

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

**NASLOV VAŠEGA DELA**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020



# **Zahvala**

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .



# Kazalo

Program dela	vii
1 Uvod	1
2 Geometrijska zveznost	1
3 $G^1$ zveznost	5
4 Bézierjeve ploskve	6
5 $G^n$ -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama	7
6 Primeri konstrukcij $G^1$ ploskev	14
Literatura	19



## Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [3], [2], [4], [1].

## Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

- [3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009
- [2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982
- [4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000
- [1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx>

Podpis mentorja:





## Naslov vašega dela

### POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

## English translation of the title

### ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2010):** oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu <http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx>

**Ključne besede:** ,

**Keywords:** ,



# 1 Uvod

začneš s tem, da bi radi različne oblike opisali s čim bolj enostavnimi elementi. v ta namen uporabljamo enostavne parametrične ploskve (zelo pogosto polinomske npr. bezierove), ki jih nato lepimo skupaj v kompleksnejše oblike. želimo, da bi bil stik dveh takih ploskev videti gladek, ploskvi morata biti zato prek skupne meje zvezni. predstaviš običajno zveznost, poveš, zakaj ni ustrezna

lahko najprej poveš, kaj je  $C^0$  zveznost, potem pa navedeš primer, kjer  $C^0$  zveznost ne pride v poštev (farin? skopirana knjiga?)

geometrijska zveznost je zelo uporabna v praksi, ker lahko modeliramo različne situacije, kjer  $C^0$  zveznost odpove (npr. zvezda, suitcase corner, house corner)

je invarianta za parametrične transformacije, tj neodvisna od parametrizacije  
geometrijska zveznost je posplošitev  $C^0$  zveznosti. torej vse nedegenerirane (kaj to pomeni?) ploskve, ki so  $C^0$  zvezne, so tudi geometrijsko zvezne, niso pa vse geometrijsko zvezne ploskve tudi  $C^0$  zvezne (primer v farin, ne razumem)

s čim se to delo ukvarja in kaj bo v kakšnem poglavju

## 2 Geometrijska zveznost

**nek uvodni tekst?** Najprej si oglejmo povsem splošno definicijo geometriske zveznosti neke ploskve.

**Definicija 2.1.** Ploskev pripada razredu  $G^n$  oziroma je *geometrijsko zvezna z redom  $n$* , če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda  $C^n$ .

definicija regularne ploskve - lahko poveš definicijo

potem lahko poveš, da to v praksi pomeni, da je normala na ploskev v vsaki točki neničelna (ali je to res?) ... ampak če hočeš to, moraš verjetno povedati, kako to sledi iz definicije (kako?)

razloži lokalnost?

Naj bosta  $R : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $S : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularni parametrizaciji

V nadaljevanju se bomo ukvarjali s ploskvami, ki so same po sebi že geometrijsko zvezne, zanimalo nas bo le, kakšni pogoji morajo veljati, da je tudi stik dveh takih ploskev geometrijsko zvezen, torej da je celotna ploskev, ki jo dobimo, ko zlepimo dve ploskvi, geometrijsko zvezna.

**Definicija 2.2.** Naj bosta  $R(x, y)$  in  $S(u, v)$  regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$ . Pravimo, da se  $R$  in  $S$  stikata z  $G^n$ -zveznostjo vzdolž krivulje  $C$ , če za vsako točko  $b_0 = C(y_0)$  obstaja lokalno regularna  $C^n$  reparametrizacijska funkcija  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , da je  $f(x_0, y) = (u_0, y)$  za vsak  $y \in I_0$  in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} R \Big|_{(x_0, y)} = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} (S \circ f) \Big|_{(x_0, y)} \quad \text{za } m+k = 1, \dots, n,$$

kjer je  $I_0$  neka okolica  $y_0$ .

razloži, kaj je regularna reparametrizacijska funkcija? ali je dovolj, da je bila prej razložena regularnost?

Zaradi stikanja ploskev v krivulji  $C$  oziroma, ker vzdolž krivulje  $C$  velja  $y = v$ , so delni odvodi parametrizacij po spremenljivki  $y$  vzdolž krivulje  $C$  enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le delne odvode po spremenljivki  $x$ . **dodati sliko?** Te delne odvode imenujemo **crossboundary derivatives**.

Oglejmo si, kakšni pogoji morajo veljati v primeru, ko želimo, da je stik med dvema ploskvama  $G^2$  zvezen.

**Primer 2.3.** Naj bodo parametrizaciji ploskev  $R$  in  $S$ , krivulja  $C$  in reparametrizacijska funkcija  $f$  kot v definiciji 2.2. Da bo stik teh dveh ploskev  $G^2$  zvezen, mora po definiciji 2.2 in ugotovitvi, da je dovolj obravnavati le odvode po spremenljivki  $y$ , veljati

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} R \Big|_{(x_0, y)} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} (S \circ f) \Big|_{(x_0, y)} \text{ za } k = 0, 1, 2.$$

za vsak  $y$  v neki okolici točke  $y_0$ . Da dosežemo zgolj geometrijsko zveznost razreda  $G^0$ , je dovolj, da med ploskvama  $R$  in  $S$  velja pogoj

$$R(x_0, y) = (S \circ f)(x_0, y), \text{ oziroma } R(x_0, y) = S(u(x_0, y), v(x_0, y)).$$

Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje  $G^1$ , mora poleg pogoja za  $G^0$  veljati še

$$\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{(x_0, y)} = \frac{\partial}{\partial x} (S \circ f) \Big|_{(x_0, y)}$$

Če ustrezno razpišemo parcialni odvod funkcije  $S \circ f$ , se ta pogoj prepiše v

$$\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{(x_0, y)} = \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y)} + \frac{\partial S}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y)}.$$

Za  $G^2$  mora poleg pogojev za  $G^0$  in  $G^1$  veljati še

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y)} &= \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Big|_{(x_0, y)} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y)} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \Big|_{(x_0, y)} + \\ &+ \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y)} + \frac{\partial S}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y)} \end{aligned}$$

V splošnem za geometrijsko zveznost stopnje  $n$ , kjer je  $n \in \mathbb{N}_0$  velja naslednje:

$$\frac{\partial^j R}{\partial x^j} \Big|_C = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k A_{jkh} \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \Big|_C$$

za vsak  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tu z  $A_{jkh}$  označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = j \\ m_1, \dots, m_k > 0}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} u_x^{m_1} \dots u_x^{m_h} v_x^{m_{h+1}} \dots v_x^{m_k} \Big|_C.$$

Z  $u_x^{m_i}$  je označen  $m_i$ -ti delni odvod funkcije  $u$  po  $x$ . **ali je treba to grozo dokazati?**

kaj je s to lemo?

**Lema 2.4.** *?? ali je dokaz tega potreben? Naj bo  $f(u, v)$  funkcija razreda  $C^n$  in  $u(t)$  in  $v(t)$  reparametrizaciji razreda  $C^n$ . Potem*

$$\frac{d^k f}{dt^k} = \sum_{i=1}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} u^{(m_1)} \dots u^{(m_h)}(v) v^{(m_{h+1})} \dots v^{(m_i)} \cdot \frac{\partial^i f}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer  $k = 1, \dots, n$  ter

$\mathbf{m}_i = (m_1, m_2, \dots, m_i)$ ,  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \dots + m_i$  in  $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i! m_1! \dots m_i!}$ .

preoblikuj to lemo, da bo koeficient  $A$  kot zgoraj. dokaz najdeš nekje k piše v viru

zdaj si pogledamo ekvivalentno/alternativno definicijo  $G$  zveznosti? s pomočjo junction functions? Z uvedbo funkcij  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$  pridemo do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti. funkcije  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$  imenujemo junction/connection functions

Naj bodo  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$  funkcije razreda  $C^n$  ene spremenljivke. Definirajmo:

$$u(x, y) = u_0 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \alpha_i(y) (x - x_0)^i$$

$$v(x, y) = y + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \beta_i(y) (x - x_0)^i$$

ali moram povsod pisati, kam te funkcije slikajo? recimo paramterizacije in alfa, beta itd.

Opazimo, da za  $i = 1, \dots, k$  velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y),$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Stične funkcije lahko izberemo skoraj povsem poljubno. Upoštevati moramo le dva pogoja, ki omejujeta izbiro funkcije  $\alpha_1$ . Prvi pogoj sledi iz zahteve po regularnosti reparametrizacijske funkcije  $f$ .

**def. regularnosti? kaj je lokalna regularnost?**

Reparametrizacijska funkcija  $f$  je regularna vzdolž  $C$ , če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearno neodvisna, torej če velja  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0$ .

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  vzdolž krivulje  $C$  in ju skušajmo zapisati s pomočjo stičnih funkcij. Za odvod po spremenljivki  $x$  velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y) \right) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)),$$

pri čemer smo uporabili opazko **sklic**. Če razpišemo odvod po spremenljivki  $y$ , pa dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) \right) = (0, 1).$$

Vektorski produkt  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$  je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0, 1) = \alpha_1(y)$$

Sledi, da je reparametrizacija regularna, natanko tedaj **?**, ko za pripradajočo stično **junction?** funkcijo  $\alpha_1$  velja  $\alpha_1(y) \neq 0$  vzdolž stične krivulje  $C$ . **ali je potreben podatek "vzdolž krivulje C"? to moraš nekako motivirati: zakaj si to sploh pogledamo? zato, ker to predstavlja pogoj za  $\alpha_1$ ?**

Drugo, na kar moramo paziti pri izbiri funkcije  $\alpha_1$  pa je njen predznak. Pri izbiri napačnega predznaka namreč lahko pride do stika v obliki "špice". **tega ne razumem čisto. tu bi bil potreben kakšen primer.**

Vpeljava stičnih funkcij nas pripelje do nekoliko drugačne definicije geometrijske zveznosti.

**Definicija 2.5.** Naj bosta  $R(x, y)$  in  $S(u, v)$  regularni  $C^m$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$ . Pravimo, da se  $R$  in  $S$  stikata z  $G^n$ -zveznostjo vzdolž krivulje  $C$ , če za vsako točko  $b_0 = C(y_0)$  obstajajo take funkcije razreda  $C^m$  ene spremenljivke  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , da  $\alpha_1(y) \neq 0$ , pri čemer mora imeti  $\alpha_1$  ustrezen predznak **??**, in da velja

$$\left. \frac{\partial^j R}{\partial x^j} \right|_C = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k A_{jkh} \left. \frac{\partial^k S}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \right|_C$$

za vsak  $j = 0, 1, \dots, n$ . Tu z  $A_{jkh}$  označujemo koeficient

$$A_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = j \\ m_1, \dots, m_k > 0}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} \alpha_1 \dots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \dots \beta_{m_k} \Big|_C$$

**popravi A, indekse pri alfah in betah**

**kaj je s tem izrekom?**

**Izrek 2.6.** Naj bosta  $R(u_r, v_r)$  in  $S(u_s, v_s)$  regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $C(v) = R(u_{r0}, v) = S(u_{s0}, v)$ . Ploskvi  $R$  in  $S$  sta  $G^n$ -zvezni vzdolž skupnega roba natanko tedaj ko obstajajo funkcije  $p_i(v)$ ,  $q_i(v)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , da velja

$$\left. \frac{\partial^k S}{\partial u_s^k} \right|_C = \sum_{i=1}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} p_{m_1}(v) \dots p_{m_h}(v) q_{m_{h+1}}(v) \dots q_{m_i}(v) \cdot \frac{\partial^i R}{\partial u_r^h \partial v_r^{i-h}},$$

kjer  $k = 1, \dots, n$  ter

$\mathbf{m}_i = (m_1, m_2, \dots, m_i)$ ,  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \dots + m_i$  in  $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i! m_1! \dots m_i!}$ .

ta izrek je ubistvu isto kot ekvivalentna definicija. ali je bolje, da ekvivalentno definicijo zapišem kot izrek? pomembno!!: kaj so potrebni in kaj zadostni pogoji? kaj sledi iz česa? \_\_\_\_\_

### 3 $G^1$ zveznost

nekaj v stilu, da se bomo natančneje ukvarjali z  $G^1$  zveznostjo. lahko povem, da je to zveznost tangentnih ravnin oz. zveznost enotskih normal in da si bomo ogledali, kako do tega pridemo.

Imejmo ploskvi  $R(x, y)$  in  $S(u, v)$ , ki se v krivulji  $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$  stikata z geometrijsko zveznostjo  $G^1$ . Sledi, da je  $R_y(x_0, y) = S_y(x_0, y) = S_v(x_0, y)$ . Kot smo že videli **ugh** v poglavju **sklic**, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri  $x$ .

Ker je stik obeh ploskev v  $C$   $G^1$ -zvezen, po definiciji **sklic** obstajata funkciji  $\alpha_1$  in  $\beta_1$ , kjer je  $\alpha_1(y) \neq 0$  za vsak  $y$  in ima ustrezen predznak, da velja:

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

Zgornja enačba nam pove, da so parcialni odvodi  $R_x(x_0, y)$ ,  $S_u(u_0, y)$  in  $S_v(u_0, y)$  v vsaki točki  $y$  linearno neodvisni. Torej so v vsaki točki  $y$  del iste tangentne ravnine na krivuljo  $C$ . Zato torej  $G^1$ -zveznost imenujemo tudi zveznost tangentnih ravnin.

v predstavitvi sem šla tako:  $R(x_0, y) = S(u_0, y)$ ,  $R_x(x_0, y) = u_x(x_0, y)S_u(u_0, y) + v_x(x_0, y)S_v(u_0, y)$ ,  $R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y)$  na mestu najbrž **ka-kšna slika**

Oglejmo si še, od kod pride poimenovanje "zveznost enotskih normal". Znova opazujemo enačbo

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y).$$

**ali je bolje, da se tu samo skličem?** Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z  $R_y(x_0, y)$ :

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times R_y(x_0, y) + \beta_1(y)S_v(u_0, y) \times R_y(x_0, y).$$

Upoštevamo lahko, da je  $R_y(x_0, y) = S_v(u_0, y)$ . Dobimo:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y)S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y).$$

Od tod vidimo, da sta normalni na ploskvi  $R$  in  $S$  na njuni stični krivulji vzporedni. **grdo** Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normalni:

$$\frac{R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)}{\|R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)\|} = \frac{S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)}{\|S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)\|}.$$

**tukaj pride nek vezni tekst? ali pa je to ok?** Ker parcialni odvodi  $R_x(x_0, y)$ ,  $S_u(u_0, y)$  in  $S_v(u_0, y)$  ležijo na isti tangentni ravnini, velja tudi: **zelo grdo**

$$\det(R_x(x_0, y), S_u(u_0, y), S_v(u_0, y)) = 0.$$

Torej obstajajo funkcije povedati kakšne, iz kje kam?  $\lambda$ ,  $\mu$  in  $\gamma$ , da velja: ali moram to kaj bolj natančno utemeljiti? treba motivirati, zakaj to gledamo

$$\lambda(y)R_x(x_0, y) = \mu(y)S_u(u_0, y) + \gamma(y)S_v(u_0, y).$$

tole tukaj je najbrž en bullshit ————— to poglavje bo najbrž treba predstaviti, ali pa spremeniti v podpoglavje

Če predpostavimo, da sta ploskvi  $R$  in  $S$  polinomski, lahko tudi za  $\lambda$ ,  $\mu$  in  $\gamma$  izberemo polinome, izberemo? ali niso točno določeni? kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

najbrž lahko poveš, da se bomo v naslednjih poglavjih ukvarjali z izbiro teh polinomov

mogoče moraš tu napisati, kako se pride do teh polinomov: tiste prve komponente. ampak tega ne razumem.

## 4 Bézierjeve ploskve

pogledamo si poseben primer polinomskih param ploskev, ki so tudi uporabne v praksi

$i$ -ti Bernsteinov bazni polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1]$$

Lastnosti:

- $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$
- $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$

**Definicija 4.1.** Naj bodo dane točke  $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{b}^{m,n} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke  $\mathbf{b}_{i,j}$  imenujemo kontrolne točke, poligon, ki jih povezuje, pa kontrolni poligon.

Velja:  $\mathbf{b}^{m,n}(0, 0) = \mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{b}^{m,n}(1, 0) = \mathbf{b}_{m,0}$ ,  $\mathbf{b}^{m,n}(0, 1) = \mathbf{b}_{0,n}$ ,  $\mathbf{b}^{m,n}(1, 1) = \mathbf{b}_{m,n}$

Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v),$$

kjer  $\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$ ,

$\Delta^{0,1} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$ ,

$\Delta^{r,0} \mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i,j}$ ,

$\Delta^{0,s} \mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j}$ .



## 5 $G^n$ -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama

Nekaj v smislu, da sedaj prevedemo že dobljene splošne pogoje na pogoje za bezierove ploskve oz. kako ti pogoji izgledajo za te ploskve.

izkaže se, da za funkcije alfa in beta v splošni definiciji lahko vzamemo polinome, ker gre pri bezierovih ploskvah tudi za polinomske parametrične ploskve.

Imejmo **polinomski?** Bézierjevi ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , podani na naslednji način:

$$\mathbf{R}(x, y) = \sum_{i=0}^{m_r} \sum_{j=0}^{n_r} \mathbf{P}_{ij} B_i^{m_r} B_j^{n_r}$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{m_s} \sum_{j=0}^{n_s} \mathbf{Q}_{ij} B_i^{m_s} B_j^{n_s},$$

kjer so  $\{\mathbf{P}_{i,j}, i = 1, \dots, m_r, j = 1, \dots, n_r\}$  in  $\{\mathbf{Q}_{i,j}, i = 1, \dots, m_s, j = 1, \dots, n_s\}$  kontrolne točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ ,  $x, y, u$  in  $v$  pa parametri na intervalu  $[0, 1]$ . **grdo**

Ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  se stikata v skupni **robni?** krivulji  $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0, v) = \mathbf{S}(0, v)$  **pojasni, zakaj lahko to predpostavimo. zakaj?? ker lahko parametriziramo? pogledj. pojasni še, kako je s tem, da sta ploskvi prav obrnjeni, da ni špice** Robno krivuljo  $\mathbf{C}$  zapišemo kot Bézierjevo krivuljo na naslednji način:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{Z}_i B_i^{n_c},$$

kjer so  $\{\mathbf{Z}_i, i = 1, \dots, n_c\}$  njene kontrolne točke. Stopnja  $n_c$  krivulje  $\mathbf{C}$  ni nujno enaka stopnjama  $n_r$  ali  $n_s$ , velja pa, da je  $n_c \leq \min(n_r, n_s)$ . **ali moram povedati, zakaj? ker ne vem**

Naj bosta ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  regularni vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  **da zadostimo pogoju iz definicije geometrijske zveznosti**, torej naj bodo normale na ploskvi vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  neničelne:

$$N_r = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

$$N_s = \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

**Nr(y)?**

O pogojih za geometrijsko zveznost teh dveh ploskev govori naslednji izrek: **ekvivalenten izreku iz prejšnjega poglavja**

**Izrek 5.1.** Naj bosta  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  zgoraj definirani **to ok?** Bézierovi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji  $\mathbf{C}$  (kot zgoraj). Stik ploskev je  $G^n$ -zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi **vir:polinomske funkcije**  $D(y)$ ,  $E_i(y)$  in  $F_i(y)$ , da velja:

$$D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} = \sum_{i=0}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}},$$

kjer je  $i = 1, \dots, n$  **vir:  $k$ ??** in  $k = 1, \dots, n$ . Z  $A_{m_i}^k$  zopet označujemo  $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i!m_1! \dots m_i!}$  in  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \dots + m_i$ . Velja še  $D(y)E_1(y) \neq 0$  za  $y \in [0, 1]$ , za stopnje polinomov pa velja:

$$\begin{aligned} st(D) &\leq n_r + n_c - 1, \\ st(E_i) &\leq (2i - 2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1 \text{ in} \\ st(F_i) &\leq (2i - 1)n_r + in_s + (i - 1)n_c - 2i + 1. \end{aligned}$$

*Dokaz.* Najprej predpostavljajmo, da obstajajo polinomi  $D$ ,  $E_i$  in  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ki ustrezajo enačbi **sklic** in ostalim pogojem v izreku. Pokazati hočemo, da od tod sledi geometrijska zveznost ploskev **R** in **S**. V ta namen bomo uporabili izrek **sklic izrek z alfami in betami**.

Preoblikujmo enačbo

$$\begin{aligned} D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=0}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \dots E_{m_h}(y) \\ &\quad \cdot F_{m_{h+1}}(y) \dots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned}$$

Če celotno enačbo delimo z  $D^{2k-1}$  (predpostavka, da  $D(y)E_1(y) \neq 0$  na  $[0, 1]$ , zagotavlja neničelnost polinoma  $D$  na  $[0, 1]$ ), dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=0}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-2k}(y) E_{m_1}(v) \dots E_{m_h}(y) \\ &\quad \cdot F_{m_{h+1}}(y) \dots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned}$$

Funkcijo  $D^{2k-i}$  lahko zapišemo kot produkt

$$D^{2k-i}(y) = D^{2m_1-1}(y) D^{2m_2-1}(y) \dots D^{2m_h-1}(y) D^{2m_{h+1}}(y) \dots D^{2m_i-1}(y).$$

**saj je  $|\mathbf{m}_i|=k$**

Dobljeno vstavimo v enačbo **sklic**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=0}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(v)}{D^{2m_1-1}(y)} \dots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\quad \cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \dots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned}$$

Definirajmo

$$\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)} \text{ in } \beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)},$$

kjer je  $i = 1, \dots, n$ . Če to vstavimo v zgornjo enačbo **sklic? to je zelo grdo**, dobimo enačbo kot v izreku **sklic**. Iz izreka **sklic** torej sledi, da se ploskvi **R** in **S** stikata z geometrijsko zveznostjo  $G^n$ . S tem smo dokazali **eno smer ekvivalence ? kako se to lepo reče**

Sedaj dokažimo še **drugo smer ekvivalence v izreku**. Predpostavimo, da se ploskvi **R** in **S**, definirani kot zgoraj **sklic** stikata v robni krivulji **C** z geometrijsko zveznostjo

$G^n$ . Pokazati hočemo, da od tod sledi obstoj polinomov  $D$ ,  $E_i$  in  $F_i$  z lastnostmi kot v izreku. Dokaza se lotimo z indukcijo po  $k$ . **vir:k**

Naj bo najprej  $k = 1$ . Ker je slik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen, torej vsaj  $G^1$ -zvezen, po izreku **sklic** obstajata funkciji  $\alpha_1(y)$  in  $\beta_1(y)$ , ki zadoščata enačbi

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y) \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right|_{\text{textbf{C}}} + \beta_1(y) \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right|_{\mathbf{C}}.$$

Dobljeno enačbo **sklic?** z desne vektorsko množimo z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}$ . Dobimo:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right|_{\mathbf{C}}(y) = \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y) \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right|_{\text{textbf{C}}}.$$

V poglavju **sklic** smo namreč že videli, da je  $\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right|_{\mathbf{C}} = \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$ .

Enačbo **sklic** sedaj z desne vektorsko množimo še z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$  in dobimo:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right|_{\mathbf{C}}(y) \times \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right|_{\mathbf{C}}(y) = \beta_1(y) \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right|_{\mathbf{C}} \times \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right|_{\mathbf{C}}$$

Z  $\mathbf{W}(s)$  označimo vektor **vektorsko funkcijo?**  $\mathbf{W}(y) = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right|_{\mathbf{C}} \times \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right|_{\mathbf{C}}$ ,

Prej dobljene enačbe **sklic** torej zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y) \mathbf{N}_r(y)$$

in

$$\mathbf{W}(y) = \beta_1(y) \mathbf{N}_r(y).$$

Stopnja  $\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right|_{\mathbf{C}}$  je največ  $n_c - 1$ , saj je  $\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$ . Enako velja za  $\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right|_{\mathbf{C}}$ . Stopnja  $\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right|_{\mathbf{C}}$  je manjša ali enaka  $n_r$ , stopnja  $\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right|_{\mathbf{C}}$  pa manjša ali enaka  $n_s$ . **razloži?** Od tod in iz enačb **sklic** sledi  $st(\mathbf{N}_r) \leq n_r + n_s - 1$ ,  $st(\mathbf{N}_s) \leq n_s + n_c - 1$  in  $st(\mathbf{W}) \leq n_r + n_s$ .

Videli smo že **sklic**, da sta zaradi predpostavke o regularnosti ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  funkciji  $\mathbf{N}_r(y)$  in  $\mathbf{N}_s(y)$  neničelni **vektorski funkciji**. **oziroma za vsak v na  $[0,1]$  sta to vektorja, različna od 0** Ker je  $\mathbf{N}_r(y)$  neničelna, mora biti vsaj ena izmed njenih koordinatnih funkcij neničeln polinom. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je neničelna  $x$ -koordinata, torej polinom  $N_{rx}$ . Če enačbe iz **sklic** razpišemo po koordinatah, za  $x$ -koordinato dobimo

$$N_{sx}(y) = \alpha_1(y) N_{rx}(y)$$

in

$$W_x(y) = \beta_1(y) N_{rx}(y),$$

kjer je  $N_{sx}$   $x$ -koordinata funkcije  $\mathbf{N}_s$ ,  $W_x$  pa  $x$ -koordinata funkcije  $\mathbf{W}$ .

Iz zgornjih enačb lahko vidimo, da so vse realne ničle polinoma  $N_{rx}(y)$  na intervalu  $[0, 1]$  tudi ničle polinomov  $N_{sx}(y)$  in  $W_x(y)$ , torej da polinom  $U(y)$ , ki je zgrajen kot produkt vseh linearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma  $N_{rx}(y)$ , deli polinoma  $N_{sx}(y)$  in  $W_x(y)$ . Da to res drži, lahko vidimo na naslednji način. Zapišimo  $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$ , kjer je  $U(y)$  produkt vseh linearnih faktorjev,  $D(y)$  pa produkt

vseh nelinearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma  $N_{rx}(y)$ . Predpostavimo, da  $U(y)$  ne deli polinoma  $N_{sx}(y)$ . Ker je  $N_{sx}(y) = \alpha_1(y)U(y)D(y)$ , je to mogoče le, če je  $\alpha_1(y)$  racionalna funkcija, katere imenovalec deli polinom  $U(y)$ . Funkcija  $\alpha_1(y)$  ima torej na intervalu  $[0, 1]$  pol. Ker velja  $\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_r(y)$  in so vse koordinatne funkcije **funkcij**  $\mathbf{N}_s(y)$  in  $\mathbf{N}_r(y)$  polinomi, mora veljati, da imenovalec funkcije  $\alpha_1(y)$  deli  $N_{rx}(y)$ ,  $N_{ry}(y)$  in  $N_{rz}(y)$ . Funkcija  $\alpha_1(y)$  ima pol, označimo ga z  $y_0$ . Sledi, da je  $y_0$  ničla polinomov  $N_{rx}(y)$ ,  $N_{ry}(y)$  in  $N_{rz}(y)$ , in zato je  $\mathbf{N}_r(y_0) = 0$ , kar pa je v nasprotju s predpostavko o regularnosti ploskve  $\mathbf{R}$ . Torej mora polinom  $U(y)$  deliti polinom  $N_{sx}(y)$ . Z enakimi sklepi trditev pokažemo še za polinom  $W_x(y)$ .

**vprašanje: ali U vsebuje vse linearne faktorje ali samo tiste, ki imajo zvezo z ničlami na  $[0,1]$ ???**

Polinom  $N_{rx}$  sedaj znova zapišimo kot produkt  $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$ , kjer sta polinoma  $U(y)$  in  $D(y)$  definirana kot zgoraj. Torej velja

$$N_{sx}(y) = U(y)\alpha_1(y)D(y)$$

in

$$W_x(y) = U(y)\beta_1(y)D(y).$$

Naj bo  $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$  in  $F_1(y) = \beta_1(y)D(y)$ . Pokazati moramo, da sta dobljeni funkciji  $E_1$  in  $F_1$  polinoma. Ker sta funkciji  $N_{sx}(y)$  in  $W_x(y)$  polinoma, morata imenovalca funkcij  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  deliti ali polinom  $U$  ali polinom  $D$ . Videli smo že, da  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  nimata polov na intervalu  $[0, 1]$ , torej njuna imenovalca ne delita polinoma  $U$ . Sledi, da morata njuna imenovalca deliti polinom  $D$ , s čimer smo pokazali, da sta  $E_1$  in  $F_1$  res polinoma.

Videli želimo še, da je  $D(y)E_1(y) \neq 0$  na intervalu  $[0, 1]$ . Polinom  $D(y)$  po definiciji vsebuje vse nelinearne faktorje v polinomskem razcepu polinoma  $N_{rx}(y)$ , torej na intervalu  $[0, 1]$  nima ničel. Polinom  $E_1(y)$  je enak  $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$ . Ker je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen, funkcija  $\alpha_1(y)$  na intervalu  $[0, 1]$  ni enaka nič (glej **sklic**), zato tudi  $E_1(y)$  na tem intervalu nima ničel.

Oglejmo si še stopnje polinomov  $D(y)$ ,  $E_1(y)$  in  $F_1(y)$ . Očitno velja:

$$st(D(y)) \leq st(N_{rx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_r(v)) \leq n_r + n_c - 1$$

$$st(E_1(y)) \leq st(N_{sx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_s(v)) \leq n_s + n_c - 1$$

$$st(F_1(y)) \leq st(W_x(y)) \leq st(\mathbf{W}(v)) \leq n_r + n_s,$$

s čimer dokažemo izrek za  $k = 1$ .

Lotimo se še dokaza za  $k > 1$ . Prepodstavimo, da izrek velja za vse  $k \leq m$ , kjer je  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ . Torej obstajajo polinomi  $D(y)$ ,  $E_1(y), \dots, E_m(y)$ ,  $F_1(y), \dots, F_m(y)$  z ustreznimi stopnjami, da velja enačba **sklic** za  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Izhajamo iz predpostavke, da je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen. Iz izreka **sklic**

sledi, da obstajajo funkcije  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$  in  $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ , da velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je  $\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$  in  $\beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$  za  $i = 1, \dots, m$ . Uporabimo to v zgornji enačbi in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}} \Big|_{\mathbf{C}} &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(y)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} = \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-2}(y) D^{-2m} E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}}, \end{aligned}$$

saj je  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = m + 1$  in zato je  $D^{-2m_1+1}(y) D^{-2m_2+1}(y) \cdots D^{-2m_i+1}(y) = D^{-2(m+1)}(y) D^i(y)$ .

Sedaj definirajmo **krivuljo? vektorsko polinomsko funkcijo?**  $\mathbf{S}_{m+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{m+1} &= D^{2m}(v) \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}} \Big|_{\mathbf{C}} - \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \end{aligned}$$

Če enačbo **sklic** pomnožimo z  $D^{2m}(y)$  in jo nekoliko preoblikujemo, dobimo:

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m} \alpha_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}} + D^{2m}(y) \beta_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}}.$$

Na dobljeni enačbi sedaj uporabimo podoben postopek, kot smo ga uporabili pri dokazu za  $k = 1$ . Enačbo z leve vektorsko množimo z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}}$  in dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}} \times \mathbf{S}_{m+1} = D^{2m} \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}}.$$

Če pa enačbo **sklic** z desne pomnožimo z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$ , dobimo

$$\mathbf{S}_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} = D^{2m} \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}.$$

Označimo  $\mathbf{W}_1 = \mathbf{S}_{m+1} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$  in  $\mathbf{W}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \mathbf{S}_{m+1}$  ter kakor prej  $N_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$ . Kot v primeru za  $k = 1$  spet lahko predpostavimo, da je polinom  $N_{rx}(y)$  neničeln in ga zapišemo kot  $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$ . Velja  $W_{1x} = D^{2m+1}(y)U(y)\alpha_{m+1}(y)$  in  $W_{2x} = D^{2m+1}(y)U(y)\beta_{m+1}(y)$  in enaki argumenti kot v primeru za  $k = 1$  nas pripeljejo do razultatata, da sta  $E_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\alpha_{m+1}(y)$  in  $F_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\beta_{m+1}(y)$  res polinoma.

Pokazati moramo še, da je  $st(E_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1$  in  $st(F_{m+1}) \leq (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m$ . Tega se lotimo tako, da si najprej ogledamo stopnjo  $\mathbf{S}_{m+1}$ . Spomnimo se:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{m+1} = & D^{2m}(v) \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}|_{\mathbf{C}} - \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_1|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ & \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}} \end{aligned}$$

Očitno je

$$\begin{aligned} st(D^{2m}(y) \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) & \leq 2m(n_r + n_c - 1) + n_s \\ & \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m, \end{aligned}$$

kjer v prvi neenakosti uporabimo dejstvo, da je  $st(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$  in  $st(\frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) \leq n_s$ , v drugi neenakosti pa, da je  $n_c \leq n_s$ .

Oglejmo si še, kakšna je  $st(D^{i-1}(y) E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}})$ . Najprej si jo oglejmo za  $h = 0$ :

$$\begin{aligned} st(D^{i-2}(y) F_{m_1}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) & \leq \\ & \leq (i-2)st(D(y)) + \sum_{j=1}^i st(F_{m_j}(y)) + st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \end{aligned}$$

Vemo, da je  $st(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$  in  $st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \leq n_c - i$ , po indukcijski predpostavki pa velja še  $st(E_i(y)) \leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1$  in  $st(F_i(y)) \leq (2i-1)n_r + in_s +$

$(i-1)n_c - 2i + 2$ ), kjer je  $i = 1, \dots, m$ . Torej je

$$\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)F_{m_1}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i} | \mathbf{C}) \leq \\
& (i-2)(n_r + n_c - 1) + \\
& + \sum_{j=1}^i ((2m_j - 1)n_r + m_j n_s + (m_j - 1)n_c - 2m_j + 2) + (n_c - i) = \\
& = (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2(m+1)n_r - in_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - in_c - \\
& - 2(m+1) + 2i + n_c - i = \\
& = 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - in_r \leq \\
& \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

Tu smo uporabili, da je  $\sum_{j=1}^i m_j = m + 1$ .

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je  $h > 1$ .

$$\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} | \mathbf{C}) \leq \\
& \leq (i-2)st(D(y)) + \sum_{j=1}^h st(E_{m_j}) + \sum_{j=h+1}^i st(F_{m_j}) + \\
& + st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} | \mathbf{C})
\end{aligned}$$

Zopet uporabimo indukcijsko predpostavko za stopnje polinomov  $E_i(y)$  in  $F_i(y)$ , kjer je  $i = 1, \dots, m$  ter dejstvo, da je  $st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} | \mathbf{C}) = n_r - i + h$  in dobimo

$$\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} | \mathbf{C}) \leq \\
& \leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r \sum_{j=1}^h m_j - 2n_r h + n_s \sum_{j=1}^h m_j + n_c \sum_{j=1}^h m_j - \\
& - 2 \sum_{j=1}^h m_j + h + 2n_r \sum_{j=h+1}^i m_j - (i-h)n_r + n_s \sum_{j=h+1}^i m_j + n_c \sum_{j=h+1}^i m_j - (i-h)n_c - \\
& - 2 \sum_{j=h+1}^i m_j + 2(i-h) + n_r - i + h = \\
& = (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
& - 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h
\end{aligned}$$

V zadnji enakosti smo uprabili, da je  $\sum_{j=1}^i m_j = m + 1$ . Nadaljujmo za računom:

$$\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} | \mathbf{C}) \leq \\
& \leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
& - 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h \leq \\
& \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - n_r h + n_c h - n_c + n_r = \\
& = 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m + (h-1)(n_c - n_r) \leq \\
& \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

V zadnji neenakosti smo uporabili, da je  $n_c \leq n_r$ , torej je  $n_c - n_r \leq 0$ . S tem smo torej pokazali, da je  $st(\mathbf{S}_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m$ .

Iz enačbe **sklic** je razvidno naslednje:

$$\begin{aligned}
& st(E_{m+1}) \leq st(W_{1x}) \leq st(\mathbf{W}_1) \leq st(\mathbf{S}_{m+1}) + st\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} | \mathbf{C}\right) \leq \\
& \leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + (n_c - 1) = \\
& = 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo oceno za stopnjo polinoma  $F_{m+1}$ :

$$\begin{aligned}
& st(F_{m+1}) \leq st(W_{2x}) \leq st(\mathbf{W}_2) \leq st(\mathbf{S}_{m+1}) + st\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} | \mathbf{C}\right) \leq \\
& \leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + n_r = \\
& = (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

S tem smo dokazali izrek še za  $k > 1$ . □

## 6 Primeri konstrukcij $G^1$ ploskev

**nek uvod**

### **PRIMER 1**

Imejmo dve bikubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

ki se stikata v  $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0, v) = \mathbf{S}(0, v)$ , torej naj velja

$$\mathbf{C}(v) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{Z}_i B_i^3(v),$$

kjer so  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{P}_{0,i} = \mathbf{Q}_{0,i}$  kontrolne točke krivulje  $\mathbf{C}$ . Robne krivulje ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  naj bodo že določene. Zanima nas, kako lahko v tem primeru določimo notranje



točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , torej kako lahko določimo kontrolne točke  $\mathbf{P}_{1,1}$ ,  $\mathbf{P}_{1,2}$ ,  $\mathbf{Q}_{1,1}$  in  $\mathbf{Q}_{1,2}$ , da bo stik ploskev  $G^1$ -zvezen. **ali tukaj dam razlago s ploščinami trikotnikov? ker ne znam razložiti, zakaj morata biti enaki**

Izrek **sklic** pravi, da je stik obeh ploskev  $G^1$ -zvezen, natanko tedaj ko obstajata funkciji  $\alpha_1(v)$  in  $\beta_1(v)$ , **pogoj regularnosti? lastnosti teh funkcij?** da velja

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = \alpha_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} + \beta_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0},$$

oziroma (po izreku **sklic**) natanko tedaj ko obstajajo polinomi  $D(v)$ ,  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$ , kjer sta polinoma  $D$  in  $E_1$  stopnje največ 5, polinom  $F_1$  pa stopnje največ 6, da velja

$$D(v) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = E_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} + F_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0}.$$

**ker gre za bezierove ploskve, sta alfa1 in beta1 racionalni funkciji. kako naj to razložim zakaj?**

Razpišimo: **tu se nekako sklicuješ na formulo za odvod in evalvacijo v 0**

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = 3 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) B_i^2(u) B_j^3(v)|_{u=0} = 3 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^3(v),$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = 3 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j}) B_i^2(u) B_j^3(v)|_{u=0} = 3 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}) B_j^3(v),$$

in

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0} = 3 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j}) B_i^2(u) B_j^3(v)|_{u=0} = 3 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}) B_j^2(v).$$

Po enačbi **sklic** mora veljati

$$\sum_{j=0}^3 (\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^3(v) = \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}) B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}) B_j^2(v).$$

Da dobimo še nekaj dodatnih pogojev za kontrolne točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , evalvirajmo zgornjo enačbo **sklic** v vrednostih paramaterov  $v = 0$  in  $v = 1$  **grdo. spet se lahko skliciješ na tisto lastnost al neki** Pri vrednosti  $v = 0$  dobimo:

$$(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}) = a_0(\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}) + b_0(\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}),$$

oziroma:

$$\mathbf{q}_0 = a_0 \mathbf{p}_0 + b_0 \mathbf{z}_0.$$

Tu smo z  $a_0$  označili vrednost  $\alpha_1(0)$ , z  $b_0$  vrednost  $\beta_1(0)$ , z oznakami  $\mathbf{p}_j$  in  $\mathbf{q}_j$  vektorje  $\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}$ , z oznakami  $\mathbf{z}_j$  pa vektorje  $\mathbf{Z}_{j+1} - \mathbf{Z}_j = \mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{0,j}$ . **(kjer i=1,...,3)** Pri vrednosti  $v = 1$  pa dobimo:

$$\mathbf{Q}_{1,3} = a_1(\mathbf{P}_{1,3} - \mathbf{P}_{0,3}) + b_1(\mathbf{P}_{0,3} - \mathbf{P}_{0,2}),$$

oziroma:

$$\mathbf{q}_3 = a_1 \mathbf{p}_3 + b_1 \mathbf{z}_2.$$

Tu smo z  $a_1$  označili vrednost  $\alpha_1(1)$  in z  $b_1$  vrednost  $\beta_1(1)$ .

**kompatibilnostni pogoji omgomgomg**

Pogoji in omejitve, ki jih imamo do sedaj, še ne določajo enolično notranjih kontrolnih točk plosev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ . **tu lahko primerjava z običajno zveznostjo, kjer je vse že natančno določeno ?**

Podati moramo še nekaj pogojev, ki bodo določali obliko ploskve  $\mathbf{R}$ , ter podatek o stopnji **cross-derivative** krivulje ?  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$  **GROZNO. povej zakaj samo stopnjo tega**, od tod pa bomo lahko s pomočjo pogojev za geometrijsko zveznost enolično izrazili preostanek kontrolnih točk. Glede na stopnjo krivulje  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$  si oglejmo dve različni situaciji. **zakaj stopnja ne more biti npr 1? povej!**

### SITUACIJA 1

V prvem primeru predpostavimo, da je krivulja  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$  stopnje 3. Krivuljo  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$  torej določajo štirje kontrolni vektorji:  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  in  $\mathbf{p}_3$ . Vektorja  $\mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{p}_3$  sta že določena, vektorja  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}_{1,1} - \mathbf{P}_{0,1}$  in  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_{1,2} - \mathbf{P}_{0,2}$  pa naj bosta prosta. Torej sta točki  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$  prosta parametra. **ali to prav razumem?**

Ko izberemo kontrolni točki  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$ , lahko s pomočjo pogojev za  $G^1$  zveznost izrazimo še točki  $\mathbf{Q}_{1,1}$  in  $\mathbf{Q}_{1,2}$ . Zapišimo znova enačbo **sklic**:

$$\sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_j B_j^3(v) = \alpha_1(v) \sum_{j=0}^3 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \beta_1(v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j B_j^2(v).$$

Zaradi enostavnosti naj bosta **koeficientni** funkciji  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  polinoma. **lahko bi bili tudi racionalni funkciji, v tem primeru bi dobili še veliko več situacij (3. primer?) (ne bi pa mogli biti nič drugega zaradi izreka?)** Opazimo, da imamo v zgornji enačbi na levi strani Bézierjevo krivuljo stopnje 3, torej mora tudi vsota na desni strani predstavljati kubično Bézierjevo krivuljo. Polinom  $\alpha_1$  je zato lahko le konstanten, stopnja polinoma  $\beta_1$  pa mora biti 1. Ker mora veljati še  $\alpha_1(0) = a_0$ ,  $\alpha_1(1) = a_1$ ,  $\beta_1(0) = b_0$  in  $\beta_1(1) = b_1$ , mora veljati:

$$\alpha_1(v) = a_0 = a_1.$$

in

$$\beta_1(v) = b_0(1 - v) + b_1v.$$

**kompatibilnostni pogoji izginejo lol lol** Vstavimo dobljena polinoma  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  v enačbo **sklic** in dobimo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_j B_j^3(v) &= a_0 \sum_{j=0}^3 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + (b_0(1 - v) + b_1v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j B_j^2(v) = \\ &= a_0 \sum_{j=0}^3 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j b_0 \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j b_1 \binom{2}{j} v^{j+1} (1 - v)^{2-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 a_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 \mathbf{z}_j b_0 \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + \sum_{j=1}^3 b_1 \mathbf{z}_{j-1} \binom{2}{j-1} v^j (1 - v)^{3-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 a_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 b_0 \mathbf{s}_j \frac{3-j}{3} \binom{3}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + \sum_{j=1}^3 b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} \binom{3}{j} v^j (1 - v)^{3-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 a_0 \mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 b_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v) \end{aligned}$$

V zadnji vrstici zgornjega izračuna smo uporabili, da je v vsoti  $\sum_{j=0}^3 b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v)$  člen pri  $j = 0$  enak 0.

ali moram to bolj razložiti? Od tod dobimo pogoje za kontrolna vektorja  $\mathbf{q}_1$  in  $\mathbf{q}_2$ :

$$\mathbf{q}_1 = a_0 \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} b_1 \mathbf{z}_0 + \frac{2}{3} b_0 \mathbf{z}_1$$

in

$$\mathbf{q}_2 = a_0 \mathbf{p}_2 + \frac{2}{3} b_1 \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3} b_0 \mathbf{z}_2.$$

## SITUACIJA 2

V tem primeru pa predpostavimo, da je krivulja  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$  stopnje 2, torej jo določajo kontrolni vektorji  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_m$  in  $\mathbf{p}_3$ . vektorja  $\mathbf{p}_0$  in  $\mathbf{p}_3$  sta že določena zaradi določenosti robnih krivulj

kompatibilnostni pogoji haha

ne vem, kako naj to. tega ne razumem AAAA zakaj je linearna kombinacija in kako je to enako ne razumem

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i B_i^3(v) = (1-v)^2 \mathbf{p}_0 + 2(1-v)v \mathbf{p}_m + v^2 \mathbf{p}_3$$

zakaj se  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$  zapisujeta kot lin. kombinaciji  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_m$ ,  $\mathbf{p}_3$ ?

Vektorji  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_m$  in  $\mathbf{p}_1$  so del iste ravnine. Enako velja za vektorje  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_m$  in  $\mathbf{p}_3$ , zato lahko vektorja  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$  zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{p}_1 = a \mathbf{p}_m + b \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{p}_2 = c \mathbf{p}_m + d \mathbf{p}_3$$

Dobljeno vstavimo v izraz  $\sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i B_i^3(v)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i B_i^3(v) &= \mathbf{p}_0(1-v)^3 + 2a\mathbf{p}_m(1-v)^2v + 3b\mathbf{p}_0(1-v)^2v + 3c\mathbf{p}_m(1-v)v^2 + \\ &+ 3d\mathbf{p}_3(1-v)v^2 + v^3\mathbf{p}_3 = \\ &= \mathbf{p}_0(1-v)^2(1-v+3bv) + \mathbf{p}_m(1-v)v(3a(1-v)+3cv)+ \\ &+ \mathbf{p}_3v^2(3d(1-v)+v) \end{aligned}$$

Sedaj to vstavimo v enačbo sklic in enačbimo koeficiente? pred vektorji  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_m$  in  $\mathbf{p}_3$ , da dobimo enačbe za izračun vrednosti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in  $d$ :  $3b-1=0$ ,  $3a=2$ ,  $3c-3a=0$ ,  $3d=1$ .

Od tod sledi  $b = \frac{1}{3}$ ,  $a = \frac{2}{3}$ ,  $c = \frac{2}{3}$  in  $d = \frac{1}{3}$ . Dobili smo, da se  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$  izražata na naslednji način:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{2}{3} \mathbf{p}_m + \frac{1}{3} \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{2}{3} \mathbf{p}_m + \frac{1}{3} \mathbf{p}_3.$$

Kot v situaciji 1 ponovno zapišimo enačbo sklic, ki velja zaradi  $G^1$  zveznosti ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ .

$$\sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_j B_j^3(v) = \alpha_1(v) \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + \beta_1(v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{s}_j B_j^2(v)$$

kjer smo označili  $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_m$  in  $\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_3$

Ponovno zaradi enostavnosti predpostavimo, da sta funkciji  $\alpha_1(y)$  in  $\beta_1(y)$  polinoma. Ponovno opazimo, da imamo na levi strani enačbe Bézierjevo krivuljo stopnje 3, torej mora tudi desna stran predstavljati krivuljo stopnje 3. Polinoma  $\alpha_1(y)$  in  $\beta_1(y)$  morata biti zato linerana:

$$\alpha_1(v) = a_0(1 - v) + a_1v$$

$$\beta_1(v) = b_0(1 - v) + b_1v$$

Vstavimo polinoma v enačbo **sklic** in na podoben način kot v **situaciji 1** dobimo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_j B_j^3(v) &= (a_0(1 - v) + a_1v) \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + (b_0(1 - v) + b_1v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{s}_j B_j^2(v) = \\ &= a_0 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + a_1 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^{j+1} (1 - v)^{2-j} + \\ &+ b_0 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + b_1 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^{j+1} (1 - v)^{2-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 (a_1 \tilde{\mathbf{p}}_{j-1} \frac{j}{3} + a_0 \tilde{\mathbf{p}}_j \frac{3-j}{3} + b_1 \tilde{\mathbf{z}}_{j-1} \frac{j}{3} + b_0 \tilde{\mathbf{z}}_j \frac{3-j}{3}) B_j^3(v) \end{aligned}$$

tu sem kar spustila vse korake, ker so isti

Od tod sledijo pogoji za vektorja  $\mathbf{q}_1$  in  $\mathbf{q}_2$ .

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}(a_1 \mathbf{p}_0 + 2a_0 \mathbf{p}_m + b_1 \mathbf{z}_0 + 2b_0 \mathbf{z}_1)$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}(a_0 \mathbf{p}_3 + 2a_1 \mathbf{p}_m + 2b_1 \mathbf{z}_1 + b_0 \mathbf{z}_2).$$

Seveda pa to nista edini možni situaciji.

## Literatura

- [1] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx>.
- [2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.
- [3] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.
- [4] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

