1}_{0,0,1}(\mathbf{u})$ točke, dobljene po $n-1$ korakih de Casteljaujevega algoritma, ki razpenjajo tangentno ravnino na točko $\mathbf{P}(\mathbf{p})$. Ta ugotovitev bo pomembna pri konstrukciji G^1-zveznih trikotnih ploskev.

5.2 Konstrukcija C^1-zveznih trikotnih Bézierovih ploskev

Imejmo dve trikotni Bézierovi ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ stopnje n nad trikotnima domenama $T_1 = \langle \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p}_3 \rangle$ in $T_2 = \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{r}_{i,j,k} B^n_{i,j,k}(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{s}_{i,j,k} B^n_{i,j,k}(\mathbf{v}); \quad \mathbf{v} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Zapišimo točki $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ kot $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ in $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Ploskvi se stikata na robu nad daljico $\overline{\mathbf{p_2 p_3}}$, oziroma na robu, določenem z $u_1 = v_1 = 0$. Torej velja $\mathbf{r}_{0,j,k} = \mathbf{s}_{0,j,k}$ za $j \geq 0$, $k \geq 0$, $j+k=0$.

Da bo stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ C^1-zvezen, se morata v $u_1 = 0$ oziroma $v_1 = 0$ ujemati odvoda parametrizacij ploskev v katerikoli smeri. Opazujmo odvoda ploskev v smeri $\mathbf{d} = \mathbf{p_4} - \mathbf{p}_2$. Naj bodo $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mathrm{Bar}(\mathbf{d}; T_1) = \alpha - \mathbf{e}_2$ baricentrične koordinate vektorja $\mathbf{d}$ glede na trikotnik T_1, kjer je $\alpha = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}_4; T_1)$, in

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \mathrm{Bar}(\mathbf{d}; T_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ baricentrične koordinate vektorja $\mathbf{d}$ glede na trikotnik T_2. Veljati mora:

$$\sum_{i+j+k=n-1} (\mu_1 \mathbf{r}_{i+1,j,k} + \mu_2 \mathbf{r}_{i,j+1,k} + \mu_3 \mathbf{r}_{i,j,k+1}) B^{n-1}_{i,j,k}(\mathbf{u})|_{u_1=0} =$$
$$\sum_{i+j+k=n-1} (\eta_1 \mathbf{s}_{i+1,j,k} + \eta_2 \mathbf{s}_{i,j+1,k} + \eta_3 \mathbf{s}_{i,j,k+1}) B^{n-1}_{i,j,k}(\mathbf{v})|_{v_1=0}$$

ok |u1=0? oziroma

$$\mu_1 \mathbf{r}_{1,j,k} + \mu_2 \mathbf{r}_{0,j+1,k} + \mu_3 \mathbf{r}_{0,j,k+1} = \eta_1 \mathbf{s}_{1,j,k} + \eta_2 \mathbf{s}_{0,j+1,k} + \eta_3 \mathbf{s}_{0,j,k+1} \tag{5.1}$$

za $j+k = n-1$. Točki $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ se namreč na stiku obeh ploskev ujemata. Če izrazimo baricentrične koordinate vektorjev s pomočjo baricentričnih koordinat točk, torej če pišemo $\mu = (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3)$ in $\eta = (1, -1, 0)$ ter dobljeno vstavimo v enačbo (5.1), ob tem pa upoštevamo še, da se kontrolne točke obeh ploskev na skupnem robu ujemajo, dobimo

$$\mathbf{s}_{1,j,k} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,j,k} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,j+1,k} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,j,k+1} \tag{5.2}$$

za $j+k = n-1$. Enačba (5.2) predstavlja pogoj, ki mora veljati za kontrolne točke obeh ploskev, da se stikata s C^1-zveznostjo. Do enakega rezultata bi na podoben način prišli, če bi namesto vektorja $\mathbf{d}$ uporabili vektor $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3$ katerikoli linearno kombinacijo obeh vektorjev.

Dobljeni rezultat sedaj uporabimo na primeru stika dveh ploskev stopnje 3.

Primer 5.4. Imejmo dve trikotni Bézierovi ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ stopnje 3 nad trikotnima domenama $T_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ in $T_2 = \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{r}_{i,j,k} B^3_{i,j,k}(\mathbf{u}); \;\; \mathbf{u} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{s}_{i,j,k} B^3_{i,j,k}(\mathbf{v}); \;\; \mathbf{v} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Naj bo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ in $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ter $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}_4; T_1)$. Ploskvi se kakor prej stikata v $u_1 = v_1 = 0$, torej za kontrolne točke na skupnem robu velja $\mathbf{s}_{0,0,2} = \mathbf{r}_{0,0,2}$, $\mathbf{s}_{0,1,1} = \mathbf{r}_{0,1,1}$ in $\mathbf{s}_{0,2,0} = \mathbf{r}_{0,2,0}$.

Da bo stik obeh ploskev še C^1 zvezen mora po enačbi (5.2) veljati:

$$\mathbf{s}_{1,0,2} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,0,2} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,1,2} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,0,3}$$
$$\mathbf{s}_{1,1,1} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,1,1} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,2,1} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,1,2}$$
$$\mathbf{s}_{1,2,0} = \alpha_1 \mathbf{r}_{0,1,2} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,3,0} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,2,1}$$

primerjava kontrolnih točk, katere so določene s katerimi?

Opazimo lahko, da morata biti točki $\mathbf{s}_{1,j,k}$ in $\mathbf{r}_{1,j,k}$, kjer je $j+k = 2$ in $j \geq 0$, $k \geq 0$, kolinearni. Še več, trikotnika $\langle \mathbf{r}_{1,0,2}, \mathbf{r}_{0,1,2}, \mathbf{r}_{0,0,3} \rangle$ in $\langle \mathbf{s}_{0,1,2}, \mathbf{s}_{0,0,3}, \mathbf{s}_{1,0,2} \rangle$ morata biti afini sliki domenskih trikotnikov T_1 in T_2. Enako mora veljati tudi za trikotnika $\langle \mathbf{r}_{1,1,1}, \mathbf{r}_{0,2,1}, \mathbf{r}_{0,1,2} \rangle$ in $\langle \mathbf{s}_{0,2,1}, \mathbf{s}_{0,1,2}, \mathbf{s}_{1,1,1} \rangle$ ter trikotnika $\langle \mathbf{r}_{1,2,0}, \mathbf{r}_{0,3,0}, \mathbf{r}_{0,2,1} \rangle$ in $\langle \mathbf{s}_{0,3,0}, \mathbf{s}_{0,2,1}, \mathbf{s}_{1,2,0} \rangle$.

Izbira kontrolnih točk C^1-zveznih ploskev je torej v veliki meri odvisna od domenskih trikotnikov, kar nas precej omejuje pri konstrukciji. Oglejmo si primer, kjer imamo podane robne točke dveh ploskev, ni pa možno najti notranjih kontrolnih točk, da bi bil stik ploskev C^1-zvezen.

Primer 5.5. Imejmo trikotni ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ kot v primeru 5.4. Predpostavljajmo, da imamo že vnaprej določene njune robne točke, tako da so robovi dobljenega zlepka C^1-zvezni. dodaj: kaj mora veljati, da so robovi c1? Naj velja

$$\mathbf{s}_{1,0,2} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,0,2} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,1,2} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,0,3}$$

in

$$\mathbf{s}_{1,2,0} = \beta_1 \mathbf{r}_{0,1,2} + \beta_2 \mathbf{r}_{0,3,0} + \beta_3 \mathbf{r}_{0,2,1},$$

kjer je $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. V tem primeru je nemogoče določiti točki $\mathbf{r}_{1,1,1}$ in $\mathbf{s}_{1,1,1}$, da bi bil dobljeni zlepek C^1-zvezen, saj para trikotnikov $\langle \mathbf{r}_{1,0,2}, \mathbf{r}_{0,1,2}, \mathbf{r}_{0,0,3} \rangle$ in $\langle \mathbf{s}_{0,1,2}, \mathbf{s}_{0,0,3}, \mathbf{s}_{1,0,2} \rangle$ ter $\langle \mathbf{r}_{1,2,0}, \mathbf{r}_{0,3,0}, \mathbf{r}_{0,2,1} \rangle$ in $\langle \mathbf{s}_{0,3,0}, \mathbf{s}_{0,2,1}, \mathbf{s}_{1,2,0} \rangle$ nista afini sliki istega para domenskih trikotnikov.

V zgornjem primeru smo videli, da je pogoj C^1-zveznosti za trikotne Bézierjeve ploskve dokaj strog in tesno povezan z izbiro domene. Geometrijska zveznost pa nam da milejše pogoje, saj nimamo več odvisnosti od domene. Če bi v zgornjem primeru zahtevali le G^1-zveznost, bi bilo mogoče določiti točki $\mathbf{r}_{1,1,1}$ in $\mathbf{s}_{1,1,1}$.

Oglejmo si še en zelo enostaven primer ploskev, ki na stiku zaradi izbire domene ne moreta biti C^1-zvezni, lahko pa sta G^1-zvezni.

Primer 5.6. Imejmo dve trikotni Bézierovi ploskvi stopnje 1:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \mathbf{r}_{1,0,0} u + \mathbf{r}_{0,1,0} v + \mathbf{r}_{0,0,1} w; \quad (u, v, w) = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_1)$$

in

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{s}_{1,0,0} \tilde{u} + \mathbf{s}_{0,1,0} \tilde{v} + \mathbf{s}_{0,0,1} \tilde{w}; \quad (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Naj velja $\mathbf{r}_{1,0,0} = (0,1,0)$, $\mathbf{r}_{0,1,0} = \mathbf{s}_{0,1,0} = (0,0,0)$, $\mathbf{r}_{0,0,1} = \mathbf{s}_{0,0,1} = (1,1,0)$ in $\mathbf{s}_{0,0,1} = (1,0,0)$. Ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ sta torej dva pravokotna trikotnika v ravnini $z = 0$, ki skupaj tvorita kvadrat. Trikotnika T_1 in T_2 definirajmo kot $T_1 = \langle (0,1), (0,0), (1,0) \rangle$ in $T_2 =$
$\langle (0,1), (0,0), (1,0) \rangle$. prelom?

Očitno je, da je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^1-zvezen, saj imata ploskvi vzdolž stične krivulje isto konstatno tangentno ravnino. Vendar pa stik teh dveh ploskev ni C^1-zvezen. Naj bo $\alpha = \mathrm{Bar}(\mathbf{s}_{1,0,0}; T_1)$. Torej je $\alpha = (-1, 2, 0)$. Da bi bil stik ploskev C^1-zvezen, bi moralo biti zadoščeno enačbi (5.2), torej bi moralo veljati

$$\mathbf{s}_{1,0,0} = -\mathbf{r}_{1,0,0} + 2\mathbf{r}_{0,1,0},$$

kar pa v našem primeru ne drži.

5.3 Konstrukcija G^1-zveznih trikotnih Bézierovih ploskev

Tako kot v primeru Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta, obstaja več načinov konstrukcije G^1-zveznih trikotnih Bézierovih ploskev, odvisno od izbire stičnih funkcij. V tem podpoglavju si bomo ogledali enega izmed načinov konstrukcije dveh trikotnih Bézierovih ploskev, ki sta na skupnem robu zvezni, vendar pa se tega ne bomo lotili prek osnovne definicije geometrijske zveznosti oziroma izreka 2.8, temveč prek geometrijske definicije.

Imejmo ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ stopnje n nad trikotnima domenama $T_1 = \langle \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p}_3 \rangle$ in $T_2 = \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{r}_{i,j,k} B^n_{i,j,k}(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{s}_{i,j,k} B^n_{i,j,k}(\tilde{\mathbf{u}}); \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathrm{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Naj bo $\mathbf{u} = (u, v, w)$ in $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$. Ploskvi se stikata na robu nad daljico $\overline{\mathbf{p_2}\mathbf{p_3}}$, oziroma na robu, določenem z $u = \tilde{u} = 0$. Torej velja $\mathbf{r}_{0,j,k} = \mathbf{s}_{0,j,k}$ za $j \geq 0$, $k \geq 0$, $j + k = 0$. Stično krivuljo lahko zapišemo kot $C(v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{r}_{0,j,n-j} B^n_j(v)$, kjer je $v \in [0, 1]$.

Naj bo $\mathbf{C}(v)$ točka na stični krivulji pri parametru v. V poglavju 5.1 smo videli, da je mogoče tangentno ravnino na Bézierovo ploskev v neki točki izraziti s pomočjo točk, ki jih dobimo v predzadnjem koraku de Casteljaujevega algoritma. Tangentno ravnino na ploskev $\mathbf{R}$ v točki $\mathbf{C}(v)$ razpenjajo točke $\mathbf{r}^{n-1}_{1,0,0}(v)$, $\mathbf{r}^{n-1}_{0,1,0}(v)$ in $\mathbf{r}^{n-1}_{0,0,1}(v)$, Tangentno ravnino na ploskev $\mathbf{S}$ v točki $\mathbf{C}(v)$ pa razpenjajo točke $\mathbf{s}^{n-1}_{1,0,0}(v)$, $\mathbf{s}^{n-1}_{0,1,0}(v)$ in $\mathbf{s}^{n-1}_{0,0,1}(v)$. Da bo zlepek obeh ploskev G^1-zvezen, morata biti obe tangentni ravnini del ene ravnine. To pomeni, da se morata premici $\overline{\mathbf{r}^{n-1}_{0,1,0}(v)\mathbf{r}^{n-1}_{0,0,1}(v)}$ in $\overline{\mathbf{r}^{n-1}_{1,0,0}(v)\mathbf{s}^{n-1}_{1,0,0}(v)}$ sekati za vsako vrednost parametra $v \in [0, 1]$. Torej morata obstajati funkciji $\lambda(v)$ in $\mu(v)$, za kateri velja

$$(1 - \lambda(v))\mathbf{s}^{n-1}_{1,0,0}(v) + \lambda(v)\mathbf{r}^{n-1}_{1,0,0} = (1 - \mu(v))\mathbf{r}^{n-1}_{0,0,1} + \mu(v)\mathbf{r}^{n-1}_{0,1,0}. \tag{5.3}$$

S tem smo med drugim zagotovili tudi, da se točki $\mathbf{s}^{n-1}_{1,0,0}(v)$ in $\mathbf{r}^{n-1}_{1,0,0}(v)$ za vsako vrednost $v \in [0, 1]$ nahajata na različnih straneh robne krivulje. Dobljeni zlepek tako ne bo imel oblike špice. Veljati mora še, da sta funkciji $\lambda(v)$ in $\mu(v)$ na intervalu $[0, 1]$ različni od 0 in 1, da tangentne ravnine na $\mathbf{C}(v)$ niso izrojene. poveži s pogojem iz def, da mora biti funkcija različna od 0

Zgornja enačba predstavlja pogoj, ki zagotavlja G^1-zveznost zlepka ploskev. ni pa to potreben pogoj?

Iz de Casteljaujevega algoritma sledi, da lahko točke, ki razpenjajo tangenti ravnini zapišemo na naslednji način

$$\mathbf{r}^{n-1}_{1,0,0}(v) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{1,i,n-i-1} B^{n-1}_i(v) \qquad \mathbf{r}^{n-1}_{0,1,0}(v) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1} B^{n-1}_i(v)$$

$$\mathbf{r}^{n-1}_{0,0,1}(v) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i,n-i} B^{n-1}_i(v) \qquad \mathbf{s}^{n-1}_{1,0,0}(v) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} B^{n-1}_i(v).$$

Zaradi ujemanja kontrolnih točk na skupnem robu, je $\mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v) = \mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v)$ in $\mathbf{s}_{0,1,0}^{n-1}(v) = \mathbf{r}_{0,1,0}^{n-1}(v)$.

Najprej si oglejmo, kakšne pogoje nam da enačba (5.3) za robne kontrolne točke. Vstavimo v enačbo (5.3) vrednosti $v = 0$ in $v = 1$. Pri vrednosti $v = 0$ dobimo:

$$(1-\lambda_0)\mathbf{s}_{1,0,n-1} + \lambda_0 \mathbf{r}_{1,0,n-1} = (1-\mu_0)\mathbf{r}_{0,0,n} + \mu_0 \mathbf{r}_{0,1,n-1},$$

kjer smo vpeljali oznaki $\lambda_0 = \lambda(0)$ in $\mu_0 = \mu(0)$. Pri vpredností $v = 1$ pa dobimo:

$$(1-\lambda_1)\mathbf{s}_{1,n-1,0} + \lambda_1 \mathbf{r}_{1,n-1,0} = (1-\mu_1)\mathbf{r}_{0,n-1,1} + \mu_1 \mathbf{r}_{0,n,0},$$

kjer smo vpeljali še oznaki $\lambda_1 = \lambda(1)$ in $\mu_1 = \mu(1)$. Vrednosti λ_0 in μ_0 opisujeta obliko prvega para trikotnikov v kontrolni mreži ob skupnem robu, vrednosti λ_1 in μ_1 pa zadnji par trikotnikov. Vidimo, da oblika obeh parov ni več nujno enaka, torej para trikotnikov nista več nujno afini sliki istega para domenskih trikotnikov. Že tu vidimo, da so pogoji, ki jih zahteva G^1-zveznost, milejši od zahteve C^1-zveznosti. Posledično je, kot smo videli že v primeru ploskev iz tenzorskega produkta, mogoča konstrukcija ploskev veliko več različnih oblik.

Sedaj za funkciji $\lambda(v)$ in $\mu(v)$ izberimo polinoma prve stopnje

$$\lambda(v) = (1-v)\lambda_0 + v\lambda_1, \qquad \mu(v) = (1-v)\mu_0 + v\mu_1.$$

Da si olajšajmo nadaljnje delo, najprej nekoliko preoblikujmo izraza $1-\lambda(v)$ in $1-\mu(v)$.

$$\begin{aligned}1-\lambda(v) &= 1-\lambda_0(1-v)-\lambda_1 v = 1-\lambda_0+\lambda_0 v-\lambda_1 v = \\ &= (1-\lambda_0)(1-v)+(1-\lambda_1)v\end{aligned}$$

Na enak način dobimo

$$1-\mu(v) = (1-\mu_0)(1-v)+(1-\mu_1)v$$

Polinoma vstavimo v enačbo (5.3). Najprej si oglejmo izraz $(1-\lambda(v))\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}B_i^{n-1}$:

$$\begin{aligned}&(1-\lambda(v))\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}B_i^{n-1} = \\ &= (1-\lambda_0)(1-v)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}B_i^{n-1} + (1-\lambda_1)v\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}B_i^{n-1} = \\ &= (1-\lambda_0)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}v^i(1-v)^{n-i} + \\ &+ (1-\lambda_1)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}v^{i+1}(1-v)^{n-i-1} = \\ &= (1-\lambda_0)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}\frac{n-i}{n}B_i^n(v) + (1-\lambda_1)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i-1,n-i}\frac{i}{n}B_i^n(v) = \\ &= (1-\lambda_0)\sum_{i=0}^{n}\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}\frac{n-i}{n}B_i^n(v) + (1-\lambda_1)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{s}_{1,i-1,n-i}\frac{i}{n}B_i^n(v).\end{aligned}$$

ali naj raje to nekje izpeljem posebej in se potem samo sklicujem?

Na enak način dobimo še

$$\lambda(v)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{r}_{1,i,n-i-1}B_i^{n-1} = \lambda_0\sum_{i=0}^{n}\mathbf{r}_{1,i,n-i-1}\frac{n-i}{n}B_i^n(v)+\lambda_1\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{r}_{1,i-1,n-i}\frac{i}{n}B_i^n(v),$$

$$(1-\mu(v))\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{r}_{0,i,n-i}B_i^{n-1} = (1-\mu_0)\sum_{i=0}^{n}\mathbf{r}_{0,i,n-i}\frac{n-i}{n}B_i^n(v)+$$
$$+(1-\mu_1)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{r}_{0,i-1,n-i+1}\frac{i}{n}B_i^n(v)\ \text{in}$$

$$\mu(v)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1}B_i^{n-1} = \mu_0\sum_{i=0}^{n}\mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1}\frac{n-i}{n}B_i^n(v)+\mu_1\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{r}_{0,i,n-i}\frac{i}{n}B_i^n(v).$$

Dobljeno vstavimo v enačbo (5.3) in primerjajmo člene ob baznih polinomih $B_i^n(v)$ za vsak $i=0,\ldots,n$. Dobimo, da mora za vsak $i=0,\ldots,n$ veljati enakost

$$\begin{aligned}(1-\lambda_0)\mathbf{s}_{1,i,n-i-1}\frac{n-i}{n}+(1-\lambda_1)\mathbf{s}_{1,i-1,n-i}\frac{i}{n}+\lambda_0\mathbf{r}_{1,i,n-i-1}\frac{n-i}{n}+\lambda_1\mathbf{r}_{1,i-1,n-i}\frac{i}{n}=\\ =(1-\mu_0)\mathbf{r}_{0,i,n-i}\frac{n-i}{n}+(1-\mu_1)\mathbf{r}_{0,i-1,n-i+1}\frac{i}{n}+\mu_0\mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1}\frac{n-i}{n}+\mu_1\mathbf{r}_{0,i,n-i}\frac{i}{n}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Pogoji, ki jih dobimo z enačbo (5.4) za kontrolne točke ploskev **R** in **S** zagotavljajo, da sta ploskvi na stiku G^1-zvezni. Seveda pa so to le zadostni pogoji, ne pa nujno potrebni. Z drugačno izbiro funkcij $\lambda(v)$ in $\mu(v)$ bi lahko prišli do drugačnih pogojev, ki bi imeli za rezultat G^1-ploskve drugačnih oblik.

Sedaj si natančneje oglejmo, kakšne pogoje za kontrolne točke bi dobili v tem primeru za ploskvi stopnje 3.

Primer 5.7. Imejmo ploskvi **R** in **S** stopnje 3 nad trikotnima domenama $T_1=\langle\mathbf{p_1},\mathbf{p_2},\mathbf{p}_3\rangle$ in $T_2=\langle\mathbf{p}_4,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\rangle$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p})=\sum_{i+j+k=3}\mathbf{r}_{i,j,k}B_{i,j,k}^n(\mathbf{u});\quad \mathbf{u}=\mathrm{Bar}(\mathbf{p};T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p})=\sum_{i+j+k=3}\mathbf{s}_{i,j,k}B_{i,j,k}^n(\tilde{\mathbf{u}});\quad \tilde{\mathbf{u}}=\mathrm{Bar}(\mathbf{p};T_2),$$

kjer je $\mathbf{u}=(u,v,w)$ in $\tilde{\mathbf{u}}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$. Ploskvi se ponovno stikata na robu nad daljico $\overline{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}$, oziroma na robu, določenem z $u=\tilde{u}=0$.

Zlepek obeh ploskev bo G^1-zvezen, če bodo za njune kontrolne točke veljale naslednje enačbe.

$$(1-\lambda_0)\mathbf{s}_{1,0,2}+\lambda_0\mathbf{r}_{1,0,2}=(1-\mu_0)\mathbf{r}_{0,0,3}+\mu_0\mathbf{r}_{0,1,2}, \tag{5.5}$$

$$(1-\lambda_1)\mathbf{s}_{1,2,0}+\lambda_1\mathbf{r}_{1,2,0}=(1-\mu_1)\mathbf{r}_{0,2,1}+\mu_1\mathbf{r}_{0,3,0}. \tag{5.6}$$

Zgornji enačbi določata razmerje med robnimi kontrolnimi točkami. Iz enačbe (5.4) pa sledita še pogoja

$$
\begin{aligned}
&(1-\lambda_0)\frac{2}{3}\mathbf{s}_{1,1,1} + (1-\lambda_1)\frac{1}{3}\mathbf{s}_{1,0,2} + \lambda_0\frac{2}{3}\mathbf{r}_{1,1,1} + \lambda_1\frac{1}{3}\mathbf{r}_{1,0,2} = \\
&(1-\mu_0)\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,1,2} + (1-\mu_1)\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,0,3} + \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,2,1} + \mu_1\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,1,2}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

in

$$
\begin{aligned}
&(1-\lambda_0)\frac{1}{3}\mathbf{s}_{1,2,0} + (1-\lambda_1)\frac{2}{3}\mathbf{s}_{1,1,1} + \lambda_0\frac{1}{3}\mathbf{r}_{1,2,0} + \lambda_1\frac{2}{3}\mathbf{r}_{1,1,1} = \\
&(1-\mu_0)\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,2,1} + (1-\mu_1)\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,1,2} + \mu_0\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,3,0} + \mu_1\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,2,1}.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

primerjava prostih in določenih kontrolnih točk

dodati še primer, ko je r določena, s pa ne? kako je v tem primeru s konsistentnostjo sistema?

primer od prej, ki ni šel s c1 samo da ga zdaj rešimo z g1?