UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

NASLOV VAŠEGA DELA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [3], [2], [4], [1].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009

[2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982

[4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000

[1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`

Podpis mentorja:

Naslov vašega dela

POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: ,

Keywords: ,

1 Uvod

2 Geometrijska zveznost

Definicija 2.1. Ploskev pripada razredu G^n oziroma je geometrijsko zvezna z redom n, če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda C^n.

definicija regularne ploskve razloži lokalnost?
Naj bosta $R : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ in $S : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji

Definicija 2.2. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje C, če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstaja lokalno regularna C^n reparametrizacijska funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, da je $f(x_0, y) = (u_0, y)$ za vsak $y \in I_0$ in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} R\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k}(S \circ f)\Big|_{(x_0,y)} \text{ za } m + k = 1, \ldots, n,$$

kjer je I_0 neka okolica y_0.

Zaradi stikanja ploskev v krivulji C so delni odvodi parametrizacij po spremenljivki y vzdolž krivulje C enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le delne odvode po spremenljivki x. ali je to dovolj razloženo? najbrž moram dodati y=v??!! (glej vir, dokaz izreka1) dodati sliko? Te delne odvode imenujemo ??crossboundary derivatives.

Oglejmo si pogoje za različne stopnje geometrijske zveznosti, ki nam jih ta definicija da. to še ni dokončno. zelo grdo ali naj to naredim kot primer? Če so parametrizaciji R in S, krivulja C in reparametrizacijska funkcija f kot v definiciji sklic, je za geometrijsko zveznost razreda G^0 med njima dovolj pogoj $R = S \circ f$ vzdolž C. oziroma kar R=S vzdolž C?? Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje G^1, mora poleg pogoja za G^0 veljati še $R_x = S_u u_x + S_v v_x$ vzdolž C, za G^2 mora poleg pogojev za G^0 in G^1 veljati še G^2: $R_x x = S_{uu} u_x^2 + 2S_{uv} u_x v_x + S_{vv} v_x^2 + S_u u_{xx} + S_v v_{xx}$ vzdolž C in tako dalje.

Splošneje,grdo za geometrijsko zveznost stopnje n (ali se tako reče?), kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ velja naslednje:

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j}\Big|_C = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=0}^{k} A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}}\Big|_C$$

za vsak $j = 0, 1, \ldots, n$. Tu z A_{jkh} označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=j \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{j!}{k! m_1! \cdots m_k!} u_{x^{m_1}} \cdots u_{x^{m_h}} v_{x^{m_{h+1}}} \cdots v_{x^{m_k}}\Big|_C .$$

Z $u_x^{m_i}$ je označen m_i-ti delni odvod funkcije u po x. ali je treba to grozo dokazati?

---

kaj je s to lemo?

Lema 2.3. *?? ali je dokaz tega potreben? Naj bo $f(u, v)$ funkcija razreda C^n in $u(t)$ in $v(t)$ reparametrizaciji razreda C^n. Potem*

$$\frac{d^k f}{dt^k} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} u^{(m_1)} \cdots u^{(m_h)}(v) v^{(m_{h+1})} \cdots v^{(m_i)} \cdot \frac{\partial^i f}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer $k = 1, \ldots, n$ ter
$\mathbf{m_i} = (m1, m2, \ldots, m_i)$, $|\mathbf{m_i}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ *in* $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$.

preoblikuj to lemo, da bo koeficient A kot zgoraj. dokaz najdeš nekje k piše v viru

---

zdaj si pogledamo ekvivalentno/alternativno definicijo G zveznosti? s pomočjo junction functions? Z uvedbo funkcij $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$ pridemo do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti. funkcije $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$ imenujemo junction/connection functions

Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$ funkcije razreda C^n ene spremenljivke. Definirajmo:

$$u(x, y) = u_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \alpha_i(y)(x - x_0)^i$$

$$v(x, y) = y + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \beta_i(y)(x - x_0)^i$$

ali moram povsod pisati, kam te funkcije slikajo? recimo paramterizacije in alfa, beta itd.

Opazimo, da za $i = 1, \ldots, k$ velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y),$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Stične funkcije lahko izberemo skoraj povsem poljubno. Upoštevati moramo le dva pogoja, ki omejujeta izbiro funkcije α_1. Prvi pogoj sledi iz zahteve po regularnosti reparametrizacijske funkcije f.

def. regularnosti? kaj je lokalna regularnost?

Reparametrizacijska funkcija f je regularna vzdolž C, če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearno neodvisna, torej če velja $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0$.

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ vzdolž krivulje C in ju skušajmo zapisati s pomočjo stičnih funkcij. Za odvod po spremenljivki x velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y)) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)),$$

pri čemer smo uporabili opazko sklic. Če razpišemo odvod po spremenljivki y, pa dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y)) = (0, 1).$$

Vektorski produkt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0, 1) = \alpha_1(y)$$

Sledi, da je reparametrizacija regularna, natanko tedaj ?, ko za pripradajočo stično junction? funkcijo α_1 velja $\alpha_1(y) \neq 0$ vzdolž stične krivulje C. ali je potrben podatek "vzdolž krivulje C"? to moraš nekako motivirati: zakaj si to sploh pogledamo? zato, ker to predstavlja pogoj za α_1?

Drugo, na kar moramo paziti pri izbiri funkcije α_1 pa je njen predznak. Pri izbiri napačnega predznaka namreč lahko pride do stika v obliki "špice". tega ne razumem čisto. tu bi bil potreben kakšen primer.

Vpeljava stičnih funkcij nas pripelje do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti.

Definicija 2.4. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje C, če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstajajo take funkcije razreda C^n ene spremenljivke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1 \ldots, \beta_n$, da $\alpha_1(y) \neq 0$, pri čemer mora imeti α_1 ustrezen predznak ??, in da velja

$$\left.\frac{\partial^j R}{\partial x^j}\right|_C = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=0}^{k} A_{jkh} \left.\frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}}\right|_C$$

za vsak $j = 0, 1, \ldots, n$. Tu z A_{jkh} označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=j \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{j!}{k! m_1! \cdots m_k!} \alpha_1 \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \left.\beta_{m_k}\right|_C$$

popravi A, indekse pri alfah in betah

---

kaj je s tem izrekom?

Izrek 2.5. *Naj bosta $R(u_r, v_r)$ in $S(u_s, v_s)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(v) = R(u_{r0}, v) = S(u_{s0}, v)$. Ploskvi R in S sta G^n-zvezni vzdolž skupnega roba natanko tedaj ko obstajajo funkcije $p_i(v)$, $q_i(v)$, $i = 1, \ldots, n$, da velja*

$$\left.\frac{\partial^k S}{\partial u_s^k}\right|_C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|\mathbf{m_i}|=k} A^k_{\mathbf{m_i}} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} p_{m_1}(v) \cdots p_{m_h}(v) q_{m_{h+1}}(v) \cdots q_{m_i} \cdot \frac{\partial^i R}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer $k = 1, \ldots, n$ ter
$\mathbf{m_i} = (m1, m2, \ldots, m_i)$, $|\mathbf{m_i}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ *in* $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$.

ta izrek je ubistvu isto kot ekvivalentna definicija. ali je bolje, da ekvivalentno definicijo zapišem kot izrek? pomembno!!: kaj so potrebni in kaj zadostni pogoji? kaj sledi iz česa? ———————————————————————

3 G^1 zveznost

nekaj v stilu, da se bomo natančneje ukvarjali z G1 zveznostjo. lahko povem, da je to zveznost tangentnih ravnin oz. zveznost enotskih normal in da si bomo ogledali, kako do tega pridemo.

Imejmo ploskvi $R(x, y)$ in $S(u, v)$, ki se v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$ stikata z geometrijsko zveznostjo G^1. Sledi, da je $R_y(x_0, y) = S_y(x_0, y) = S_v(x_0, y)$. Kot smo že videli ugh v poglavju sklic, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri x.

Ker je stik obeh ploskev v C G^1-zvezen, po definiciji sklic obstajata funkciji α_1 in β_1, kjer je $\alpha_1(y) \neq 0$ za vsak y in ima ustrezen predznak, da velja:

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

Zgornja enačba nam pove, da so parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ v vsaki točki y linearno neodvisni. Torej so v vsaki točki y del iste tangentne ravnine na krivuljo C. Zato torej G^1-zveznost imenujemo tudi zveznost tangentnih ravnin.

v predstavitvi sem šla tako: $R(x_0, y) = S(u_0, y)$, $R_x(x_0, y) = u_x(x_0, y)S_u(u_0, y) + v_x(x_0, y)S_v(u_0, y)$, $R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y)$ na mestu najbrž kakšna slika

Oglejmo si še, od kod pride poimenovanje "zveznost enotskih normal". Znova opazujemo enačbo

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

ali je bolje, da se tu samo skličem? Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z $R_y(x_0, y)$:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times R_y(x_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y) \times R_y(x_0, y).$$

Upoštevamo lahko, da je $R_y(x_0, y) = S_v(u_0, y)$. Dobimo:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y).$$

Od tod vidimo, da sta normali na ploskvi R in S na njunu stični krivulji vzporedni. grdo Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normali:

$$\frac{R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)}{||R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)||} = \frac{S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)}{||S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)||}.$$

tukaj pride nek vezni tekst? ali pa je to ok? Ker parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ ležijo na isti tangentni ravnini, velja tudi: zelo grdo

$$\det(R_x(x_0, y), S_u(u_0, y), S_v(u_0, y)) = 0.$$

Torej obstajajo funkcije povedati kakšne, iz kje kam? λ, μ in γ, da velja: ali moram to kaj bolj natančno utemeljiti? treba motivirati, zakaj to gledamo

$$\lambda(y)R_x(x_0, y) = \mu(y)S_u(u_0, y) + \gamma(y)S_v(u_0, y).$$

tole tukaj je najbrž en bullshit ———————————— to poglavje bo najbrž treba prestaviti, ali pa spremeniti v podpoglavje

Če predpostavimo, da sta ploskvi R in S polinomski, lahko tudi za λ, μ in γ izberemo polinome, izberemo? ali niso točno določeni? kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

najbrž lahko poveš, da se bomo v naslednjih poglavjih ukvarjali z izbiro teh polinomov

mogoče moraš tu napisati, kako se pride do teh polinomov: tiste prve komponente. ampak tega ne razumem.

4 Bézierjeve ploskve

pogledamo si poseben primer polinomskih param ploskev, ki so tudi uporabne v praksi

i-ti Bernsteinov bazni polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ t \in [0,1]$$

Lastnosti:

- $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$
- $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$

Definicija 4.1. Naj bodo dane točke $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{b}^{m,n} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{b}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b_{i,j}} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo kontrolne točke, poligon, ki jih povezuje, pa kontrolni poligon.

Velja: $\mathbf{b^{m,n}}(0,0) = \mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b^{m,n}}(1,0) = \mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b^{m,n}}(0,1) = \mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b^{m,n}}(1,1) = \mathbf{b}_{m,n}$

Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u,v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v),$$

kjer $\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,s}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j}$.

5 G^n-zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama

Nekaj v smislu, da sedaj prevedemo že dobljene splošne pogoje na pogoje za bezierove ploskve oz. kako ti pogoji izgledajo za te ploskve.

izkaže se, da za funkcije alfa in beta v splošni definiciji lahko vzamemo polinome, ker gre pri bezierovih ploskvah tudi za polinomske parametrične ploskve.

Imejmo polinomski? Bézierjevi ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, podani na naslednji način:

$$\mathbf{R}(x,y) = \sum_{i=0}^{m_r}\sum_{j=0}^{n_r} \mathbf{P}_{ij} B_i^{m_r} B_j^{n_r}$$

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m_s}\sum_{j=0}^{n_s} \mathbf{Q}_{ij} B_i^{m_s} B_j^{n_s},$$

kjer so $\{\mathbf{P}_{i,j}, i = 1,\ldots,m_r, j = 1,\ldots,n_r\}$ in $\{\mathbf{Q}_{i,j}, i = 1,\ldots,m_s, j = 1,\ldots,n_s\}$ kontrolne točke ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, x, y, u in v pa parametri na intervalu $[0,1]$. grdo

Ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ se stikata v skupni robni? krivulji $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0,v) = \mathbf{S}(0,v)$ pojasni, zakaj lahko to predpostavimo. zakaj?? ker lahko parametriziramo? poglej. pojasni še, kako je s tem, da sta ploskvi prav obrnjeni, da ni špice Robno krivuljo $\mathbf{C}$ zapišemo kot Bézierjevo krivuljo na naslednji način:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{Z}_i B_i^{n_c},$$

kjer so $\{\mathbf{Z}_i, i = 1,\ldots n_c\}$ njene kontrolne točke. Stopnja n_c krivulje $\mathbf{C}$ ni nujno enaka stopnjama n_r ali n_s, velja pa, da je $n_c \leq \min(n_r, n_s)$. ali moram povedati, zakaj? ker ne vem

Naj bosta ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ regularni vzdolž krivulje $\mathbf{C}$ da zadostimo pogoju iz definicije geometrijske zveznosti, torej naj bodo normale na ploskvi vzdolž krivulje $\mathbf{C}$ neničelne:

$$N_r = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right)\bigg|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

$$N_s = \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}\right)\bigg|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

Nr(y)?

O pogojih za geometrijsko zveznost teh dveh ploskev govori naslednji izrek: ekvivalenten izreku iz prejšnjega poglavja

Izrek 5.1. *Naj bosta $\boldsymbol{R}$ in $\boldsymbol{S}$ zgoraj definirani* to ok? *Bézierovi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji $\boldsymbol{C}$ (kot zgoraj). Stik ploskev je G^n-zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi* vir:polinomske funkcije *$D(y)$, $E_i(y)$ in $F_i(y)$, da velja:*

$$D^{2k-1}(y)\frac{\partial^k \boldsymbol{S}}{\partial u^k}\bigg|_{\boldsymbol{C}} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v)\cdots E_{m_h}(y) \cdot F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \boldsymbol{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}},$$

kjer je $i = 1, \ldots n$ vir: k ?? in $k = 1, \ldots n$. Z $A^k_{m_i}$ zopet označujemo $A^k_{\mathbf{m_i}} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$ in $|\mathbf{m_i}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$. Velja še $D(y)E_1(y) \neq 0$ za $y \in [0,1]$, za stopnje polinomov pa velja:
$st(D) \leq n_r + n_c - 1$,
$st(E_i) \leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1$ in
$st(F_i) \leq (2i-1)n_r + in_s + (i-1)n_c - 2i + 1$.

Dokaz. Najprej predpostavljajmo, da obstajajo polinomi D, E_i in F_i, $i = 1, \ldots n$, ki ustrezajo enačbi sklic in ostalim pogojem v izreku. Pokazati hočemo, da od tod sledi geometrijska zveznost ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$. V ta namen bomo uporabili izrek sklic izrek z alfami in betami.

Preoblikujmo enačbo

$$D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}\bigg|_{\mathbf{C}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}.$$

Če celotno enačbo delimo z D^{2k-1} (predpostavka, da $D(y)E_1(y) \neq 0$ na $[0,1]$, zagotavlja neničelnost polinoma D na $[0,1]$), dobimo

$$\frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}\bigg|_{\mathbf{C}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-2k}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}.$$

Funkcijo D^{2k-i} lahko zapišemo kot produkt
$D^{2k-i}(y) = D^{2m_1-1}(y) D^{2m_2-1}(y) \cdots D^{2m_h-1}(y) D^{2m_{h+1}}(y) \cdots D^{2m_i-1}(y)$.
saj je |mi|=k
Dobljeno vstavimo v enačbo sklic:

$$\frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}\bigg|_{\mathbf{C}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(v)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}.$$

Definirajmo

$$\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)} \text{ in } \beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)},$$

kjer je $i = 1, \ldots, n$. Če to vstavimo v zgornjo enačbo sklic? to je zelo grdo, dobimo enačbo kot v izreku sklic. Iz izreka sklic torej sledi, da se ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ stikata z geometrijsko zveznostjo G^n. S tem smo dokazali eno smer ekvivalence ? kako se to lepo reče

Sedaj dokažimo še drugo smer ekvivalence v izreku. Predpostavimo, da se ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, definirani kot zgoraj sklic stikata v robni krivulji $\mathbf{C}$ z geometrijsko zveznostjo

G^n. Pokazati hočemo, da od tod sledi obstoj polinomov D, E_i in F_i z lastnostmi kot v izreku. Dokaza se lotimo z indukcijo po k. vir:k

Naj bo najprej $k = 1$. Ker je slik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^n-zvezen, torej vsaj G^1-zvezen, po izreku sklic obstajata funkciji $\alpha_1(y)$ in $\beta_1(y)$, ki zadoščata enačbi

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}\bigg|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\bigg|_{textbfC} + \beta_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{C}}.$$

Dobljeno enačbo sklic? z desne vektorsko množimo z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}$. Dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{C}}(y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}\bigg|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\bigg|_{textbfC}.$$

V poglavju sklic smo namreč že videli, da je $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\Big|_{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}\Big|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$'.

Enačbo sklic sedaj z desne vektorsko množimo še z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$ in dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{\mathbf{C}}(y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(y) = \beta_1(y)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}$$

Z $\mathbf{W}(s)$ označimo vektor vektorsko funkcijo? $\mathbf{W}(y) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{\mathbf{C}}$,
Prej dobljene enačbe sklic torej zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_r(y)$$

in

$$\mathbf{W}(y) = \beta_1(y)\mathbf{N}_r(y).$$

Stopnja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$ je največ $n_c - 1$, saj je $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$. Enako velja za $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}|_{\mathbf{C}}$. Stopnja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}$ je manjša ali enaka n_r, stopnja $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{\mathbf{C}}$ pa manjša ali enaka n_s. razloži? Od tod in iz enačb sklic sledi $st(\mathbf{N}_r) \leq n_r + n_s - 1$, $st(\mathbf{N}_s) \leq n_s + n_c - 1$ in $st(\mathbf{W}) \leq n_r + n_s$.

Videli smo že sklic, da sta zaradi predpostavke o regularnosti ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ funkciji $\mathbf{N}_r(y)$ in $\mathbf{N}_s(y)$ neničelni vektorski funkciji. oziroma za vsak v na [0,1] sta to vektorja, različna od 0 Ker je $\mathbf{N}_r(y)$ neničelna, mora biti vsaj ena izmed njenih koordinatnih funkcij neničeln polinom. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je neničelna x-koordinata, torej polinom N_{rx}. Če enačbe iz sklic razpišemo po koordinatah, za x-koordinato dobimo

$$N_{sx}(y) = \alpha_1(y)N_{rx}(y)$$

in

$$W_x(y) = \beta_1(y)N_{rx}(y),$$

kjer je N_{sx} x-koordinata funkcije $\mathbf{N}_s$, W_x pa x-koordinata funkcije $\mathbf{W}$.

Iz zgornjih enačb lahko vidimo, da so vse realne ničle polinoma $N_{rx}(y)$ na intervalu $[0, 1]$ tudi ničle polinomov $N_{sx}(y)$ in $W_x(y)$, torej da polinom $U(y)$, ki je zgrajen kot produkt vseh linearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma $N_{rx}(y)$, deli polinoma $N_{sx}(y)$ in $W_x(y)$. Da to res drži, lahko vidimo na naslednji način. Zapišimo $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$, kjer je $U(y)$ produkt vseh linearnih faktorjev, $D(y)$ pa produkt vseh nelinearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma $N_{rx}(y)$. Predpostavimo, da $U(y)$ ne deli polinoma $N_{sx}(y)$. Ker je $N_{sx}(y) = \alpha_1(y)U(y)D(y)$, je to mogoče le, če je $\alpha_1(y)$ racionalna funkcija, katere imenovalec deli polinom $U(y)$. Funkcija $\alpha_1(y)$ ima torej na intervalu $[0,1]$ pol. Ker velja $\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_r(y)$ in so vse koordinatne funkcije funkcij $\mathbf{N}_s(y)$ in $\mathbf{N}_r(y)$ polinomi, mora veljati, da imenovalec funkcije $\alpha_1(y)$ deli $N_{rx}(y)$, $N_{ry}(y)$ in $N_{rz}(y)$. Funkcija $\alpha_1(y)$ ima pol, označimo ga z y_0. Sledi, da je y_0 ničla polinomov $N_{rx}(y)$, $N_{ry}(y)$ in $N_{rz}(y)$, in zato je $\mathbf{N}_r(y_0) = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko o regularnosti ploskve $\mathbf{R}$. Torej mora polinom $U(y)$ deliti polinom $N_{sx}(y)$. Z enakimi sklepi trditev pokažemo še za polinom $W_x(y)$.

vprašanje: ali U vsebuje vse linearne faktorje ali samo tiste, ki imajo zvezo z ničlami na [0,1]???

Polinom N_{rx} sedaj znova zapišimo kot produkt $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$, kjer sta polinoma $U(y)$ in $D(y)$ definirana kot zgoraj. Torej velja

$$N_{sx}(y) = U(y)\alpha_1(y)D(y)$$

in

$$W_x(y) = U(y)\beta_1(y)D(y).$$

Naj bo $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$ in $F_1(y) = \beta_1(y)D(y)$. Pokazati moramo, da sta dobljeni funkciji E_1 in F_1 polinoma. Ker sta funkciji $N_{sx}(y)$ in $W_x(y)$ polinoma, morata imenovalca funkcij α_1 in β_1 deliti ali polinom U ali polinom D. Videli smo že, da α_1 in β_1 nimata polov na intervalu $[0,1]$, torej njuna imenovalca ne delita polinoma U. Sledi, da morata njuna imenovalca deliti polinom D, s čimer smo pokazali, da sta E_1 in F_1 res polinoma.

Videli želimo še, da je $D(y)E_1(y) \neq 0$ na intervalu $[0,1]$. Polinom $D(y)$ po definiciji vsebuje vse nelinearne faktorje v polinomskem razcepu polinoma $N_{rx}(y)$, torej na intervalu $[0,1]$ nima ničel. Polinom $E_1(y)$ je enak $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$. Ker je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^n-zvezen, funkcija $\alpha_1(y)$ na intervalu $[0,1]$ ni enaka nič (glej sklic), zato tudi $E_1(y)$ na tem intervalu nima ničel.

Oglejmo si še stopnje polinomov $D(y)$, $E_1(y)$ in $F_1(y)$. Očitno velja:

$$st(D(y)) \leq st(N_{rx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_r(v)) \leq n_r + n_c - 1$$

$$st(E_1(y)) \leq st(N_{sx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_s(v)) \leq n_s + n_c - 1$$

$$st(F_1(y)) \leq st(W_x(y)) \leq st(\mathbf{W}(v)) \leq n_r + n_s,$$

s čimer dokažemo izrek za $k = 1$.

Lotimo se še dokaza za $k > 1$. Prepodstavimo, da izrek velja za vse $k \leq m$, kjer je $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Torej obstajajo polinomi $D(y)$, $E_1(y), \ldots, E_m(y)$, $F_1(y), \ldots, F_m(y)$ z ustreznimi stopnjami, da velja enačba sklic za $k = 1, 2, \ldots, m$.

Izhajamo iz predpostavke, da je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^n-zvezen. Iz izreka sklic sledi, da obstajajo funkcije $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ in $\beta_1 \dots, \beta_{m+1}$, da velja

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C\end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je $\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$ in $\beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$ za $i = 1, \dots, m$. Uporabimo to v zgornji enačbi in dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\Big|_{\mathbf{C}} &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(y)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C = \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-2}(y) D^{-2m} E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C,\end{aligned}$$

saj je $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = m + 1$ in zato je $D^{-2m_1+1}(y) D^{-2m_2+1}(y) \cdots D^{-2m_i+1}(y) = D^{-2(m+1)}(y) D^i(y)$.

Sedaj definirajmo krivuljo? vektorsko polinomsko funkcijo? $\mathbf{S}_{m+1}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{m+1} =& D^{2m}(v) \frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}|_{\mathbf{C}} - \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_1|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ & \cdot F_{m_{h+1}}(y) \dots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}\end{aligned}$$

Če enačbo sklic pomnožimo z $D^{2m}(y)$ in jo nekoliko preoblikujemo, dobimo:

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m} \alpha_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} + D^{2m}(y) \beta_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}.$$

Na dobljeni enačbi sedaj uporabimo podoben postopek, kot smo ga uporabili pri dokazu za $k = 1$. Enačbo z leve vektorsko množimo z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}$ in dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \mathbf{S}_{m+1} = D^{2m} \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}.$$

Če pa enačbo sklic z desne pomnožimo z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$, dobimo

$$\mathbf{S}_{m+1}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} = D^{2m}\alpha_{m+1}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}.$$

Označimo $\mathbf{W}_1 = \mathbf{S}_{m+1} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$ in $\mathbf{W}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \mathbf{S}_{m+1}$ ter kakor prej $N_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$. Kot v primeru za $k = 1$ spet lahko predpostavimo, da je polinom $N_{rx}(y)$ neničeln in ga zapišemo kot $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$. Velja $W_{1x} = D^{2m+1}(y)U(y)\alpha_{m+1}(y)$ in $W_{2x} = D^{2m+1}(y)U(y)\beta_{m+1}(y)$ in enaki argumenti kot v primeru za $k = 1$ nas pripeljejo do razulatata, da sta $E_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\alpha_{m+1}(y)$ in $F_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\beta_{m+1}(y)$ res polinoma.

Pokazati moramo še, da je $st(E_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1$ in $st(F_{m+1}) \leq (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m$. Tega se lotimo tako, da si najprej ogledamo stopnjo $\mathbf{S}_{m+1}$. Spomnimo se:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{m+1} =& D^{2m}(v)\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}|_{\mathbf{C}} - \sum_{i=2}^{m+1}\sum_{|\mathbf{m}_1|=m+1} A^{m+1}_{m_i}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}D^{i-1}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)\\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y)\dots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}\end{aligned}$$

Očitno je

$$\begin{aligned}st(D^{2m}(y)\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) &\leq 2m(n_r + n_c - 1) + n_s\\ &\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m,\end{aligned}$$

kjer v prvi neenakosti uporabimo dejstvo, da je $st(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$ in $st(\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) \leq n_s$, v drugi neenakosti pa, da je $n_c \leq n_s$.

Oglejmo si še, kakšna je $st(D^{i-1}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\dots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}})$. Najprej si jo oglejmo za $h = 0$:

$$\begin{aligned}&st(D^{i-2}(y)F_{m_1}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \leq\\ &\leq (i-2)st(D(y)) + \sum_{j=1}^{i} st(F_{m_j}(y)) + st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}})\end{aligned}$$

Vemo, da je $st(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$ in $st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \leq n_c - i$, po indukcijski predpostavki pa velja še $st(E_i(y) \leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1)$ in $st(F_i(y) \leq (2i-1)n_r + in_s +$

$(i-1)n_c - 2i + 2)$, kjer je $i = 1, \ldots, m$. Torej je

$$
\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)F_{m_1}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
& (i-2)(n_r + n_c - 1) + \\
& + \sum_{j=1}^{i}((2m_j - 1)n_r + m_j n_s + (m_j - 1)n_c - 2m_j + 2) + (n_c - i) = \\
& = (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2(m+1)n_r - in_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - in_c - \\
& - 2(m+1) + 2i + n_c - i = \\
& = 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - in_r \leq \\
& \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}
$$

Tu smo uporabili, da je $\sum_{j=1}^{i} m_j = m + 1$.

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je $h > 1$.

$$
\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
& \leq (i-2)st(D(y)) + \sum_{j=1}^{h} st(E_{m_j}) + \sum_{j=h+1}^{i} st(F_{m_j}) + \\
& + st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}})
\end{aligned}
$$

Zopet uporabimo indukcijsko predpostavko za stopnje polinomov $E_i(y)$ in $F_i(y)$, kjer je $i = 1, \ldots, m$ ter dejstvo, da je $st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) = n_r - i + h$ in dobimo

$$
\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
& \leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r \sum_{j=1}^{h} m_j - 2n_r h + n_s \sum_{j=1}^{h} m_j + + n_c \sum_{j=1}^{h} m_j - \\
& - 2\sum_{j=1}^{h} m_j + h + 2n_r \sum_{j=h+1}^{i} m_j - (i-h)n_r + n_s \sum_{j=h+1}^{i} m_j + n_c \sum_{j=h+1}^{i} -(i-h)n_c - \\
& - 2\sum_{j=h+1}^{i} +2(i-h) + n_r - i + h = \\
& = (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
& - 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h
\end{aligned}
$$

V zadnji enakosti smo uprabili, da je $\sum_{j=1}^{i} m_j = m+1$. Nadaljujmo za računom:

$$\begin{aligned}
&st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
&\leq (i-2)(n_r+n_c-1)+2n_r(m+1)+n_s(m+1)+n_c(m+1)-2(m+1)- \\
&-2n_r h + h -(i-h)n_r -(i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h \leq \\
&\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - n_r h + n_c h - n_c + n_r = \\
&= 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m + (h-1)(n_c - n_r) \leq \\
&\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

V zadnji neenakosti smo uporabili, da je $n_c \leq n_r$, torej je $n_c - n_r \leq 0$. S tem smo torej pokazali, da je $st(\mathbf{S}_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m$.

Iz enačbe sklic je razvidno naslednje:

$$\begin{aligned}
&st(E_{m+1}) \leq st(W_{1x}) \leq st(\mathbf{W}_1) \leq st(\mathbf{S}_{m+1}) + st(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
&\leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + (n_c - 1) = \\
&= 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo oceno za stopnjo polinoma F_{m+1}:

$$\begin{aligned}
&st(F_{m+1}) \leq st(W_{2x}) \leq st(\mathbf{W}_2) \leq st(\mathbf{S}_{m+1}) + st(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
&\leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + n_r = \\
&= (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

S tem smo dokazali izrek še za $k > 1$. □

6 Primeri konstrukcij G^1 ploskev

nek uvod

PRIMER 1

Imejmo dve bikubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

ki se stikata v $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0,v) = \mathbf{S}(0,v)$, torej naj velja

$$\mathbf{C}(v) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{Z}_i B_i^3(v),$$

kjer so $\mathbf{Z}_i = \mathbf{P}_{0,i} = \mathbf{Q}_{0,i}$ kontrolne točke krivulje $\mathbf{C}$. Robne krivulje ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ naj bodo že določene. Zanima nas, kako lahko v tem primeru določimo notranje točke ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, torej kako lahko določimo kontrolne točke $\mathbf{P}_{1,1}$, $\mathbf{P}_{1,2}$, $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$., da bo stik ploskev G^1-zvezen. ali tukaj dam razlago s ploščinami trikotnikov? ker ne znam razložiti, zakaj morata biti enaki

Izrek sklic pravi, da je stik obeh ploskev G^1-zvezen, natanko tedaj ko obstajata funkciji $\alpha_1(v)$ in $\beta_1(v)$, pogoj regularnosti? lastnosti teh funkcij? da velja

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = \alpha_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} + \beta_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0},$$

oziroma (po izreku sklic) natanko tedaj ko obstajajo polinomi $D(v)$, $E_1(v)$ in $F_1(v)$, kjer sta polinoma D in E_1 stopnje največ 5, polinom F_1 pa stopnje največ 6, da velja

$$D(v)\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = E_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} + F_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0}.$$

ker gre za bezierove ploskve, sta alfa1 in beta1 racionalni funkciji. kako naj to razložim zakaj?

Razpišimo: tu se nekako sklicuješ na formulo za odvod in evalvacijo v 0

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = 3\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j})B_i^2(u)B_j^3(v)|_{u=0} = 3\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j})B_j^3(v),$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = 3\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j})B_i^2(u)B_j^3(v)|_{u=0} = 3\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^3(v),$$

in

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0} = 3\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j})B_i^2(u)B_j^3(v)|_{u=0} = 3\sum_{j=0}^{2}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^2(v).$$

Po enačbi sklic mora veljati

$$\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j})B_j^3(v) = \sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^3(v).$$

Da dobimo še nekaj dodatnih pogojev za kontrolne točke ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, evalvirajmo zgornjo enačbo sklic v vrednostih paramatera $v = 0$ in $v = 1$ grdo. spet se lahko sklicuješ na tisto lastnost al neki Pri vrednosti $v = 0$ dobimo:

$$(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}) = a_0(\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}) + b_0(\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}),$$

oziroma:

$$\mathbf{q}_0 = a_0\mathbf{p}_0 + b_0\mathbf{z}_0.$$

Tu smo z a_0 označili vrednost $\alpha_1(0)$, z b_0 vrednost $\beta_1(0)$, z oznakami $\mathbf{p}_j$ in $\mathbf{q}_j$ vektorje $\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}$, z oznakami $\mathbf{z}_j$ pa vektorje $\mathbf{Z}_{j+1} - \mathbf{Z}_j = \mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{0,j}$. (kjer i=1,...,3) Pri vrednosti $v = 1$ pa dobimo:

$$\mathbf{Q}_{1,3} = a_1(\mathbf{P}_{1,3} - \mathbf{P}_{0,3}) + b_1(\mathbf{P}_{0,3} - \mathbf{P}_{0,2}),$$

oziroma:

$$\mathbf{q}_3 = a_1\mathbf{p}_3 + b_1\mathbf{z}_2.$$

Tu smo z a_1 označili vrednost $\alpha_1(1)$ in z b_1 vrednost $\beta_1(1)$.

kompatibilnostni pogoji omgomgomg

Pogoji in omejitve, ki jih imamo do sedaj, še ne določajo enolično notranjih kontrolnih točk plosev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$. tu lahko primerjava z običajno zveznostjo, kjer je vse že natančno določeno ?

Podati moramo še nekaj pogojev, ki bodo določali obliko ploskve $\mathbf{R}$, ter podatek o stopnji cross-derivative krivulje ? $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ GROZNO. povej zakaj samo stopnjo tega, od tod pa bomo lahko s pomočjo pogojev za geometrijsko zveznost enolično izrazili preostanek kontrolnih točk. Glede na stopnjo krivulje $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ si oglejmo dve različni situaciji. zakaj stopnja ne more biti npr 1? povej!

SITUACIJA 1

V prvem primeru predpostavimo, da je krivulja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ stopnje 3. Krivuljo $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ torej določajo štirje kontrolni vektorji: $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$. Vektorja $\mathbf{p}_0$ in $\mathbf{p}_3$ sta že določena, vektorja $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{0,1}$ in $\mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_{1,2} - \mathbf{P}_{0,2}$. pa naj bosta prosta. Torej sta točki $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ prosta parametra. ali to prav razumem?

Ko izberemo kontrolni točki $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$, lahko s pomočjo pogojev za G^1 zveznost izrazimo še točki $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$. Zapišimo znova enačbo sklic:

$$\sum_{j=0}^{3} \mathbf{q}_j B_j^3(v) = \alpha_1(v) \sum_{j=0}^{3} \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \beta_1(v) \sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j B_j^2(v).$$

Zaradi enostavnosti naj bosta koeficientni funkciji α_1 in β_1 polinoma. lahko bi bili tudi racionalni funkciji, v tem primeru bi dobili še veliko več situacij (3. primer?) (ne bi pa mogli biti nič drugega zaradi izreka?) Opazimo, da imamo v zgornji enačbi na levi strani Bézierjevo krivuljo stopnje 3, torej mora tudi vsota na desni strani predstavljati kubično Bézierjevo krivuljo. Polinom α_1 je zato lahko le konstanten, stopnja polinoma β_1 pa mora biti 1. Ker mora veljati še $\alpha_1(0) = a_0$, $\alpha_1(1) = a_1$, $\beta_1(0) = b_0$ in $\beta_1(1) = b_1$, mora veljati:

$$\alpha_1(v) = a_0 = a_1.$$

in

$$\beta_1(v) = b_0(1-v) + b_1 v.$$

kompatibilnostni pogoji izginejo lol lol Vstavimo dobljena polinoma α_1 in β_1 v enačbo sklic in dobimo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3} \mathbf{q}_j B_j^3(v) &= a_0 \sum_{j=0}^{3} \mathbf{p}_j B_j^3(v) + (b_0(1-v) + b_1 v) \sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j B_j^2(v) = \\
&= a_0 \sum_{j=0}^{3} \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j b_0 \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + \sum_{j=0}^{2} \mathbf{z}_j b_1 \binom{2}{j} v^{j+1} (1-v)^{2-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} a_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} \mathbf{z}_j b_0 \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + \sum_{j=1}^{3} b_1 \mathbf{z}_{j-1} \binom{2}{j-1} v^j (1-v)^{3-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} a_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} b_0 \mathbf{s}_j \frac{3-j}{3} \binom{3}{j} v^j (1-v)^{3-j} + \sum_{j=1}^{3} b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} \binom{3}{j} v^3 (1-v)^{3-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} a_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} b_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3} b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v)
\end{aligned}$$

V zadnji vrstici zgornjega izračuna smo uporabili, da je v vsoti $\sum_{j=0}^{3} b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v)$ člen pri $j = 0$ enak 0.

ali moram to bolje razložitiOd tod dobimo pogoje za kontrolna vektorja $\mathbf{q}_1$ in $\mathbf{q}_2$:

$$\mathbf{q}_1 = a_0 \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} b_1 \mathbf{z}_0 + \frac{2}{3} b_0 \mathbf{z}_1$$

in

$$\mathbf{q}_2 = a_0 \mathbf{p}_2 + \frac{2}{3} b_1 \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3} b_0 \mathbf{z}_2.$$

SITUACIJA 2

V tem primeru pa predpostavimo, da je krivulja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ stopnje 2, torej jo določajo kontrolni vektorji $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_m$ in $\mathbf{p}_3$. vektorja p0 in p3 sta že določena zaradi določenosti robnih krivulj

kompatibilnostni pogoji haha

ne vem, kako naj to. tega ne razumem AAAA zakaj je linearna kombinacija in kako je to enako ne razumem

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{p}_i B_i^3(v) = (1-v)^2 \mathbf{p}_0 + 2(1-v)v \mathbf{p}_m + v^2 \mathbf{p}_3$$

zakaj se p1 in p2 zapisujeta kot lin. kombinaciji p0, pm, p3?

Vektorji $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_m$ in $\mathbf{p}_1$ so del iste ravnine. Enako velja za vektorje $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_m$ in $\mathbf{p}_3$, zato lahko vektorja p_1 in p_2 zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{p}_1 = a\mathbf{p}_m + b\mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{p}_2 = c\mathbf{p}_m + d\mathbf{p}_3$$

Dobljeno vstavimo v izraz $\sum_{i=0}^{3} \mathbf{p}_i B_i^3(v)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3} \mathbf{p}_i B_i^3(v) = \mathbf{p}_0(1-v)^3 + 2a\mathbf{p}_m(1-v)^2 v + 3b\mathbf{p}_0(1-v)^2 v + 3c\mathbf{p}_m(1-v)v^2 + \\ + 3d\mathbf{p}_3(1-v)v^2 + v^3\mathbf{p}_3 = \\ = \mathbf{p}_0(1-v)^2(1-v+3bv) + \mathbf{p}_m(1-v)v(3a(1-v)+3cv) + \\ + \mathbf{p}_3 v^2(3d(1-v)+v)\end{aligned}$$

Sedaj to vstavimo v enačbo sklic in enačbimo koeficiente? pred vektorji $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_m$ in $\mathbf{p}_3$, da dobimo enačbe za izračun vrednosti a, b, c in d: $3b - 1 = 0$, $3a = 2$, $3c - 3a = 0$, $3d = 1$.

Od tod sledi $b = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3}$, $c = \frac{2}{3}$ in $d = \frac{1}{3}$. Dobili smo, da se $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{p}_2$ izražata na naslednji način:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{p}_m + \frac{1}{3}\mathbf{p}_0$$
$$\mathbf{p}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{p}_m + \frac{1}{3}\mathbf{p}_3.$$

Kot v situaciji 1 ponovno zapišimo enačbo sklic, ki velja zaradi G^1 zveznosti ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$.

$$\sum_{j=0}^{3} \mathbf{q}_j B_j^3(v) = \alpha_1(v) \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + \beta_1(v) \sum_{j=0}^{2} \mathbf{s}_j B_j^2(v)$$

kjer smo označili $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_0$, $\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_m$ in $\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_3$

Ponovno zaradi enostavnosti predpostavimo, da sta funkciji $\alpha_1(y)$ in $\beta_1(y)$ polinoma. Ponovno opazimo, da imamo na levi strani enačbe Bézierjevo krivulo stopnje 3, torej mora tudi desna stran predstavljati krivuljo stopnje 3. Polinoma $\alpha_1(y)$ in $\beta_1(y)$ morata biti zato linerana:

$$\alpha_1(v) = a_0(1-v) + a_1 v$$

$$\beta_1(v) = b_0(1-v) + b_1 v$$

Vstavimo polinoma v enačbo sklic in na podoben način kot v situaciji 1 dobimo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{3} \mathbf{q}_j B_j^3(v) = (a_0(1-v) + a_1 v) \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + (b_0(1-v) + b_1 v) \sum_{j=0}^{2} \mathbf{s}_j B_j^2(v) = \\
&= a_0 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + a_1 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^{j+1} (1-v)^{2-j} + \\
&+ b_0 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + b_1 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^{j+1} (1-v)^{2-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} (a_1 \tilde{\mathbf{p}}_{j-1} \frac{j}{3} + a_0 \tilde{\mathbf{p}}_j \frac{3-j}{3} + b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} + b_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3}) B_j^3(v)
\end{aligned}$$

tu sem kar spustila vse korake, ker so isti

Od tod sledijo pogoji za vektorja $\mathbf{q}_1$ in $\mathbf{q}_2$.

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}(a_1 \mathbf{p}_0 + 2a_0 \mathbf{p}_m + b_1 \mathbf{z}_0 + 2b_0 \mathbf{z}_1)$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}(a_0 \mathbf{p}_3 + 2a_1 \mathbf{p}_m + 2b_1 \mathbf{z}_1 + b_0 \mathbf{z}_2).$$

Seveda pa to nista edini možni situaciji.

Literatura

[1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`.

[2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.

[3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.

[4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.