UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Katarina Černe

NASLOV VAŠEGA DELA

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr.

Ljubljana, 2020

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [?], [?], [?], [?].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[?]

[?]

[?]

[?]

Podpis mentorja:

Naslov vašega dela

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: ,

Keywords: ,

1 Uvod

začneš s tem, da bi radi različne oblike opisali s čim bolj enostavnimi elementi. v ta namen uporabljamo enostavne parametrične ploskve (zelo pogosto polinomske npr. bezierove), ki jih nato lepimo skupaj v kompleksnejše oblike. želimo, da bi bil stik dveh takih ploskev videti gladek, ploskvi morata biti zato prek skupne meje zvezni. predstaviš običajno zveznost, poveš, zakaj ni ustrezna

lahko najprej poveš, kaj je c zveznost, potem pa navedeš primer, kjer c zveznost ne pride v poštev (farin? skopirana knjiga?)

geometrijska zveznost je zelo uporabna v praksi, ker lahko modeliramo različne situacije, kjer c zveznost odpove (npr. zvezda, suitcase corner, house corner)

je invarianta za parametrične transformacije, tj neodvisna od parametrizacije

geometrijska zveznost je posplošitev c zveznosti. torej vse nedegenerirane (kaj to pomeni?) ploskve, ki so c zvezne, so tudi geometrisko zvezne, niso pa vse geometrijsko zvezne ploskve tudi c zvezne (primer v farin, ne razumem)

s čim se to delo ukvarja in kaj bo v kakšnem poglavju

2 Geometrijska zveznost

nek uvodni tekst? Najprej si oglejmo povsem splošno definicijo geometriske zveznosti neke ploskve.

Definicija 2.1. Ploskev pripada razredu G^n oziroma je *geometrijsko zvezna z redom* n, če v okolici vsake njene točke obstaja lokalna regularna parametrizacija razreda C^n.

definicija regularne ploskve - lahko poveš definicijo

potem lahko poveš, da to v praksi pomeni, da je normala na ploskev v vsaki točki neničelna (ali je to res?) ... ampak če hočeš to, moraš verjetno povedati, kako to sledi iz definicije (kako?)

razloži lokalnost?

Naj bosta $R : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ in $S : \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji

V nadaljevanju se bomo ukvarjali s ploskvami, ki so same po sebi že geometrijsko zvezne, zanimalo nas bo le, kakšni pogoji morajo veljati, da je tudi stik dveh takih ploskev geometrijsko zvezen, torej da je celotna ploskev, ki jo dobimo, ko zlepimo dve ploskvi, geometrijsko zvezna.

Definicija 2.2. Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Pravimo, da se R in S *stikata z G^n-zveznostjo vzdolž krivulje* C, če za vsako točko $b_0 = C(y_0)$ obstaja lokalno regularna C^n reparametrizacijska funkcija $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, da je $f(x_0, y) = (u_0, y)$ za vsak $y \in I_0$ in da velja

$$\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} R\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial^{m+k}}{\partial x^m \partial y^k} (S \circ f)\Big|_{(x_0,y)} \quad \text{za } m + k = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

kjer je I_0 neka okolica y_0.

razloži, kaj je regularna reparametrizacijska funkcija? ali je dovolj, da je bila prej razložena regularnost?

Zaradi stikanja ploskev v krivulji C oziroma, ker vzdolž krivulje C velja $y = v$, so delni odvodi parametrizacij po spremenljivki y vzdolž krivulje C enaki, zato je dovolj, da pri obravnavi geometrijske zveznosti dveh ploskev opazujemo le delne odvode po spremenljivki x. dodati sliko? Te delne odvode imenujemo crossboundary derivatives.

Oglejmo si, kakšni pogoji morajo veljati v primeru, ko želimo, da je stik med dvema ploskvama G^2 zvezen.

Primer 2.3. Naj bodo parametrizaciji ploskev R in S, krivulja C in reparametrizacijska funkcija f kot v definiciji 2.2. Da bo stik teh dveh ploskev G^2 zvezen, mora po definiciji 2.2 in ugotovitvi, da je dovolj obravnavati le odvode po spremenljivki y, veljati

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} R\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}(S \circ f)\Big|_{(x_0,y)} \quad \text{za } k = 0, 1, 2.$$

za vsak y v neki okolici točke? y_0. Da dosežemo zgolj geometrijsko zveznost razreda G^0, je dovolj, da med ploskvama R in S velja pogoj

$$R(x_0, y) = (S \circ f)(x_0, y), \text{ oziroma } R(x_0, y) = S(u(x_0, y), v(x_0, y)).$$

Da imamo na stiku geometrijsko zveznost stopnje G^1, mora poleg pogoja za G^0 veljati še

$$\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial}{\partial x}(S \circ f)\Big|_{(x_0,y)}$$

Če ustrezno razpišemo parcialni odvod funkcije $S \circ f$, se ta pogoj prepiše v

$$\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial S}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y)} + \frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y)}.$$

Za G^2 mora poleg pogojev za G^0 in G^1 veljati še

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y)} = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big|_{(x_0,y)} + 2\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y)} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\Big|_{(x_0,y)} + \\ + \frac{\partial S}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y)} + \frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y)}\end{aligned}$$

V splošnem za geometrijsko zveznost stopnje n, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ velja naslednje:

$$\frac{\partial^k R}{\partial x^k}\Big|_C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} u_{x^{m_1}} \cdots u_{x^{m_h}} v_{x^{m_{h+1}}} \cdots v_{x^{m_h}} \frac{\partial^i S}{\partial u^h \partial v^{i-h}}\Big|_C \tag{2.2}$$

za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$. Tu z $A^k_{m_i}$ iznačujemo koeficient

$$A^k_{m_i} = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}.$$

Z $u_x^{m_i}$ je označen m_i-ti delni odvod funkcije u po x, z oznako $|m_i|$ pa označimo vsoto $|m_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$, kjer velja $m_j > 0$ za vsak $j = 1, \ldots, i$. dokaz z indukcijo?

Taka definicija geometrijske zveznosti med dvema ploskvama sama po sebi pri konstrukciji geometrijsko zveznih ploskev ni najbolj koristna. V nadaljevanju bo veliko uporabnejši naslednji izrek.

Izrek 2.4. *Naj bosta $R(x, y)$ in $S(u, v)$ regularni C^n parametrizaciji dveh ploskev, ki se stikata v krivulji $C(y) = R(x_0, y) = S(u_0, y)$. Ploskvi R in S sta vzdolž skupnega roba G^n-zvezni natanko tedaj ko obstajajo C^n funkcije $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)$ in $\beta_1(y) \ldots, \beta_n(y)$, da velja*

$$\left.\frac{\partial^k R}{\partial x^k}\right|_C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_h} \left.\frac{\partial^i S}{\partial u^h \partial v^{i-h}}\right|_C, \tag{2.3}$$

kjer je $A_{m_i}^k = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$. Veljati mora tudi, da je $\alpha_1(y) \neq 0$ in predznak

Opomba 2.5. Funkcije $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)$ in $\beta_1(y) \ldots, \beta_n(y)$ imenujemo *stične funkcije* junction/connection functions

Dokaz. kaj je z lokalnostjo in b0??? Najprej prodpostavimo, da obstajajo C^n funkcije $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)$ in $\beta_1(y) \ldots, \beta_n(y)$, za katere velja enakost 2.3 v izreku, in da je $\alpha_1(y) \neq 0$. Dokazati želimo, da od tod sledi G^n-zveznost stika ploskev $R(x, y)$ in $S(u, v)$.

Definirajmo reparametrizacijsko funkcijo $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ na naslednji način:

$$u(x, y) = u_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \alpha_i(y)(x - x_0)^i,$$

$$v(x, y) = y + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \beta_i(y)(x - x_0)^i.$$

Ker so po predpostavki funkcije α_i in β_i, $i = 1, \ldots, n$ razreda C^n, tudi funkcija f pripada temu razredu.

Opazimo še, da za $i = 1, \ldots, k$ velja

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x_0, y) = \alpha_i(y),$$

$$\frac{\partial^i v}{\partial x^i}(x_0, y) = \beta_i(y).$$

Če dobljeno vstavimo v enačbo 2.3, dobimo ravno enačbo 2.2, od koder zaradi ujemanja ploskev R in S v krivulji C sledi tudi enakost 2.1. Pokazati moramo le še, da je f lokalno regularna.

Vemo, da je reparametrizacijska funkcija f regularna vzdolž C, če sta oba njena parcialna odvoda prvega reda linearno neodvisna, torej če velja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \neq 0.$$

Razpišimo oba odvoda reparametrizacijske funkcije $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ vzdolž krivulje C in ju skušajmo zapisati s pomočjo stičnih funkcij. Za odvod po spremenljivki x velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y) = (\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y), \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y)) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)).$$

Če razpišemo odvod po spremenljivki y, pa dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = (\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y), \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y)) = (0,1).$$

Vektorski produkt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ je torej enak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = (\alpha_1(y), \beta_1(y)) \times (0,1) = \alpha_1(y)$$

Vektorski produkt obeh parcialnih odvodov prvega reda je torej različen od 0 natanko tedaj, ko je $\alpha_1(y) \neq 0$, kar pa velja po začetni predpostavki. Sledi, da je reparametrizacijska funkcija f regularna.

Pokazali smo torej, da obstaja lokalno regularna reparametrizacijska funkcija f, ki ustreza pogojem iz definicije 2.2, od koder sledi, da se ploskvi R in S stikata z G^n-zveznostjo.

Dokažimo izrek še v drugo smer. Če predpostavimo, da sta ploskvi R in S na stiku G^n-zvezni, obstoj funkcij $\alpha_1(y), \ldots, \alpha_n(y)$ in $\beta_1(y) \ldots, \beta_n(y)$ in enačba 2.3 sledjo neposredno iz definicije 2.2 in enačbe 2.2, če definiramo $\alpha_i(y) = u_{x^i}(y)$ in $\beta_i(y) = v_{x^i}(y)$ za $i = 1, \ldots, n$. ali so take funkcije Cn??

Ker je stik ploskev R in S G^n-zvezen, do definiciji 2.2 obstaja lokalno regularna reparametrizacijska funkcija $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, ki ustreza pogojem iz definicije 2.2. Videli smo že, da je funkcija f regularna natanko tedaj, ko je $u_x(x_0,y) = \alpha_1(y) \neq 0$. Torej smo okazali še neničelnost funkcije α_1, s čimer je dokaz končan. $\square$

Drugo, na kar moramo paziti pri izbiri funkcije α_1 pa je njen predznak. Pri izbiri napačnega predznaka namreč lahko pride do stika v obliki "špice".

nekaj za zaključek poglavja in napeljavo na novo poglavje

3 G^1 zveznost

nekaj v stilu, da se bomo natančneje ukvarjali z G1 zveznostjo. lahko povem, da je to zveznost tangentnih ravnin oz. zveznost enotskih normal in da si bomo ogledali, kako do tega pridemo.

Imejmo ploskvi $R(x,y)$ in $S(u,v)$, ki se v krivulji $C(y) = R(x_0,y) = S(u_0,y)$ stikata z geometrijsko zveznostjo G^1. Sledi, da je $R_y(x_0,y) = S_y(x_0,y) = S_v(x_0,y)$. Kot smo že videli v poglavju 2, nam je zato potrebno opazovati zgolj odvode v smeri x.

Ker je stik obeh ploskev v C G^1-zvezen, po izreku 2.4 obstajata funkciji α_1 in β_1, kjer je $\alpha_1(y) \neq 0$ za vsak y in ima ustrezen predznak, da velja:

$$R_x(x_0, y) = \alpha_1(y) S_u(u_0, y) + \beta_1(y) S_v(u_0, y). \tag{3.1}$$

Zgornja enačba nam pove, da so parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ v vsaki točki y linearno neodvisni. Torej so v vsaki točki y del iste tangentne ravnine na krivuljo C. Zato torej G^1-zveznost imenujemo tudi *zveznost tangentnih ravnin.*

slika

Oglejmo si še, od kod pride poimenovanje *zveznost enotskih normal.* Znova opazujemo enačbo 3.1. Enačbo sedaj z obeh strani vektorsko pomnožimo z $R_y(x_0, y)$:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y) S_u(u_0, y) \times R_y(x_0, y) + \beta_1(y) S_v(u_0, y) \times R_y(x_0, y).$$

Upoštevamo lahko, da je $R_y(x_0, y) = S_v(u_0, y)$. Dobimo:

$$R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y) = \alpha_1(y) S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y).$$

Od tod vidimo, da sta normali na ploskvi R in S na njunu stični krivulji C vzporedni. Na skupnem robu imata torej obe ploskvi enaki enotski normali:

$$\frac{R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)}{||R_x(x_0, y) \times R_y(x_0, y)||} = \frac{S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)}{||S_u(u_0, y) \times S_v(u_0, y)||}.$$

Ker parcialni odvodi $R_x(x_0, y)$, $S_u(u_0, y)$ in $S_v(u_0, y)$ ležijo na isti tangentni ravnini, velja tudi:

$$\det(R_x(x_0, y), S_u(u_0, y), S_v(u_0, y)) = 0.$$

Torej obstajajo funkcije (povedati kakšne, iz kje kam?) λ, μ in γ, da velja:

$$\lambda(y) R_x(x_0, y) = \mu(y) S_u(u_0, y) + \gamma(y) S_v(u_0, y).$$

Če predpostavimo, da sta ploskvi R in S polinomski, lahko tudi za λ, μ in γ izberemo polinome, kar nam zelo olajša konstrukcijo geometrijsko zveznih ploskev.

najbrž lahko poveš, da se bomo v naslednjih poglavjih ukvarjali z izbiro teh polinomov

mogoče moraš tu napisati, kako se pride do teh polinomov: tiste prve komponente. ampak tega ne razumem.

4 Bézierjeve ploskve

pogledamo si poseben primer polinomskih param ploskev, ki so tudi uporabne v praksi

i-ti Bernsteinov bazni polinom

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ t \in [0, 1]$$

Lastnosti:

- $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$
- $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$

Definicija 4.1. Naj bodo dane točke $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Bézierjeva ploskev iz tenzorskega produkta je parametrično podana ploskev

$$\mathbf{b}^{m,n} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^d$$

s predpisom

$$\mathbf{b}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b_{i,j}} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Točke $\mathbf{b}_{i,j}$ imenujemo kontrolne točke, poligon, ki jih povezuje, pa kontrolni poligon.

Velja: $\mathbf{b^{m,n}}(0,0) = \mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b^{m,n}}(1,0) = \mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b^{m,n}}(0,1) = \mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b^{m,n}}(1,1) = \mathbf{b}_{m,n}$
Odvod Bézierjeve ploskve iz tenzorskega produkta:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u,v) = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v),$$

kjer $\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i,j}$,
$\Delta^{0,s}\mathbf{b}_{i,j} = \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1}\mathbf{b}_{i,j}$.

5 G^n-zveznost med dvema Bézierjevima ploskvama

Nekaj v smislu, da sedaj prevedemo že dobljene splošne pogoje na pogoje za bezierove ploskve oz. kako ti pogoji izgledajo za te ploskve.

ker so bezierov ploskve polinomske, so funkcije alfa in beta iz splošne definicije racionalne. dokazali bomo izrek, ki pravi, da lahko za stične funkcije vzamemo tudi polinome, kar nam zelo koristi pri konkretnih konstrukcijah in iskanju pogojev za kontrolne točke

Imejmo dve polinomski Bézierjevi ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, podani na naslednji način:

$$\mathbf{R}(x,y) = \sum_{i=0}^{m_r} \sum_{j=0}^{n_r} \mathbf{P}_{ij} B_i^{m_r} B_j^{n_r}$$

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m_s} \sum_{j=0}^{n_s} \mathbf{Q}_{ij} B_i^{m_s} B_j^{n_s},$$

kjer so $\{\mathbf{P}_{i,j}, i = 1, \ldots, m_r, j = 1, \ldots, n_r\}$ in $\{\mathbf{Q}_{i,j}, i = 1, \ldots, m_s, j = 1, \ldots, n_s\}$ kontrolne točke ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, x, y, u in v pa parametri z vrednostmi na intervalu $[0,1]$.

Ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ naj se stikata v skupni robni krivulji $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0,v) = \mathbf{S}(0,v)$ pojasni, zakaj lahko to predpostavimo. zakaj?? ker lahko parametriziramo? poglej.

pojasni še, kako je s tem, da sta ploskvi prav obrnjeni, da ni špice Robno krivuljo $\mathbf{C}$ zapišemo kot Bézierjevo krivuljo na naslednji način:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{Z}_i B_i^{n_c},$$

kjer so $\{\mathbf{Z}_i, i = 1, \ldots n_c\}$ njene kontrolne točke. Stopnja n_c krivulje $\mathbf{C}$ ni nujno enaka stopnjama n_r ali n_s, velja pa, da je $n_c \leq \min(n_r, n_s)$. ali moram povedati, zakaj? ker ne vem

Naj bosta ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ regularni vzdolž krivulje $\mathbf{C}$, torej naj bodo normale na ploskvi vzdolž krivulje $\mathbf{C}$ neničelne:

$$N_r = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

$$N_s = \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right) \Big|_{\mathbf{C}} \neq 0$$

Nr(y)?

O pogojih za geometrijsko zveznost teh dveh ploskev govori naslednji izrek:

Izrek 5.1. *Naj bosta $\boldsymbol{R}$ in $\boldsymbol{S}$ zgoraj definirani* to ok? *Bézierovi ploskvi, ki se stikata v robni krivulji $\boldsymbol{C}$ (kot zgoraj). Stik ploskev je G^n-zvezen natanko tedaj, ko obstajajo polinomi $D(y)$, $E_i(y)$ in $F_i(y)$, da velja:*

$$\begin{aligned} D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \boldsymbol{S}}{\partial u^k} \Big|_{\boldsymbol{C}} &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \boldsymbol{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kjer je $i = 1, \ldots n$ in $k = 1, \ldots n$. Z $A_{m_i}^k$ zopet označujemo $A_{\mathbf{m_i}}^k = \frac{k!}{i! m_1! \cdots m_i!}$ in $|\mathbf{m_i}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$. Velja še $D(y)E_1(y) \neq 0$ za $y \in [0,1]$, za stopnje polinomov pa velja:
$st(D) \leq n_r + n_c - 1$,
$st(E_i) \leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1$ in
$st(F_i) \leq (2i-1)n_r + in_s + (i-1)n_c - 2i + 1$.

Dokaz. Najprej predpostavljajmo, da obstajajo polinomi D, E_i in F_i, $i = 1, \ldots n$, ki ustrezajo enačbi 5.1 in ostalim pogojem v izreku. Pokazati hočemo, da od tod sledi geometrijska zveznost ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$. V ta namen bomo uporabili izrek 2.4.

Preoblikujmo enačbo

$$\begin{aligned} D^{2k-1}(y) \frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k} \Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{|m_i|=k} A_{m_i}^k \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-1}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned}$$

Če celotno enačbo delimo z D^{2k-1} (predpostavka, da $D(y)E_1(y) \neq 0$ na $[0,1]$, zagotavlja neničelnost polinoma D na $[0,1]$), dobimo

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}\right|_{\mathbf{C}} =& \sum_{i=0}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-2k}(y) E_{m_1}(v) \cdots E_{m_h}(y) \\ & \cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Funkcijo D^{2k-i} lahko zapišemo kot produkt
$D^{2k-i}(y) = D^{2m_1-1}(y)D^{2m_2-1}(y)\cdots D^{2m_h-1}(y)D^{2m_{h+1}}(y)\cdots D^{2m_i-1}(y)$, saj je $|m_i| = k$.

Dobljeno vstavimo v enačbo 5.2:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^k \mathbf{S}}{\partial u^k}\right|_{\mathbf{C}} =& \sum_{i=0}^{k} \sum_{|m_i|=k} A^k_{m_i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(v)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ & \cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Definirajmo

$$\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)} \text{ in } \beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)},$$

kjer je $i = 1, \dots, n$. Potem enačba 5.3 dobi enako obliko kot enačba 2.3 v izreku 2.4. Iz izreka 2.4 torej sledi, da se ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ stikata z geometrijsko zveznostjo G^n. S tem smo dokazali eno smer ekvivalence ? kako se to lepo reče

Sedaj dokažimo še drugo smer ekvivalence v izreku. Predpostavimo, da se ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, definirani kot zgoraj ok?, stikata v robni krivulji $\mathbf{C}$ z geometrijsko zveznostjo G^n. Pokazati hočemo, da od tod sledi obstoj polinomov D, E_i in F_i z lastnostmi kot v izreku. Dokaza se lotimo z indukcijo po k.

Naj bo najprej $k = 1$. Ker je slik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^n-zvezen, torej vsaj G^1-zvezen, po izreku 2.4 obstajata C^n funkciji $\alpha_1(y)$ in $\beta_1(y)$, ki zadoščata enačbi

$$\left.\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}\right|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y) \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right|_{\mathbf{C}}(y) + \beta_1(y) \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right|_{\mathbf{C}}(y). \tag{5.4}$$

Dobljeno enačbo z desne vektorsko množimo z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}$. Dobimo:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right|_{\mathbf{C}}(y) = \left.\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}\right|_{\mathbf{C}}(y) = \alpha_1(y) \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right|_{\mathbf{C}}(y). \tag{5.5}$$

V poglavju 2 smo namreč že videli, da je $\left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right|_{\mathbf{C}} = \left.\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}\right|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$'.

Enačbo 5.4 sedaj z desne vektorsko množimo še z $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$ in dobimo:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}\right|_{\mathbf{C}}(y) \times \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right|_{\mathbf{C}}(y) = \beta_1(y) \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right|_{\mathbf{C}} \times \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right|_{\mathbf{C}} \tag{5.6}$$

Z $\mathbf{W}(y)$ označimo vektorsko funkcijo $\mathbf{W}(y) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{\mathbf{C}}$, z $\mathbf{N}_r$ in $\mathbf{N}_s$ pa normalo na ploskev $\mathbf{R}$ oziroma $\mathbf{S}$ v neki točki na mejni ? krivulji $\mathbf{C}$.

Prej dobljeni enačbi 5.5 in 5.6 torej zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_r(y) \tag{5.7}$$

in

$$\mathbf{W}(y) = \beta_1(y)\mathbf{N}_r(y). \tag{5.8}$$

Stopnja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$ je največ $n_c - 1$, saj je $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}'$. Enako velja za $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}|_{\mathbf{C}}$. Stopnja $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}$ je manjša ali enaka n_r, stopnja $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{\mathbf{C}}$ pa manjša ali enaka n_s. razloži? Od tod in iz definicij funkcij $\mathbf{N}_r$, $\mathbf{N}_s$ in $\mathbf{W}$ sledi $st(\mathbf{N}_r) \leq n_r + n_s - 1$, $st(\mathbf{N}_s) \leq n_s + n_c - 1$ in $st(\mathbf{W}) \leq n_r + n_s$.

Videli smo že, da sta zaradi predpostavke o regularnosti ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ funkciji $\mathbf{N}_r(y)$ in $\mathbf{N}_s(y)$ za vsak $y \in [0,1]$ različni od 0. Ker je $\mathbf{N}_r(y)$ neničelna, mora biti vsaj ena izmed njenih koordinatnih funkcij neničeln polinom. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je neničelna x-koordinata, torej polinom $N_{rx}(y)$. Če enačbi iz 5.7 in 5.8 razpišemo po koordinatah, za x-koordinato dobimo

$$N_{sx}(y) = \alpha_1(y)N_{rx}(y)$$

in

$$W_x(y) = \beta_1(y)N_{rx}(y),$$

kjer je N_{sx} x-koordinata funkcije $\mathbf{N}_s$, W_x pa x-koordinata funkcije $\mathbf{W}$.

Iz zgornjih enačb lahko vidimo, da so vse realne ničle polinoma $N_{rx}(y)$ na intervalu $[0,1]$ tudi ničle polinomov $N_{sx}(y)$ in $W_x(y)$, torej da polinom $U(y)$, ki je zgrajen kot produkt vseh linearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma $N_{rx}(y)$, deli polinoma $N_{sx}(y)$ in $W_x(y)$. Da to res drži, lahko vidimo na naslednji način. Zapišimo $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$, kjer je $U(y)$ produkt vseh linearnih faktorjev, $D(y)$ pa produkt vseh nelinearnih faktorjev v polinomskem razcepu polinoma $N_{rx}(y)$. Predpostavimo, da $U(y)$ ne deli polinoma $N_{sx}(y)$. Ker je $N_{sx}(y) = \alpha_1(y)U(y)D(y)$, je to mogoče le, če je $\alpha_1(y)$ racionalna funkcija, katere imenovalec deli polinom $U(y)$. Funkcija $\alpha_1(y)$ ima torej na intervalu $[0,1]$ pol. Ker velja $\mathbf{N}_s(y) = \alpha_1(y)\mathbf{N}_r(y)$ in so vse koordinatne funkcije funkcij $\mathbf{N}_s(y)$ in $\mathbf{N}_r(y)$ polinomi, mora veljati, da imenovalec funkcije $\alpha_1(y)$ deli $N_{rx}(y)$, $N_{ry}(y)$ in $N_{rz}(y)$. Funkcija $\alpha_1(y)$ ima pol, označimo ga z y_0. Sledi, da je y_0 ničla polinomov $N_{rx}(y)$, $N_{ry}(y)$ in $N_{rz}(y)$, in zato je $\mathbf{N}_r(y_0) = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko o regularnosti ploskve $\mathbf{R}$. Torej mora polinom $U(y)$ deliti polinom $N_{sx}(y)$. Z enakimi sklepi trditev pokažemo še za polinom $W_x(y)$.

vprašanje: ali U vsebuje vse linearne faktorje ali samo tiste, ki imajo zvezo z ničlami na [0,1]???

Polinom N_{rx} sedaj znova zapišimo kot produkt $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$, kjer sta polinoma $U(y)$ in $D(y)$ definirana kot zgoraj. Torej velja

$$N_{sx}(y) = U(y)\alpha_1(y)D(y)$$

in

$$W_x(y) = U(y)\beta_1(y)D(y).$$

Naj bo $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$ in $F_1(y) = \beta_1(y)D(y)$. Pokazati moramo, da sta dobljeni funkciji E_1 in F_1 polinoma. Ker sta funkciji $N_{sx}(y)$ in $W_x(y)$ polinoma, morata imenovalca funkcij α_1 in β_1 deliti ali polinom U ali polinom D. Videli smo že, da α_1 in β_1 nimata polov na intervalu $[0,1]$, torej njuna imenovalca ne delita polinoma U. Sledi, da morata njuna imenovalca deliti polinom D, s čimer smo pokazali, da sta E_1 in F_1 res polinoma.

Videti želimo še, da je $D(y)E_1(y) \neq 0$ na intervalu $[0,1]$. Polinom $D(y)$ po definiciji vsebuje vse nelinearne faktorje v polinomskem razcepu polinoma $N_{rx}(y)$, torej na intervalu $[0,1]$ nima ničel. Polinom $E_1(y)$ je enak $E_1(y) = \alpha_1(y)D(y)$. Ker je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^n-zvezen, funkcija $\alpha_1(y)$ po izreku 2.4 na intervalu $[0,1]$ ni enaka nič, zato tudi $E_1(y)$ na tem intervalu nima ničel.

Oglejmo si še stopnje polinomov $D(y)$, $E_1(y)$ in $F_1(y)$. Očitno velja:

$$st(D(y)) \leq st(N_{rx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_r(v)) \leq n_r + n_c - 1$$

$$st(E_1(y)) \leq st(N_{sx}(y)) \leq st(\mathbf{N}_s(v)) \leq n_s + n_c - 1$$
$$st(F_1(y)) \leq st(W_x(y)) \leq st(\mathbf{W}(v)) \leq n_r + n_s,$$

s čimer dokažemo izrek za $k = 1$.

Lotimo se še dokaza za $k > 1$. Prepodstavimo, da izrek velja za vse $k \leq m$, kjer je $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Torej obstajajo polinomi $D(y)$, $E_1(y), \ldots, E_m(y)$, $F_1(y), \ldots, F_m(y)$ z ustreznimi stopnjami, da velja enačba 5.1 za $k = 1, 2, \ldots, m$.

Izhajamo iz predpostavke, da je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ G^n-zvezen. Iz izreka 2.4 sledi, da obstajajo funkcije $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ in $\beta_1 \ldots, \beta_{m+1}$, da velja

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\Big|_{\mathbf{C}} &= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|=m+1} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \alpha_{m_1} \cdots \alpha_{m_h} \beta_{m_{h+1}} \cdots \beta_{m_i} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C\end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je $\alpha_i(y) = \frac{E_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$ in $\beta_i(y) = \frac{F_i(y)}{D^{2i-1}(y)}$ za $i = 1, \ldots, m$. ta i.p. pride od nikoder? Uporabimo to v zgornji enačbi in dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}\Big|_{\mathbf{C}} &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} \frac{E_{m_1}(y)}{D^{2m_1-1}(y)} \cdots \frac{E_{m_h}(y)}{D^{2m_h-1}(y)} \\ &\cdot \frac{F_{m_{h+1}}(y)}{D^{2m_{h+1}-1}(y)} \cdots \frac{F_{m_i}(y)}{D^{2m_i-1}(y)} \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C = \\ &= \alpha_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{\mathbf{C}} + \beta_{m+1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{\mathbf{C}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{|\mathbf{m}_i|} A_{m_i}^{m+1} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} D^{i-2}(y) D^{-2m} E_{m_1}(y) \cdots E_{m_h}(y) \\ &\cdot F_{m_{h+1}}(y) \cdots F_{m_i}(y) \frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}\Big|_C,\end{aligned} \tag{5.9}$$

saj je $|\mathbf{m}_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = m + 1$ in zato je
$D^{-2m_1+1}(y)D^{-2m_2+1}(y)\cdots D^{-2m_i+1}(y) = D^{-2(m+1)}(y)D^i(y)$.

Sedaj definirajmo krivuljo? vektorsko polinomsko funkcijo? $\mathbf{S}_{m+1}$:

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m}(y)\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}|_{\mathbf{C}} - \sum_{i=2}^{m+1}\sum_{|\mathbf{m}_1|=m+1} A_{m_i}^{m+1}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}D^{i-1}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)$$
$$\cdot F_{m_{h+1}}(y)\ldots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i\mathbf{R}}{\partial x^h\partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}$$

Če enačbo 5.9 pomnožimo z $D^{2m}(y)$ in jo nekoliko preoblikujemo, dobimo:

$$\mathbf{S}_{m+1}(y) = D^{2m}\alpha_{m+1}(y)\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} + D^{2m}(y)\beta_{m+1}(y)\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}. \tag{5.10}$$

Na dobljeni enačbi sedaj uporabimo podoben postopek, kot smo ga uporabili pri dokazu za $k = 1$. Enačbo 5.10 z leve vektorsko množimo z $\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}$ in dobimo

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \mathbf{S}_{m+1} = D^{2m}\beta_{m+1}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}.$$

Če pa enačbo 5.10 z desne pomnožimo z $\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$, dobimo

$$\mathbf{S}_{m+1} \times \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} = D^{2m}\alpha_{m+1}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}.$$

Označimo $\mathbf{W}_1 = \mathbf{S}_{m+1} \times \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$ in $\mathbf{W}_2 = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \mathbf{S}_{m+1}$ ter kakor prej $N_r = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}} \times \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}$. Kot v primeru za $k = 1$ spet lahko predpostavimo, da je polinom $N_{rx}(y)$ neničeln in ga zapišemo kot $N_{rx}(y) = U(y)D(y)$. Velja $W_{1x} = D^{2m+1}(y)U(y)\alpha_{m+1}(y)$ in $W_{2x} = D^{2m+1}(y)U(y)\beta_{m+1}(y)$ in enaki argumenti kot v primeru za $k = 1$ nas pripeljejo do razulatata, da sta $E_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\alpha_{m+1}(y)$ in
$F_{m+1}(y) = D^{2m+1}(y)\beta_{m+1}(y)$ res polinoma.

Pokazati moramo še, da je $st(E_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1$ in $st(F_{m+1}) \leq (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m$. Tega se lotimo tako, da si najprej ogledamo stopnjo $\mathbf{S}_{m+1}$. Spomnimo se:

$$\mathbf{S}_{m+1} = D^{2m}(v)\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}|_{\mathbf{C}} - \sum_{i=2}^{m+1}\sum_{|\mathbf{m}_1|=m+1} A_{m_i}^{m+1}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}D^{i-1}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)$$
$$\cdot F_{m_{h+1}}(y)\ldots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i\mathbf{R}}{\partial x^h\partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}$$

Očitno je

$$\begin{aligned} st(D^{2m}(y)\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) &\leq 2m(n_r + n_c - 1) + n_s \\ &\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m, \end{aligned}$$

kjer v prvi neenakosti uporabimo dejstvo, da je $st(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$ in $st(\frac{\partial^{m+1}\mathbf{S}}{\partial u^{m+1}}) \leq n_s$, v drugi neenakosti pa, da je $n_c \leq n_s$.

Oglejmo si še, kakšna je $st(D^{i-1}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\ldots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}})$. Najprej si jo oglejmo za $h=0$:

$$
\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)F_{m_1}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
& \leq (i-2)st(D(y)) + \sum_{j=1}^{i} st(F_{m_j}(y)) + st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}})
\end{aligned}
$$

Vemo, da je $st(D(y)) \leq n_r + n_c - 1$ in $st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \leq n_c - i$, po indukcijski predpostavki pa velja še $st(E_i(y) \leq (2i-2)n_r + in_s + in_c - 2i + 1)$ in $st(F_i(y) \leq (2i-1)n_r + in_s + (i-1)n_c - 2i + 2)$, kjer je $i = 1, \ldots, m$. Torej je

$$
\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)F_{m_1}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial y^i}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
& (i-2)(n_r + n_c - 1) + \\
& + \sum_{j=1}^{i}((2m_j - 1)n_r + m_j n_s + (m_j - 1)n_c - 2m_j + 2) + (n_c - i) = \\
& = (i-2)(n_r + n_c - 1) + 2(m+1)n_r - in_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - in_c - \\
& - 2(m+1) + 2i + n_c - i = \\
& = 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - in_r \leq \\
& \leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}
$$

Tu smo uporabili, da je $\sum_{j=1}^{i} m_j = m + 1$.

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je $h > 1$.

$$
\begin{aligned}
& st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
& \leq (i-2)st(D(y)) + \sum_{j=1}^{h} st(E_{m_j}) + \sum_{j=h+1}^{i} st(F_{m_j}) + \\
& + st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}})
\end{aligned}
$$

Zopet uporabimo indukcijsko predpostavko za stopnje polinomov $E_i(y)$ in $F_i(y)$, kjer je $i = 1, \ldots, m$, ter dejstvo, da je $st(\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) = n_r - i + h$, in dobimo

$$
\begin{aligned}
&st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
&\leq (i-2)(n_r+n_c-1) + 2n_r\sum_{j=1}^{h} m_j - 2n_r h + n_s \sum_{j=1}^{h} m_j + +n_c \sum_{j=1}^{h} m_j - \\
&- 2\sum_{j=1}^{h} m_j + h + 2n_r \sum_{j=h+1}^{i} m_j - (i-h)n_r + n_s \sum_{j=h+1}^{i} m_j + n_c \sum_{j=h+1}^{i} -(i-h)n_c - \\
&- 2\sum_{j=h+1}^{i} +2(i-h) + n_r - i + h = \\
&= (i-2)(n_r+n_c-1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
&- 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h.
\end{aligned}
$$

V zadnji enakosti smo uprabili, da je $\sum_{j=1}^{i} m_j = m+1$. Nadaljujmo za računom:

$$
\begin{aligned}
&st(D^{i-2}(y)E_{m_1}(y)\cdots E_{m_h}(y)F_{m_{h+1}}(y)\cdots F_{m_i}(y)\frac{\partial^i \mathbf{R}}{\partial x^h \partial y^{i-h}}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
&\leq (i-2)(n_r+n_c-1) + 2n_r(m+1) + n_s(m+1) + n_c(m+1) - 2(m+1) - \\
&- 2n_r h + h - (i-h)n_r - (i-h)n_c + 2(i-h) + n_r - i - h \leq \\
&\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m - n_r h + n_c h - n_c + n_r = \\
&= 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m + (h-1)(n_c - n_r) \leq \\
&\leq 2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}
$$

V zadnji neenakosti smo uporabili, da je $n_c \leq n_r$, torej je $n_c - n_r \leq 0$. S tem smo torej pokazali, da je $st(\mathbf{S}_{m+1}) \leq 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m$.

Iz enačbe sklic je razvidno naslednje:

$$
\begin{aligned}
st(E_{m+1}) &\leq st(W_{1x}) \leq st(\mathbf{W}_1) \leq st(\mathbf{S}_{m+1}) + st(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
&\leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + (n_c - 1) = \\
&= 2mn_r + (m+1)n_s + (m+1)n_c - 2m - 1.
\end{aligned}
$$

Podobno dobimo oceno za stopnjo polinoma F_{m+1}:

$$
\begin{aligned}
st(F_{m+1}) &\leq st(W_{2x}) \leq st(\mathbf{W}_2) \leq st(\mathbf{S}_{m+1}) + st(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}|_{\mathbf{C}}) \leq \\
&\leq (2mn_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m) + n_r = \\
&= (2m+1)n_r + (m+1)n_s + mn_c - 2m.
\end{aligned}
$$

S tem smo dokazali izrek še za $k > 1$. □

6 Primeri konstrukcij geometrijsko zveznih ploskev

nek uvod

6.1 Konstrukcija G^1-zveznih Bézierjevih ploskev iz tenzorskega produkta

V tem podpoglavju si bomo ogledali, kako na različne načine konstruirati ploskvi, ki sta na stiku G^1-zvezni, torej kakšne pogoje prinesejo različni načini konstrukcije za njune kontrolne točke oziroma kontrolne vektorje. Pri tem bomo predpostavljali, da so robovi obeh ploskev vnaprej določeni. Pogoje, ki jih prinese zahteva G^1-zveznosti bomo primerjali z C^1-zveznostjo.

Imejmo dve bikubični Bézierjevi ploskvi iz tenzorskega produkta:

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v)$$

in

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{Q}_{i,j} B_i^3(u) B_j^3(v),$$

kjer velja $u, v \in [0,1]$.

Ploskvi $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ se stikata v $\mathbf{C}(v) = \mathbf{R}(0,v) = \mathbf{S}(0,v)$, torej naj velja

$$\mathbf{C}(v) = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{Z}_i B_i^{n_c}(v),$$

kjer so $\mathbf{Z}_i = \mathbf{P}_{0,i} = \mathbf{Q}_{0,i}$ kontrolne točke krivulje $\mathbf{C}$. Stopnja n_c krivulje $\mathbf{C}$ ni nujno enaka 3, veljati pa mora $n_c \leq 3$. Obravnavali bomo primere, v katerih je $n_c = 3$ in primer, kjer je $n_c = 2$. Predpostavili bomo, da so robne krivulje ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ že določene na tak način, da bomo imeli na robu zahtevano zveznost. Zanimalo nas bo, kakšne zveze v teh primerih veljajo za notranje kontrolne točke, torej za $\mathbf{P}_{1,1}$, $\mathbf{P}_{1,2}$, $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$., da bo stik ploskev G^1-zvezen. razlaga s ploščinami trikotnikov? V nadaljevanju bomo uporabljali še naslednje oznake za kontrolne vektorje obeh ploskev in robne krivulje: $\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}$, $\mathbf{q}_{i,j} = \mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j}$ in $\mathbf{z}_i = \mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{Z}_i$.

Najprej si oglejmo, kakšne pogoje in omejitve nam da zahteva C^1 zveznosti na stiku teh dveh ploskev.

Primer 6.1. Domena ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ je kvadrat $[0,1] \times [0,1]$. Da lahko obravnavamo C^1-zveznost stika ploskev, moramo najprej reparametrizirati ploskev $\mathbf{R}$ tako, da bo njena domena $[-1,0] \times [0,1]$ in bosta obe domeni skupaj po stiku tvorili pravokotnik $[-1,1] \times [0,1]$. Da to dosežemo, moramo ploskev $\mathbf{R}$ zapisati na naslednji način:

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(-u) B_j^3(v),$$

kjer je $u \in [-1,0]$ in $v \in [0,1]$.

Da je stik ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$ C^1-zvezen, se morata krivulji ujemati v kontrolnih točkah, ki določajo stično krivuljo: $\mathbf{P}_{0,j} = \mathbf{Q}_{0,j}$ za $j = 0, \ldots, 3$, s čimer dosežemo C^0-zveznost. Poleg tega pa se morata ujemati še odvoda obeh ploskev v u-smeri v robnih točkah: $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}(u,v)|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}(u,v)|_{u=0}$. Če razpišemo oba parcialna odvoda, dobimo naslednje pogoje:

$$-(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j}) = \mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j}$$

oziroma

$$\mathbf{q}_{0,j} = -\mathbf{p}_{0,j}$$

za $j = 0, \ldots, 3$.

Vidimo torej, da morata biti za dosego C^1-zveznosti zlepka ploskev vektorja $\mathbf{p}_{0,j}$ in $\mathbf{q}_{0,j}$ kolinearna za vsak $j = 0, \ldots, 3$, poleg tega pa morata biti njuni dolžini v razmerju, ki ga določata parametrizaciji obeh ploskev. Kar se tiče oblike ploskve, ki jo na ta način lahko konstruiramo kot zlepek ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, torej nimamo ravno veliko izbire. Nekoliko več svobode imamo le pri izbiri notranjih kontrolnih točk. Kontrolni točki $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$ sta točno določeni z izbiro kontrolnih točk $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$, medtem ko sta $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ prosti. Ker zahtevamo zgolj zveznost stopnje 1, so proste tudi kontrolne točke $\mathbf{Q}_{2,1}$, $\mathbf{Q}_{2,2}$, $\mathbf{P}_{2,1}$ in $\mathbf{P}_{2,2}$.

Sedaj si oglejmo nekaj primerov konstrukcij G^1-zveznih ploskev in jih primerjajmo z rezultatom, dobljenim v primeru 6.1. Izrek 2.4 pravi, da je stik obeh ploskev G^1-zvezen, natanko tedaj ko obstajata funkciji $\alpha_1(v)$ in $\beta_1(v)$, pogoj regularnosti? lastnosti teh funkcij? da velja

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = \alpha_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} + \beta_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0},$$

kjer je $\alpha_1(v) \neq 0$ na intervalu $[0, 1]$ in ima ustrezen predznak. V našem primeru gre za polinomske ploskve, zato lahko uporabimo izrek 5.1, ki pove, da to velja natanko tedaj, ko obstajajo polinomi $D(v)$, $E_1(v)$ in $F_1(v)$, kjer sta polinoma D in E_1 stopnje največ 5, polinom F_1 pa stopnje največ 6, da velja $D(v)E_1(v) \neq 0$ na $[0, 1]$ ter

$$D(v)\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = E_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} + F_1(v)\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0}. \tag{6.1}$$

Razpišimo prve odvode parametrizacij ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$: tu se nekako sklicuješ na formulo za odvod in evalvacijo v 0

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0} = 3\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j})B_i^2(u)B_j^3(v)|_{u=0} = 3\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j})B_j^3(v),$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = 3\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{i+1,j} - \mathbf{Q}_{i,j})B_i^2(u)B_j^3(v)|_{u=0} = 3\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^3(v),$$

in

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0} = 3\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{2}(\mathbf{Q}_{i,j+1} - \mathbf{Q}_{i,j})B_i^2(u)B_j^3(v)|_{u=0} = 3\sum_{j=0}^{2}(\mathbf{Q}_{0,j} - \mathbf{Q}_{0,j+1})B_j^2(v).$$

Dobljeno vstavimo v enačbo 6.1. Vidimo, da mora veljati:

$$\begin{aligned} &D(v)\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{P}_{1,j} - \mathbf{P}_{0,j})B_j^3(v) = \\ &= E_1(v)\sum_{j=0}^{3}(\mathbf{Q}_{1,j} - \mathbf{Q}_{0,j})B_j^3(v) + F_1(v)\sum_{j=0}^{2}(\mathbf{Q}_{0,j} - \mathbf{Q}_{0,j+1})B_j^2(v). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Najprej si oglejmo, kakšni pogoji v primeru G^1 zveznosti veljajo za robne kontrolne točke ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$. V enačbo 6.2 vstavimo vrednosti $v = 0$ in $v = 1$.

Pri vrednosti $v = 0$ dobimo:

$$d_0(\mathbf{Q}_{1,0} - \mathbf{Q}_{0,0}) = e_0(\mathbf{P}_{1,0} - \mathbf{P}_{0,0}) + f_0(\mathbf{P}_{0,1} - \mathbf{P}_{0,0}),$$

oziroma:

$$d_0\mathbf{q}_{0,0} = e_0\mathbf{p}_{0,0} + f_0\mathbf{z}_0.$$

Tu smo z d_0 označili vrednost $D(0)$, z e_0 vrednost $E_1(0)$, z f_0 pa vrednost $F_1(0)$. Pri vrednosti $v = 1$ pa dobimo:

$$d_1\mathbf{Q}_{1,3} = e_1(\mathbf{P}_{1,3} - \mathbf{P}_{0,3}) + f_1(\mathbf{P}_{0,3} - \mathbf{P}_{0,2}),$$

oziroma:

$$d_1\mathbf{q}_{0,3} = e_1\mathbf{p}_{0,3} + f_1\mathbf{z}_2.$$

Tu smo z d_1 označili vrednost $D(1)$, z e_1 vrednost $E_1(1)$ in z f_1 vrednost $F_1(1)$.

Pogoji, ki veljajo za robne kontrolne točke so enaki neglede na način konstrukcije G^1-zveznega zlepka ploskev. Pogoji, ki veljajo za notranje kontrolne točke, število svobodnih parametrov, ki določajo obliko dobljene ploskve, in število prostih kontrolnih točk pa so odvisni od izbire načina konstrukcije, natančneje, od izbire stopnje koeficientnih polinomskih funkcij in stopnje odvodov parametrizacij ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$.

Izbira stopenj koeficientnih funkcij ni povsem poljubna, temveč je odvisna od stopnje geometrijske zveznosti, ki jo zahtevamo, pa tudi od stopenj odvodov $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0}$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ in $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0}$ oziroma $\mathbf{C}'(v)$.

V praksi se običajno uporabljajo koeficientne funkcije čim nižje stopnje, saj s tem dobimo manj pogojev za kontrolne točke. V primeru, da sta funkciji $D(v)$ in $E(v)$ konstantni, funkcija $F(v)$ pa kvečjemu linearna, dobimo pogoje le za dve notranji kontrolni točki, vse ostale pa so proste, podobno kot v primeru C^1-zveznosti (primer 6.1). Če za koeficientne funkcije izberemo polinome višjih stopenj, se lahko zgodi, da dobimo pogoje za tri ali štiri kontrolne točke.

Najprej si oglejmo situacijo, v kateri za koeficientne funkcije izberemo polinome minimalne stopnje.

Primer 6.2. Da zagotovimo G^1-zveznost na stiku ploskev $\mathbf{R}$ in $\mathbf{S}$, mora poleg pogoja, da se ploskvi stikata v robni krivulji, veljati enakost 6.2, oziroma

$$D(v)\sum_{j=0}^{3}\mathbf{q}_j B_j^3(v) = E_1(v)\sum_{j=0}^{3}\mathbf{p}_j B_j^3(v) + F_1(v)\sum_{j=0}^{2}\mathbf{z}_j B_j^2(v). \tag{6.3}$$

Ker je stopnja krivulj $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}|_{u=0}$ in $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ enaka 3, stopnja krivulje $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}|_{u=0}$ pa 2 in če njihovih stopenj ne nižamo oziroma višamo, bodo stopnje polinomov $D(v)$, $E_1(v)$ in $F_1(v)$ minimalne, če bosta $D(v)$ in $E_1(v)$ konstantna polinoma, $F_1(v)$ pa linearen. V tem primeru namreč obe strani enačbe predstavljata Bézierjevo krivuljo stopnje 3.

Brez škode za splošnost lahko izberemo, da je $D(v) \equiv 1$. Potem je $E_1(v) \equiv e_0 = e_1$. Ker predpostavimo, da je $F_1(v)$ linearen in da velja $F_1(0) = f_0$ ter $F_1(1) = f_1$, mora za F_1 veljati

$$F_1(v) = f_0(1 - v) + f_1 v.$$

Vstavimo polinome D, E_1 in F_1 v enačbo 6.5 in dobimo:

$$\sum_{j=0}^{3}\mathbf{q}_j B_j^3(v) = e_0\sum_{j=0}^{3}\mathbf{p}_j B_j^3(v) + (f_0(1-v)+f_1 v)\sum_{j=0}^{2}\mathbf{z}_j B_j^2(v) =$$
$$= e_0\sum_{j=0}^{3}\mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{2}\mathbf{z}_j f_0\binom{2}{j}v^j(1-v)^{3-j} + \sum_{j=0}^{2}\mathbf{z}_j f_1\binom{2}{j}v^{j+1}(1-v)^{2-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{3}e_0\mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3}\mathbf{z}_j f_0\binom{2}{j}v^j(1-v)^{3-j} + \sum_{j=1}^{3}f_1\mathbf{z}_{j-1}\binom{2}{j-1}v^j(1-v)^{3-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{3}e_0\mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3}f_0\mathbf{z}_j\frac{3-j}{3}\binom{3}{j}v^j(1-v)^{3-j} + \sum_{j=1}^{3}f_1\mathbf{z}_{j-1}\frac{j}{3}\binom{3}{j}v^3(1-v)^{3-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{3}e_0\mathbf{p}_j B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3}f_0\mathbf{z}_j\frac{3-j}{3}B_j^3(v) + \sum_{j=0}^{3}f_1\mathbf{z}_{j-1}\frac{j}{3}B_j^3(v)$$

V tretji vrstici zgornjega računa smo uporabili dejstvo, da je v vsoti $\sum_{j=0}^{3}\mathbf{z}_j f_0\binom{2}{j}v^j(1-v)^{3-j}$ člen pri $j=3$ enak 0 in je zato $\sum_{j=0}^{2}\mathbf{z}_j f_0\binom{2}{j}v^j(1-v)^{3-j} = \sum_{j=0}^{3}\mathbf{z}_j f_0\binom{2}{j}v^j(1-v)^{3-j}$. Podobno smo v zadnji vrstici upoštevali, da je v vsoti $\sum_{j=0}^{3}b_1\mathbf{z}_{j-1}\frac{j}{3}B_j^3(v)$ člen pri $j=0$ enak 0 in je zato $\sum_{j=1}^{3}f_1\mathbf{z}_{j-1}\frac{j}{3}\binom{3}{j}v^3(1-v)^{3-j} = \sum_{j=0}^{3}b_1\mathbf{z}_{j-1}\frac{j}{3}B_j^3(v)$.

Od tod dobimo pogoje za kontrolna vektorja $\mathbf{q}_1$ in $\mathbf{q}_2$:

$$\mathbf{q}_{1,1} = e_0\mathbf{p}_{1,1} + \frac{1}{3}f_1\mathbf{z}_0 + \frac{2}{3}f_0\mathbf{z}_1$$

in

$$\mathbf{q}_{1,2} = e_0\mathbf{p}_{1,2} + \frac{2}{3}f_1\mathbf{z}_1 + \frac{1}{3}f_0\mathbf{z}_2.$$

Najprej opazimo, da za razliko od primera 6.1, tu ni več potrebe po kolinearnosti vektorjev $\mathbf{q}_{1,1}$ in $\mathbf{p}_{1,1}$ oziroma vektorjev $\mathbf{q}_{1,2}$ in $\mathbf{p}_{1,2}$, zahtevamo le še koplanarnost. Parametri e_0, f_0 in f_1 so prosti. Edina omejitev, ki velja v tem primeru, je, da mora biti $e_0 < 0$, saj bi imel v nasprotnem primeru stik ploskev obliko špice. Če izberemo $e_0 = -1$, $f_0 = 0$ in $f_1 = 0$, dobimo enak rezultat kot v primeru 6.1, v katerem smo iskali pogoje za C^1-zveznost. Z drugačno izbiro parametrov pa lahko dosežemo poljuben kot med vektorjema $q_{1,1}$ in $p_{1,1}$, biti morata samo del iste ravnine. Vidimo torej, da je zahteva G^1-zveznosti kar se tiče oblike dobljenega zlepka ploskev veliko manj omejujoča kot zahteva C^1-zveznosti.

V danem primeru, kjer so stopnje koeficientnih polinomov minimalne, je tudi število prostih kontrolnih točk enako kakor v primeru C^1-zveznosti. Kontrolni točki $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$ sta točno določeni z izbiro točk $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$, z robnimi kontrolnimi točkami ter izbiro parametrov e_0, f_0 in f_1, kontrolni točki $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ pa sta prosti. Enako velja za vse ostale notranje kontrolne točke.

Primer 6.3. Oglejmo si še nekoliko drugačen primer konstrukcije G^1-zveznih zlepkov dveh ploskev. Stopnja polinoma $D(v)$ naj bo znova 0, stopnja $F_1(v)$ pa 1. Ker pa želimo več parametrov, ki bodo določali obliko dobljene ploskve, naj bo polinom $E_1(v)$ stopnje 1. Da bomo v tem primeru na obeh straneh enačbe 6.2 dobili Bézierjevo krivuljo stopnje 3, moramo znižati stopnjo krivulje $\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$. Videli bomo, da v tem primeru sicer dobimo drugačne možnosti, kar se tiče oblike, kakor v primeru 6.2 več možnosti?, vendar se pri tem pojavi dodatna omejitev za notranje kontrolne točke.

Naj krivuljo $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0}$ določajo kontrolni vektorji $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_m$ in $\mathbf{p}_3$:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}|_{u=0} = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{p}_{1,i} B_i^3(v) = (1-v)^2 \mathbf{p}_{1,0} + 2(1-v)v\mathbf{p}_m + v^2 \mathbf{p}_{1,3}$$

Po formulah za višanje stopnje krivulje velja

$$\mathbf{p}_{1,1} = \frac{2}{3}\mathbf{p}_m + \frac{1}{3}\mathbf{p}_{1,0}$$

$$\mathbf{p}_{1,2} = \frac{2}{3}\mathbf{p}_m + \frac{1}{3}\mathbf{p}_{1,3},$$

oziroma

$$\mathbf{p}_m = \frac{3}{2}\mathbf{p}_{1,1} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_{1,0} = \frac{3}{2}\mathbf{p}_{1,2} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_{1,3}. \tag{6.4}$$

Enačba 6.2 se torej v tem primeru preoblikuje tako:

$$D(v)\sum_{j=0}^{3} \mathbf{q}_{1,j} B_j^3(v) = E_1(v)\sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + F_1(v)\sum_{j=0}^{2} \mathbf{s}_j B_j^2(v), \tag{6.5}$$

kjer smo označili $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_{1,0}$, $\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_m$ in $\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{p}_{1,3}$.

Polinom $D(v)$ naj bo konstanten, znova lahko predpostavimo $D(v) \equiv 1$. Polinoma $E_1(v)$ in $F_1(v)$ naj bosta linearna, zanju naj velja še $E_1(0) = e_0$, $E_1(1) = e_1$, $F_1(0) = f_0$, $F_1(1) = f_1$. Torej mora veljati:

$$E_1(v) = e_0(1-v) + e_1 v$$

$$F_1(v) = f_0(1-v) + f_1 v.$$

Vstavimo polinoma v enačbo 6.5 in na podoben način kot v primeru 6.2 dobimo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3} \mathbf{q}_{1,j} B_j^3(v) &= (a_0(1-v) + a_1 v)\sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j B_j^2(v) + (b_0(1-v) + b_1 v)\sum_{j=0}^{2} \mathbf{s}_j B_j^2(v) = \\
&= a_0 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + a_1 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{p}}_j \binom{2}{j} v^{j+1}(1-v)^{2-j} + \\
&+ b_0 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^j (1-v)^{3-j} + b_1 \sum_{j=0}^{2} \tilde{\mathbf{z}}_j \binom{2}{j} v^{j+1}(1-v)^{2-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{3} (a_1 \tilde{\mathbf{p}}_{j-1} \frac{j}{3} + a_0 \tilde{\mathbf{p}}_j \frac{3-j}{3} + b_1 \mathbf{z}_{j-1} \frac{j}{3} + b_0 \mathbf{z}_j \frac{3-j}{3}) B_j^3(v)
\end{aligned}$$

Od tod sledijo pogoji za vektorja $\mathbf{q}_{1,1}$ in $\mathbf{q}_{1,2}$.

$$\mathbf{q}_{1,1} = \frac{1}{3}(e_1 \mathbf{p}_{1,0} + 2e_0 \mathbf{p}_m + f_1 \mathbf{z}_0 + 2f_0 \mathbf{z}_1)$$

$$\mathbf{q}_{1,2} = \frac{1}{3}(e_0\mathbf{p}_{1,3} + 2e_1\mathbf{p}_m + 2f_1\mathbf{z}_1 + f_0\mathbf{z}_2).$$

Če še izrazimo vektor $\mathbf{p}_m$ z vektorjema $\mathbf{p}_{1,0}$ in $\mathbf{p}_{1,1}$ oziroma vektorjema $\mathbf{p}_{1,2}$ in $\mathbf{p}_{1,3}$, dobimo naslednji enačbi:

$$\mathbf{q}_{1,1} = e_0\mathbf{p}_{1,1} + \frac{1}{3}(e_1 - e_0)\mathbf{p}_{1,0} + \frac{1}{3}f_1\mathbf{z}_0 + \frac{2}{3}f_0\mathbf{z}_1$$
$$\mathbf{q}_{1,2} = e_1\mathbf{p}_{1,2} + \frac{1}{3}(e_0 - e_1)\mathbf{p}_{1,3} + \frac{2}{3}f_1\mathbf{z}_1 + \frac{1}{3}f_0\mathbf{z}_2.$$

Vidimo, da za razliko od primera 6.2, kjer smo imeli zgolj 3 parametre za določanje oblike, tu dobimo 4 parametre: e_0, e_1, f_0 in f_1. S tem dobimo nove možnosti za obliko dobljene ploskve. Hkrati pa izgubimo nekaj svobode, kar se tiče izbire kontrolnih točk. Kontrolne točke Kontrolni točki $\mathbf{Q}_{1,1}$ in $\mathbf{Q}_{1,2}$ sta kot v primeru 6.2 določeni s točkama $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ ter robnimi kontrolnimi točkami, kontrolni točki $\mathbf{P}_{1,1}$ in $\mathbf{P}_{1,2}$ pa nista več obe prosti. Prosta je le še ena izmed njiju, druga pa je določena z enačbo 6.4.