1. DOMAČA NALOGA

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-1.zip` in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do 2. aprila 2019 (do 22:00). Datoteka naj vsebuje kratko poročilo napisano v `LaTeXu` ali `Wordu`. Zraven priložite programe (s komentarji) in opisne datoteke, s katerimi ste naloge rešili.

1. Adaptivna pravila so sestavljena pravila, pri katerih metoda sproti ocenjuje napako in temu prilagaja velikost podintervalov. Napišite rekurzivno adaptivno metodo, ki temelji na Simpsonovem pravilu in Richardsonovi ekstrapolaciji. Natančneje, prvi približek I_1 za integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ določite tako, da na celem intervalu uporabite Simpsonovo pravilo, drugi približek I_2 pa določite tako, da interval razdelite na dva enaka dela in na vsakem uporabite Simpsonovo pravilo. Nato primerjajte izračunana približka.

   - če je razlika $|I_2 - I_1|$ večja od zahtevane natančnosti, potem interval razdelite na dva dela in na vsakem rekurzivno izračunajte integral z isto metodo.
   - če je razlika $|I_2 - I_1|$ manjša oz. enaka kot zahtevana natančnost (na vseh podintervalih), le še izboljšajte rezultat tako, da naredite še en korak Richardsonove ekstrapolacije.

   Vhodni podatki metode naj bodo funkcija f, interval $[a, b]$ in zahtevana natančnost δ. Metoda naj vrne približno vrednost integrala in ocenjeno doseženo natančnost.

   Delovanje metode preverite na podatkih:

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 10^{-6}}}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad \delta = \frac{1}{1000}.$$

2. Razen za znane družine ortogonalnih polinomov v splošnem ne znamo določiti vozlov in uteži Gaussovih integracijskih pravil v zaključeni obliki, zato jih moramo izračunati numerično. Gaussovo integracijsko pravilo na intervalu $[a, b]$ z $n + 1$ vozli in utežjo ρ lahko izračunamo s pomočjo tričlenske rekurzivne formule

   $$b_i Q_{i-1}(x) + a_i Q_i(x) + b_{i+1} Q_{i+1}(x) = x Q_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

   na naslednji način. Poiščemo lastne vrednosti $x_{j,n}$ in normirane lastne vektorje

   $$\boldsymbol{z}_j = (z_{j,i})_{i=0}^n, \quad \|\boldsymbol{z}_j\|_2 = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

   matrike

   $$A = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & & & \\ b_1 & a_1 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

Vozli (ničle polinoma Q_{n+1}) so ravno $x_{j,n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, uteži $\alpha_{j,n}$ pa izračunamo po formuli

$$\alpha_{j,n} = z_{j,0}^2 \int_a^b \rho(x)dx.$$

(a) Izračunajte uteži $\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n,n}$ in vozle $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ Gaussovih integracijskih pravil

$$\int_0^4 f(x)\rho(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_{i,n}) + Rf,$$

za

$$\rho(x) := 4x^2(4-x)^2, \quad n = 1, 2, 3, 5, 10.$$

(b) Naj bo ρ določen kot v točki (a) in naj bo

$$f(x) = xe^{-x}.$$

Z izpeljanimi Gaussovimi pravili na $n+1$ točkah, $n = 1, 2, 3, 5, 10$, izračunajte približek za integral

$$\int_0^4 f(x)\rho(x)dx.$$

Primerjajte izračunane vrednosti z vrednostjo, ki jo vrne funkcija `integral`, pri kateri nastavite test za absolutno napako (`AbsTol`) na 0, test za relativno napako (`RelTol`) pa na 10^{-15}. Za izpis rezultatov uporabite `format long e`.