

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

**NASLOV VAŠEGA DELA**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020



# Kazalo

Program dela	v
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Geometrijska zveznost parametrično podanih krivulj in ploskev</b>	<b>3</b>
2.1 Geometrijska zveznost krivulj . . . . .	4
2.2 Geometrijska zveznost ploskev . . . . .	5
2.3 Geometrijska interpretacija $G^1$ -zveznosti . . . . .	8
<b>3 Konstrukcija geometrijsko zveznih Bézierjevih ploskev iz tenzorskega produkta</b>	<b>10</b>
3.1 Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta . . . . .	10
3.2 $C^n$ -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama iz tenzorskega produkta . . . . .	14
3.3 $G^n$ -zveznost med dvema Bézierovima ploskvama iz tenzorskega produkta . . . . .	14
<b>4 Primeri konstrukcij geometrijsko zveznih ploskev iz tenzorskega produkta</b>	<b>23</b>
4.1 Konstrukcija $G^1$ -zveznih Bézierjevih ploskev iz tenzorskega produkta	23
4.2 Konstrukcija $G^2$ -zveznih Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta .	32
<b>5 Konstrukcija <math>G^1</math>-zveznih trikotnih Bézierjevih ploskev</b>	<b>37</b>
5.1 Trikotne Bézierjeve ploskve . . . . .	37
5.2 Konstrukcija $C^1$ -zveznih trikotnih Bézierovih ploskev . . . . .	39
5.3 Konstrukcija $G^1$ -zveznih trikotnih Bézierovih ploskev . . . . .	41
<b>6 Kompatibilnostni pogoji v skupnem vozlišču</b>	<b>45</b>
<b>Literatura</b>	<b>53</b>



## Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot .

## Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

Podpis mentorja:



## Naslov vašega dela

### POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

## English translation of the title

### ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2010):** oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu <http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx>

**Ključne besede:** ,

**Keywords:** ,





# 1 Uvod

Krivulje in ploskve v ravnini in prostoru lahko matematično opisujemo na različne načine. Lahko jih na primer podajamo eksplicitno, kot grafe funkcij, vendar je slabost takega pristopa, da na tak način ne moremo opisovati sklenjenih krivulj ali ploskev. Drugi način je podajanje v implicitni obliki. Ta sicer omogoča opisovanje sklenjenih krivulj in ploskev, ima pa to slabost, da je iskanje točk na tako podani krivulji ali ploskvi lahko precej računsko zahtevno, saj zahteva reševanje nelinearnih enačb. V računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju se zato pogosto uporablja tretji pristop, krivulje in ploskve se podaja parametrično.

Parametrični pristop pogosto zahteva, da nekoliko manj enostavne geometrijske objekte opisujemo po delih, tako da jih sestavljamo iz manjših, enostavnejših ploskev oziroma krivulj. Problem se pri tem pristopu pojavi, kadar zahtevamo, da so tako predstavljeni objekti geometrijsko gladki. Gladkost krivulj in ploskev je ključnega pomena v industrijskem oblikovanju, na primer v avtomobilski, letalski ali ladijski industriji, kjer je nujna aerodinamičnost in hidrodinamičnost različnih objektov, pa tudi v računalniških animacijah in robotiki, kjer je pomembna gladkost gibanja.

Da zagotovimo geometrijsko gladkost stika dveh krivulj ali ploskev, lahko zahtevamo da sta na svojem stiku parametrično oziroma  $C^n$ -zvezni.

**Definicija 1.1.** Naj bosta  $\mathbf{p} : I_1 \Rightarrow \mathbb{R}^d$  in  $\mathbf{q} : I_2 \Rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ ,  $C^n$  parametrizaciji dveh krivulj, kjer sta  $I_1$  in  $I_2$  intervala v  $\mathbb{R}$ . Krivulji  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{q}$  naj se stikata v neki točki, torej naj obstaja parameter  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ , da je  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{q}(t_0)$ . Pravimo, da se krivulji v skupni točki stikata s *parametrično zveznostjo reda  $n$*  oziroma s  $C^n$ -zveznostjo, če velja

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p}(t_0) = \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{q}(t_0), \quad k = 1, \dots, n.$$

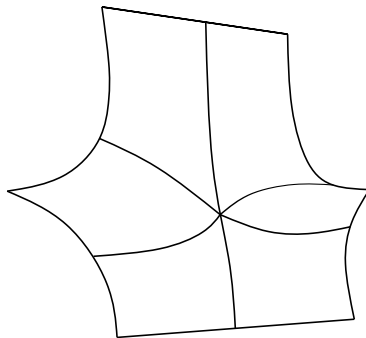
Podobna je definicija  $C^n$ -zveznosti za ploskve.

**Definicija 1.2.** Naj bosta  $\mathbf{R}(x, y)$  in  $\mathbf{S}(u, v)$   $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $\mathbf{C}(y) = \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(x_0, y)$ . Pravimo, da se ploskvi v skupni krivulji stikata s *parametrično zveznostjo reda  $n$*  oziroma s  $C^n$ -zveznostjo, če velja

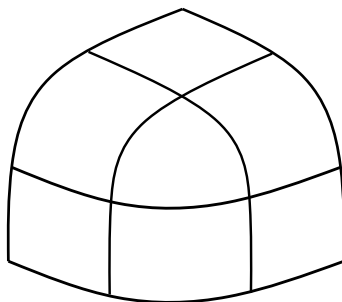
$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} \mathbf{R}(x_0, y) = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} \mathbf{S}(x_0, y) \quad m + k = 1, \dots, n.$$

Parametrična zveznost v primeru, da gre za regularne parametrizacije, sicer zagotavlja gladkost stika dveh krivulj ali ploskev, vendar pa je v marsikaterem primeru preveč restriktivna. Odvisna je na primer od parametrizacije krivulj in ploskev, kar nas lahko zelo omejuje, kar se tiče oblik, ki jih lahko konstruiramo. Izkaže se, da za konstrukcijo gladkih objektov tako strogi pogoji niso nujno potrebni. Poleg tega pri modeliranju marsikaterere oblike  $C^n$ -zveznost v celoti odpove. Primeri takih oblik so ploskve, zgrajene iz večih manjših ploskev, ki se stikajo v skupni točki. Še en primer, kjer parametrična zveznost ni preveč uporabna, je t. i. vogal kovčka.

V ta namen torej vpeljemo nekoliko manj restriktivno obliko zveznosti, ki pa še vedno omogoča, da so krivulje in ploskve na stiku geometrijsko gladke. imenujemo jo geometrijska zveznost oziroma  $G^n$ -zveznost. Geometrijska zveznost je posplošitev parametrične zveznosti, torej so vse krivulje in ploskve, ki so parametrično



Slika 1: Primer ploskve, sestavljene iz šestih manjših ploskev, ki se stikajo v skupni točki. Gladkosti take ploskve ne moremo zagotoviti s  $C^m$ -zveznostjo.



Slika 2: Primer ploskve v obliki vogala kovčka.

zvezne, tudi geometrijsko zvezne. Kar se tiče konstrukcije krivulj in ploskev pri naša marsikatero olajšavo. Geometrijska zveznost je invariantna za parametrične transformacije, torej neodvisna od parametrizacije. Poleg tega pri konstrukciji prinese dodatne proste parametre, s katerimi lahko vplivamo na obliko objektov. Z uporabo geometrijske zveznosti je torej mogoče modelirati veliko več različnih oblik, med drugim tudi ploskvi, prikazani na slikah 1 in 2.

To magistrsko delo se osredotoča predvsem na konstrukcijo geometrijsko zveznih parametrično podanih ploskev. V poglavju 2 je najprej predstavljenih nekaj osnovnih pojmov v zvezi s parametričnimi krivuljami in ploskvami, nato je definirana geometrijska zveznost na stiku dveh krivulj. Sledi definicija geometrijske zveznosti med dvema ploskvama, ter podrobnejša predstavitev nekaterih njenih lastnosti. Predstavljena je tudi geometrijska interpretacija  $G^1$ -zveznosti. V poglavju 3 so predstavljene Bézierove krivulje in Bézierove ploskve iz tenzorskega produkta,

to je posebna vrsta parametrično podanih krivulj in ploskev. Opisani so pogoji, ki morajo veljati za  $C^n$  ter  $G^n$ -zveznost Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta. Poglavje 4 vsebuje nekaj bolj konkretnih primerov konstrukcij  $G^1$  in  $G^2$ -zveznih Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta. V poglavju 5 so opisane še trikotne Bézierove ploskve in pogoji, ki morajo veljati za  $C^1$  in  $G^1$ -zveznost med dvema ploskvama. Opisan je tudi primer konstrukcije. V poglavju 6 pa si ogledamo še pogoje, ki jih prinese  $G^n$ -zveznost za več ploskev, ki se stikajo v skupni točki.

## 2 Geometrijska zveznost parametrično podanih krivulj in ploskev

V uvodu je bilo omenjeno, da se bomo v nadaljevanju ukvarjali s krivuljami in ploskvami, ki so podane parametrično, ter pogoji, ki morajo veljati za njihovo gladkost. Izkaže se, da sam pogoj geometrijske ali pa parametrične zveznosti na stiku dveh poljubnih krivulj ali ploskev ni niti zadosten niti potreben. Obstajajo t. i. neregularne krivulje in ploskve, ki zadoščajo pogojem zveznosti, vendar na stiku niso videti gladke, ali pa pogojem zveznosti ne zadoščajo, pa so vseeno videti gladke. Nekaj primerov takih krivulj in ploskev je mogoče najti v [11]. Da se izognemo takim primerom, se bomo v nadaljevanju omejili le na regularne parametrične krivulje in ploskve.

Oglejmo si definicijo parametrično podane krivulje in regularne parametrizacije krivulje.

**Definicija 2.1.** Naj bo  $I \subset \mathbb{R}$  interval in

$$\begin{aligned}\mathbf{g} : I &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{g}(t) &= (g_1(t), g_2(t), g_3(t))\end{aligned}$$

injektivna preslikava razreda  $C^1$ . Tedaj je  $\mathbf{R} = \{\mathbf{g}(t); t \in I\}$  *parametrično podana krivulja* v  $\mathbb{R}^3$ . Pravimo, da je v okolici točke  $t_0 \in I$  parametrizacija  $\mathbf{g}$  *regularna*, če velja

$$g_1'(t_0)^2 + g_2'(t_0)^2 + g_3'(t_0)^2 \neq 0.$$

Parametrizacija  $\mathbf{g}$  je *regularna parametrizacija krivulje*  $\mathbf{R}$ , če velja

$$g_1'(t)^2 + g_2'(t)^2 + g_3'(t)^2 \neq 0 \text{ za } t \in I.$$

Podobno definiramo tudi parametrično podane ploskve in njihove regularne parametrizacije.

**Definicija 2.2.** Naj bo  $K \subset \mathbb{R}^2$  odprta množica in

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : K &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{F}(u, v) &= (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))\end{aligned}$$

injektivna preslikava razreda  $C^1$ . Potem je  $\mathbf{S} = \{\mathbf{F}(u, v); (u, v) \in K\}$  *parametrično podana ploskev* v  $\mathbb{R}^3$ . Pravimo, da je v okolici točke  $(u_0, v_0) \in K$  parametrizacija  $\mathbf{F}$

regularna, če je rang njene Jacobijeve matrike v tej točki maksimalen, torej če velja

$$\text{rang}(D\mathbf{F})(u_0, v_0) = \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = 2.$$

Parametrizacija  $\mathbf{F}$  je *regularna parametrizacija ploskve*  $\mathbf{S}$ , če velja

$$\text{rang}(D\mathbf{F})(u, v) = 2 \text{ za } (u, v) \in K.$$

**Opomba 2.3.** Pogoji v definiciji 2.2, da je za parametrizacijo ploskve  $\mathbf{F}$  rang njene Jacobijeve matrike  $\text{rang}(D\mathbf{F})(u, v) = 2$ , je enakovreden pogoju, da sta v vsaki točki ploskve tangentna vektorja

$$\left[ \frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) \quad \frac{\partial F_2}{\partial u}(u, v) \quad \frac{\partial F_3}{\partial u}(u, v) \right], \quad \left[ \frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) \quad \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) \quad \frac{\partial F_3}{\partial v}(u, v) \right]$$

na ploskev linearno neodvisna oziroma če je v vsaki točki normala na ploskev neničelna.

## 2.1 Geometriška zveznost krivulj

Preden se lotimo geometrijske zveznosti ploskev, si najprej oglejmo nekoliko bolj intuitivno definicijo geometrijske zveznosti stika dveh krivulj. To bomo v nadaljevanju posplošili na definicijo geometrijske zveznosti stika dveh ploskev.

**Definicija 2.4.** Naj bosta  $\mathbf{p} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  in  $\mathbf{q} : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh krivulj, kjer sta  $I_1$  in  $I_2$  intervala v  $\mathbb{R}$ . Krivulji  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{q}$  naj se stikata v neki točki, torej naj obstajata parametra  $t_1 \in I_1$  in  $t_2 \in I_2$ , da je  $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{q}(t_2)$ . Pravimo, da se krivulji v skupni točki stikata z *geometrijsko zveznostjo reda  $n$*  oziroma z  $G^n$ -zveznostjo, če v okolici  $I_0$  parametra  $t_1$  obstaja regularna  $C^n$  reparametrizacijska funkcija  $f : I_0 \rightarrow I_2$ , da velja  $f(t_1) = t_2$ ,  $\frac{df}{dt}(t_1) > 0$  ter

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p}(t_1) = \frac{d^k}{dt^k} (\mathbf{q} \circ f)(t_1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Da sta krivulji  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{q}$   $G^0$ -zvezni, mora veljati le, da se ujemata v skupni točki, oziroma da je  $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{q}(t_2)$ . Za  $G^1$  zveznost mora poleg pogoja za  $G^0$ -zveznost veljati še naslednje:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t_1) = \frac{d}{dt} (\mathbf{q} \circ f)(t_1) = \frac{d}{dt} (\mathbf{q} \circ f)(t_1) \frac{df}{dt}(t_1). \quad (2.1)$$

Za  $G^2$  pa mora poleg pogojev za  $G^0$ -zveznost in  $G^1$ -zveznost veljati še

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t_1) = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{q} \circ f)(t_1) \left( \frac{df}{dt}(t_1) \right)^2 + \frac{d}{dt} (\mathbf{q} \circ f)(t_1) \frac{d^2 f}{dt^2}(t_1).$$

V splošnem pogoj za  $G^n$ -zveznost krivulj zapišemo kot

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p}(t_1) = \sum_{i=1}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \frac{d^{m_1} f}{dt^{m_1}}(t_1) \cdots \frac{d^{m_i} f}{dt^{m_i}}(t_1) \frac{d^i}{dt^i} \mathbf{q}(t_1)$$

za  $k = 1, \dots, n$ , kjer je  $A_{m_i}^k = \frac{k!}{i!m_1! \dots m_i!}$ .

Oglejmo si, kakšna je geometrijska interpretacija  $G^1$ -zveznosti. Iz enačbe (2.1) je razvidno, da sta vektorja  $\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_1)$  in  $\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t_1)$ , ki predstavljata odvoda obeh krivulj v stični točki, vzporedna. Ker smo v definiciji 2.4 zahtevali, da je odvod reparametrizacijske funkcije  $f$  v stični točki strogo pozitiven, imata tangenti na krivulji isto smer. Torej velja, da imata obe krivulji v skupni točki enako enotsko normalo:

$$\frac{\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_1)}{\|\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t_1)\|} = \frac{\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t_1)}{\|\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t_1)\|}.$$

Enotska normala se torej vzdolž obeh krivulj zvezno spreminja.

## 2.2 Geometrijska zveznost ploskev

Najprej si oglejmo povsem splošno definicijo geometrijske zveznosti neke ploskve.

**Definicija 2.5.** Ploskev pripada razredu  $G^n$  oziroma je *geometrijsko zvezna z redom  $n$* , če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda  $C^n$ .

V nadaljevanju se bomo ukvarjali s ploskvami, ki so same po sebi že geometrijsko zvezne, zanimalo nas bo le, kakšni pogoji morajo veljati, da je tudi stik dveh takih ploskev geometrijsko zvezen, torej da je celotna ploskev, ki jo dobimo, ko zlepimo dve ploskvi, geometrijsko zvezna.

**Definicija 2.6.** Naj bosta  $\mathbf{R}(x, y)$  in  $\mathbf{S}(u, v)$  regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $\mathbf{C}(y) = \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u_0, y)$ . Pravimo, da se  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stikata z  $G^n$ -zveznostjo vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$ , če za vsako točko  $b_0 = \mathbf{C}(y_0)$  obstaja lokalna regularna  $C^n$  reparametrizacijska funkcija  $\mathbf{f}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , da je  $\mathbf{f}(x_0, y) = (u_0, y)$  za vsak  $y \in I_0$  in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} \mathbf{R}(x_0, y) = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} (\mathbf{S} \circ \mathbf{f})(x_0, y) \quad \text{za } m + k = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

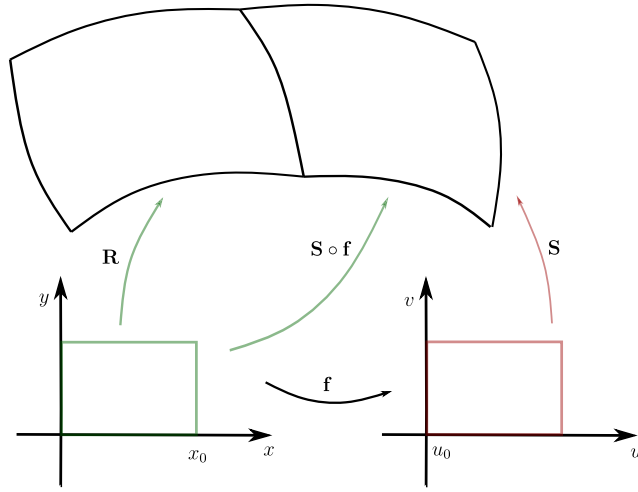
kjer je  $I_0$  neka okolica  $y_0$ .

Zaradi stikanja ploskev v krivulji  $\mathbf{C}$  oziroma, ker vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  velja  $y = v$ , so parcialni odvodi parametrizacij po spremenljivki  $y$  vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le parcialne odvode po spremenljivki  $x$ .

Oglejmo si, kakšni pogoji morajo veljati v primeru, ko želimo, da je stik med dvema ploskvama  $G^2$  zvezen.

**Primer 2.7.** Naj bodo dane parametrizaciji ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , krivulja  $\mathbf{C}$  in reparametrizacijska funkcija  $f$  kot v definiciji 2.6. Vpeljimo še oznako  $E = \{(x_0, y); y \in [0, 1]\}$  za del domene, nad katerim je definirana krivulja  $\mathbf{C}$ . Da bo stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^2$ -zvezen, mora po definiciji 2.6 in ugotovitvi, da je dovolj obravnavati le odvode po spremenljivki  $x$ , veljati

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(x_0, y) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\mathbf{S} \circ f)(x_0, y) \quad \text{za } k = 0, 1, 2,$$



Slika 3: Grafična ponazoritev reparametrizacije ploskev. Da sta ploskvi na skupnem robu  $G^n$ -zvezni, se morajo na robu ujemati odvodi parametrizacij  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S} \circ \mathbf{f}$  do odvoda stopnje  $n$ .

za vsak  $y$  v neki okolici točke  $y_0$ . Da dosežemo zgolj geometrijsko zveznost razreda  $G^0$ , je dovolj, da med ploskvama  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  velja pogoj

$$\mathbf{R}(x_0, y) = (\mathbf{S} \circ \mathbf{f})(x_0, y), \text{ oziroma } \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u(x_0, y), v(x_0, y)).$$

Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje  $G^1$ , mora poleg pogoja za  $G^0$  veljati še

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(x_0, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{S} \circ \mathbf{f})(x_0, y) \quad y \in [0, 1].$$

Če ustrezno razpišemo parcialni odvod funkcije  $\mathbf{S} \circ \mathbf{f}$ , se ta pogoj prepiše v

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(x_0, y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u(x_0, y), v(x_0, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u(x_0, y), v(x_0, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y),$$

$$y \in [0, 1].$$

Za  $G^2$  mora poleg pogojev za  $G^0$  in  $G^1$  veljati še

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^2} \Big|_E &= \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Big|_E + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_E + \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \Big|_E \\ &+ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_E + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_E. \end{aligned}$$

V splošnem se pogoj za geometrijsko zveznost stopnje  $n$ , kjer je  $n \in \mathbb{N}_0$ , zapiše kot:

$$\frac{\partial^k \mathbf{R}}{\partial x^k} \Big|_E = \sum_{i=1}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{\partial^{m_1} u}{\partial x^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_h} u}{\partial x^{m_h}} \frac{\partial^{m_{h+1}} v}{\partial x^{m_{h+1}}} \cdots \frac{\partial^{m_i} v}{\partial x^{m_i}} \frac{\partial^i \mathbf{S}}{\partial u^h \partial v^{i-h}} \Big|_E \quad (2.3)$$

za vsak  $k = 0, 1, \dots, n$ . Tu z  $A_{m_i}^k$  iznačujemo koeficient

$$A_{m_i}^k = \frac{k!}{i!m_1!\dots m_i!}.$$

Z  $u_x^{m_i}$  je označen  $m_i$ -ti delni odvod funkcije  $u$  po  $x$ , z oznako  $|m_i|$  pa označimo vsoto  $|m_i| = m_1 + m_2 + \dots + m_i$ , kjer velja  $m_j > 0$  za vsak  $j = 1, \dots, i$ . Dokaz enakosti 2.3 je mogoče najti v [?].

Taka definicija geometrijske zveznosti med dvema ploskvama sama po sebi pri konstrukciji geometrijsko zveznih ploskev ni najbolj koristna. V nadaljevanju bo veliko uporabnejši naslednji izrek.

**Izrek 2.8.** *Naj bosta  $\mathbf{R}(x, y)$  in  $\mathbf{S}(u, v)$  regularni  $C^n$  parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji  $\mathbf{C}(y) = \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u_0, y)$ . Ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  sta vzdolž skupnega roba  $G^n$ -zvezni natanko tedaj, ko obstajajo  $C^n$  funkcije  $\alpha_1(y), \dots, \alpha_n(y)$  in  $\beta_1(y), \dots, \beta_n(y)$ , da velja*

$$\left. \frac{\partial^k \mathbf{R}}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^k \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \dots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \dots \beta_{m_i} \left. \frac{\partial^i \mathbf{S}}{\partial u^h \partial v^{i-h}} \right|_{\mathbf{C}}, \quad (2.4)$$

za  $k = 1, \dots, n$ , kjer je  $A_{m_i}^k = \frac{k!}{i!m_1!\dots m_i!}$ . Veljati mora tudi, da je  $\alpha_1(y) \neq 0$  za  $y \in [0, 1]$  in da ima na  $[0, 1]$  pozitiven predznak, če sta ploskvi enako parametrizirani, oziroma negativen predznak, če sta nasprotno parametrizirani.

**Opomba 2.9.** Ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  sta enako parametrizirani, če velja  $\mathbf{R}(1, y) = \mathbf{S}(0, y)$  ali  $\mathbf{R}(0, y) = \mathbf{S}(1, y)$ . V tem primeru mora biti predznak funkcije  $\alpha_1(y)$  pozitiven. Nasprotno sta parametrizirani, če velja  $\mathbf{R}(0, y) = \mathbf{S}(0, y)$  ali  $\mathbf{R}(1, y) = \mathbf{S}(1, y)$ . V tem primeru mora biti predznak funkcije  $\alpha_1(y)$  negativen. Če bi napačno izbrali predznak funkcije  $\alpha_1(y)$ , bi imeli ploskvi na stiku obliko "špice".

**Opomba 2.10.** Funkcije  $\alpha_1(y), \dots, \alpha_n(y)$  in  $\beta_1(y), \dots, \beta_n(y)$  imenujemo *povezovalne funkcije*

*Dokaz.* Najprej predpostavimo, da obstajajo  $C^n$  funkcije  $\alpha_1(y), \alpha_2(y), \dots, \alpha_n(y)$  in  $\beta_1(y), \beta_2(y), \dots, \beta_n(y)$ , za katere velja enakost (2.4) v izreku, in da je  $\alpha_1(y) \neq 0$ . Dokazati želimo, da od tod sledi  $G^n$ -zveznost stika ploskev  $\mathbf{R}(x, y)$  in  $\mathbf{S}(u, v)$ .

Definirajmo reparametrizacijsko funkcijo  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  na naslednji način:

$$u(x, y) = u_0 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \alpha_i(y) (x - x_0)^i,$$

$$v(x, y) = y + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \beta_i(y) (x - x_0)^i.$$

Ker so po predpostavki funkcije  $\alpha_i$  in  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  razreda  $C^n$ , tudi funkcija  $f$  pripada temu razredu. Opazimo še, da za  $i = 1, \dots, k$  velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y), \quad \frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Če dobljeno vstavimo v enačbo (2.4), dobimo ravno enačbo (2.3), od koder zaradi ujemanja ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  v krivulji  $\mathbf{C}$  sledi tudi enakost (2.2). Pokazati moramo le še, da je  $f$  lokalno regularna.

Vemo, da je reparametrizacijska funkcija  $f$  regularna vzdolž  $\mathbf{C}$ , če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearno neodvisna, torej če velja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0.$$

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  in ju skušajmo zapisati s pomočjo povezovalnih funkcij. Za odvod po spremenljivki  $x$  velja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y) \right) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)).$$

Če razpišemo odvod po spremenljivki  $y$ , pa dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) \right) = (0, 1).$$

Vektorski produkt  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$  je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0, 1) = \alpha_1(y).$$

Vektorski produkt obeh parcialnih odvodov prvega reda je torej različen od 0 natanko tedaj, ko je  $\alpha_1(y) \neq 0$ , kar pa velja po začetni predpostavki. Sledi, da je reparametrizacijska funkcija  $f$  regularna.

Pokazali smo torej, da obstaja lokalno regularna reparametrizacijska funkcija  $f$ , ki ustreza pogoju iz definicije 2.6, od koder sledi, da se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stikata z  $G^n$ -zveznostjo.

Dokažimo izrek še v drugo smer. Če predpostavimo, da sta ploskvi  $R$  in  $S$  na stiku  $G^n$ -zvezni, obstoj funkcij  $\alpha_1(y), \dots, \alpha_n(y)$  in  $\beta_1(y), \dots, \beta_n(y)$  in enačba (2.4) sledjo neposredno iz definicije 2.6 in enačbe (2.3), če definiramo  $\alpha_i(y) = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y)$  in  $\beta_i(y) = \frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y)$  za  $i = 1, \dots, n$ .

Ker je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen, po definiciji 2.6 obstaja lokalno regularna reparametrizacijska funkcija  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , ki ustreza pogoju iz definicije 2.6. Videli smo že, da je funkcija  $f$  regularna natanko tedaj, ko je  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) = \alpha_1(y) \neq 0$ . Torej smo okazali še neničelnost funkcije  $\alpha_1$ , s čimer je dokaz končan.  $\square$

## 2.3 Geometrijska interpretacija $G^1$ -zveznosti

V nadaljevanju se bomo nekoliko natančneje ukvarjali z  $G^1$ -zveznostjo med ploskvami. V tem podpoglavju si oglejmo geometrijsko interpretacijo  $G^1$ -zveznosti, ki bo kasneje služila tudi v praktičnih primerih.



Imejmo regularni  $C^1$  parametrizaciji ploskev  $\mathbf{R}(x, y)$  in  $\mathbf{S}(u, v)$ , ki se v krivulji  $\mathbf{C}(y) = \mathbf{R}(x_0, y) = \mathbf{S}(u_0, y)$  stikata z geometrijsko zveznostjo  $G^1$ . Sledi, da je

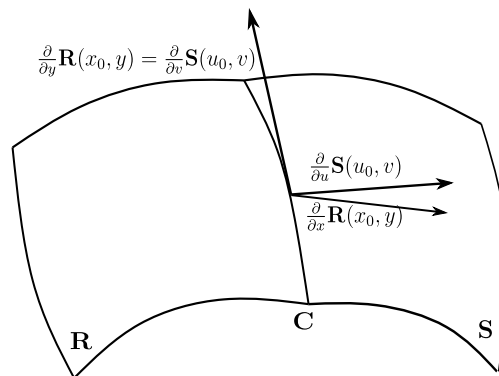
$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R}(x_0, y) = \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y) = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{S}(u_0, v).$$

Kot smo že videli v poglavju 2, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri  $x$ .

Ker je stik obeh ploskev v  $\mathbf{C}$   $G^1$ -zvezen, po izreku 2.8 obstajata funkciji  $\alpha_1$  in  $\beta_1$ , kjer je  $\alpha_1(y) \neq 0$  za vsak  $y$  in ima ustrezen predznak, da velja:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y) = \alpha_1(y)\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y) + \beta_1(y)\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y). \quad (2.5)$$

Enačba 2.5 nam pove, da parcialni odvodi  $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y)$  in  $\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{S}(u_0, v)$  v vsaki točki  $y$  ležijo v isti tangentni ravnini na krivuljo  $\mathbf{C}$ . Tangentna ravnina na ploskev  $\mathbf{R}$  se na krivulji  $\mathbf{C}$  ujema s tangentno ravnino na ploskev  $\mathbf{S}$ , kar pomeni, da se tangentna ravnina zvezno spreminja vzdolž zlepka obeh ploskev. Zato torej  $G^1$ -zveznost imenujemo tudi *zveznost tangentnih ravnin*.



Slika 4: Odvoda ploskev  $\mathbf{R}$  oziroma  $\mathbf{S}$  v  $y$  oziroma  $v$ -smeri sta na robni krivulji enaka, odvoda v  $x$  oziroma  $u$ -smeri pa zgolj koplanarna. Vsi odvodi so del iste tangentne ravnine na krivuljo  $\mathbf{C}$

Še eno ime za  $G^1$ -zveznost je *zveznost enotskih normal*. Oglejmo si, od kod pride to poimenovanje. Znova opazujemo enačbo (2.5). Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z  $\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R}(x_0, y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y) \times \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R}(x_0, y) &= \alpha_1(y)\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y) \times \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R}(x_0, y) + \\ &+ \beta_1(y)\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y) \times \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y). \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je  $\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R}(x_0, y) = \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y)$  in dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y) \times \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R}(x_0, y) = \alpha_1(y)\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y) \times \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y). \quad (2.6)$$

Vektorski produkt  $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y) \times \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R}(x_0, y)$  predstavlja normalo na ploskev  $\mathbf{R}$  v točki  $(x_0, y)$  na krivulji  $\mathbf{C}$ ,  $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y) \times \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y)$  pa normalo na ploskev  $\mathbf{S}$  na krivulji  $\mathbf{C}$ . Enačba (2.6) pove, da sta normali na ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  na njunu skupni krivulji  $\mathbf{C}$  vzporedni in imata enako smer, kar nam zagotovi ustrezno izbran predznak funkcije  $\alpha_1(y)$ . Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normali:

$$\frac{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(x_0, y)}{\|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(x_0, y)\|} = \frac{\alpha_1(y) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u_0, y) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}(u_0, y)}{\|\alpha_1(y) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u_0, y) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}(u_0, y)\|}.$$

Enotska normala se zato zvezno spreminja vzdolž zlepka obeh ploskev, od koder poimenovanje *zveznost enotskih normal*.

Pogoj, da parcialni odvodi  $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y)$  in  $\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y)$  ležijo na isti tangentni ravnini, je možno izraziti tudi na naslednja dva načina. Zgornji parcialni odvodi so del iste tangentne ravnine natanko tedaj ko velja

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y), \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y), \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y)\right) = 0.$$

Ta pogoj pa je ekvivalenten pogoju, da obstajajo skalarne funkcije  $\lambda$ ,  $\mu$  in  $\gamma$ , da velja

$$\lambda(y) \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R}(x_0, y) = \mu(y) \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u_0, y) + \gamma(y) \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}(u_0, y).$$

Če predpostavimo, da sta ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  polinomski, lahko tudi za  $\lambda$ ,  $\mu$  in  $\gamma$  izberemo polinome ali racionalne funkcije, kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

V nadaljevanju tega dela se bomo ukvarjali z vrsto parametričnih ploskev, imenovano Bézierjeve ploskve, in s pogoji, ki morajo veljati zanje, da je stik med njimi geometrijsko zvezen.

## 3 Konstrukcija geometrijsko zveznih Bezierjevih ploskev iz tenzorskega produkta

### 3.1 Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta

Kot osnova za implementacijo krivulj in ploskev se v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju uporabljajo t. i. Bézierjeve krivulje in ploskve, polinomske parametrično podane ploskve, predstavljene v bazi Bernsteinovih baznih polinomov. V tem podpoglavju bo obnovljenih nekaj osnovnih lastnosti in pojmov v zvezi z Bézierjevimi krivuljami in Bézierjevimi ploskvami iz tenzorskega produkta. Poznamo tudi vrsto Bézierjevih ploskev, imenovano trikotne Bézierjeve ploskve, ki bo podrobneje predstavljena v poglavju 5. To podpoglavje se opira predvsem na [7], [4] in [6], kjer je mogoče najti tudi izpeljave enakosti, predstavljenih v nadaljevanju tega podpoglavja.

Za začetek si oglejmo definicijo Bernsteinovih baznih polinomov ter nekaj njihovih ključnih lastnosti.

**Definicija 3.1.** Za  $i = 0, 1, \dots, n$  je  $i$ -ti *Bernsteinov bazni polinom* stopnje  $n$  definiran kot

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1].$$

Za Bernsteinove bazne polinome velja, da je  $B_i^n(0) = 0$  za vse vrednosti  $i$  razen za  $i = 0$ . Podobno je  $B_i^n(1) = 0$  za vse vrednosti  $i$  razen za  $i = n$ . Poleg tega velja še  $B_i^n(t) \geq 0$  za  $t \in [0, 1]$ . Ena izmed lastnosti teh polinomov je še, da tvorijo particijo enote, torej da je  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ . Še en pomemben izrek, ki velja zanje pa je naslednji.

**Izrek 3.2.** *Bernsteinovi bazni polinomi sestavljajo bazo prostora polinomov stopnje največ  $n$  oziroma prostora  $\mathbb{P}_n = \text{Lin}\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ .*

*Dokaz.* Dokaza se lotimo z indukcijo po  $n$ . Za  $n = 0$  izrek očitno velja. Naj bo sedaj  $n = 1$ . Imamo dva Bernsteinova bazna polinoma stopnje 1,  $B_0^1(t) = 1 - t$  in  $B_1^1(t) = t$ . Pokazali bomo, da lahko bazo prostora  $\mathbb{P}_1$ , torej polinoma 1 in  $t$  izrazimo kot linearno kombinacijo polinomov  $B_0^1(t)$  in  $B_1^1(t)$ . Velja  $1 = B_0^1(t) + B_1^1(t)$ , kar pomeni, da lahko vsak element prostora  $\mathbb{P}_1$  izrazimo z  $B_0^1(t)$  in  $B_1^1(t)$ , torej ta dva polinoma tvorita bazo prostora  $\mathbb{P}_1$ .

Sedaj predpostavimo, da izrek velja za stopnjo  $n - 1$ . Pokazali bomo, da potem velja tudi za stopnjo  $n$ . Najprej pokažimo, da so polinomi  $B_i^n(t)$ , kjer je  $i = 0, 1, \dots, n$ , linearno neodvisni. Naj bo

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t) = 0, \quad (3.1)$$

kjer je  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Pokazali bomo, da je to velja natanko tedaj, ko je  $\alpha_i = 0$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ . Najprej v enačbo (3.1) vstavimo  $t = 0$  in dobimo  $\alpha_0 = 0$ . Če vstavimo  $t = 1$  pa dobimo  $\alpha_n = 0$ . Če sedaj odvajamo izraz v (3.1), dobimo  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d}{dt} B_i^n(t) = 0$ . Najprej si posebej oglejmo, kako se izraža odvod Bernsteinovega polinoma. Velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \binom{n}{i} t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1} = \\ &= n \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} = \\ &= n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Torej velja

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= n \sum_{i=0}^n \alpha_i (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) = n \sum_{i=0}^n \alpha_i B_{i-1}^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^{n-1}(t) = \\ &= n \sum_{i=-1}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \alpha_{i+1} - n \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i B_i^{n-1}(t) = \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i^{n-1}(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tu smo v drugi vrstici upoštevali, da je  $B_n^{n-1} \equiv 0$  in v tretji, da je  $B_{-1}^{n-1} \equiv 0$ , ter izvedli premik indeksa.

Izpeljali smo, da je izraz, ki ga dobimo v (3.2) enak 0 natanko tedaj, ko velja  $\alpha_{i+1} - \alpha_i = 0$ , saj so po indukcijski predpostavki polinomi  $B_i^{n-1}(t)$ , kjer je  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , linearano neodvisni. Ker velja  $\alpha_0 = \alpha_n = 0$ , je tudi  $\alpha_i = 0$  za  $i = 1, \dots, n-1$ , s čimer smo pokazali, da so Bernsteinovi bazni polinomi stopnje  $n$  med sabo linearano neodvisni. Ker imamo  $n+1$  Bernsteinovih baznih polinomov stopnje  $n$ , zato tvorijo bazo prostora  $\mathbb{P}_n$ .  $\square$

V bazi iz Bernsteinovih baznih polinomov podajamo Bézierjeve krivulje, ki so definirane na naslednji način.

**Definicija 3.3.** Naj bodo dane točke  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d, i = 0, 1, \dots, n$ . *Bézierova krivulja* je parametrično podana krivulja

$$\mathbf{B}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{B}_n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Točke  $\mathbf{b}_i$  imenujemo *kontrolne točke krivulje*, poligon, ki jih povezuje, pa *kontrolni poligon*.

Pomembna lastnost Bézierjevih krivulj, ki sledi iz lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov, je, da interpolirajo prvo in zadnjo kontrolno točko. Torej velja  $\mathbf{B}_n(0) = \mathbf{b}_0$  in  $\mathbf{B}_n(1) = \mathbf{b}_n$ .

V nekaterih primerih v nadaljevanju bo, da dosežemo ujemanje stopenj Bézierjevih krivulj v enačbah, potrebno zvišati oziroma znižati stopnjo Bézierjeve krivulje, torej opisati oziroma aproksimirati dano krivuljo s krivuljo višje oziroma nižje stopnje. Naj bodo  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  kontrolne točke Bézierjeve krivulje stopnje  $n$ . To krivuljo lahko opišemo s krivuljo stopnje  $n+k$ , kjer je  $k \in \mathbb{N}$ , njene kontrolne točke pa se izražajo na naslednji način:

$$\mathbf{b}_i^{(k)} = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{k}{i-j}}{\binom{n+k}{i}}. \quad (3.3)$$

V nadaljevanju, ko bomo preučevali geometrijsko zveznost Bézierjevih ploskev, bomo imeli opravka predvsem z odvodi Bézierjevih krivulj in ploskev. Imejmo Bézierjevo krivuljo  $\mathbf{B}_n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$  in naj bo  $r \in \mathbb{N}, r \leq n$ . Potem se  $n$ -ti odvod te krivulje izračuna kot

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{B}_n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_i B_i^{n-r}(t).$$

Z  $\Delta$  označujemo operator, ki deluje na kontrolnih točkah in se izraža rekurzivno:

$$\begin{aligned} \Delta^0 \mathbf{b}_i &= \mathbf{b}_i, \\ \Delta^1 \mathbf{b}_i &= \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i, \\ \Delta^k \mathbf{b}_i &= \Delta(\Delta^{k-1} \mathbf{b}_i), \text{ kjer je } k \in \mathbb{N}, k > 1. \end{aligned}$$

Parametrizacije Bézierjevih krivulj so bile podane v bazi prostora  $\mathbb{P}_n$ , sestavljeni iz Bernsteinovih baznih polinomov stopnje  $n$ . Parametrizacije Bézierjevih ploskev pa podajamo v bazi prostora polinomov dveh spremenljivk. Prostor polinomov dveh spremenljivk lahko izberemo na različne načine. Lahko ga konstruiramo kot tenzorski produkt dveh prostorov polinomov ene spremenljivke. Tenzorski produkt prostorov  $\mathbb{P}_m = \text{Lin}\{u^i; i = 0, \dots, m\}$  in  $\mathbb{P}_n = \text{Lin}\{v^j; j = 0, \dots, n\}$  zapišemo kot  $\mathbb{P}_m \otimes \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{m,n} = \text{Lin}\{u^i v^j; i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n\}$ . Vsebuje torej vse polinome, katerih stopnja je v prvi spremenljivki enaka največ  $m$ , v drugi spremenljivki pa največ  $n$ . Bazo tega prostora lahko skonstruiramo kot tenzorski produkt baz prostorov  $\mathbb{P}_m$  in  $\mathbb{P}_n$ . Če sta  $\{B_i^m(u); i = 0, \dots, m\}$  in  $\{B_j^n(v); j = 0, \dots, n\}$  bazi prostorov  $\mathbb{P}_m$  in  $\mathbb{P}_n$ , je torej množica  $\{B_i^m(u)B_j^n(v); i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n\}$  baza prostora  $\mathbb{P}_{m,n}$ .

Alternativna izbira za prostor polinomov dveh spremenljivk je prostor  $\mathbb{P}_n^2 = \text{Lin}\{u^i v^j; 0 \leq i + j \leq n\}$ . Njegovo bazo tvorijo Bernsteinovi polinomi dveh spremenljivk, ki bodo definirani v poglavju 5. Bézierjeve ploskve, podane v bazi prostora  $\mathbb{P}_n^2$ , imenujemo *trikotne Bézierjeve ploskve*. Bézierjeve ploskve, ki jih podajamo v bazi iz tenzorskih produktov, pa pravimo *Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta*. Definirane so na naslednji način.

**Definicija 3.4.** Naj bodo dane točke  $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{B}_{m,n} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{B}_{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke  $\mathbf{b}_{i,j}$  imenujemo *kontrolne točke*, mrežo, ki jih povezuje, pa *kontrolna mreža* ploskve  $\mathbf{B}_{m,n}$ .

**slika**

Opazimo lahko, da za Bézierjevo ploskev iz tenzorskega produkta velja naslednje:  $\mathbf{B}_{m,n}(0, 0) = \mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{B}_{m,n}(1, 0) = \mathbf{b}_{m,0}$ ,  $\mathbf{B}_{m,n}(0, 1) = \mathbf{b}_{0,n}$  in  $\mathbf{B}_{m,n}(1, 1) = \mathbf{b}_{m,n}$ . Parametrizacija torej interpolira vogalne kontrolne točke.

Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta se izraža kot:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{B}_{m,n}(u, v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v), \quad (3.4)$$

Tu z  $\Delta$  ponovno označujemo rekurzivno definirani operator na kontrolnih točkah:

$$\begin{aligned} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}, \\ \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}, \\ \Delta^{r,0} \mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i,j}, \\ \Delta^{0,s} \mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j}. \end{aligned}$$

### 3.2 $C^n$ -zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama iz tenzorskega produkta

Najprej si oglejmo, kakšni pogoji morajo veljati za dve Bézierjevi ploskvi, da je njun stik  $C^n$ -zvezen. Dobljeni rezultat bomo v nadaljevanju primerjali s pogoji za  $G^n$ -zveznost.

Imejmo dve Bézierjevi ploskvi

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{r}_{i,j} B_i^m \left( \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} \right) B_j^n \left( \frac{v - v_0}{v_1 - v_0} \right), \quad u \in [u_0, u_1], v \in [v_0, v_1],$$

in

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{s}_{i,j} B_i^m \left( \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \right) B_j^n \left( \frac{v - v_0}{v_1 - v_0} \right), \quad u \in [u_1, u_2], v \in [v_0, v_1].$$

Ploskvi naj se stikata v krivulji  $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(u_1, v) = \mathbf{S}(u_1, v)$ , torej naj velja  $\mathbf{r}_{0,j} = \mathbf{s}_{0,j}$  za  $j = 0, \dots, n$ . S tem dosežemo  $C^0$ -zveznost. Da se bosta ploskvi stikali s  $C^r$ -zveznostjo, se morajo ujemati njuni odvodi pri  $u = u_1$ . **!?!?** do odvoda stopnje  $r$ . Zaradi stikanja v krivulji  $\mathbf{C}$  je dovolj obravnavati le odvode po spremenljivki  $u$ . Veljati mora

$$\frac{\partial^k}{\partial u^k} \mathbf{R}(u, v)|_{u=u_0} = \frac{\partial^k}{\partial u^k} \mathbf{S}(u, v)|_{u=u_0}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Uporabimo formulo (3.4) za odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(u_0 - u_1)^k} \sum_{i=0}^{m-k} \sum_{j=0}^n \Delta^{k,0} \mathbf{r}_{i,j} B_i^{m-k} \left( \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} \right) B_j^n \left( \frac{v - v_0}{v_1 - v_0} \right) \Big|_{u=u_1} = \\ = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(u_2 - u_1)^k} \sum_{i=0}^{m-k} \sum_{j=0}^n \Delta^{k,0} \mathbf{s}_{i,j} B_i^{m-k} \left( \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \right) B_j^n \left( \frac{v - v_0}{v_1 - v_0} \right) \Big|_{u=u_1}, \end{aligned}$$

$$k = 1, \dots, r.$$

**zamiki** Sledi

$$\frac{1}{(u_0 - u_1)^k} \sum_{j=0}^n \Delta^{k,0} \mathbf{r}_{0,j} B_j^n \left( \frac{v - v_0}{v_1 - v_0} \right) = \frac{1}{(u_2 - u_1)^k} \sum_{j=0}^n \Delta^{k,0} \mathbf{s}_{0,j} B_j^n \left( \frac{v - v_0}{v_1 - v_0} \right),$$

$$k = 1, \dots, r.$$

Za vsak  $j = 1, \dots, n$  primerjajmo koeficiente pred baznim polinomom  $B_j^n \left( \frac{v-v_0}{v_1-v_0} \right)$  in dobimo pogoje, ki morajo veljati med kontrolnimi točkami dveh ploskev, da sta na stiku  $C^r$ -zvezni:

$$\frac{1}{(u_0 - u_1)^k} \Delta^{k,0} \mathbf{r}_{0,j} = \frac{1}{(u_2 - u_1)^k} \sum_{j=0}^n \Delta^{k,0} \mathbf{s}_{0,j}, \quad k = 1, \dots, r. \quad (3.5)$$

### 3.3 $G^n$ -zveznost med dvema Bézierovima ploskvama iz tenzorskega produkta

V tem podpoglavju si bomo ogledali, kako se splošni pogoji za geometrijsko zveznost med dvema ploskvama, ki smo jih izpeljali v poglavju 2, odražajo na Bézierjevih ploskvah iz tenzorskega produkta.

Ker so Bézierjeve ploskve polinomske, se lahko pri izbiri povezovalnih funkcij omejimo na racionalne funkcije, kar močno olajša konstrukcijo v praktičnih primerih. O tem bo govoril izrek, predstavljen v tem podpoglavju.

Imejmo dve polinomski Bézierjevi ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , podani na naslednji način:

$$\mathbf{R}(x, y) = \sum_{i=0}^{m_r} \sum_{j=0}^{n_r} \mathbf{p}_{ij} B_i^{m_r}(x) B_j^{n_r}(y)$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{m_s} \sum_{j=0}^{n_s} \mathbf{p}_{ij} B_i^{m_s}(u) B_j^{n_s}(v),$$

kjer so  $\{\mathbf{p}_{i,j}, i = 1, \dots, m_r, j = 1, \dots, n_r\}$  in  $\{\mathbf{q}_{i,j}, i = 1, \dots, m_s, j = 1, \dots, n_s\}$  kontrolne točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ ,  $x, y, u$  in  $v$  pa parametri z vrednostmi na intervalu  $[0, 1]$ .

Ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  naj se stikata v skupni robni krivulji  $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0, v) = \mathbf{S}(0, v)$  **pojasni, zakaj lahko to predpostavimo. ker lahko parametriziramo? poglej. pojasni še, kako je s tem, da sta ploskvi prav obrnjeni, da ni špice** Robno krivuljo  $\mathbf{C}$  zapišemo kot Bézierjevo krivuljo na naslednji način:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{z}_i B_i^{n_c},$$

kjer so  $\{\mathbf{z}_i, i = 1, \dots, n_c\}$  njene kontrolne točke. Stopnja  $n_c$  krivulje  $\mathbf{C}$  ni nujno enaka stopnjama  $n_r$  ali  $n_s$ , velja pa, da je  $n_c \leq \min(n_r, n_s)$ .

Naj bosta ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  regularni vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$ , torej naj bodo normale na ploskvi vzdolž krivulje  $\mathbf{C}$  neničelne:

$$N_R = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

$$N_S = \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

Oglejmo si dva izreka, ki govorita o pogojih za geometrijsko zveznost teh dveh ploskev. Prvi se bo omejil na pogoje za  $G^1$ -zveznost med ploskvama, drugi pa bo govoril o pogojih za  $G^n$ -zveznost.

**Izrek 3.5.** *Naj bosta  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  zgoraj definirani Bézierjevi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji  $\mathbf{C}$ . Stik ploskev je  $G^1$ -zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi  $D(y)$ ,  $E_1(y)$  in  $F_1(y)$ , da velja*

$$D(y) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, y) = E_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) + F_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y), \quad (3.6)$$

kjer je  $i = 1, \dots, n$ . Velja še  $D(y)E_1(y) \neq 0$  za  $y \in [0, 1]$ , za stopnje polinomov pa velja

$$\deg(D) \leq n_r + n_c - 1,$$

$$\deg(E_1) \leq n_s + n_c - 1,$$

$$\deg(F_1) \leq n_r + n_s.$$

*Dokaz.* Najprej pokažimo, da je pogoj v (3.6) zadosten za  $G^1$ -zveznost med ploskvama  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ . Naj obstajajo polinomi  $D(y)$ ,  $E_1(y)$  in  $F_1(y)$ , ki ustrezajo enačbi (3.6) in ostalim pogojem v izreku. Preoblikujmo enačbo (3.6) tako, da jo delimo z  $D(y)$ . To lahko storimo po predpostavki, da je  $D(y)E_1(y) \neq 0$ , ki zagotavlja neničelnost polinoma  $D(y)$ . Dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, y) = \frac{E_1(y)}{D(y)} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) + \frac{F_1(y)}{D(y)} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y). \quad (3.7)$$

Naj bo

$$\alpha_1(y) = \frac{E_1(y)}{D(y)} \quad \beta_1(y) = \frac{F_1(y)}{D(y)}.$$

Potem ima enačba (3.7) enako obliko kot enačba (2.4) v izreku 2.8, pri  $n = 1$ . Iz izreka 2.8 torej sledi, da se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  na skupnem robu stikata z  $G^1$ -zveznostjo. S tem smo pokazali zadostnost pogoja (3.6) za  $G^1$ -zveznost. Pokažimo še, da je tudi potreben.

Naj se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , definirani kot zgoraj, stikata v robni krivulji  $\mathbf{C}$  z geometrijsko zveznostjo  $G^1$ . Pokazali bomo, da od tod sledi obstoj polinomov  $D$ ,  $E_1$  in  $F_1$  z lastnostmi kot v izreku.

Ker je slik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^1$ -zvezen, po izreku 2.8 obstajata  $C^1$  funkciji  $\alpha_1(y)$  in  $\beta_1(y)$ , ki zadoščata enačbi

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, y) = \alpha_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) + \beta_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y). \quad (3.8)$$

Dobljeno enačbo z desne vektorsko pomnožimo z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}$ . in dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, y) = \alpha_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y). \quad (3.9)$$

V poglavju 2 smo namreč že videli, da je  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, y) = \mathbf{C}'(y)$ .

Enačbo (3.8) sedaj z desne vektorsko množimo še z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$  in dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) = \beta_1(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y). \quad (3.10)$$

Z  $\mathbf{W}(y)$  označimo vektorsko funkcijo  $\mathbf{W}(y) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, y)$ , z  $\mathbf{N}_R$  in  $\mathbf{N}_S$  pa normalo na ploskev  $\mathbf{R}$  oziroma  $\mathbf{S}$  v neki točki na mejni krivulji  $\mathbf{C}$ .

Prej dobljeni enačbi (3.9) in (3.10) torej zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{N}_S(y) = \alpha_1(y) \mathbf{N}_R(y), \quad \mathbf{W}(y) = \beta_1(y) \mathbf{N}_R(y). \quad (3.11)$$

**[C??]** Stopnja  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$  je največ  $n_c - 1$ , saj je  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$ . Enako velja za  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}|_{\mathbf{C}}$ . Stopnja  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}$  je manjša ali enaka  $n_r$ , stopnja  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{\mathbf{C}}$  pa manjša ali enaka  $n_s$ . Od tod in iz definicij funkcij  $\mathbf{N}_R$ ,  $\mathbf{N}_S$  in  $\mathbf{W}$  sledi  $\deg(\mathbf{N}_R) \leq n_r + n_s - 1$ ,  $\deg(\mathbf{N}_S) \leq n_s + n_c - 1$  in  $\deg(\mathbf{W}) \leq n_r + n_s$ .

Videli smo že, da sta zaradi predpostavke o regularnosti ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  funkciji  $\mathbf{N}_R(y)$  in  $\mathbf{N}_S(y)$  za vsak  $y \in [0, 1]$  različni od 0. Ker je  $\mathbf{N}_R(y)$  neničelna, mora



biti vsaj ena izmed njenih koordinatnih funkcij neničeln polinom. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je neničelna  $x$ -koordinata, torej polinom  $N_{R,1}(y)$ . Če enačbi iz (3.11) razpišemo po koordinatah, za  $x$ -koordinato dobimo

$$N_{S,1}(y) = \alpha_1(y)N_{R,1}(y), \quad W_1(y) = \beta_1(y)N_{R,1}(y),$$

kjer je  $N_{S,1}$   $x$ -koordinata funkcije  $\mathbf{N}_S$ ,  $W_1$  pa  $x$ -koordinata funkcije  $\mathbf{W}$ .

Iz zgornjih enačb lahko vidimo, da so vse realne ničle polinoma  $N_{R,1}(y)$  na intervalu  $[0, 1]$  tudi ničle polinomov  $N_{S,1}(y)$  in  $W_1(y)$ , torej da polinom  $U(y)$ , ki je zgrajen kot produkt vseh linearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma  $N_{R,1}(y)$ , deli polinoma  $N_{S,1}(y)$  in  $W_1(y)$ . Da to res drži, lahko vidimo na naslednji način. Zapišimo  $N_{R,1}(y) = U(y)D(y)$ , kjer je  $U(y)$  produkt vseh linearnih faktorjev,  $D(y)$  pa produkt vseh nelinearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma  $N_{R,1}(y)$ . Predpostavimo, da  $U(y)$  ne deli polinoma  $N_{S,1}(y)$ . Ker je  $N_{S,1}(y) = \alpha_1(y)U(y)D(y)$ , je to mogoče le, če je  $\alpha_1(y)$  racionalna funkcija, katere imenovalce deli polinom  $U(y)$ . Funkcija  $\alpha_1(y)$  ima torej na intervalu  $[0, 1]$  pol. Ker velja  $\mathbf{N}_S(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_R(y)$  in so vse koordinatne funkcije funkcij  $\mathbf{N}_S(y)$  in  $\mathbf{N}_R(y)$  polinomi, mora veljati, da imenovalce funkcije  $\alpha_1(y)$  deli  $N_{R,1}(y)$ ,  $N_{R,2}(y)$  in  $N_{R,3}(y)$ . Funkcija  $\alpha_1(y)$  ima pol, označimo ga z  $y_0$ . Sledi, da je  $y_0$  ničla polinomov  $N_{R,1}(y)$ ,  $N_{R,2}(y)$  in  $N_{R,3}(y)$ , in zato je  $\mathbf{N}_R(y_0) = 0$ , kar pa je v nasprotju s predpostavko o regularnosti ploskve  $\mathbf{R}$ . Torej mora polinom  $U(y)$  deliti polinom  $N_{S,1}(y)$ . Z enakimi sklepi trditev pokažemo še za polinom  $W_1(y)$ .

Polinom  $N_{R,1}$  sedaj znova zapišimo kot produkt  $N_{R,1}(y) = U(y)D(y)$ , kjer sta polinoma  $U(y)$  in  $D(y)$  definirana kot zgoraj. Torej velja

$$N_{S,1}(y) = U(y)\alpha_1(y)D(y), \quad W_1(y) = U(y)\beta_1(y)D(y).$$

Naj bo  $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$  in  $F_1(y) = \beta_1(y)D(y)$ . Pokazati moramo, da sta dobljeni funkciji  $E_1$  in  $F_1$  polinoma. Ker sta funkciji  $N_{S,1}(y)$  in  $W_1(y)$  polinoma, morata imenovalca funkcij  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  deliti ali polinom  $U$  ali polinom  $D$ . Videli smo že, da  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  nimata polov na intervalu  $[0, 1]$ , torej njuna imenovalca ne delita polinoma  $U$ . Sledi, da morata njuna imenovalca deliti polinom  $D$ , s čimer smo pokazali, da sta  $E_1$  in  $F_1$  res polinoma.

Videti želimo še, da je  $D(y)E_1(y) \neq 0$  na intervalu  $[0, 1]$ . Polinom  $D(y)$  po definiciji vsebuje vse nelinearne faktorje v polinomskem razcepu polinoma  $N_{rx}(y)$ , torej na intervalu  $[0, 1]$  nima ničel. Polinom  $E_1(y)$  je enak  $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$ . Ker je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen, funkcija  $\alpha_1(y)$  po izreku 2.8 na intervalu  $[0, 1]$  ni enaka nič, zato tudi  $E_1(y)$  na tem intervalu nima ničel.

Oglejmo si še stopnje polinomov  $D(y)$ ,  $E_1(y)$  in  $F_1(y)$ . Očitno velja

$$\begin{aligned} \deg(D(y)) &\leq \deg(N_{rx}(y)) \leq \deg(\mathbf{N}_r(v)) \leq n_r + n_c - 1 \\ \deg(E_1(y)) &\leq \deg(N_{sx}(y)) \leq \deg(\mathbf{N}_s(v)) \leq n_s + n_c - 1 \\ \deg(F_1(y)) &\leq \deg(W_x(y)) \leq st(\mathbf{W}(v)) \leq n_r + n_s, \end{aligned}$$

s čimer dokažemo izrek. □

Sedaj si oglejmo še posplošitev izreka 3.5, torej izrek ki govori o pogojih za  $G^n$ -zveznost med ploskvama, kjer je  $n \geq 2$ .

**Izrek 3.6.** Naj bosta  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  zgoraj definirani Bézierjevi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji  $\mathbf{C}$ . Stik ploskev je  $G^n$ -zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi  $D(y)$ ,  $E_i(y)$  in  $F_i(y)$ , da velja

$$D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}(0, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0, y), \quad (3.12)$$

kjer je  $i = 1, \dots, n$  in  $k = 1, \dots, n$ . Za  $A_{\mathbf{m}_i}^k$  zopet označujemo  $A_{\mathbf{m}_i}^k = \frac{k!}{i!m_1! \cdots m_i!}$  in  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ . Velja še  $D(y)E_1(y) \neq 0$  za  $y \in [0, 1]$ , za stopnje polinomov pa velja

$$\begin{aligned} \deg(D) &\leq n_r + n_c - 1, \\ \deg(E_i) &\leq (2i - 2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1, \\ \deg(F_i) &\leq (2i - 1)n_r + in_s + (i - 1)n_c - 2i + 2. \end{aligned}$$

*Dokaz.* Prvega dela dokaza se lotimo podobno kot v dokazu izreka 3.5. Najprej predpostavimo, da obstajajo polinomi  $D$ ,  $E_i$  in  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ki ustrezajo enačbi (3.12) in ostalim pogojem v izreku. Pokazati hočemo, da od tod sledi geometrijska zveznost ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ . V ta namen bomo uporabili izrek 2.8.

Preoblikujmo enačbo (3.12). Predpostavka, da je  $D(y)E_1(y) \neq 0$  na  $[0, 1]$ , zagotavlja neničelnost polinoma  $D$  na  $[0, 1]$ , zato lahko celotno enačbo (3.12) delimo z  $D^{2k-1}(y)$  in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}(0, y) &= \sum_{i=0}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-2k}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\quad \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0, y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Funkcijo  $D^{2k-i}$  lahko zapišemo kot produkt  $D^{2k-i}(y) = D^{2m_1-1}(y) D^{2m_2-1}(y) \cdots D^{2m_h-1}(y) D^{2m_{h+1}}(y) \cdots D^{2m_i-1}(y)$ , saj je  $|\mathbf{m}_i| = k$ . Dobljeno vstavimo v enačbo (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}(0, y) &= \sum_{i=0}^k \sum_{|\mathbf{m}_i|=k} A_{\mathbf{m}_i}^k \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(v)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\quad \cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0, y). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Definirajmo

$$\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)} \text{ in } \beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potem enačba (3.14) dobi enako obliko kot enačba (2.4) v izreku 2.8. Iz izreka 2.8 torej sledi, da se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stikata z geometrijsko zveznostjo  $G^n$ . S tem smo dokazali, da je pogoj (3.12) zadosten za  $G^n$ -zveznost na stiku ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ .

Sedaj dokažimo še, da je pogoj (3.12) tudi potreben. Predpostavimo, da se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , definirani kot zgoraj, stikata v robni krivulji  $\mathbf{C}$  z geometrijsko zveznostjo  $G^n$ . Pokazati hočemo, da od tod sledi obstoj polinomov  $D$ ,  $E_i$  in  $F_i$  z lastnostmi kot v izreku. Dokaza se lotimo z indukcijo po  $k$ . Za  $k = 1$  smo izrek že dokazali v dokazu izreka 3.5. Preostane nam se še dokaz za  $k > 1$ .

Prepodstavimo, da izrek velja za vse  $k \leq m$ , kjer je  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ . Torej obstajajo polinomi  $D(y)$ ,  $E_1(y), \dots, E_m(y)$ ,  $F_1(y), \dots, F_m(y)$  z ustreznimi stopnjami, da velja enačba (3.12) za  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Izhajamo iz predpostavke, da je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^n$ -zvezen. Iz izreka 2.8 sledi, da obstajajo funkcije  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$  in  $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ , da velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}(0, v) &= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \alpha_{m_1}(v) \cdots \alpha_{m_h}(v) \cdot \\ &\quad \cdot \beta_{m_{h+1}}(v) \beta_{m_i}(v) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0, v) = \\ &= \alpha_{m+1}(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) + \beta_{m+1}(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \alpha_{m_1}(v) \cdots \alpha_{m_h}(v) \cdot \\ &\quad \cdot \beta_{m_{h+1}}(v) \cdots \beta_{m_i}(v) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0, v). \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je  $\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$  in  $\beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$  za  $i = 1, \dots, m$ . Uporabimo to v zgornji enačbi in dobimo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}} \right|_{\mathbf{C}} &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}} + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(y)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\quad \cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} = \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \Big|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \Big|_{\mathbf{C}} + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-2}(y) D^{-2m} E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\quad \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

saj je  $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = m + 1$  in zato je

$$D^{-2m_1+1}(y) D^{-2m_2+1}(y) \cdots D^{-2m_i+1}(y) = D^{-2(m+1)}(y) D^i(y).$$

Sedaj definirajmo vektorsko polinomske funkcijo  $\mathbf{S}_{m+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{m+1}(y) = & D^{2m}(y) \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}(0, y) - \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} D^{i-1}(y) \cdot \\ & \cdot E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}(0, y). \end{aligned}$$

Če enačbo (3.15) pomnožimo z  $D^{2m}(y)$  in jo nekoliko preoblikujemo, dobimo

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m}(y) \alpha_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) + D^{2m}(y) \beta_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y). \quad (3.16)$$

Na dobljeni enačbi sedaj uporabimo podoben postopek, kot smo ga uporabili pri dokazu za  $k = 1$ . Enačbo (3.16) z leve vektorsko množimo z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y)$  in dobimo

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) \times \mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m}(y) \beta_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y).$$

Če pa enačbo (3.16) z desne pomnožimo z  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y)$ , dobimo

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) = D^{2m}(y) \alpha_{m+1}(y) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y).$$

Označimo

$$\overline{\mathbf{W}}(y) = \mathbf{S}_{m+1}(y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y) \quad (3.17)$$

in

$$\overline{\overline{\mathbf{W}}}(y) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) \times \mathbf{S}_{m+1}(y) \quad (3.18)$$

ter kakor prej  $N_R = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}(0, y) \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}(0, y)$ . Kot v primeru za  $k = 1$ , spet lahko predpostavimo, da je polinom  $N_{R,1}(y)$  neničeln in ga zapišemo kot  $N_{R,1}(y) = U(y)D(y)$ . Velja  $\overline{W}_1 = D^{2m+1}(y)U(y)\alpha_{m+1}(y)$  in  $\overline{\overline{W}}_1 = D^{2m+1}(y)U(y)\beta_{m+1}(y)$  in enaki argumenti kot v primeru za  $k = 1$  nas pripeljejo do razultatata, da sta

$$E_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\alpha_{m+1}(y), \quad F_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\beta_{m+1}(y)$$

res polinoma.

Pokazati moramo še, da je  $\deg(E_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1$  in  $\deg(F_{m+1}) \leq (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m$ . Tega se lotimo tako, da si najprej ogledamo stopnjo  $\mathbf{S}_{m+1}$ .

Očitno je

$$\begin{aligned} \deg \left( D^{2m}(y) \frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}} \Big|_{\mathbf{C}} \right) & \leq 2m(n_r + n_c - 1) + n_s \\ & \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m, \end{aligned}$$

kjer v prvi neenakosti uporabimo dejstvo, da je  $\deg(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$  in  $\deg(\frac{\partial^{m+1} \mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) \leq n_s$ , v drugi neenakosti pa, da je  $n_c \leq n_s$ .

Oglejmo si še, kakšna je

$$\deg \left( D^{i-1} E_{m_1} \cdots E_{m_h} F_{m_{h+1}} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \right).$$

Najprej si jo oglejmo za  $h = 0$ :

$$\begin{aligned} \deg \left( D^{i-2} F_{m_1} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i} \Big|_{\mathbf{C}} \right) &\leq \\ &\leq (i-2)\deg(D) + \sum_{j=1}^i \deg(F_{m_j}) + \deg \left( \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i} \Big|_{\mathbf{C}} \right) \end{aligned}$$

Vemo, da je  $\deg(D) \leq n_r + n_c - 1$  in  $\deg(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i} |_{\mathbf{C}}) \leq n_c - i$ , po indukcijski predpostavki pa velja še

$$\begin{aligned} \deg(E_i) &\leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1, \\ \deg(F_i) &\leq (2i-1)n_r + in_s + (i-1)n_c - 2i + 2, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} \deg \left( D^{i-2} F_{m_1} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i} \Big|_{\mathbf{C}} \right) &\leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + \\ &+ \sum_{j=1}^i ((2m_j - 1)n_r + m_j n_s + (m_j - 1)n_c - 2m_j + 2) + (n_c - i) = \\ &= (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2(m+1)n_r - in_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - in_c - \\ &- 2(m+1) + 2i + n_c - i = \\ &= 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - in_r \leq \\ &\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m. \end{aligned}$$

Tu smo uporabili, da je  $\sum_{j=1}^i m_j = m + 1$ .

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je  $h > 1$ .

$$\begin{aligned} \deg \left( D^{i-2} E_{m_1} \cdots E_{m_h} F_{m_{h+1}} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \right) &\leq \\ &\leq (i-2)\deg(D) + \sum_{j=1}^h \deg(E_{m_j}) + \sum_{j=h+1}^i \deg(F_{m_j}) + \\ &+ \deg \left( \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \right). \end{aligned}$$

Zopet uporabimo indukcijsko predpostavko za stopnje polinomov  $E_i$  in  $F_i$ , kjer je

$i = 1, \dots, m$ , ter dejstvo, da je  $\deg \left( \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \right) = n_r - i + h$ , in dobimo

$$\begin{aligned}
& \deg \left( D^{i-2} E_{m_1} \cdots E_{m_h} F_{m_{h+1}} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
& \leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r \sum_{j=1}^h m_j - 2n_r h + n_s \sum_{j=1}^h m_j + n_c \sum_{j=1}^h m_j - \\
& - 2 \sum_{j=1}^h m_j + h + 2n_r \sum_{j=h+1}^i m_j - (i-h)n_r + n_s \sum_{j=h+1}^i m_j + n_c \sum_{j=h+1}^i m_j - (i-h)n_c - \\
& - 2 \sum_{j=h+1}^i + 2(i-h) + n_r - i + h = \\
& = (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
& - 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h.
\end{aligned}$$

V zadnji enakosti smo uprabili, da je  $\sum_{j=1}^i m_j = m+1$ . Nadaljujmo z računom:

$$\begin{aligned}
& \deg \left( D^{i-2} E_{m_1} \cdots E_{m_h} F_{m_{h+1}} \cdots F_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}} \Big|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
& \leq (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
& - 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h \leq \\
& \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - n_r h + n_c h - n_c + n_r = \\
& = 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m + (h-1)(n_c - n_r) \leq \\
& \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

V zadnji neenakosti smo uporabili, da je  $n_c \leq n_r$ , torej je  $n_c - n_r \leq 0$ . S tem smo torej pokazali, da je

$$\deg(\mathbf{S}_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m.$$

Iz enačbe (3.17) in definicije polinoma  $E_{m+1}$  je razvidno naslednje:

$$\begin{aligned}
& \deg(E_{m+1}) \leq \deg(\overline{W}_1) \leq \deg(\overline{\mathbf{W}}) \leq \deg(\mathbf{S}_{m+1}) + \deg \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
& \leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + (n_c - 1) = \\
& = 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo iz enačbe (3.18) in definicije polinoma  $F_{m+1}$  oceno za stopnjo polinoma  $F_{m+1}$ :

$$\begin{aligned}
& \deg(F_{m+1}) \leq \deg(\overline{\overline{W}}_1) \leq \deg(\overline{\overline{\mathbf{W}}}) \leq \deg(\mathbf{S}_{m+1}) + \deg \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \Big|_{\mathbf{C}} \right) \leq \\
& \leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + n_r = \\
& = (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}$$

S tem smo dokazali izrek še za  $k > 1$ . □

## 4 Primeri konstrukcij geometrijsko zveznih ploskev iz tenzorskega produkta

nek uvod, navezava na prejšnje poglavje

### 4.1 Konstrukcija $G^1$ -zveznih Bézierjevih ploskev iz tenzorskega produkta

V tem podpoglavju si bomo ogledali, kako na različne načine konstruirati ploskvi, ki sta na stiku  $G^1$ -zvezni, torej kakšne pogoje prinesejo različni načini konstrukcije na njune kontrolne točke. Pri tem bomo predpostavljali, da so robovi obeh ploskev vnaprej določeni. Pogoje, ki jih prinese zahteva  $G^1$ -zveznosti bomo primerjali s  $C^1$ -zveznostjo.

Imejmo dve bi-kubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

kjer velja  $u, v \in [0, 1]$ .

Naj se ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stikata v  $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0, v) = \mathbf{S}(1, v)$ , torej naj velja

$$\mathbf{C}(v) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{Z}_i B_i^3(v),$$

kjer so  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{P}_{0,i} = \mathbf{Q}_{3,i}$  kontrolne točke krivulje  $\mathbf{C}$ .

Predpostavili bomo, da so robne krivulje ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  že določene na tak način, da bomo imeli na robu zahtevano zveznost. Robne kontrolne točke naj bodo torej že vnaprej določene. Zanimalo nas bo, kakšne zveze v teh primerih veljajo za notranje kontrolne točke, torej za  $\mathbf{P}_{1,1}$ ,  $\mathbf{P}_{1,2}$ ,  $\mathbf{Q}_{2,1}$  in  $\mathbf{Q}_{2,2}$ , da bo stik ploskev  $G^1$ -zvezen. V nadaljevanju bomo uporabljali še naslednje oznake za kontrolne vektorje obeh ploskev in robne krivulje:  $\mathbf{p}_{1,j} = \mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}$ ,  $\mathbf{q}_{1,j} = \mathbf{Q}_{3,j} - \mathbf{Q}_{2,j}$  in  $\mathbf{z}_i = \mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i$ .

Najprej si oglejmo, kakšne pogoje in omejitve nam da zahteva  $C^1$ -zveznosti na stiku dveh ploskev. To bomo nato primerjali s pogoji, ki nam jih da  $G^1$ -zveznost.

**Primer 4.1.** Domena ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  je kvadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Da lahko obravnavamo  $C^1$ -zveznost stika ploskev, moramo najprej reparametrizirati ploskev  $\mathbf{R}$  tako, da bo njena domena  $[1, 2] \times [0, 1]$  in bosta obe domeni skupaj po stiku tvorili pravokotnik  $[0, 2] \times [0, 1]$ . Da to dosežemo, moramo ploskev  $\mathbf{R}$  zapisati na naslednji način:

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u-1) B_j^3(v),$$

kjer je  $u \in [1, 2]$  in  $v \in [0, 1]$ .

Da je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $C^0$ -zvezen, se morata krivulji ujemati v kontrolnih točkah, ki določajo stično krivuljo:  $\mathbf{P}_{0,j} = \mathbf{Q}_{3,j}$  za  $j = 0, \dots, 3$ . V podpoglavju 3.2 smo videli, da se morata za dosego  $C^1$ -zveznosti poleg tega ujemati še odvoda obeh ploskev v  $u$ -smerni v robnih točkah:  $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}(0, v) = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(1, v)$ .

Če razpišemo oba parcialna odvoda oziroma se sklicujemo na enakost (3.5), dobimo naslednje pogoje za  $C^1$ -zveznost med ploskvama:

$$(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) = \mathbf{Q}_{3,j} - \mathbf{Q}_{2,j}$$

oziroma

$$\mathbf{p}_{1,j} = \mathbf{q}_{1,j}$$

za  $j = 0, \dots, 3$ .

Vidimo torej, da morata biti za dosego  $C^1$ -zveznosti zleпка ploskev vektorja  $\mathbf{p}_{1,j}$  in  $\mathbf{q}_{1,j}$  kolinearna za vsak  $j = 0, \dots, 3$ , poleg tega pa morata biti njuni dolžini v razmerju, ki ga določata parametrizaciji obeh ploskev. Kar se tiče oblike ploskve, ki jo na ta način lahko konstruiramo kot zlepek ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , torej nimamo ravno veliko izbire. Nekoliko več svobode imamo le pri izbiri notranjih kontrolnih točk. Kontrolni točki  $\mathbf{Q}_{2,1}$  in  $\mathbf{Q}_{2,2}$  sta točno določeni z izbiro kontrolnih točk  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$ , medtem ko sta  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$  prosti. Ker zahtevamo zgolj zveznost stopnje 1, so proste tudi kontrolne točke  $\mathbf{Q}_{1,1}$ ,  $\mathbf{Q}_{1,2}$ ,  $\mathbf{P}_{2,1}$  in  $\mathbf{P}_{2,2}$ .

Sedaj si oglejmo nekaj primerov konstrukcij  $G^1$ -zveznih ploskev in jih primerjajmo z rezultatom, dobljenim v primeru 4.1. Izrek 2.8 pravi, da je stik obeh ploskev  $G^1$ -zvezen, natanko tedaj ko obstajata  $C^1$  funkciji  $\alpha_1(v)$  in  $\beta_1(v)$ , da velja

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(1, v) = \alpha_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) + \beta_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v), \quad (4.1)$$

kjer je  $\alpha_1(v) \neq 0$  na intervalu  $[0, 1]$  in ima ustrezen predznak, v tem primeru mora biti predznak pozitiven. V našem primeru gre za polinomske ploskve, zato lahko uporabimo izrek 3.6, ki pove, da to velja natanko tedaj, ko obstajajo polinomi  $D(v)$ ,  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$ , kjer sta polinoma  $D$  in  $E_1$  stopnje največ 5, polinom  $F_1$  pa stopnje največ 6, da velja  $D(v)E_1(v) \neq 0$  na  $[0, 1]$  ter

$$D(v) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(1, v) = E_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) + F_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v). \quad (4.2)$$

Razpišimo prve odvode parametrizacij ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(1, v) = 3 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j}) B_i^2(1) B_j^3(v) = 3 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{3,j} - \mathbf{Q}_{2,j}) B_j^3(v),$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) = 3 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) B_i^2(0) B_j^3(v) = 3 \sum_{j=0}^3 (\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^3(v),$$

in

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) = 3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 (\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) B_i^2(0) B_j^3(v) = 3 \sum_{j=0}^2 (\mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^2(v).$$



Dobljeno vstavimo v enačbo (4.2). Vidimo, da mora veljati:

$$\begin{aligned} D(v) \sum_{j=0}^3 (\mathbf{Q}_{3,j} - \mathbf{Q}_{2,j}) B_j^3(v) &= \\ &= E_1(v) \sum_{j=0}^3 (\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^3(v) + F_1(v) \sum_{j=0}^2 (\mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^2(v). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Najprej si oglejmo, kakšni pogoji v primeru  $G^1$  zveznosti veljajo za robne kontrolne točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ . V enačbo (4.3) vstavimo vrednosti  $v = 0$  in  $v = 1$ . Naj bo  $d_0 = D(0)$ ,  $e_0 = E_1(0)$  in  $f_0 = F_1(0)$  ter  $d_1 = D(1)$ ,  $e_1 = E_1(1)$  in  $f_1 = F_1(1)$ . Pri vrednosti  $v = 0$  dobimo

$$d_0(\mathbf{Q}_{3,0} - \mathbf{Q}_{2,0}) = e_0(\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}) + f_0(\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}),$$

oziroma

$$d_0 \mathbf{q}_{1,0} = e_0 \mathbf{p}_{1,0} + f_0 \mathbf{z}_0. \quad (4.4)$$

Pri vrednosti  $v = 1$  pa dobimo

$$d_1(\mathbf{Q}_{3,3} - \mathbf{Q}_{2,3}) = e_1(\mathbf{P}_{1,3} - \mathbf{P}_{0,3}) + f_1(\mathbf{P}_{0,3} - \mathbf{P}_{0,2}),$$

oziroma

$$d_1 \mathbf{q}_{1,3} = e_1 \mathbf{p}_{1,3} + f_1 \mathbf{z}_2. \quad (4.5)$$

Pogoji, ki veljajo za robne kontrolne točke, so enaki neglede na način konstrukcije  $G^1$ -zveznega zlepk ploskev. Pogoji, ki veljajo za notranje kontrolne točke, število svobodnih parametrov, ki določajo obliko dobljene ploskve, in število prostih kontrolnih točk, pa so odvisni od izbire načina konstrukcije, natančneje, od izbire stopnje koeficientnih polinomskih funkcij in stopnje odvodov parametrizacij ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ .

Izbira stopenj koeficientnih funkcij ni povsem poljubna, temveč je odvisna od stopnje geometrijske zveznosti, ki jo zahtevamo, pa tudi od stopenj odvodov  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(1, v)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v)$  in  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v)$  oziroma  $\mathbf{C}'(v)$ .

V praksi se običajno uporabljajo koeficientne funkcije čim nižje stopnje, saj s tem dobimo manj pogojev za kontrolne točke. V primeru, da sta funkciji  $D(v)$  in  $E(v)$  konstantni, funkcija  $F(v)$  pa kvečjemu linearna, dobimo pogoje le za dve notranji kontrolni točki, vse ostale pa so proste, podobno kot v primeru  $C^1$ -zveznosti (primer 4.1). Če za koeficientne funkcije izberemo polinome višjih stopenj, se lahko zgodi, da dobimo pogoje za tri ali štiri kontrolne točke.

Najprej si oglejmo situacijo, v kateri za koeficientne funkcije izberemo polinome minimalne stopnje.

**Primer 4.2.** Da zagotovimo  $G^1$ -zveznost na stiku ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ , mora poleg pogoja, da se ploskvi stikata v robni krivulji, veljati enakost (4.3), oziroma

$$D(v) \sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_{1,j} B_j^3(v) = E_1(v) \sum_{j=0}^3 \mathbf{p}_{1,j} B_j^3(v) + F_1(v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j B_j^2(v). \quad (4.6)$$

Ker je stopnja krivulj  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(1, v)$  in  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v)$  enaka 3, stopnja krivulje  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v)$  pa 2 in če njihovih stopenj ne nižamo oziroma višamo, bodo stopnje polinomov  $D(v)$ ,  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$  minimalne, če bosta  $D(v)$  in  $E_1(v)$  konstantna polinoma,  $F_1(v)$  pa linearen. V tem primeru namreč obe strani enačbe predstavljata Bézierjevo krivuljo stopnje 3.

Brez škode za splošnost lahko izberemo, da je  $D(v) \equiv 1$ . Potem je  $E_1(v) \equiv e_0 = e_1$ . Ker predpostavimo, da je  $F_1(v)$  linearen in da velja  $F_1(0) = f_0$  ter  $F_1(1) = f_1$ , mora za  $F_1$  veljati

$$F_1(v) = f_0(1 - v) + f_1v.$$

Vstavimo polinome  $D$ ,  $E_1$  in  $F_1$  v enačbo (4.8) in dobimo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_{1,j} B_j^3(v) &= e_0 \sum_{j=0}^3 \mathbf{p}_{1,j} B_j^3(v) + (f_0(1 - v) + f_1v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j B_j^2(v) = \\ &= e_0 \sum_{j=0}^3 \mathbf{p}_{1,j} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j f_1 \binom{2}{j} v^{j+1} (1 - v)^{2-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 e_0 \mathbf{p}_{1,j} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + \sum_{j=1}^3 f_1 \mathbf{z}_{j-1} \binom{2}{j-1} v^j (1 - v)^{3-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 e_0 \mathbf{p}_{1,j} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 f_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3} \binom{3}{j} v^j (1 - v)^{3-j} + \sum_{j=1}^3 f_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} \binom{3}{j} v^3 (1 - v)^{3-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 e_0 \mathbf{p}_{1,j} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 f_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3} B_j^3(v) + \sum_{j=0}^3 f_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v) \end{aligned}$$

V tretji vrstici zgornjega računa smo uporabili dejstvo, da je v vsoti

$$\sum_{j=0}^3 \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j}$$

člen pri  $j = 3$  enak 0 in je zato

$$\sum_{j=0}^2 \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j} = \sum_{j=0}^3 \mathbf{z}_j f_0 \binom{2}{j} v^j (1 - v)^{3-j}.$$

Podobno smo v zadnji vrstici upoštevali, da je v vsoti

$$\sum_{j=0}^3 b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v)$$

člen pri  $j = 0$  enak 0 in je zato

$$\sum_{j=1}^3 f_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} \binom{3}{j} v^3 (1 - v)^{3-j} = \sum_{j=0}^3 b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} B_j^3(v).$$

Od tod dobimo pogoje za kontrolna vektorja  $\mathbf{q}_{2,1}$  in  $\mathbf{q}_{2,2}$ :

$$\mathbf{q}_{1,1} = e_0 \mathbf{p}_{1,1} + \frac{1}{3} f_1 \mathbf{z}_0 + \frac{2}{3} f_0 \mathbf{z}_1, \quad \mathbf{q}_{1,2} = e_0 \mathbf{p}_{1,2} + \frac{2}{3} f_1 \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3} f_0 \mathbf{z}_2.$$

Najprej opazimo, da za razliko od primera 4.1, tu ni več potrebe po kolinearnosti vektorjev  $\mathbf{q}_{1,1}$  in  $\mathbf{p}_{1,1}$  oziroma vektorjev  $\mathbf{q}_{1,2}$  in  $\mathbf{p}_{1,2}$ , zahtevamo le še koplanarnost. Ena izmed omejitev, ki veljajo za parametre  $e_0$ ,  $f_0$  in  $f_1$ , je, da mora biti  $e_0 > 0$ , saj bi imel v nasprotnem primeru stik ploskev obliko špice. Parametri so določeni z enačbama (4.4) in (4.5) na naslednji način. Zapišimo enačbo (4.4) kot

$$\mathbf{q}_{1,0} = e_1 \mathbf{p}_{1,0} + f_1 \mathbf{z}_0 + g \mathbf{n},$$

kjer  $\mathbf{n}$  označuje normalo na ravnino, ki jo določajo vektorji  $\mathbf{q}_{1,0}$ ,  $\mathbf{p}_{1,0}$  in  $\mathbf{z}_0$ , v točki  $\mathbf{P}_{0,0}$ . Matrika  $[\mathbf{p}_{1,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]$  je nesingularna, saj sta vektorja  $\mathbf{p}_{1,0}$  in  $\mathbf{z}_0$  nekolinearna in pravokotna na  $\mathbf{n}$ , zato je mogoče na enoličen način izraziti neznanke  $e_1$ ,  $f_1$  in  $g$ . Ker je vektor  $\mathbf{q}_{0,0}$  del iste ravnine kot  $\mathbf{p}_{1,0}$  in  $\mathbf{z}_0$ , mora biti  $g = 0$ , vrednosti  $e_0$  in  $f_0$  pa izračunamo s pomočjo Cramerjevih formul:

$$e_0 = \frac{\det[\mathbf{q}_{1,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{1,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]}, \quad f_0 = \frac{\det[\mathbf{p}_{1,0}, \mathbf{q}_{3,0}, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{1,0}, \mathbf{z}_0, \mathbf{n}]}.$$

Na enak način iz enačbe (4.5) dobimo še parametra  $e_1$  in  $f_1$

$$e_1 = \frac{\det[\mathbf{q}_{1,3}, \mathbf{z}_2, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{1,3}, \mathbf{z}_2, \mathbf{n}]}, \quad f_1 = \frac{\det[\mathbf{p}_{1,3}, \mathbf{q}_{2,3}, \mathbf{n}]}{\det[\mathbf{p}_{1,3}, \mathbf{z}_2, \mathbf{n}]}.$$

Če bi imeli robne krivulje ploskev izbrane na tak način, da bi veljalo  $e_0 = 1$ ,  $f_0 = 0$  in  $f_1 = 0$ , bi dobili enak rezultat kot v primeru 4.1, v katerem smo iskali pogoje za  $C^1$ -zveznost. Z drugačno izbiro robnih krivulj in posledično drugačnimi vrednostmi parametrov pa lahko dosežemo poljuben kot med vektorjema  $\mathbf{q}_{1,1}$  in  $\mathbf{p}_{1,1}$ , biti morata samo del iste ravnine. Vidimo torej, da je zahteva  $G^1$ -zveznosti kar se tiče oblike dobljenega zlepka ploskev prinese veliko več možnosti kot zahteva  $C^1$ -zveznosti.

V danem primeru, kjer so stopnje koeficientnih polinomov minimalne, je tudi število prostih kontrolnih točk enako kakor v primeru  $C^1$ -zveznosti. Kontrolni točki  $\mathbf{Q}_{2,1}$  in  $\mathbf{Q}_{2,2}$  sta točno določeni z izbiro točk  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$ , z robnimi kontrolnimi točkami ter izbiro parametrov  $e_0$ ,  $f_0$  in  $f_1$ , kontrolni točki  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$  pa sta prosti. Enako velja za vse ostale notranje kontrolne točke.

**Primer 4.3.** Oglejmo si še nekoliko drugačen primer konstrukcije  $G^1$ -zveznih zlepkov dveh ploskev. Stopnja polinoma  $D(v)$  naj bo znova 0, stopnja  $F_1(v)$  pa 1, medtem ko naj bo polinom  $E_1(v)$  stopnje 1. Da bomo v tem primeru na obeh straneh enačbe (4.3) dobili Bézierjevo krivuljo stopnje 3, moramo znižati stopnjo krivulje  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v)$ . Videli bomo, da v tem primeru sicer dobimo drugačne možnosti, kar se tiče oblike, kakor v primeru 4.2, vendar se pri tem pojavi dodatna omejitev za notranje kontrolne točke.

Stopnjo krivulje  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v)$  bomo znižali za 1, torej jo bomo aproksimirali s krivuljo stopnje 2, določeno s kontrolnimi vektorji  $\mathbf{p}_{1,0}$ ,  $\mathbf{p}_m$  in  $\mathbf{p}_{1,3}$ . Izrazimo vektor  $\mathbf{p}_m$  z vektorji  $\mathbf{p}_{1,i}$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . Po formulah za višanje stopnje krivulje velja

$$\mathbf{p}_{1,1} = \frac{2}{3} \mathbf{p}_m + \frac{1}{3} \mathbf{p}_{1,0}, \quad \mathbf{p}_{1,2} = \frac{2}{3} \mathbf{p}_m + \frac{1}{3} \mathbf{p}_{1,3},$$

oziroma

$$\mathbf{p}_m = \frac{3}{2}\mathbf{p}_{1,1} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_{1,0} = \frac{3}{2}\mathbf{p}_{1,2} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_{1,3}. \quad (4.7)$$

Če vpeljemo oznake  $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_{1,0}$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_m$  in  $\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_{1,3}$ , se enačba (4.3) v tem primeru preoblikuje v

$$D(v) \sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_{1,j} B_j^3(v) = E_1(v) \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + F_1(v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{s}_j B_j^2(v). \quad (4.8)$$

Polinom  $D(v)$  naj bo konstanten, znova lahko predpostavimo  $D(v) \equiv 1$ . Polinoma  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$  naj bosta linearna, zanju naj velja še  $E_1(0) = e_0$ ,  $E_1(1) = e_1$ ,  $F_1(0) = f_0$ ,  $F_1(1) = f_1$ . Torej mora veljati

$$E_1(v) = e_0(1-v) + e_1v$$

$$F_1(v) = f_0(1-v) + f_1v.$$

Vstavimo polinoma v enačbo (4.8) in na podoben način kot v primeru 4.2 dobimo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \mathbf{q}_{1,j} B_j^3(v) &= (e_0(1-v) + e_1v) \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + (b_0(1-v) + b_1v) \sum_{j=0}^2 \mathbf{s}_j B_j^2(v) = \\ &= a_0 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + a_1 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^{j+1} (1-v)^{2-j} + \\ &+ b_0 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + b_1 \sum_{j=0}^2 \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^{j+1} (1-v)^{2-j} = \\ &= \sum_{j=0}^3 (a_1 \tilde{\mathbf{p}}_{j-1} \frac{j}{3} + a_0 \tilde{\mathbf{p}}_j \frac{3-j}{3} + b_1 \tilde{\mathbf{z}}_{j-1} \frac{j}{3} + b_0 \tilde{\mathbf{z}}_j \frac{3-j}{3}) B_j^3(v). \end{aligned}$$

Od tod sledijo pogoji za vektorja  $\mathbf{q}_{1,1}$  in  $\mathbf{q}_{1,2}$ .

$$\mathbf{q}_{1,1} = \frac{1}{3}(e_1 \mathbf{p}_{1,0} + 2e_0 \mathbf{p}_m + f_1 \mathbf{z}_0 + 2f_0 \mathbf{z}_1)$$

$$\mathbf{q}_{1,2} = \frac{1}{3}(e_0 \mathbf{p}_{1,3} + 2e_1 \mathbf{p}_m + 2f_1 \mathbf{z}_1 + f_0 \mathbf{z}_2).$$

Če še izrazimo vektor  $\mathbf{p}_m$  z vektorjema  $\mathbf{p}_{1,0}$  in  $\mathbf{p}_{1,1}$  oziroma vektorjema  $\mathbf{p}_{1,2}$  in  $\mathbf{p}_{1,3}$ , dobimo naslednji enačbi:

$$\mathbf{q}_{1,1} = e_0 \mathbf{p}_{1,1} + \frac{1}{3}(e_1 - e_0) \mathbf{p}_{1,0} + \frac{1}{3} f_1 \mathbf{z}_0 + \frac{2}{3} f_0 \mathbf{z}_1$$

$$\mathbf{q}_{1,2} = e_1 \mathbf{p}_{1,2} + \frac{1}{3}(e_0 - e_1) \mathbf{p}_{1,3} + \frac{2}{3} f_1 \mathbf{z}_1 + \frac{1}{3} f_0 \mathbf{z}_2.$$

Da se izognemo možnosti, kjer ima dobljeni zlepek obliko špice, mora veljati omejitev  $E_1(v) > 0$  za  $v \in [0, 1]$ , s čimer dobimo nekaj omejitev za izbiro parametrov  $e_0$  in  $e_1$ . Polinom  $E_1(v)$  zapišimo kot  $E_1(v) = (e_1 - e_0)v + e_0$ . Na intervalu  $[0, 1]$  bo  $E_1(v) > 0$ , če bo njegov maksimum na tem intervalu večji od 0. Obravnavajmo

dve možnosti. Prva možnost je, da je  $e_1 - e_0 < 0$  oziroma  $e_1 < e_0$ . V tem primeru je  $E_1(v)$  padajoča funkcija, zato ima na  $[0, 1]$  maksimum v  $v = 0$ . Torej bo v tem primeru  $E_1(v) > 0$ , če bo  $E_1(0) = e_0 > 0$ . Druga možnost je, da je  $e_1 - e_0 > 0$ . V tem primeru je  $E_1(v)$  naraščajoča funkcija in ima maksimum v  $v = 1$ . Torej bo v tem primeru  $E_1(v) > 0$ , če bo  $E_1(1) = e_1 > 0$ . Omejitev za parametra  $e_0$  in  $e_1$  je torej, da sta oba pozitivna.

Parametri  $e_0, e_1, f_0$  in  $f_1$  so tudi v tem primeru določeni iz enačb (4.4) in (4.5) na enak način kot v primeru 4.2.

V trenutnem primeru imamo nekoliko manj svobode, kar se tiče izbire kontrolnih točk, kot v primerih 4.1 in 4.2. Kontrolni točki  $\mathbf{Q}_{2,1}$  in  $\mathbf{Q}_{2,2}$  sta kot v primeru 4.2 določeni s točkama  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$  ter robnimi kontrolnimi točkami, kontrolni točki  $\mathbf{P}_{1,1}$  in  $\mathbf{P}_{1,2}$  pa nista več obe prosti. Prosta je le še ena izmed njiju, druga pa je določena z enačbo (4.7). **to pomeni, da v splošnem ne moremo konstruirati ploskve S poljubne stopnje, če je R podana, saj dobimo pogoje za kontrolne točke R**

**primer s stopnjo 3 in 2? ali pa samo omeni, da je v tem primeru veliko več parametrov, ampak da so vse kontrolne točke odvisne od robnih, polinomi višje stopnje se v bistvu ne splačajo? uporabni so samo, kadar imamo stik ploskev različnih stopenj**

Za konec tega podpoglavja si oglejmo še posplošitev primera 4.2. Namesto dveh ploskev stopnje (3, 3) obravnavajmo ploskvi poljubnih stopenj.

**Primer 4.4.** Naj bosta  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  dve Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta.

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^{m_R} \sum_{j=0}^{n_R} \mathbf{P}_{i,j} B_i^{m_R}(u) B_j^{n_R}(v),$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{m_S} \sum_{j=0}^{n_S} \mathbf{Q}_{i,j} B_i^{m_S}(u) B_j^{n_S}(v),$$

kjer velja  $u, v \in [0, 1]$ .

Ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  naj se stikata v krivulji  $C(v) = \mathbf{R}(0, v) = \mathbf{S}(0, v)$ . Brez škode za splošnost predpostavimo, da za stopnji ploskev velja  $n_S \geq n_R$ . Izpeljava v nasprotnem primeru je analogna. Ker obravnavamo ploskvi, ki se stikata v  $u = 0$ , razmerje med  $m_R$  in  $m_S$  ni relevantno. Krivuljo  $\mathbf{C}$  zapišimo kot

$$\mathbf{C}(v) = \sum_{i=0}^{n_S} \mathbf{Z}_i B_i^{n_S}.$$

V primeru, da je  $n_S = n_R$ , naj za kontrolne točke krivulje  $\mathbf{C}$  velja

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Q}_{m_S, i} = \mathbf{P}_{0, i}.$$

V primeru, da je  $n_S > n_R$ , pa izrazimo kontrolne točke ploskve  $\mathbf{S}$  s kontrolnimi točkami ploskve  $\mathbf{R}$  z uporabo formul za višanje stopnje (3.3):

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Q}_{m_S, i} = \sum_{j=0}^{n_R} \mathbf{P}_{0, j} \binom{n_R}{j} \frac{\binom{n_S - n_R}{i - j}}{\binom{n_S}{i}}.$$

Tako kot v primeru 4.2 predpostavljajmo, da so robne kontrolne točke obeh ploskev že vnaprej določene. Zanimale nas bodo zveze, ki veljajo med notranjimi kontrolnimi točkami. V nadaljevanju bomo uporabljali še naslednje oznake za kontrolne vektorje:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{1,j} &= \mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j} \\ \mathbf{q}_{1,j} &= \mathbf{Q}_{m_S,j} - \mathbf{Q}_{m_S-1,j} \\ \mathbf{z}_i &= \mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{r}_i &= \mathbf{P}_{0,i+1} - \mathbf{P}_{0,i}.\end{aligned}$$

Sedaj si oglejmo pogoje za  $G^1$ -zveznost med ploskvama  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ . Po izreku 3.6 sta ploskvi na skupnem robu  $G^1$ -zvezni natanko tedaj, ko obstajajo polinomi  $D(v)$ ,  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$ , kjer je

$$\begin{aligned}\deg(D) &\leq n_R + n_S - 1, \\ \deg(E_1) &\leq 2n_S - 1, \\ \deg(F_1) &\leq n_R + n_S,\end{aligned}$$

da velja  $D(v)E_1(v) > 0$  na  $[0, 1]$  ter enakost (4.2).

Razpišimo prve odvode parametrizacij ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(1, v) &= m_S \sum_{j=0}^{n_S} (\mathbf{Q}_{m_S,j} - \mathbf{Q}_{m_S-1,j}) B_j^{n_S}(v), \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) &= m_R \sum_{j=0}^{n_R} (\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^{n_R}(v), \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) &= n_R \sum_{j=0}^{n_R-1} (\mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^{n_R-1}(v).\end{aligned}$$

Dobljeno vstavimo v enačbo (4.2) in kot v primeru 4.2 vidimo, da mora veljati:

$$\begin{aligned}D(v)m_S \sum_{j=0}^{n_S} (\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}) B_j^{n_S}(v) &= \\ = E_1(v)m_R \sum_{j=0}^{n_R} (\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^{n_R}(v) + F_1(v)n_R \sum_{j=0}^{n_R-1} (\mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{0,j}) B_j^{n_R-1}(v).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Iz enačbe (4.9) sedaj izpeljimo pogoje, ki morajo veljati za robne kontrolne točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$ . Najprej vpeljimo oznake za vrednosti polinomov  $\mathbf{D}(v)$ ,  $\mathbf{E}_1(v)$  in  $\mathbf{F}_1(v)$  pri vrednostih  $v = 0$  in  $v = 1$ :  $d_0 = D(0)$ ,  $d_m = D(1)$ ,  $e_0 = E_1(0)$ ,  $e_m = E_1(1)$ ,  $f_0 = F_1(0)$ ,  $f_m = F_1(1)$ . Ko v enačbo (4.9) vstavimo vrednost  $v = 0$ , torej dobimo

$$d_0 m_S \mathbf{q}_{1,0} = m_R e_0 \mathbf{p}_{1,0} + n_R f_0 \mathbf{r}_0,\tag{4.10}$$

ko vstavimo  $v = 1$ , pa dobimo

$$d_m m_S \mathbf{q}_{1,n_S} = m_R e_m \mathbf{p}_{1,n_R} + n_R f_m \mathbf{r}_{n_R-1}.\tag{4.11}$$

Sedaj izberimo polinome  $D(v)$ ,  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$ . Izbrati jih želimo na tak način, da bodo njihove stopnje minimalne. V primeru, da je  $n_S = n_R$ , so stopnje enake kot v primeru 4.2: polinoma  $D(v)$  in  $E_1(v)$  sta konstantna,  $F_1(v)$  pa linearen. Če je  $n_S > n_R$  je lahko polinom  $D(v)$  ponovno konstanten. Brez škode za splošnost lahko izberemo, da je  $D(v) \equiv 1$ . Da se bodo stopnje krivulj v enačbi (4.9) ujemale, mora za polinom  $E_1(v)$  veljati

$$\deg(E_1) = n_S - n_R,$$

za  $F_1(v)$  pa

$$\deg(F_1) = n_S - n_R + 1.$$

Polinoma  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$  zapišimo v bazi Bérnsteinovih baznih polinomov:

$$E_1(v) = \sum_{k=0}^{n_S-n_R} e_k \binom{n_S-n_R}{k} v^k (1-v)^{n_S-n_R-k},$$

$$F_1(v) = \sum_{k=0}^{n_S-n_R+1} f_k \binom{n_S-n_R+1}{k} v^k (1-v)^{n_S-n_R+1-k},$$

kjer naj velja  $e_{n_S-n_R} = e_m$  in  $f_{n_S-n_R+1} = f_m$ .

Tako definirane polinome  $D(v)$ ,  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$  vstavimo v enačbo (4.9) in jo preoblikujemo po enakem postopku kot v primeru 4.2. Če je  $n_S = n_R$ , dobimo zelo podoben rezultat kot v primeru 4.2. Veljati mora

$$m_S \mathbf{q}_{1,j} = m_R e_0 \mathbf{p}_{1,j} + n_R (f_0 (1 - \frac{j}{n_S}) \mathbf{r}_j + f_1 \frac{j}{n_S} \mathbf{r}_{j-1}) \quad (4.12)$$

za  $j = 1, 2, \dots, n_S - 1$ . Pogoj za  $G^1$ -zveznost je torej v tem primeru kolinearnost med vektorji  $\mathbf{q}_{1,j}$ ,  $\mathbf{p}_{1,j}$ ,  $\mathbf{r}_j$  in  $\mathbf{r}_{j-1}$ . Pogoji v primeru, da je  $n_S > n_R$  pa so nekoliko bolj zapleteni. Večja kot je razlika med stopnjama ploskev, več kontrolnih vektorjev je vpletenih v pogoj. Veljati mora

$$\begin{aligned} m_S \mathbf{q}_{1,j} = & m_R (e_0 (1 - \frac{j}{n_S}) (1 - \frac{j}{n_S-1}) \cdots (1 - \frac{j}{n_R+1}) \mathbf{p}_{1,j} + \\ & + e_1 (1 - \frac{j}{n_S}) (1 - \frac{j}{n_S-1}) \cdots (1 - \frac{j}{n_R+2}) \frac{j}{n_R+1} \mathbf{p}_{1,j-1} + \\ & + e_2 (1 - \frac{j}{n_S}) (1 - \frac{j}{n_S-1}) \cdots (1 - \frac{j}{n_R+3}) \frac{j}{n_R+2} \frac{j-1}{n_R+1} \mathbf{p}_{1,j-2} + \cdots + \\ & + e_{n_S-n_R} \frac{j}{n_S} \frac{j-1}{n_S-1} \cdots \frac{j-(n_S-n_R)+1}{n_R+1} \mathbf{p}_{1,j-(n_S-n_R)}) + \\ & + n_R (f_0 (1 - \frac{j}{n_S}) (1 - \frac{j}{n_S-1}) \cdots (1 - \frac{j}{n_R}) \mathbf{r}_j + \\ & + f_1 (1 - \frac{j}{n_S}) (1 - \frac{j}{n_S-1}) \cdots (1 - \frac{j}{n_R+1}) \frac{j}{n_R} \mathbf{r}_{j-1} + \\ & + f_2 (1 - \frac{j}{n_S}) (1 - \frac{j}{n_S-1}) \cdots (1 - \frac{j}{n_R+2}) \frac{j}{n_R+1} \frac{j-1}{n_R} \mathbf{r}_{j-2} + \cdots + \\ & + f_{n_S-n_R+1} \frac{j}{n_S} \frac{j-1}{n_S-1} \cdots \frac{j-(n_S-n_R)+1}{n_R} \mathbf{r}_{j-(n_S-n_R)-1}). \end{aligned}$$

## 4.2 Konstrukcija $G^2$ -zveznih Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta

V tem podpoglavju si oglejmo še primer konstrukcije dveh ploskev, ki sta na skupnem robu  $G^2$ -zvezni.

Naj bosta  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  Bézierovi ploskvi iz tenzorskega produkta stopnje  $(5, 5)$ :

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 \mathbf{P}_{i,j} B_i^5(u) B_j^5(v)$$

in

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 \mathbf{Q}_{i,j} B_i^5(u) B_j^5(v),$$

kjer je  $u, v \in [0, 1]$ . Stikata naj se v krivulji  $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0, v) = \mathbf{S}(1, v)$  s kontrolnimi točkami  $\{\mathbf{Z}_i; i = 0, \dots, 5\}$ , kjer je  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{P}_{0,i} = \mathbf{Q}_{5,i}$ . Tako kot v podpoglavju 4.1 predpostavljajmo, da imamo že vnaprej določene robne krivulje obeh ploskev, znova nas zanima, kakšne pogoje prinese zahteva  $G^2$ -zveznosti za notranje kontrolne točke. Ker gre sedaj za zveznost stopnje 2, bomo poleg kontrolnih točk  $\mathbf{P}_{1,i}$  in  $\mathbf{Q}_{2,i}$ ,  $i = 1, 2$ , opazovali tudi kontrolne točke  $\mathbf{P}_{2,i}$  in  $\mathbf{Q}_{1,i}$ ,  $i = 1, 2$ . Poleg oznak za kontrolne vektorje  $\mathbf{p}_{1,j}$ ,  $\mathbf{q}_{1,j}$  in  $\mathbf{z}_i$ , kjer je  $j = 0, \dots, 5$  in  $i = 0, \dots, 4$ , že predstavljenih v podpoglavju 4.1, vpeljimo še oznake za kontrolne vektorje, ki nastopajo v drugih odvodih obeh ploskev. Naj bo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{2,j} &= \mathbf{P}_{2,j} - 2\mathbf{P}_{1,j} + \mathbf{P}_{0,j}, \\ \mathbf{q}_{2,j} &= \mathbf{Q}_{3,j} - 2\mathbf{Q}_{2,j} + \mathbf{Q}_{1,j} \text{ za } j = 0, \dots, 5, \\ \mathbf{s}_k &= \mathbf{Z}_{k+2} - 2\mathbf{Z}_{k+1} + \mathbf{Z}_k \text{ za } k = 0, \dots, 3 \\ \text{ter} \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{P}_{1,j+1} - \mathbf{P}_{0,j+1} - \mathbf{P}_{1,j} + \mathbf{P}_{0,j} \text{ za } j = 0, \dots, 4. \end{aligned}$$

Najprej si oglejmo, kakšne pogoje dobimo v primeru, da zahtevamo  $C^2$ -zveznost med ploskvama.

**Primer 4.5.** Tako kot v primeru 4.1, v katerem smo obravnavali  $C^1$ -zveznost ploskev, moramo tudi v tem primeru reparametrizirati ploskev  $\mathbf{R}$ , da bo definirana nad domeno  $[1, 2] \times [0, 1]$ :

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 \mathbf{P}_{i,j} B_i^5(u-1) B_j^5(v),$$

kjer je  $u \in [1, 2]$  in  $v \in [0, 1]$ .

Da bosta ploskvi na stiku  $C^2$ -zvezni, morata ustrezati pogojem za  $C^0$ -zveznost,  $C^1$ -zveznost in  $C^2$ -zveznost. Da bo stik ploskev  $C^0$ -zvezen, se morata ujemati v kontrolnih točkah, ki določajo stično krivuljo, torej mora veljati  $\mathbf{P}_{0,j} = \mathbf{Q}_{5,j}$  za  $j = 0, \dots, 5$ . Da bo  $C^1$ -zvezen, mora, kot smo videli v primeru 4.1, veljati

$$\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j} = \mathbf{Q}_{5,j} - \mathbf{Q}_{4,j} \quad \text{za } j = 0, \dots, 5,$$



torej se morata na skupnem robu ujemati odvoda prve stopnje v  $u$ -smeri. Da bosta na stiku ploskvi  $C^2$ -zvezni, pa se morata na skupnem robu ujemati še odvoda druge stopnje v  $u$ -smeri:  $\frac{\partial^2}{\partial u^2}\mathbf{R}(0, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\mathbf{S}(1, v)$ . Če razpišemo oba parcialna odvoda oziroma uporabimo enakost (3.5), dobimo naslednji pogoj za  $C^2$ -zveznost med ploskvama:

$$\mathbf{P}_{2,j} - \mathbf{P}_{1,j} + \mathbf{P}_{0,j} = \mathbf{Q}_{5,j} - \mathbf{Q}_{4,j} + \mathbf{Q}_{3,j},$$

oziroma

$$\mathbf{p}_{2,j} = \mathbf{q}_{2,j}$$

za  $j = 0, \dots, 5$ . Parametrizacija ploskev znova določa razmerje med kontrolnimi vektorji. Iz pogoja za  $C^1$ -zveznost sledi, da so kontrolne točke  $\mathbf{Q}_{5,j}$  in  $\mathbf{Q}_{4,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , točno določene s kontrolnimi točkami  $\mathbf{P}_{1,j}$  in  $\mathbf{P}_{0,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Iz pogoja za  $C^2$ -zveznost pa sledi še, da so kontrolne točke  $\mathbf{Q}_{3,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , točno določene s kontrolnimi točkami  $\mathbf{P}_{2,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Kontrolne točke  $\mathbf{P}_{i,j}$ , kjer je  $i = 0, 1, 2$  in  $j = 1, \dots, 4$ , pa so proste. Proste so tudi vse preostale notranje kontrolne točke.

Sedaj pa si oglejmo še, kakšne pogoje dobimo v primeru  $G^2$ -zveznosti.

**Primer 4.6.** Po izreku 2.8 bosta ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^2$ -zvezni na skupnem robu, natanko tedaj, ko bodo obstajale  $C^2$ -funkcije  $\alpha_1(v)$ ,  $\beta_1(v)$ ,  $\alpha_2(v)$  in  $\beta_2(v)$ , kjer je  $\alpha_1(v) \neq 0$  in ustreznega predznaka na intervalu  $[0, 1]$ , da bo veljala enakost (4.1) ter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}(0, v) = & \alpha_2(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) + \beta_2(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) + \alpha_1^2(v) \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}(0, v) + \\ & + 2\alpha_1(v)\beta_1(v) \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u \partial v}(0, v) + \beta_1^2(v) \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial v^2}(0, v). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ker gre znova za Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta, lahko uporabimo izrek 3.6, po katerem sta ploskvi  $G^2$ -zvezni na skupnem robu natanko tedaj, ko obstajajo polinomi  $D(v)$ ,  $E_1(v)$ ,  $F_1(v)$ ,  $E_2(v)$  in  $E_2(v)$ , kjer je  $D(v)E_1(v) \neq 0$  in polinom  $E_1(v)$  ustreznega predznaka na intervalu  $[0, 1]$ , da velja enakost (4.2) ter

$$\begin{aligned} D^3(v) \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}(0, v) = & E_2(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) + F_2(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) + D(v)E_1^2(v) \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}(0, v) + \\ & + 2D(v)E_1(v)F_1(v) \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u \partial v}(0, v) + D(v)F_1^2(v) \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial v^2}(0, v). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pri tem mora za stopnje polinomov veljati naslednje:  $st(D) \leq 9$ ,  $st(E_1) \leq 9$ ,  $st(F_1) \leq 10$ ,  $st(E_2) \leq 27$  in  $st(F_2) \leq 28$ .

Zaradi enostavnosti naj bo stopnja polinoma  $D(v)$  enaka 0. Torej lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je  $D(v) \equiv 1$ . Stopnje preostalih polinomov bomo izbrali v nadaljevanju.

Po enakosti (3.4) dobimo naslednje rezultate za parcialne odvode parametrizacij ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  v  $u = 0$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}(0, v) &= 5 \sum_{j=0}^5 \mathbf{p}_{1,j} B_j^5(v) & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}(0, v) &= 5 \sum_{j=0}^4 \mathbf{z}_j B_j^4(v) \\
\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}(0, v) &= 20 \sum_{j=0}^5 \mathbf{q}_{2,j} B_j^5(v) & \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}(0, v) &= 20 \sum_{j=0}^5 \mathbf{p}_{2,j} B_j^5(v) \\
\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial v^2}(0, v) &= 20 \sum_{j=0}^3 \mathbf{s}_j B_j^3(v) & \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u \partial v}(0, v) &= 25 \sum_{j=0}^4 \mathbf{v}_j B_j^4(v).
\end{aligned}$$

Dobljene izraze za odvode vstavimo v enačbi (4.2) in (4.14). Oglejmo si, kakšne pogoje nam ti dve enačbi data pri vrednostih  $v = 0$  in  $v = 1$ , torej kakšni pogoji morajo veljati na robovih obeh ploskev, da bo njun stik  $G^2$ -zvezen. Pri vrednosti  $v = 0$  dobimo

$$\mathbf{q}_{1,0} = e_{10} \mathbf{p}_{1,0} + f_{10} \mathbf{z}_0 \quad (4.15)$$

in

$$\mathbf{q}_{2,0} = \frac{1}{4} e_{20} \mathbf{p}_{1,0} + \frac{1}{4} f_{20} \mathbf{z}_0 + e_{10}^2 \mathbf{p}_{2,0} + \frac{5}{2} e_{10} f_{10} \mathbf{v}_0 + f_{10}^2 \mathbf{s}_0. \quad (4.16)$$

Tu smo vpeljali oznake  $e_{10} = E_1(0)$ ,  $f_{10} = F_1(0)$ ,  $e_{20} = E_2(0)$  in  $f_{20} = F_2(0)$ . Pri vrednosti  $v = 1$  pa dobimo

$$\mathbf{q}_{1,5} = e_{11} \mathbf{p}_{1,5} + f_{11} \mathbf{z}_4 \quad (4.17)$$

in

$$\mathbf{q}_{2,5} = \frac{1}{4} e_{21} \mathbf{p}_{1,5} + \frac{1}{4} f_{21} \mathbf{z}_4 + e_{11}^2 \mathbf{p}_{2,5} + \frac{5}{2} e_{11} f_{11} \mathbf{v}_4 + f_{11}^2 \mathbf{s}_3, \quad (4.18)$$

kjer smo vpeljali oznake  $e_{11} = E_1(1)$ ,  $f_{11} = F_1(1)$ ,  $e_{21} = E_2(1)$  in  $f_{21} = F_2(1)$ .

Po izreku 3.6 mora za polinom  $E_1(v)$  veljati, da je za  $v \in [0, 1]$  različen od 0, da zagotovimo, da ploskvi ne bosta imeli stika v obliki špice, pa mora veljati še  $E_1(v) < 0$  na intervalu  $[0, 1]$ . Sledi, da mora veljati  $e_{10} < 0$  in  $e_{11} < 0$ .

Ker smo predpostavili, da imamo vnaprej določene robove obeh ploskev, so vsi kontrolni vektorji, ki nastopajo v zgornjih enačbah ((4.15)-(4.18)), razen vektorjev  $\mathbf{v}_0$  in  $\mathbf{v}_4$  znani. Enačbi (4.15) in (4.17) enolično določata vrednosti parametrov  $e_{10}$ ,  $f_{10}$ ,  $e_{11}$  in  $f_{11}$ , izračunamo jih s pomočjo Cramerjevih formul, kot v primeru 4.2. Proste parametre oziroma kontrolne točke nam bosta prinesli le enačbi (4.16) in (4.18).

Najprej si oglejmo enačbo (4.16) in obravnavajmo dva primera. V prvem primeru naj bodo robovi krivulj izbrani na tak način, da je koeficient pred vektorjem  $\mathbf{v}_0$  enak 0, torej da je  $f_{10} = 0$ , v drugem primeru pa je različen od 0. Z  $\mathbf{n}_1$  bomo označili enotsko normalo na ploskev v točki  $\mathbf{P}_{0,0}$ . Če je  $f_{10} = 0$ , izgubimo člen, ki vsebuje  $\mathbf{v}_0$ . To pomeni, da so vsi vektorji, ki nastopajo v enačbi, že določeni. V enačbi se nam pojavita le dva še neznana parametra  $e_{20}$  in  $f_{20}$ , ki ju lahko določimo iz enačbe. V tem primeru nam enačba (5.11) ne da nobenih prostih parametrov ali kontrolnih točk. Če pa je  $f_{10} \neq 0$ , imamo na voljo dva različna scenarija. Prva možnost je, da

projekcijo vektorja  $\mathbf{v}_0$  na normalo  $\mathbf{n}_1$  ter parametra  $e_{20}$  in  $f_{20}$  določimo iz enačbe (4.16), projekcija vektorja  $\mathbf{v}_0$  na tangentno ravnino na ploskev v točki  $\mathbf{P}_{0,0}$  pa je prosta. Druga možnost pa je, da sta parametra  $e_{20}$  in  $f_{20}$  prosta, vektor  $\mathbf{v}_0$  pa je določen z enačbo (4.16).

Na enak način lahko analiziramo enačbo (4.18). V prvem primeru, kjer je  $f_{11} = 0$ , člen, ki vsebuje vektor  $\mathbf{v}_4$ , izgine, parametra  $e_{21}$  in  $f_{21}$  pa sta določena z enačbo (4.18). Če je  $f_{11} \neq 0$  pa znova dobimo dve situaciji. Lahko določimo projekcijo vektorja  $\mathbf{v}_4$  na normalo  $\mathbf{n}_2$  na ploskev v točki  $\mathbf{P}_{0,5}$  ter parametra  $e_{21}$  in  $f_{2,1}$  iz enačbe (4.18), projekcija vektorja  $\mathbf{v}_4$  na tangentno ravnino na ploskev v točki  $\mathbf{P}_{0,5}$  pa je prosta, ali pa sta prosta parametra  $e_{21}$  in  $f_{21}$ , vektor  $\mathbf{v}_4$  pa je določen z enačbo (4.18).

Sedaj moramo izbrati polinome  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $F_1$  in  $F_2$ . Izbira njihovih stopenj je v primeru  $G^2$ -zveznosti nekoliko težja kot v primeru  $G^1$ -zveznosti, saj so odvisni od stopenj Bézierjevih krivulj tako v enačbi (4.2) kot v enačbi (4.14). Če bi želeli minimalne stopnje koeficientnih polinomov, bi lahko za  $E_1(v)$  in  $E_2(v)$  izbrali konstanti, polinoma  $F_1$  in  $F_2$  pa bi izbrali linearna. V tem primeru bi za prvih nekaj kontrolnih točk ploskve  $\mathbf{S}$  dobili enake pogoje, kot v primeru 4.2, kontrolne točke ploskve  $\mathbf{R}$  pa bi bile proste. V nadaljevanju pa si bomo raje ogledali, kako poteka konstrukcija, če sta polinoma  $E_1(v)$  in  $E_2(v)$  stopnje 2, polinoma  $F_1(v)$  in  $F_2(v)$  pa linearna. Naj torej velja:

$$\begin{aligned} E_1(v) &= e_{10}(1-v)^2 + 2e_{1m}v(1-v) + e_{11}v^2 \\ F_1(v) &= f_{10}(1-v) + f_{11}v \\ E_2(v) &= e_{20}(1-v)^2 + 2e_{2m}v(1-v) + e_{21}v^2 \\ F_2(v) &= f_{20}(1-v) + f_{21}v. \end{aligned}$$

Da se bodo pri taki izbiri koeficientnih polinomov stopnje Bézierjevih krivulj v enačbah (4.2) in (4.14) ujemale, moramo znižati stopnji parcialnih odvodov  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}$  in  $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}$ . Krivuljo  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}$  aproksimirajmo s krivuljo stopnje 3, krivuljo  $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2}$  pa s krivuljo stopnje 1. Naj velja

$$\frac{1}{5} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \Big|_{u=0} = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_{1,i} B_i^5(v) = \sum_{i=0}^3 \tilde{\mathbf{p}}_i B_i^3(v),$$

$$\frac{1}{20} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial u^2} \Big|_{u=0} = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_{2,i} = (1-v)\mathbf{p}_{2,0} + v\mathbf{p}_{2,5}.$$

Kontrolne vektorje  $\mathbf{p}_{1,i}$ ,  $i = 0, \dots, 5$  lahko izrazimo z vektorji  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  s pomočjo enačb za višanje stopnje Bézierjeve krivulje na naslednji način:

$$\mathbf{p}_{1,1} = \frac{1}{5}(3\tilde{\mathbf{p}}_1 + 2\mathbf{p}_{1,0}), \quad \mathbf{p}_{1,2} = \frac{1}{10}(6\tilde{\mathbf{p}}_1 + 3\tilde{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{p}_{1,0}), \quad (4.19)$$

$$\mathbf{p}_{1,3} = \frac{1}{10}(3\tilde{\mathbf{p}}_1 + 6\tilde{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{p}_{1,5}), \quad \mathbf{p}_{1,4} = \frac{1}{5}(3\tilde{\mathbf{p}}_2 + 2\mathbf{p}_{1,5}). \quad (4.20)$$

Seveda velja  $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_{1,0}$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{p}_{1,5}$ . Iz enačb (4.19) lahko izrazimo še vektorja  $\tilde{\mathbf{p}}_1$  in  $\tilde{\mathbf{p}}_2$  kot

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_{1,0} + \frac{5}{3}\mathbf{v}_0, \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_{1,5} - \frac{5}{3}\mathbf{v}_4.$$

Tu smo uporabili dejstvo, da je  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_{1,1} - \mathbf{p}_{1,0}$  in  $\mathbf{v}_4 = \mathbf{p}_{1,5} - \mathbf{p}_{1,4}$ .

Enako lahko s pomočjo enačb za višanje stopnje kontrolne vektorje  $\mathbf{p}_{2,i}$ ,  $i = 0, \dots, 5$  izrazimo z vektorjema  $\mathbf{p}_{2,0}$  in  $\mathbf{p}_{2,5}$ :

$$\mathbf{p}_{2,1} = \frac{1}{5}(4\mathbf{p}_{2,0} + \mathbf{p}_{2,5}), \quad \mathbf{p}_{2,2} = \frac{1}{10}(6\mathbf{p}_{2,0} + 4\mathbf{p}_{2,5}), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{p}_{2,3} = \frac{1}{10}(4\mathbf{p}_{2,0} + 6\mathbf{p}_{2,5}), \quad \mathbf{p}_{2,4} = \frac{1}{5}(\mathbf{p}_{2,0} + 4\mathbf{p}_{2,5}). \quad (4.22)$$

S temi enačbami so torej natančno določeni kontrolni vektorji  $\mathbf{p}_{i,j}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, 5$  ploskve  $\mathbf{R}$ , torej tudi njene kontrolne točke  $\mathbf{P}_{i,j}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, 5$ . Ostale notranje kontrolne točke so proste saj zahtevamo le geometrijsko zveznost stopnje 2.

Za določitev pogojev, ki morajo veljati za kontrolne vektorje ploskve  $\mathbf{S}$  moramo uporabiti enačbi (4.2) in (4.14), ki predstavljata pogoja za  $G^1$  in  $G^2$ -zveznost. Ko v enačbo (4.2) vstavimo polinoma  $E_1(v)$  in  $F_1(v)$ , preoblikujemo dobljeno enačbo, da na obeh straneh dobimo Bézierjevo krivuljo stopnje 5 ter primerjamo koeficiente pred baznimi polinomi, dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{1,1} &= \frac{1}{5}(3e_{10}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 2e_{1m}\mathbf{p}_{1,0} + f_{11}\mathbf{z}_0 + 4f_{10}\mathbf{z}_1), \\ \mathbf{q}_{1,2} &= \frac{1}{10}(6e_{1m}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 3e_{10}\tilde{\mathbf{p}}_2 + e_{11}\mathbf{p}_{1,0} + 4f_{11}\mathbf{z}_1 + 6f_{10}\mathbf{z}_2), \\ \mathbf{q}_{1,3} &= \frac{1}{10}(3e_{11}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 6e_{1m}\tilde{\mathbf{p}}_2 + e_{10}\mathbf{p}_{1,5} + 6f_{11}\mathbf{z}_2 + 4f_{10}\mathbf{z}_3), \\ \mathbf{q}_{1,4} &= \frac{1}{5}(3e_{11}\tilde{\mathbf{p}}_2 + 2e_{1m}\mathbf{p}_{1,5} + 4f_{11}\mathbf{z}_3 + f_{10}\mathbf{z}_4). \end{aligned}$$

Ko enak postopek ponovimo še z enačbo (4.14), pa dobimo:

$$\begin{aligned} 5\mathbf{q}_{2,1} &= 4e_{10}e_{1m}\mathbf{p}_{2,0} + e_{10}^2\mathbf{p}_{2,5} + e_{10}f_{10}(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) + (2e_{1m}f_{10} + e_{10}f_{11})\mathbf{v}_0 + 3f_{10}^2\mathbf{s}_1 + \\ &+ 2f_{10}f_{11}\mathbf{s}_0 + \frac{1}{4}(3e_{20}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 2e_{2m}\mathbf{p}_{1,0} + f_{21}\mathbf{z}_0 + 4f_{20}\mathbf{z}_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10\mathbf{q}_{2,2} &= (2e_{10}e_{11} + 4e_{1m}^2)\mathbf{p}_{2,0} + 4e_{10}e_{1m}\mathbf{p}_{2,5} + (e_{10}f_{11} + 2e_{1m}f_{10})(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) + \\ &+ (2e_{1m}f_{11} + e_{11}f_{10})\mathbf{v}_0 + e_{10}f_{10}\mathbf{v}_4 + 3f_{10}^2\mathbf{s}_2 + 6f_{10}f_{11}\mathbf{s}_1 + f_{11}^2\mathbf{s}_0 + \\ &+ \frac{1}{4}(6e_{2m}\tilde{\mathbf{p}}_1 + 3e_{20}\tilde{\mathbf{p}}_2 + e_{21}\mathbf{p}_{1,0} + 4f_{21}\mathbf{z}_1 + 6f_{20}\mathbf{z}_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10\mathbf{q}_{2,3} = & (2p_{10}p_{11} + 4p_{1m}^2)\mathbf{p}_{2,5} + 4p_{10}p_{1m}\mathbf{p}_{2,0} + (p_{11}q_{10} + 2p_{1m}q_{11})(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) + \\
& + (2p_{1m}q_{10} + p_{10}q_{11})\mathbf{v}_4 + p_{11}q_{11}\mathbf{v}_0 + 3q_{11}^2\mathbf{s}_1 + 6q_{10}q_{11}\mathbf{s}_2 + q_{10}^2\mathbf{s}_3 + \\
& + \frac{1}{4}(6p_{2m}\tilde{\mathbf{p}}_2 + 3p_{21}\tilde{\mathbf{p}}_1 + p_{20}\mathbf{p}_{1,5} + 4q_{21}\mathbf{z}_3 + 6q_{21}\mathbf{z}_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5\mathbf{q}_{2,4} = & 4p_{10}p_{1m}\mathbf{p}_{2,5} + p_{11}^2\mathbf{p}_{2,5} + p_{11}q_{11}(\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{p}}_1) + (2p_{1m}q_{11} + p_{11}q_{10})\mathbf{v}_4 + 3q_{11}^2\mathbf{s}_2 + \\
& + 2q_{10}q_{11}\mathbf{s}_3 + \frac{1}{4}(3p_{21}\tilde{\mathbf{p}}_2 + 2p_{2m}\mathbf{p}_{1,5} + q_{21}\mathbf{z}_3 + 4q_{20}\mathbf{z}_4).
\end{aligned}$$

Parametra  $p_{1m}$  in  $p_{2m}$  sta prosta. Po izbiri parametrov so točno določeni še kontrolni vektorji  $\mathbf{q}_{i,j}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, 5$  ploskve  $\mathbf{S}$ , oziroma kontrolne točke  $\mathbf{Q}_{i,j}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, 5$ .

drugi možen pristop? če nista prosta  $p_{1m}$  in  $p_{2m}$  ampak projekcija enega od vektorjev?

## 5 Konstrukcija $G^1$ -zveznih trikotnih Bézierjevih ploskev

### 5.1 Trikotne Bézierjeve ploskve

V tem podpoglavju bodo predstavljeni nekateri osnovni pojmi in lastnosti trikotnih Bézierjevih ploskev. Pri tem se opiramo na [10], pa tudi [7] in [3], kjer je mogoče najti manjkajoče dokaze in izpeljave.

Trikotne Bézierjeve ploskve so tip Bézierjevih ploskev s parametrizacijo, definirano nad domeno, sestavljeno iz trikotnikov. Ko imamo opravka s trikotnimi domenami, uporaba običajnega kartezičnega koordinatnega sistema ni najbolj praktična, zato bomo točke znotraj takih domen raje zapisovali z baricentričnimi koordinatami.

**Definicija 5.1.** Naj bo  $T$  trikotnik z oglišči  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$  in  $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3)$ , oziroma  $T = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ . Velja, da je vsako točko  $\mathbf{p} = (x, y)$  mogoče enolično zapisati kot  $\mathbf{p} = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3$ , kjer je  $u + v + w = 1$ . Trojico  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  imenujemo *baricentrične koordinate* točke  $\mathbf{p}$  glede na trikotnik  $T$ . Krajše to zapišemo kot  $\mathbf{u} = \text{Bar}(\mathbf{p}, T)$ .

Parametrizacije Bézierjevih ploskev podajamo v bazi prostora polinomov dveh spremenljivk. V primeru trikotnih Bézierovih ploskev izberemo prostor polinomov  $\mathbb{P}_n^2 = \text{Lin}\{u^i v^j; 0 \leq i + j \leq n\}$ . Bazo tega prostora tvorijo Bernsteinovi bazni polinomi dveh spremenljivk, kar je dokazano v [10]. Bernsteinovi polinomi dveh spremenljivk so definirani na naslednji način.

**Definicija 5.2.** Naj bo  $T = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$  domenski trikotnik in  $i, j$  ter  $k$  cela števila, za katera velja  $i \geq 0$ ,  $j \geq 0$ ,  $k \geq 0$  in  $i + j + k = n$ . Bernsteinov bazni polinom stopnje  $n$  dveh spremenljivk je definiran kot

$$B_{i,j,k}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

kjer z  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  označujemo baricentrične koordinate neke točke v ravnini glede na trikotnik  $T$ .

Oglejmo si še definicijo trikotnih Bézierjevih ploskev.

**Definicija 5.3.** *Trikotna Bézierjeva ploskev stopnje  $n$  nad domenskim trikotnikom  $T = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$  je podana s parametrizacijo*

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{b}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \text{Bar}(\mathbf{p}, T)$$

kjer so  $\mathbf{b}_{i,j,k}$ ,  $i + j + k = n$ , kontrolne točke te ploskve. Trikotnik  $T$  je domena te parametrizacije.

Koordinate poljubne točke na trikotni Bézierovi ploskvi lahko izračunamo s pomočjo de Casteljaujevega algoritma. De Casteljaujev algoritem bo pomemben v

---

**Algorithm 1:** De Casteljaujev algoritem za trikotne Bézierove krpe

---

**Data:** Kontrolna mreža  $\mathbf{b}_{i,j,k}, i + j + k = n$ , točka  $\mathbf{p}$  v domeni, trikotnik

$T = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$

**Result:**  $\mathbf{b}_{0,0,0}^n(\mathbf{u}) = \mathbf{R}_n(\mathbf{p})$

Izračunaj  $\mathbf{u} = (u, v, w) = \text{Bar}(\mathbf{p}; T)$ ;

**for**  $i = 1, \dots, n$  **do**

**for**  $j = 1, \dots, n - i$  **do**

$k = n - i - j$ ;

$\mathbf{b}_{i,j,k}^0(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_{i,j,k}$ ;

**end**

**end**

**for**  $r = 1, 2, \dots, n$  **do**

**for**  $i = 1, \dots, n - r$  **do**

**for**  $j = 1, \dots, n - r - i$  **do**

$k = n - r - i - j$ ;

$\mathbf{b}_{i,j,k}^r(\mathbf{u}) = u\mathbf{b}_{i+1,j,k}^{r-1}(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{i,j+1,k}^{r-1}(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{i,j,k+1}^{r-1}(\mathbf{u})$

**end**

**end**

**end**

---

nadaljevanju za izražavo točk, ki razpenjajo tangentno ravnino na ploskev v neki točki.

Oglejmo si še formulo za smerni odvod parametrizacije trikotne Bézierjeve ploskve. Imejmo ploskev  $\mathbf{P}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k} \mathbf{b}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\mathbf{u})$  nad trikotnikom  $T$ , kjer je  $\mathbf{u} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T)$ . Recimo, da odvajamo v smeri vektorja  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ . Naj bo  $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  ter  $\alpha = \text{Bar}(\mathbf{a}; T)$  in  $\beta = \text{Bar}(\mathbf{b}; T)$ . Potem so baricentrične koordinate vektorja  $\mathbf{d}$  enake  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \beta - \alpha$ . Velja  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ . Odvod parametrizacije  $\mathbf{P}$  v smeri vektorja  $\mathbf{p}$  izračunamo na naslednji način:

$$D_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbf{p}) = n \sum_{i+j+k=n-1} (\mu_1 \mathbf{b}_{i+1,j,k} + \mu_2 \mathbf{b}_{i,j+1,k} + \mu_3 \mathbf{b}_{i,j,k+1}) B_{i,j,k}^{n-1}(\mathbf{u})$$

Pokazati je mogoče tudi, da za smerni odvod trikotne ploskve velja:

$$D_{\mathbf{p}}\mathbf{P}(\mathbf{p}) = n(\mu_1\mathbf{b}_{1,0,0}^{n-1}(\mathbf{u}) + \mu_2\mathbf{b}_{0,1,0}^{n-1}(\mathbf{u}) + \mu_3\mathbf{b}_{0,0,1}^{n-1}(\mathbf{u})), \quad (5.1)$$

kjer so  $\mathbf{b}_{1,0,0}^{n-1}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{b}_{0,1,0}^{n-1}(\mathbf{u})$  in  $\mathbf{b}_{0,0,1}^{n-1}(\mathbf{u})$  točke, dobljene po  $n - 1$  korakih de Casteljaujevega algoritma, ki razpenjajo tangentno ravnino na točko  $\mathbf{P}(\mathbf{p})$ . Ta ugotovitev bo pomembna pri konstrukciji  $G^1$ -zveznih trikotnih ploskev.

## 5.2 Konstrukcija $C^1$ -zveznih trikotnih Bézierovih ploskev

Imejmo dve trikotni Bézierovi ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stopnje  $n$  nad trikotnima domenama  $T_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$  in  $T_2 = \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{r}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{s}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\mathbf{v}); \quad \mathbf{v} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Zapišimo točki  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$  kot  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  in  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Ploskvi se stikata na robu nad daljico  $\overline{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}$ , oziroma na robu, določenem z  $u_1 = v_1 = 0$ . Torej velja  $\mathbf{r}_{0,j,k} = \mathbf{s}_{0,j,k}$  za  $j \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $j + k = 0$ .

Da bo stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $C^1$ -zvezen, se morata v  $u_1 = 0$  oziroma  $v_1 = 0$  ujemati odvoda parametrizacij ploskev v katerikoli smeri. Opazujmo odvoda ploskev v smeri  $\mathbf{d} = \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2$ . Naj bodo  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \text{Bar}(\mathbf{d}; T_1) = \alpha - \mathbf{e}_2$  baricentrične koordinate vektorja  $\mathbf{d}$  glede na trikotnik  $T_1$ , kjer je  $\alpha = \text{Bar}(\mathbf{p}_4; T_1)$ , in  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \text{Bar}(\mathbf{d}; T_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  baricentrične koordinate vektorja  $\mathbf{d}$  glede na trikotnik  $T_2$ . Veljati mora:

$$\begin{aligned} & \sum_{i+j+k=n-1} (\mu_1 \mathbf{r}_{i+1,j,k} + \mu_2 \mathbf{r}_{i,j+1,k} + \mu_3 \mathbf{r}_{i,j,k+1}) B_{i,j,k}^{n-1}(\mathbf{u}) \Big|_{u_1=0} = \\ & \sum_{i+j+k=n-1} (\eta_1 \mathbf{s}_{i+1,j,k} + \eta_2 \mathbf{s}_{i,j+1,k} + \eta_3 \mathbf{s}_{i,j,k+1}) B_{i,j,k}^{n-1}(\mathbf{v}) \Big|_{v_1=0} \end{aligned}$$

ok  $|u_1=0$ ? oziroma

$$\mu_1 \mathbf{r}_{1,j,k} + \mu_2 \mathbf{r}_{0,j+1,k} + \mu_3 \mathbf{r}_{0,j,k+1} = \eta_1 \mathbf{s}_{1,j,k} + \eta_2 \mathbf{s}_{0,j+1,k} + \eta_3 \mathbf{s}_{0,j,k+1} \quad (5.2)$$

za  $j + k = n - 1$ . Točki  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$  se namreč na stiku obeh ploskev ujemata. Če izrazimo baricentrične koordinate vektorjev s pomočjo baricentričnih koordinat točk, torej če pišemo  $\mu = (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3)$  in  $\eta = (1, -1, 0)$  ter dobljeno vstavimo v enačbo (5.2), ob tem pa upoštevamo še, da se kontrolne točke obeh ploskev na skupnem robu ujemajo, dobimo

$$\mathbf{s}_{1,j,k} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,j,k} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,j+1,k} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,j,k+1} \quad (5.3)$$

za  $j + k = n - 1$ . Enačba (5.3) predstavlja pogoj, ki mora veljati za kontrolne točke obeh ploskev, da se stikata s  $C^1$ -zveznostjo. Do enakega rezultata bi na podoben način prišli, če bi namesto vektorja  $\mathbf{d}$  uporabili vektor  $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3$  katerikoli linearno kombinacijo obeh vektorjev.

Dobljeni rezultat sedaj uporabimo na primeru stika dveh ploskev stopnje 3.

**Primer 5.4.** Imejmo dve trikotni Bézierovi ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stopnje 3 nad trikotnima domenama  $T_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$  in  $T_2 = \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{r}_{i,j,k} B_{i,j,k}^3(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{s}_{i,j,k} B_{i,j,k}^3(\mathbf{v}); \quad \mathbf{v} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Naj bo  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  in  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  ter  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \text{Bar}(\mathbf{p}_4; T_1)$ . Ploskvi se kakor prej stikata v  $u_1 = v_1 = 0$ , torej za kontrolne točke na skupnem robu velja  $\mathbf{s}_{0,0,2} = \mathbf{r}_{0,0,2}$ ,  $\mathbf{s}_{0,1,1} = \mathbf{r}_{0,1,1}$  in  $\mathbf{s}_{0,2,0} = \mathbf{r}_{0,2,0}$ .

Da bo stik obeh ploskev še  $C^1$  zvezen mora po enačbi (5.3) veljati:

$$\mathbf{s}_{1,0,2} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,0,2} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,1,2} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,0,3}$$

$$\mathbf{s}_{1,1,1} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,1,1} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,2,1} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,1,2}$$

$$\mathbf{s}_{1,2,0} = \alpha_1 \mathbf{r}_{0,1,2} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,3,0} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,2,1}$$

**primerjava kontrolnih točk, katere so določene s katerimi?**

Opazimo lahko, da morata biti točki  $\mathbf{s}_{1,j,k}$  in  $\mathbf{r}_{1,j,k}$ , kjer je  $j + k = 2$  in  $j \geq 0$ ,  $k \geq 0$ , kolinearni. Še več, trikotnika  $\langle \mathbf{r}_{1,0,2}, \mathbf{r}_{0,1,2}, \mathbf{r}_{0,0,3} \rangle$  in  $\langle \mathbf{s}_{0,1,2}, \mathbf{s}_{0,0,3}, \mathbf{s}_{1,0,2} \rangle$  morata biti afini sliki domenskih trikotnikov  $T_1$  in  $T_2$ . Enako mora veljati tudi za trikotnika  $\langle \mathbf{r}_{1,1,1}, \mathbf{r}_{0,2,1}, \mathbf{r}_{0,1,2} \rangle$  in  $\langle \mathbf{s}_{0,2,1}, \mathbf{s}_{0,1,2}, \mathbf{s}_{1,1,1} \rangle$  ter trikotnika  $\langle \mathbf{r}_{1,2,0}, \mathbf{r}_{0,3,0}, \mathbf{r}_{0,2,1} \rangle$  in  $\langle \mathbf{s}_{0,3,0}, \mathbf{s}_{0,2,1}, \mathbf{s}_{1,2,0} \rangle$ .

Izbira kontrolnih točk  $C^1$ -zveznih ploskev je torej v veliki meri odvisna od domenskih trikotnikov, kar nas precej omejuje pri konstrukciji. Oglejmo si primer, kjer imamo podane robne točke dveh ploskev, ni pa možno najti notranjih kontrolnih točk, da bi bil stik ploskev  $C^1$ -zvezen.

**Primer 5.5.** Imejmo trikotni ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  kot v primeru 5.4. Predpostavljajmo, da imamo že vnaprej določene njune robne točke, tako da so robovi dobljenega zlepk  $C^1$ -zvezni. **dodaj: kaj mora veljati, da so robovi  $C^1$ ?** Naj velja

$$\mathbf{s}_{1,0,2} = \alpha_1 \mathbf{r}_{1,0,2} + \alpha_2 \mathbf{r}_{0,1,2} + \alpha_3 \mathbf{r}_{0,0,3}$$

in

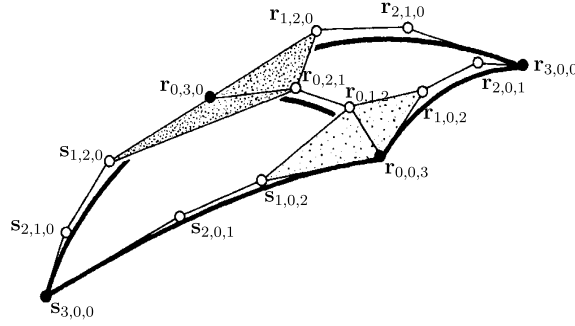
$$\mathbf{s}_{1,2,0} = \beta_1 \mathbf{r}_{0,1,2} + \beta_2 \mathbf{r}_{0,3,0} + \beta_3 \mathbf{r}_{0,2,1},$$

kjer je  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ . V tem primeru je nemogoče določiti točki  $\mathbf{r}_{1,1,1}$  in  $\mathbf{s}_{1,1,1}$ , da bi bil dobljeni zlepek  $C^1$ -zvezen, saj para trikotnikov  $\langle \mathbf{r}_{1,0,2}, \mathbf{r}_{0,1,2}, \mathbf{r}_{0,0,3} \rangle$  in  $\langle \mathbf{s}_{0,1,2}, \mathbf{s}_{0,0,3}, \mathbf{s}_{1,0,2} \rangle$  ter  $\langle \mathbf{r}_{1,2,0}, \mathbf{r}_{0,3,0}, \mathbf{r}_{0,2,1} \rangle$  in  $\langle \mathbf{s}_{0,3,0}, \mathbf{s}_{0,2,1}, \mathbf{s}_{1,2,0} \rangle$  nista afini sliki istega para domenskih trikotnikov.

V zgornjem primeru smo videli, da je pogoj  $C^1$ -zveznosti za trikotne Bézierjeve ploskve dokaj strog in tesno povezan z izbiro domene. Geometrijska zveznost pa nam da milejše pogoje, saj nimamo več odvisnosti od domene. Če bi v zgornjem primeru zahtevali le  $G^1$ -zveznost, bi bilo mogoče določiti točki  $\mathbf{r}_{1,1,1}$  in  $\mathbf{s}_{1,1,1}$ .

Oglejmo si še en zelo enostaven primer ploskev, ki na stiku zaradi izbire domene ne moreta biti  $C^1$ -zvezni, lahko pa sta  $G^1$ -zvezni.





Slika 5: Osenčena para trikotnikov na sliki sta afini sliki dveh različnih domenskih trikotnikov, zato ni mogoče najti notranjih kontrolnih točk, da bi bil stik ploskev  $C^1$ -zvezen.

**Primer 5.6.** Imejmo dve trikotni Bézierovi ploskvi stopnje 1:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \mathbf{r}_{1,0,0}u + \mathbf{r}_{0,1,0}v + \mathbf{r}_{0,0,1}w; \quad (u, v, w) = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_1)$$

in

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{s}_{1,0,0}\tilde{u} + \mathbf{s}_{0,1,0}\tilde{v} + \mathbf{s}_{0,0,1}\tilde{w}; \quad (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Naj velja  $\mathbf{r}_{1,0,0} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{r}_{0,1,0} = \mathbf{s}_{0,1,0} = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}_{0,0,1} = \mathbf{s}_{0,0,1} = (1, 1, 0)$  in  $\mathbf{s}_{0,0,1} = (1, 0, 0)$ . Ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  sta torej dva pravokotna trikotnika v ravnini  $z = 0$ , ki skupaj tvorita kvadrat. Trikotnika  $T_1$  in  $T_2$  definirajmo kot  $T_1 = \langle (0, 1), (0, 0), (1, 0) \rangle$  in  $T_2 = \langle (0, 1), (0, 0), (1, 0) \rangle$ .

**prelom?**

Očitno je, da je stik ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$   $G^1$ -zvezen, saj imata ploskvi vzdolž stične krivulje isto konstantno tangentno ravnino. Vendar pa stik teh dveh ploskev ni  $C^1$ -zvezen. Naj bo  $\alpha = \text{Bar}(\mathbf{s}_{1,0,0}; T_1)$ . Torej je  $\alpha = (-1, 2, 0)$ . Da bi bil stik ploskev  $C^1$ -zvezen, bi moralo biti zadoščeno enačbi (5.3), torej bi moralo veljati

$$\mathbf{s}_{1,0,0} = -\mathbf{r}_{1,0,0} + 2\mathbf{r}_{0,1,0},$$

kar pa v našem primeru ne drži.

### 5.3 Konstrukcija $G^1$ -zveznih trikotnih Bézierovih ploskev

Tako kot v primeru Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta, obstaja več načinov konstrukcije  $G^1$ -zveznih trikotnih Bézierovih ploskev, odvisno od izbire povezovalnih funkcij. V tem podpoglavju si bomo ogledali enega izmed načinov konstrukcije dveh trikotnih Bézierovih ploskev, ki sta na skupnem robu zvezni, vendar pa se tega ne bomo lotili prek osnovne definicije geometrijske zveznosti oziroma izreka 2.8, temveč prek geometrijske definicije.

Imejmo ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stopnje  $n$  nad trikotnima domenama  $T_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$  in  $T_2 = \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{r}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{s}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\tilde{\mathbf{u}}); \quad \tilde{\mathbf{u}} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_2).$$

Naj bo  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  in  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ . Ploskvi se stikata na robu nad daljico  $\overline{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3}$ , oziroma na robu, določenem z  $u = \tilde{u} = 0$ . Torej velja  $\mathbf{r}_{0,j,k} = \mathbf{s}_{0,j,k}$  za  $j \geq 0, k \geq 0, j+k=0$ . Stično krivuljo lahko zapišemo kot  $C(v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{r}_{0,j,n-j} B_j^n(v)$ , kjer je  $v \in [0, 1]$ .

Naj bo  $\mathbf{C}(v)$  točka na stični krivulji pri parametru  $v$ . V poglavju 5.1 smo videli, da je mogoče tangentno ravnino na Bézierovo ploskev v neki točki izraziti s pomočjo točk, ki jih dobimo v predzadnjem koraku de Casteljaujevega algoritma. Tangentno ravnino na ploskev  $\mathbf{R}$  v točki  $\mathbf{C}(v)$  razpenjajo točke  $\mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v)$ ,  $\mathbf{r}_{0,1,0}^{n-1}(v)$  in  $\mathbf{r}_{0,0,1}^{n-1}(v)$ . Tangentno ravnino na ploskev  $\mathbf{S}$  v točki  $\mathbf{C}(v)$  pa razpenjajo točke  $\mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v)$ ,  $\mathbf{s}_{0,1,0}^{n-1}(v)$  in  $\mathbf{s}_{0,0,1}^{n-1}(v)$ . Da bo zlepek obeh ploskev  $G^1$ -zvezen, morata biti obe tangentni ravnini del ene ravnine. To pomeni, da se morata premici  $\overline{\mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v) \mathbf{r}_{0,0,1}^{n-1}(v)}$  in  $\overline{\mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v) \mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v)}$  sekati za vsako vrednost parametra  $v \in [0, 1]$ . Torej morata obstajati funkciji  $\lambda(v)$  in  $\mu(v)$ , za kateri velja

$$(1 - \lambda(v)) \mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v) + \lambda(v) \mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v) = (1 - \mu(v)) \mathbf{r}_{0,0,1}^{n-1}(v) + \mu(v) \mathbf{r}_{0,1,0}^{n-1}(v). \quad (5.4)$$

S tem smo med drugim zagotovili tudi, da se točki  $\mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v)$  in  $\mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v)$  za vsako vrednost  $v \in [0, 1]$  nahajata na različnih straneh robne krivulje. Dobljeni zlepek tako ne bo imel oblike špice. Veljati mora še, da sta funkciji  $\lambda(v)$  in  $\mu(v)$  na intervalu  $[0, 1]$  različni od 0 in 1, da tangentne ravnine na  $\mathbf{C}(v)$  niso izrojene. Enačba (5.4) predstavlja pogoj, ki zagotavlja  $G^1$ -zveznost zlepka ploskev.

Iz de Casteljaujevega algoritma sledi, da lahko točke, ki razpenjajo tangenti ravnini zapišemo na naslednji način

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{1,i,n-i-1} B_i^{n-1}(v) & \mathbf{r}_{0,1,0}^{n-1}(v) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1} B_i^{n-1}(v) \\ \mathbf{r}_{0,0,1}^{n-1}(v) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i,n-i} B_i^{n-1}(v) & \mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} B_i^{n-1}(v). \end{aligned}$$

Zaradi ujemanja kontrolnih točk na skupnem robu, je  $\mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v) = \mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v)$  in  $\mathbf{s}_{0,1,0}^{n-1}(v) = \mathbf{r}_{0,1,0}^{n-1}(v)$ .

Preden nadaljujemo z izpeljavo, si samo oglejmo povezavo med dobljeno enačbo (5.4) in enačbo, ki bi jo dobili, če bi pri izpeljavi izhalaji iz izreka 2.8. Po izreku 2.8 sta ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  na stiku  $G^1$ -zvezni natanko tedaj, ko obstajata  $C^1$  funkciji  $\alpha_1(v)$  in  $\beta_1(v)$ , da velja

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}(0, v) = \alpha_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}(0, v) + \beta_1(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}}(0, v). \quad (5.5)$$

Ker so Bézierjeve ploskve polinomske, morata biti funkciji  $\alpha_1(v)$  in  $\beta_1(v)$  je pogoj v enačbi (5.5) enakovreden pogoj, da obstajajo polinomi  $D(v)$ ,  $E(v)$  in  $F(v)$ , da velja

$$D(v) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}(0, v) = E(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}(0, v) + F(v) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}}(0, v). \quad (5.6)$$

Odvod ploskve  $\mathbf{S}$  po  $\tilde{u}$  je enak odvodu v smeri vektorja z baricentričnimi koordinatami  $(1, 0, -1)$ , enako je odvod  $\mathbf{R}$  po  $u$  enak odvodu v smeri vektorja z bari-centričnimi koordinatami  $(1, 0, -1)$ , medtem ko je odvod  $\mathbf{R}$  po  $v$  enak odvodu v smeri vektorja z baricentričnimi koordinatami  $(0, 1, -1)$ . Odvode izrazimo s pomočjo enačbe (5.1), dobljeno vstavimo v enačbo (5.6) in dobimo

$$D(y)(\mathbf{s}_{1,0,0}^{n-1}(v) - \mathbf{r}_{0,0,1}^{n-1}(v)) = E(y)(\mathbf{r}_{1,0,0}^{n-1}(v) - \mathbf{r}_{0,0,1}^{n-1}(v)) + F(y)(\mathbf{r}_{0,1,0}^{n-1}(v) - \mathbf{r}_{0,0,1}^{n-1}(v)).$$

Vidimo lahko, da je dobljeni pogoj enakovreden pogoju v enačbi (5.4), če izberemo  $D(v) = 1 - \lambda(v)$ ,  $E(v) = -\lambda(v)$  in  $F(v) = \mu(v)$ . Pogoj, da je  $\lambda(v)$  različna od 0 in 1 na  $[0, 1]$  pa je ekvivalenten pogoju, da je  $\alpha_1(v) \neq 0$  oziroma  $D(v)E(v) \neq 0$  na  $[0, 1]$ . Torej lahko vidimo, da nas bo izpeljava prek geometrijske definicije pripeljala do enakega rezultata kot izpeljava z uporabo izreka 2.8 in dodatno omejitvijo, da je  $D(v) = E(v) + 1$ .

Nadaljujmo z obravnavo enačbe (5.4). Najprej si oglejmo, kakšne pogoje nam da enačba (5.4) za robne kontrolne točke. Vstavimo v enačbo (5.4) vrednosti  $v = 0$  in  $v = 1$ . Pri vrednosti  $v = 0$  dobimo:

$$(1 - \lambda_0)\mathbf{s}_{1,0,n-1} + \lambda_0\mathbf{r}_{1,0,n-1} = (1 - \mu_0)\mathbf{r}_{0,0,n} + \mu_0\mathbf{r}_{0,1,n-1},$$

kjer smo vpeljali oznaki  $\lambda_0 = \lambda(0)$  in  $\mu_0 = \mu(0)$ . Pri vrednosti  $v = 1$  pa dobimo:

$$(1 - \lambda_1)\mathbf{s}_{1,n-1,0} + \lambda_1\mathbf{r}_{1,n-1,0} = (1 - \mu_1)\mathbf{r}_{0,n-1,1} + \mu_1\mathbf{r}_{0,n,0},$$

kjer smo vpeljali še oznaki  $\lambda_1 = \lambda(1)$  in  $\mu_1 = \mu(1)$ . Vrednosti  $\lambda_0$  in  $\mu_0$  opisujeta obliko prvega para trikotnikov v kontrolni mreži ob skupnem robu, vrednosti  $\lambda_1$  in  $\mu_1$  pa zadnji par trikotnikov. Vidimo, da oblika obeh parov ni več nujno enaka, torej para trikotnikov nista več nujno afini sliki istega para domenskih trikotnikov. Že tu vidimo, da so pogoji, ki jih zahteva  $G^1$ -zveznost, milejši od zahteve  $C^1$ -zveznosti. Posledično je, kot smo videli že v primeru ploskev iz tenzorskega produkta, mogoča konstrukcija ploskev veliko več različnih oblik.

Sedaj za funkciji  $\lambda(v)$  in  $\mu(v)$  izberimo polinoma prve stopnje

$$\lambda(v) = (1 - v)\lambda_0 + v\lambda_1, \quad \mu(v) = (1 - v)\mu_0 + v\mu_1.$$

Da si olajšajmo nadaljnje delo, najprej nekoliko preoblikujmo izraza  $1 - \lambda(v)$  in  $1 - \mu(v)$ .

$$\begin{aligned} 1 - \lambda(v) &= 1 - \lambda_0(1 - v) - \lambda_1v = 1 - \lambda_0 + \lambda_0v - \lambda_1v = \\ &= (1 - \lambda_0)(1 - v) + (1 - \lambda_1)v \end{aligned}$$

Na enak način dobimo

$$1 - \mu(v) = (1 - \mu_0)(1 - v) + (1 - \mu_1)v$$

Polinoma vstavimo v enačbo (5.4). Najprej si oglejmo izraz

$$(1 - \lambda(v)) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} B_i^{n-1}:$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda(v)) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} B_i^{n-1} &= \\ &= (1 - \lambda_0)(1 - v) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} B_i^{n-1} + (1 - \lambda_1)v \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} B_i^{n-1} = \\ &= (1 - \lambda_0) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} v^i (1-v)^{n-i} + \\ &+ (1 - \lambda_1) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} v^{i+1} (1-v)^{n-i-1} = \\ &= (1 - \lambda_0) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} \frac{n-i}{n} B_i^n(v) + (1 - \lambda_1) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i-1,n-i} \frac{i}{n} B_i^n(v) = \\ &= (1 - \lambda_0) \sum_{i=0}^n \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} \frac{n-i}{n} B_i^n(v) + (1 - \lambda_1) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{s}_{1,i-1,n-i} \frac{i}{n} B_i^n(v). \end{aligned}$$

Na enak nain dobimo e

$$\begin{aligned} \lambda(v) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{1,i,n-i-1} B_i^{n-1} &= \lambda_0 \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_{1,i,n-i-1} \frac{n-i}{n} B_i^n(v) + \lambda_1 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{1,i-1,n-i} \frac{i}{n} B_i^n(v), \\ (1 - \mu(v)) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i,n-i} B_i^{n-1} &= (1 - \mu_0) \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_{0,i,n-i} \frac{n-i}{n} B_i^n(v) + \\ &+ (1 - \mu_1) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i-1,n-i+1} \frac{i}{n} B_i^n(v) \text{ in} \\ \mu(v) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1} B_i^{n-1} &= \mu_0 \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1} \frac{n-i}{n} B_i^n(v) + \mu_1 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{r}_{0,i,n-i} \frac{i}{n} B_i^n(v). \end{aligned}$$

Dobljeno vstavimo v enačbo (5.4) in primerjajmo lene ob baznih polinomih  $B_i^n(v)$  za vsak  $i = 0, \dots, n$ . Dobimo, da mora za vsak  $i = 0, \dots, n$  veljati enakost

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_0) \mathbf{s}_{1,i,n-i-1} \frac{n-i}{n} + (1 - \lambda_1) \mathbf{s}_{1,i-1,n-i} \frac{i}{n} + \lambda_0 \mathbf{r}_{1,i,n-i-1} \frac{n-i}{n} + \lambda_1 \mathbf{r}_{1,i-1,n-i} \frac{i}{n} &= \\ = (1 - \mu_0) \mathbf{r}_{0,i,n-i} \frac{n-i}{n} + (1 - \mu_1) \mathbf{r}_{0,i-1,n-i+1} \frac{i}{n} + \mu_0 \mathbf{r}_{0,i+1,n-i-1} \frac{n-i}{n} + \mu_1 \mathbf{r}_{0,i,n-i} \frac{i}{n}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pogoji, ki jih dobimo z enačbo (5.7) za kontrolne točke ploskev  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  zagotavljajo, da sta ploskvi na stiku  $G^1$ -zvezni. Seveda pa so to le zadostni pogoji, ne pa nujno potrebni. Z drugačno izbiro funkcij  $\lambda(v)$  in  $\mu(v)$  bi lahko prišli do drugačnih pogojev, ki bi imeli za rezultat  $G^1$ -ploskve drugačnih oblik.

Sedaj si natančneje oglejmo, kakšne pogoje za kontrolne točke bi dobili v tem primeru za ploskvi stopnje 3.

**Primer 5.7.** Imejmo ploskvi  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{S}$  stopnje 3 nad trikotnima domenama  $T_1 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$  in  $T_2 = \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{r}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_1),$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{s}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\tilde{\mathbf{u}}); \quad \tilde{\mathbf{u}} = \text{Bar}(\mathbf{p}; T_2),$$

kjer je  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  in  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ . Ploskvi se ponovno stikata na robu nad daljico  $\overline{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}$ , oziroma na robu, določenem z  $u = \tilde{u} = 0$ .

Zlepek obeh ploskev bo  $G^1$ -zvezen, če bodo za njune kontrolne točke veljale naslednje enačbe.

$$(1 - \lambda_0)\mathbf{s}_{1,0,2} + \lambda_0\mathbf{r}_{1,0,2} = (1 - \mu_0)\mathbf{r}_{0,0,3} + \mu_0\mathbf{r}_{0,1,2}, \quad (5.8)$$

$$(1 - \lambda_1)\mathbf{s}_{1,2,0} + \lambda_1\mathbf{r}_{1,2,0} = (1 - \mu_1)\mathbf{r}_{0,2,1} + \mu_1\mathbf{r}_{0,3,0}. \quad (5.9)$$

Zgornji enačbi določata razmerje med robnimi kontrolnimi točkami. Iz enačbe (5.7) pa sledita še pogoja

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_0)\frac{2}{3}\mathbf{s}_{1,1,1} + (1 - \lambda_1)\frac{1}{3}\mathbf{s}_{1,0,2} + \lambda_0\frac{2}{3}\mathbf{r}_{1,1,1} + \lambda_1\frac{1}{3}\mathbf{r}_{1,0,2} = \\ (1 - \mu_0)\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,1,2} + (1 - \mu_1)\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,0,3} + \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,2,1} + \mu_1\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,1,2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

in

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_0)\frac{1}{3}\mathbf{s}_{1,2,0} + (1 - \lambda_1)\frac{2}{3}\mathbf{s}_{1,1,1} + \lambda_0\frac{1}{3}\mathbf{r}_{1,2,0} + \lambda_1\frac{2}{3}\mathbf{r}_{1,1,1} = \\ (1 - \mu_0)\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,2,1} + (1 - \mu_1)\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,1,2} + \mu_0\frac{1}{3}\mathbf{r}_{0,3,0} + \mu_1\frac{2}{3}\mathbf{r}_{0,2,1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

primerjava prostih in določenih kontrolnih točk  
dodati še primer, ko je r določena, s pa ne? kako je v tem primeru s konsistentnostjo sistema?

primer od prej, ki ni šel s c1 samo da ga zdaj rešimo z g1?

## 6 Kompatibilnostni pogoji v skupnem vozlišču

ta naslov??

Do sedaj smo se ukvarjali zgolj z geometrijsko zveznostjo na stiku dveh ploskev. Dobljeno znanje sedaj prenesimo na primer, ko sestavimo večjo skupno ploskev iz večih manjših, natančneje, osredotočimo se na primer konstrukcije ploskve, sestavljene iz  $N$  ploskev, ki se vse stikajo v skupni točki. Očitno je, da je geometrijska zveznost v takem primeru veliko uporabnejša od parametrične zveznosti. Če bi med ploskvami zahtevali parametrično zveznost, bi bilo v primeru, da za konstrukcijo uporabljamo Bézierove ploslve iz temzorskega produkta, mogoče stakniti skupaj le po 4 ploskve, kar nas zelo omejuje, kar se tiče oblike objektov, ki jih lahko skonstruiramo na tak način. Če zahtevamo geometrijsko zveznost pa lahko staknemo skupaj poljubno število ploskev.

V nadaljevanju si bomo ogledali pogoje, ki morajo veljati, da dosežemo  $G^1$ -zveznost med ploskvami, ki se stikajo v skupni točki.

Imejmo ploskve  $\mathbf{X}_1(u_1, v_1), \mathbf{X}_2(u_2, v_2), \dots, \mathbf{X}_N(u_N, v_N)$ . Te naj se stikajo v krivuljah

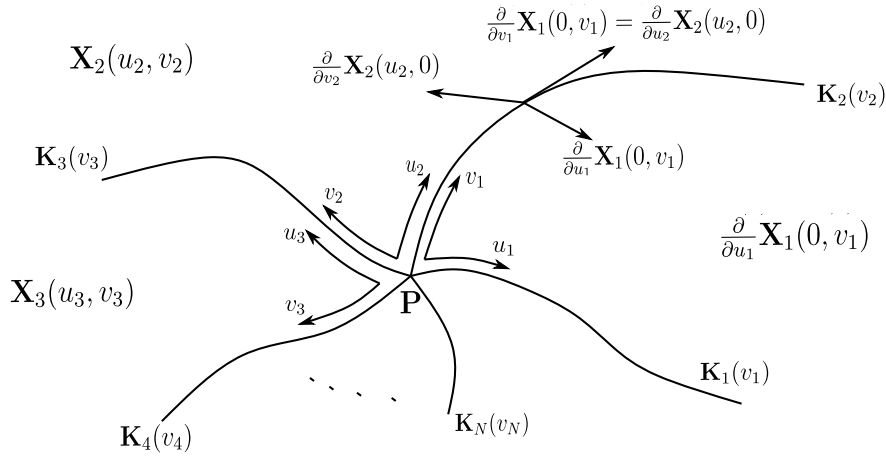
$$\mathbf{K}_i(v_i) = \mathbf{X}_i(0, v_i) = \mathbf{X}_{i+1}(u_{i+1}, 0),$$

kjer je  $i = 1, \dots, N-1$ , ter v

$$\mathbf{K}_N(v_N) = \mathbf{X}_N(0, v_N) = \mathbf{X}_1(u_1, 0).$$

Na skupnih robovih torej velja  $v_i = u_{i+1}$  za  $i = 1, \dots, N-1$  in  $v_N = u_1$ . Vse ploskve se torej stikajo v točki

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}_1(0, 0) = \mathbf{X}_2(0, 0) = \dots = \mathbf{X}_N(0, 0).$$



Slika 6: Parametrizacija  $N$  ploskev, ki se stikajo v skupni točki  $\mathbf{P}$ . Parametriziramo jih na tak način, da se stikajo v točki  $\mathbf{X}_1(0, 0) = \dots = \mathbf{X}_N(0, 0)$ .

Videli bomo, da za  $G^1$ -zveznost niso dovolj le pogoji, izpeljani v prejšnjih poglavjih. Da dosežemo  $G^1$ -zveznost med ploskvami, morajo biti odvodi  $\frac{\partial}{\partial u_i} \mathbf{X}_i(0, 0)$  in  $\frac{\partial}{\partial v_i} \mathbf{X}_i(0, 0)$ , kjer je  $i = 1, \dots, N$ , vsi del iste tangentne ravnine. V točki  $\mathbf{P}$  morajo imeti vse ploskve enako enotsko normalo. Torej ni dovolj obravnavati po dve in dve ploskvi, temveč moramo obravnavati vse skupaj, kar nam prinese nekaj dodatnih pogojev zanje. Dodatne pogoje pa dobimo še iz zahteve, da se v točki  $\mathbf{P}$  ujemajo tudi mešani odvodi ploskev. V primeru  $G^1$ -zveznosti med dvema ploskvama je bila ta zahteva zaradi ujemanja ploskev v skupni krivulji avtomatično izpolnjena, v primeru stika med večimi ploskvami pa prinese dodatne pogoje, ki morajo veljati za ploskve ter povezovalne funkcije.

Po izreku 2.8 sta ploskvi  $\mathbf{X}_i$  in  $\mathbf{X}_{i+1}$  na stiku  $G^1$  zvezni, če obstajata funkciji  $\alpha_i(v_i)$  in  $\beta_i(v_i)$ , da velja

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \mathbf{X}_i(0, v_i) = \alpha_i(v_i) \frac{\partial}{\partial v_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(u_{i+1}, 0) + \beta_i(v_i) \frac{\partial}{\partial u_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(u_{i+1}, 0) \quad (6.1)$$

za  $i = 1, \dots, N - 1$  ter

$$\frac{\partial}{\partial u_N} \mathbf{X}_N(0, v_N) = \alpha_i(v_N) \frac{\partial}{\partial v_1} \mathbf{X}_1(u_1, 0) + \beta_i(v_N) \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{X}_1(u_1, 0). \quad (6.2)$$

V točki  $\mathbf{P}$  mora torej veljati

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \mathbf{X}_i(0, 0) = \alpha_i(v_i) \frac{\partial}{\partial v_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(0, 0) + \beta_i(v_i) \frac{\partial}{\partial u_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(0, 0) \quad (6.3)$$

za  $i = 1, \dots, N - 1$  ter

$$\frac{\partial}{\partial u_N} \mathbf{X}_N(0, 0) = \alpha_i(v_N) \frac{\partial}{\partial v_1} \mathbf{X}_1(0, 0) + \beta_i(v_N) \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{X}_1(0, 0). \quad (6.4)$$

Da stiki med ploskvami nimajo oblike "špice", mora veljati še  $\alpha_i(v_i) < 0$  za  $v_i \in [0, 1]$  in  $i = 1, \dots, N$ .

Enačbi (6.3) in (6.4) nam data prvi sklop kompatibilnostnih pogojev, ki morajo veljati za ploskve  $\mathbf{X}_i$  in njihove povezovalne funkcije v točki  $\mathbf{P}$ . Te pogoje si oglejmo na primeru Bézierjevih ploskev iz tenzorskega produkta. Naj bodo ploskve  $\mathbf{X}_i$  stopnje  $(n, n)$  in naj bodo definirane kot

$$\mathbf{X}_i(u_i, v_i) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_{j,k}^{(i)} B_j^n(u_i) B_k^n(v_i) \quad u_i, v_i \in [0, 1] \quad (6.5)$$

za  $i = 1, \dots, N$ . Velja, da je  $\mathbf{P} = \mathbf{x}_{0,0}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Zaradi stikanja v krivuljah  $\mathbf{K}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , za njihove kontrolne točke velja  $\mathbf{x}_{0,j}^{(i)} = \mathbf{x}_{j,0}^{(i+1)}$  za  $j = 0, \dots, n$  in  $i = 1, \dots, N - 1$  ter  $\mathbf{x}_{0,j}^{(N)} = \mathbf{x}_{j,0}^{(1)}$  za  $j = 0, \dots, n$ .

Naj bodo povezovalne funkcije  $\alpha_i(v_i)$  konstantne, torej naj bo

$$\alpha_i(v_i) \equiv \alpha_{i,0}, \quad (6.6)$$

funkcije  $\beta_i(v_i)$  pa naj bodo linearni polinomi oblike

$$\beta_i(v_i) = \beta_{i,0}(1 - v_i) + \beta_{i,1}v_i. \quad (6.7)$$

V poglavju 4.1 smo izpeljali, da mora v tem primeru, da dosežemo  $G^1$ -zveznost med ploskvama  $\mathbf{X}_i$  in  $\mathbf{X}_{i+1}$  pri  $v_i = u_{i+1} = 0$  veljati

$$\mathbf{x}_{1,0}^{(i)} - \mathbf{P} = \alpha_{i,0}(\mathbf{x}_{0,1}^{(i+1)} - \mathbf{P}) + \beta_{i,0}(\mathbf{x}_{1,0}^{(i+1)} - \mathbf{P}) \quad (6.8)$$

za  $i = 1, \dots, N - 1$  in

$$\mathbf{x}_{1,0}^{(N)} - \mathbf{P} = \alpha_{i,0}(\mathbf{x}_{0,1}^{(1)} - \mathbf{P}) + \beta_{i,0}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}), \quad (6.9)$$

pri  $v_i = u_{i+1} = 1$  mora biti

$$\mathbf{x}_{1,n}^{(i)} - \mathbf{x}_{0,n}^{(i)} = \alpha_{i,0}(\mathbf{x}_{n,1}^{(i+1)} - \mathbf{x}_{n,0}^{(i+1)}) + \beta_{i,1}(\mathbf{x}_{n,0}^{(i+1)} - \mathbf{x}_{n-1,0}^{(i+1)}) \quad (6.10)$$

za  $i = 1, \dots, N - 1$  in

$$\mathbf{x}_{1,n}^{(N)} - \mathbf{x}_{0,n}^{(N)} = \alpha_{i,0}(\mathbf{x}_{n,1}^{(1)} - \mathbf{x}_{n,0}^{(1)}) + \beta_{i,1}(\mathbf{x}_{n,0}^{(1)} - \mathbf{x}_{n-1,0}^{(1)}), \quad (6.11)$$

med preostalimi kontrolnimi točkami pa mora po enačbi (4.12) veljati zveza

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1,j}^{(i)} - \mathbf{x}_{0,j}^{(i)} &= \alpha_{i,0}(\mathbf{x}_{1,j}^{(i+1)} - \mathbf{x}_{0,j}^{(i+1)}) + \beta_{i,0} \left(1 - \frac{j}{n}\right) (\mathbf{x}_{0,j+1}^{(i+1)} - \mathbf{x}_{0,j}^{(i+1)}) + \\ &+ \beta_{i,1} \frac{j}{n} (\mathbf{x}_{0,j}^{(i+1)} - \mathbf{x}_{0,j-1}^{(i+1)}), \quad j = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

za  $i = 1, \dots, N-1$  oziroma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1,j}^{(N)} - \mathbf{x}_{0,j}^{(N)} &= \alpha_{N,0}(\mathbf{x}_{1,j}^{(1)} - \mathbf{x}_{0,j}^{(1)}) + \beta_{N,0} \left(1 - \frac{j}{n}\right) (\mathbf{x}_{0,j+1}^{(1)} - \mathbf{x}_{0,j}^{(1)}) + \\ &+ \beta_{N,1} \frac{j}{n} (\mathbf{x}_{0,j}^{(1)} - \mathbf{x}_{0,j-1}^{(1)}), \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Izmed enačb (6.8)-(6.13) nam tiste, v katerih se točka  $\mathbf{P}$  ne pojavi, ne prinesejo nobenih dodatnih pogojev, obravnavamo jih enako kot v poglavju 4.1. Pogoje, ki jih dobimo iz enačb (6.12) in (6.13) pri  $j = 1$ , bomo v nadaljevanju izpeljali na nekoliko drugačen način.

Sedaj najprej analizirajmo sistem enačb v (6.8) in (6.9). Predpostavljajmo, da imamo vnaprej določeno točko  $\mathbf{P}$  in dve izmed točk  $\mathbf{x}_{1,0}^{(i)} = \mathbf{x}_{0,1}^{(i+1)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , na primer točki  $\mathbf{x}_{1,0}^{(1)}$  in  $\mathbf{x}_{1,0}^{(2)}$ . Preostale kontrolne točke  $\mathbf{x}_{1,0}^{(i)}$ ,  $i = 3, \dots, N$  so določene z enačbami (6.8) in (6.9) ter vrednostmi  $\alpha_{i,0}$  in  $\beta_{i,0}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Pri tem pa izbira vrednosti  $\alpha_{i,0}$  in  $\beta_{i,0}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ni svobodna. Oglejmo si, kakšni pogoji veljajo zanje.

Vse kontrolne vektorje  $(\mathbf{x}_{1,0}^{(i)} - \mathbf{P})$ ,  $i = 3, \dots, N$  lahko izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev  $(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P})$  in  $(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P})$  s pomočjo enačb (6.8),  $i = 1, \dots, N-2$ . Iz enačbe v (6.8) pri  $i = 1$  na primer izrazimo vektor  $\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P}$  kot

$$\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P} = \frac{1}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{1,0}}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}).$$

Iz enačbe pri  $i = 2$  nato izrazimo vektor  $\mathbf{x}_{1,0}^{(4)} - \mathbf{P}$  kot

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1,0}^{(4)} - \mathbf{P} &= \frac{1}{\alpha_{2,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{2,0}}{\alpha_{2,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P}) = \\ &= \frac{1}{\alpha_{2,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{2,0}}{\alpha_{2,0}} \left( \frac{1}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{1,0}}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) \right) - \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Postopek nadaljujemo za preostale vektorje  $\mathbf{x}_{1,0}^{(i)}$ ,  $i = 5, \dots, N$ . Iz enačbe v (6.8) pri  $i = N-1$  nato na enak način izrazimo vektor  $\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}$  iz enačbe (6.9) pa vektor  $\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}$  kot linearno kombinacijo vektorjev  $\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}$  in  $\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}$ . Od tod dobimo pogoja oblike

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) &= F_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) + \\ &+ G_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}), \\ (\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) &= F_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) + \\ &+ G_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}), \end{aligned}$$



kjer so  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G_1$  in  $G_2$  multilinearne funkcije konstant  $\alpha_{i,0}$  in  $\beta_{i,0}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Za  $G^1$ -zveznost v točki  $\mathbf{P}$  morajo zato za konstante veljati pogoji

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0}) &= 1 \\ G_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0}) &= 0 \\ F_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0}) &= 0 \\ G_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \dots, \alpha_{N,0}, \beta_{N,0}) &= 1. \end{aligned}$$

Oglejmo si malo bolj konkretno, kako so videti ti pogoji v primeru, ko je  $N = 3$ .

**Primer 6.1.** Imejmo ploskve  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  in  $\mathbf{X}_3$ , definirane kot v (6.5), ki se stikajo v krivuljah

$$\mathbf{K}_i(v_i) = \mathbf{X}_i(0, v_i) = \mathbf{X}_{i+1}(u_{i+1}, 0),$$

kjer je  $i = 1, 2$ , oziroma v

$$\mathbf{K}_3(v_3) = \mathbf{X}_3(0, v_3) = \mathbf{X}_1(u_1, 0).$$

Naj bodo povezovalne funkcije  $\alpha_i(v_i)$  in  $\beta_i(v_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , definirane kot v (6.6) oziroma (6.7). Iz enačb (6.8) in (6.9) sledi, da za kontrolne točke ploskev velja

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P} &= \alpha_{1,0}(\mathbf{x}_{0,1}^{(2)} - \mathbf{P}) + \beta_{1,0}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) \\ \mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P} &= \alpha_{2,0}(\mathbf{x}_{0,1}^{(3)} - \mathbf{P}) + \beta_{2,0}(\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P}) \\ \mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P} &= \alpha_{3,0}(\mathbf{x}_{0,1}^{(1)} - \mathbf{P}) + \beta_{3,0}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Upoštevajmo še, da zaradi stikanja ploskev velja  $\mathbf{x}_{0,1}^{(1)} = \mathbf{x}_{1,0}^{(2)}$ ,  $\mathbf{x}_{0,1}^{(2)} = \mathbf{x}_{1,0}^{(3)}$  in  $\mathbf{x}_{0,1}^{(3)} = \mathbf{x}_{1,0}^{(1)}$ .

Kot prej predpostavimo, da so točke  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{x}_{1,0}^{(1)}$  in  $\mathbf{x}_{1,0}^{(2)}$  v naprej predpisane, točka  $\mathbf{x}_{1,0}^{(3)}$  pa je določena z njimi ter z vrednostmi  $\alpha_{i,0}$  in  $\beta_{i,0}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Ogledali si bomo kakšni pogoji morajo v tem primeru veljati za  $\alpha_{i,0}$  in  $\beta_{i,0}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Iz prve enačbe v (6.14) izrazimo vektor  $(\mathbf{x}_{0,1}^{(2)} - \mathbf{P}) = (\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P})$ :

$$\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P} = \frac{1}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{1,0}}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P})$$

Iz druge in tretje enačbe izrazimo vektorja  $\mathbf{x}_{0,1}^{(3)} - \mathbf{P} = \mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}$  in  $\mathbf{x}_{0,1}^{(1)} - \mathbf{P} = \mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P} &= \frac{1}{\alpha_{2,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{2,0}}{\alpha_{2,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P}) = \\ &= \frac{1}{\alpha_{2,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{2,0}}{\alpha_{2,0}}\left(\frac{1}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{1,0}}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P})\right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P} &= \frac{1}{\alpha_{3,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(3)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{3,0}}{\alpha_{3,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) = \\ &= \frac{1}{\alpha_{3,0}}\left(\frac{1}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) - \frac{\beta_{1,0}}{\alpha_{1,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P})\right) - \frac{\beta_{3,0}}{\alpha_{3,0}}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Enačbi (6.15) in (6.16) sta oblike

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) &= F_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) + \\ &\quad + G_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}), \\ (\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}) &= F_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(1)} - \mathbf{P}) + \\ &\quad + G_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0})(\mathbf{x}_{1,0}^{(2)} - \mathbf{P}),\end{aligned}$$

kjer se funkcije  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $F_2$  in  $G_2$  izražajo kot

$$\begin{aligned}F_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0}) &= -\frac{\beta_{2,0}}{\alpha_{2,0}\alpha_{1,0}} \\ G_1(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0}) &= \frac{1}{\alpha_{2,0}} + \frac{\beta_{2,0}\beta_{1,0}}{\alpha_{2,0}\alpha_{1,0}} \\ F_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0}) &= \frac{1}{\alpha_{3,0}\alpha_{1,0}} - \frac{\beta_{3,0}}{\alpha_{3,0}} \\ G_2(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{2,0}, \alpha_{3,0}, \beta_{3,0}) &= -\frac{\beta_{1,0}}{\alpha_{1,0}\alpha_{3,0}}.\end{aligned}$$

Od tod dobimo pogoje, ki morajo veljati za povezovalne funkcije  $\alpha_i(v_i)$  in  $\beta_i(v_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned}-\frac{\beta_{2,0}}{\alpha_{2,0}\alpha_{1,0}} &= 1 & \frac{1}{\alpha_{3,0}\alpha_{1,0}} - \frac{\beta_{3,0}}{\alpha_{3,0}} &= 0 \\ \frac{1}{\alpha_{2,0}} + \frac{\beta_{2,0}\beta_{1,0}}{\alpha_{2,0}\alpha_{1,0}} &= 0 & -\frac{\beta_{1,0}}{\alpha_{1,0}\alpha_{3,0}} &= 1.\end{aligned}$$

Sedaj si oglejmo še drugi sklop kompatibilnostnih pogojev v točki  $\mathbf{P}$ . Ti nam bodo določali pogoje za mešane odvode ploskev oziroma, v primeru Bézierovih ploskev iz tenzorskega produkta, za kontrolne točke  $\mathbf{x}_{1,1}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Če enačbi (6.1) in (6.2) odvajamo še po  $v_i = u_{i+1}$ , in ju evalviramo v  $v_i = u_i + 1 = 0$ , dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial v_i} \mathbf{X}_i(0,0) &= \alpha_i(0) \frac{\partial^2}{\partial u_{i+1} \partial v_{i+1}} \mathbf{X}(0,0) + \alpha'_i(0) \frac{\partial}{\partial v_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(0,0) + \\ &\quad + \beta_i(0) \frac{\partial^2}{\partial u_{i+1}^2} \mathbf{X}_{i+1}(0,0) + \beta'_i(0) \frac{\partial}{\partial u_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(0,0).\end{aligned}\tag{6.17}$$

Vpeljimo oznaki

$$\mathbf{P}_i = \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial v_i} \mathbf{X}_i(0,0)$$

in

$$\mathbf{R}_i = \beta_i(0) \frac{\partial^2}{\partial u_{i+1}^2} + \alpha'_i(0) \frac{\partial}{\partial v_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(0,0) + \beta'_i(0) \frac{\partial}{\partial u_{i+1}} \mathbf{X}_{i+1}(0,0)$$

ter zapišimo sistem enačb (6.17) v matrični obliki. Naj bo matrika  $B$  definirana kot

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_2(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & -\alpha_{N-1}(0) \\ -\alpha_N(0) & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem lahko sistem enačb (6.17) zapišemo kot

$$B \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Če je sistem (6.18) rešljiv, nam podaja pogoje, ki morajo veljati za mešane odvode  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Če so ploskve  $\mathbf{X}_i$  Bézierove ploskve iz tenzorskega produkta, definirane kot v (6.5), se mešani odvodi ploskev v točki  $\mathbf{P}$  izražajo kot

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial v_i} \mathbf{X}_i(0,0) = n^2(\mathbf{x}_{1,1}^{(i)} - \mathbf{x}_{0,1}^{(i)} - \mathbf{x}_{1,0}^{(i)} + \mathbf{P}) \quad i = 1, \dots, N.$$

Kontrolne točke  $\mathbf{x}_{0,1}^{(i)}$  in  $\mathbf{x}_{1,0}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , so že določene s pogoji, izpeljanimi iz (6.3) in (6.4), sistem (6.18) pa nam v primeru, da je rešljiv, podaja pogoje za kontrolne točke  $\mathbf{x}_{1,1}^{(i)}$ .

Ogljemo si še, kaj mora veljati, da je sistem (6.18) rešljiv. Enolično je rešljiv, če je determinanta matrike  $B$  neničelna. Za izračun determinante matrike  $B$  najprej vpeljimo oznaki za podmatriki matrike  $B$ . Naj bo

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_3(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & -\alpha_{N-1}(0) \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrika, ki jo dobimo, če izpustimo prvo vrstico in prvi stolpec matrike  $B$ , in naj bo

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_1(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\beta_2(0) & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{N-1}(0) \end{bmatrix}$$

matrika, ki jo dobimo, če izpustimo zadnjo vrstico in prvi stolpec matrike  $B$ . Determinanto matrike  $B$  izračunamo s pomočjo razvoja po prvem stolpcu:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(B_1) + (-1)^N(-\alpha_N(0)) \det(B_2) = 1 - (-1)^N(-\alpha_N(0)) \prod_{i=0}^{N-1} (-\alpha_i(0)) = \\ &= 1 - \prod_{i=0}^N \alpha_i(0). \end{aligned}$$

Vemo, da mora biti  $\alpha_i(0) < 0$  za  $i = 1, \dots, N$ . Če je  $N$  liho število, je torej produkt  $\prod_{i=0}^N \alpha_i(0)$  negativno število, kar pomeni, da determinanta v tem primeru ne more biti enaka 0. V primeru lihega števila ploskev je torej sistem (6.18) enolično rešljiv, kar pomeni, da so mešani parcialni odvodi enolično določeni. Če je  $N$  sodo število, pa se lahko zgodi, da je  $\det(B) = 0$ . V tem primeru sistem ali nima rešitev ali pa

ima neskončno rešitev. Slednje je možno le, če veljajo določeni pogoji za vrednosti  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N$ .

Definirajmo matriko

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_N(0) & \alpha_N(0)\alpha_1(0) & \alpha_N(0)\alpha_1(0)\alpha_2(0) & \cdots & \alpha_N(0)\alpha_1(0)\cdots\alpha_{N-1}(0). \end{bmatrix}$$

Sistem enačb (6.18) je ekvivalenten sistemu

$$CB \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Vidimo lahko, da je prvih  $N - 1$  vrstic enakih prvim  $N - 1$  vrsticam matrike  $B$  in da so med sabo linearno neodvisne. Zadnja vrstica matrike  $CB$  pa je ničelna. Torej je sistem (6.19) rešljiv in ima neskončno rešitev, če je tudi zadnja komponenta vektorja  $C \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \mathbf{R}_N \end{bmatrix}^T$  enaka 0. To pa bo res, če bo veljala zveza

$$\alpha_N(0)\mathbf{R}_1 + \alpha_N(0)\alpha_1(0)\mathbf{R}_2 + \cdots + \alpha_N(0)\alpha_1(0)\alpha_2(0)\cdots\alpha_{N-1}(0)\mathbf{R}_N = 0. \quad (6.20)$$

V primeru, da je  $\det(B) = 0$  in velja zveza (6.20), torej dobimo eno prostostno stopnjo več kot v primeru, da je  $\det(B) \neq 0$ . Sistem (6.18) mešanih parcialnih odvodov  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ne določa enolično. Eden izmed mešanih parcialnih odvodov je prost, ostali pa so določeni z njim. Ta dodatna prostostna stopnja omogoča konstrukcijo  $G^1$ -zveznih ploskev posebnih oblik, kot je na primer "opičje sedlo". [? slika.](#)

## Literatura

- [1] T. D. DeRose, *Necessary and sufficient conditions for tangent plane continuity of bézier surfaces*, Computer Aided Geometric Design **7**(1) (1990) 165 – 179, doi: [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(90\)90028-P](https://doi.org/10.1016/0167-8396(90)90028-P).
- [2] W.-H. Du in F. J. Schmitt, *On the  $g_1$  continuity of piecewise bézier surfaces: a review with new results*, Computer-Aided Design **22**(9) (1990) 556 – 573, doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(90\)90041-A](https://doi.org/10.1016/0010-4485(90)90041-A).
- [3] G. Farin, *Triangular bernstein-bézier patches*, Computer Aided Geometric Design **3**(2) (1986) 83–127.
- [4] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 5th izd., 2001.
- [5] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza ii*, Dostopno na spletnem naslovu <http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf> (2010).
- [6] D. Hansford, *Chapter 4 - bézier techniques*, v: Handbook of Computer Aided Geometric Design (ur. G. Farin, J. Hoschek in M.-S. Kim), North-Holland, Amsterdam, 2002, str. 75 – 109, doi: <https://doi.org/10.1016/B978-044451104-1/50005-8>.
- [7] J. Hoschek in D. Lasser, *Fundamentals of computer-aided geometric design*, Peters, Wellesley, Mass, 1993.
- [8] B. I. Johansson, *Geometric continuity and compatibility conditions for 4-patch surfaces*, 2010.
- [9] P. Kiciak, *Geometric continuity of curves and surfaces*, Synthesis Lectures on Visual Computing **8**(3) (2016) 1–249, doi: [10.2200/S00729ED1V01Y201608VCP025](https://doi.org/10.2200/S00729ED1V01Y201608VCP025).
- [10] M.-J. Lai in L. L. Schumaker, *Spline Functions on Triangulations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2007, doi: [10.1017/CBO9780511721588](https://doi.org/10.1017/CBO9780511721588).
- [11] J. Peters, *Chapter 8 - geometric continuity*, v: Handbook of Computer Aided Geometric Design (ur. G. Farin, J. Hoschek in M.-S. Kim), North-Holland, Amsterdam, 2002, str. 193 – 227, doi: <https://doi.org/10.1016/B978-044451104-1/50009-5>.
- [12] R. F. Sarraga, *Computer modeling of surfaces with arbitrary shapes*, IEEE Comput. Graph. Appl. **10**(2) (1990) 67–77, doi: [10.1109/38.50675](https://doi.org/10.1109/38.50675).
- [13] X. Ye, Y. Liang in H. Nowacki, *Geometric continuity between adjacent bézier patches and their constructions*, Computer Aided Geometric Design **13**(6) (1996) 521 – 548, doi: [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(95\)00043-7](https://doi.org/10.1016/0167-8396(95)00043-7).

