UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

NASLOV VAŠEGA DELA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [3], [2], [4], [1].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009

[2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982

[4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000

[1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`

Podpis mentorja:

Naslov vašega dela

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: ,

Keywords: ,

1 Uvod

2 Geometrijska zveznost

Definicija 2.1. Ploskev pripada razredu G^n oziroma je geometrijsko zvezna z redom n, če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda C^n.

definicija regularne ploskve razloži lokalnost?
Naj bosta $R : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ in $S : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji

Definicija 2.2. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje C, če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstaja lokalno regularna C^n reparametrizacijska funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, da je $f(x_0, y) = (u_0, y)$ za vsak $y \in I_0$ in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} R\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} (S \circ f)\Big|_{(x_0,y)} \quad \text{za } m + k = 1, \dots, n,$$

kjer je I_0 neka okolica y_0.

Zaradi stikanja ploskev v krivulji C so delni odvodi parametrizacij po spremenljivki y vzdolž krivulje C enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le delne odvode po spremenljivki x. dodati sliko? Te delne odvode imenujemo ??crossboundary derivatives.

Oglejmo si pogoje za različne stopnje geometrijske zveznosti, ki nam jih ta definicija da. to še ni dokončno. zelo grdo Če so parametrizaciji R in S, krivulja C in reparametrizacijska funkcija f kot v definiciji sklic, je za geometrijsko zveznost razreda G^0 med njima dovolj pogoj $R = S \circ f$ vzdolž C. Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje G^1, mora poleg pogoja za G^0 veljati še $R_x = S_u u_x + S_v v_x$ vzdolž C, za G^2 mora poleg pogojev za G^0 in G^1 veljati še G^2: $R_x x = S_{uu} u_x^2 + 2S_{uv} u_x v_x + S_{vv} v_x^2 + S_u u_{xx} + S_v v_{xx}$ vzdolž C in tako dalje.

Splošneje,grdo za geometrijsko zveznost stopnje n (ali se tako reče?), kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ velja naslednje:

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j}\Big|_C = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=0}^{k} A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}}\Big|_C$$

za vsak $j = 0, 1, \dots, n$. Tu z A_{jkh} označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=j \\ m_1,\dots,m_k>0}} \frac{j!}{k! m_1! \cdots m_k!} u_{x^{m_1}} \cdots u_{x^{m_h}} v_{x^{m_{h+1}}} \cdots v_{x^{m_k}}\Big|_C .$$

Z $u_x^{m_i}$ je označen m_i-ti delni odvod funkcije u po x. ali je treba to grozo dokazati?

zdaj si pogledamo ekvivalentno/alternativno definicijo G zveznosti? s pomočjo junction functions? Z uvedbo funkcij $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in $\beta_1 \dots, \beta_n$ pridemo do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti. funkcije $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in $\beta_1 \dots, \beta_n$ imenujemo junction/connection functions

Naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in $\beta_1 \dots, \beta_n$ funkcije razreda C^n ene spremenljivke. Definirajmo:

$$u(x,y) = u_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \alpha_i(y)(x - x_0)^i$$
$$v(x,y) = y + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \beta_i(y)(x - x_0)^i$$

ali moram povsod pisati, kam te funkcije slikajo? recimo paramterizacije in alfa, beta itd.

Opazimo, da za $i = 1, \dots, k$ velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y),$$
$$\frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

povezava med tema dvema deloma? npr. junction functions lahko izberem skoraj povsem poljubno. zanje veljata le dva pogoja. Prvi pogoj sledi iz zahteve po regularnosti reparametrizacijske funkcije f

def. regularnosti? kaj je lokalna regularnost?

Reparametrizacijska funkcija je regularna vzdolž C, če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearno neodvisna, torej če velja $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0$.

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ vzdolž krivulje C in ju skušajmo zapisati s pomočjo junction functions. Za odvod po spremenljivki x velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y)) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)),$$

pri čemer smo uporabili opazko sklic. Če razpišemo odvod po spremenljivki y, pa dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y)) = (0, 1).$$

Vektorski produkt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) =$$

Regularnost reparametrizacije:

$\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y)) = (\alpha_1(y), \beta_1(y))$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y)) = (0, 1)$

$\implies \alpha_1(y) \neq 0$ vzdolž C

Definicija 2.3. Naj bosta $R(x,y)$ in $S(u,v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0,y) = S(u_0,y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje C, če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstajajo take funkcije razreda C^n ene spremenljivke $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ in $\beta_1\dots,\beta_n$, da $\alpha_1(y)\neq 0$ in velja

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j}\bigg|_C = \sum_{k=1}^{j}\sum_{h=0}^{k} A_{jkh}\frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}}\bigg|_C$$

$$A_{jkh} = \binom{k}{h}\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=j\\ m_1,\dots,m_k>0}}\frac{j!}{k!m_1!\cdots m_k!}\alpha_1\cdots\alpha_{m_h}\beta_{m_{h+1}}\cdots\beta_{m_k}\bigg|_C$$

povej, da to velja za vsak j=1,...,n; popravi za vrednosti funkcij (wut?); α_j, β_j stične funkcije; $\alpha_1(y)\neq 0$ in potrebno izbrati pravi predznak α_1 - to še ugotovi in razloži

Izrek 2.4. *?? ta izrek samo pove, da so definicije enakovredne. dokaz? je v bistvu celo poglavje Naj bosta $R(u_r,v_r)$ in $S(u_s,v_s)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(v) = R(u_{r0},v) = S(u_{s0},v)$. Ploskvi R in S sta G^n-zvezni vzdolž skupnega roba natanko tedaj ko obstajajo funkcije $p_i(v)$, $q_i(v)$, $i=1,\dots,n$, da velja*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k S}{\partial u_s^k}\bigg|_C =& \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}p_{m_1}(v)\cdots p_{m_h}(v)q_{m_{h+1}}(v)\cdots q_{m_i}\\ &\cdot\frac{\partial^i R}{\partial u_r^h\partial v_r^{i-h}},\end{aligned}$$

kjer $k=1,\dots,n$ ter
$\mathbf{m_i} = (m1,m2,\dots,m_i)$, $|\mathbf{m_i}| = m_1+m_2+\cdots+m_i$ *in* $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i!m_1!\cdots m_i!}$.

Lema 2.5. *?? ali je dokaz tega potreben? Naj bo $f(u,v)$ funkcija razreda C^n in $u(t)$ in $v(t)$ reparametrizaciji razreda C^n. Potem*

$$\begin{aligned}\frac{d^k f}{dt^k} =& \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}u^{(m_1)}\cdots u^{(m_h)}(v)v^{(m_{h+1})}\cdots v^{(m_i)}\\ &\cdot\frac{\partial^i f}{\partial u_r^h\partial v_r^{i-h}},\end{aligned}$$

kjer $k=1,\dots,n$ ter
$\mathbf{m_i} = (m1,m2,\dots,m_i)$, $|\mathbf{m_i}| = m_1+m_2+\cdots+m_i$ *in* $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i!m_1!\cdots m_i!}$.

3 G^1 zveznost

nekaj v stilu, da se bomo natančneje ukvarjali z G1 zveznostjo.

nekaj v stilu: imamo ploskvi R, S, ki ustrezata definiciji. zanju veljajo naslednji pogoji:

$povejdaRy = Sy$

$oziromakotsmoprejdobili...obsta$

$kakotogeometrijskointerpretiramo: vidimo, dasoRx, Su, Svlinearnoodvisnivvsakitočkiytj.vvsakitoč$

vidimo, da se na skupnem robu ujemata enotski normali; slika?; G1 zveznosti rečemo tudi zveznost tangentnih ravnin oz zveznost enotskih normal

$$\begin{aligned}
&R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y)\\
&R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)\\
&\frac{R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)}{||R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)||} = \frac{S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)}{||S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)||}
\end{aligned}$$

$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y)$
$ekvivalentno: \det(R_x(x_0, y), S_u(u_0, y), S_v(u_0, y)) = 0$
$\implies \exists$ funkcije $\lambda, \mu, \gamma:$
$\lambda(y)R_x(x_0, y) = \mu(y)S_u(u_0, y) + \gamma(y)S_v(u_0, y)$

pogledamo si poseben primer polinomskih param ploskev, ki so tudi uporabne v praksi

4 Bézierjeve ploskve

i-ti Bernsteinov bazni polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ t \in [0, 1]$$

Lastnosti:

- $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$
- $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$

Definicija 4.1. Naj bodo dane točke $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{b}^{m,n} : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b_{i,j}} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo kontrolne točke, poligon, ki jih povezuje, pa kontrolni poligon.

Velja: $\mathbf{b}^{\mathbf{m,n}}(0,0) = \mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}^{\mathbf{m,n}}(1,0) = \mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b}^{\mathbf{m,n}}(0,1) = \mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b}^{\mathbf{m,n}}(1,1) = \mathbf{b}_{m,n}$
Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s}\mathbf{b}^{m,n}(u,v) = \frac{m!}{(m-r)!}\frac{n!}{(n-s)!}\sum_{i=0}^{m-r}\sum_{j=0}^{n-s}\Delta^{r,s}\mathbf{b}_{i,j}B_i^{m-r}(u)B_j^{n-s}(v),$$

kjer $\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,s}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j}$.

5 Primeri konstrukcij G^1 ploskev

Dve bikubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$R(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\mathbf{P}_{i,j}B_i^3(u)B_j^3(v)$$

in

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\mathbf{Q}_{i,j}B_i^3(u)B_j^3(v),$$

ki se stikata v $C(v) = R(0,v) = S(0,v)$.

Literatura

[1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`.

[2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.

[3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.

[4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.