1. DOMAČA NALOGA

Katarina Černe, 27172036

2. april 2019

1. naloga

Implementacija 1. naloge se nahaja v datotekah `AdaptSimpson.m` in `simpson.m`, rezultati pa se preverijo v datoteki `preverjanje1.m`

V datoteki `simpson.m` implementiramo Simpsonovo pravilo na treh točkah x_0, x_1 in x_2:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

V datoteki `AdaptSimpson.m` nato implementiramo rekurzivno adaptivno metodo, ki uporablja Simpsonovo pravilo in Richardsonovo ekstrapolacijo. Najprej na danem intervalu $[a, b]$ izračunamo integral `I1` s tritočkovnim Simpsonovim pravilom in integral `I2` s sestavljenim Simpsonovim pravilom na dveh intervalih, ki jih dobimo tako, da razpolovimo osnovni interval $[a, b]$ na dva podintervala $[a, \frac{a+b}{2}]$ in $[\frac{a+b}{2}, b]$. Če se dobljena približka za integral `I1` in `I2` razlikujeta za več kot `delta`, kar je predpisana toleranca, interval razpolovimo na dva podintervala in na njih rekurzivno pokličemo metodo. Če se približka za integral razlikujeta za manj kot `delta`, izračunamo končni približek za integral `I` z Richardsonovo ekstrapolacijo:

$$I = \frac{16I_2 - I_1}{15}.$$

Napako metode ocenimo kot maksimum napak na vseh podintervalih, na katerih smo računali integrala `I1` in `I2`, torej kot maksimum absolutnih razlik med `I1` in `I2` na vseh podintervalih.

V datoteki `preverjanje1.m` preizkusimo implementirane funkcije. Računamo približek za integral funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+10^{-6}}}$ na intervalu $[a, b] = [0, 1]$ pri zahtevani toleranci $\delta = \frac{1}{1000}$. Pri danih podatkih dobimo približek za integral `I = 1.998138414752528` in oceno za napako `napaka = 4.242391134492481e-04`.

2. naloga

Implementacija 2. naloge se nahaja v datotekah `ONBaza.m`, `skalarniInt.m`, `GaussUteziVozli.m` in `GaussIntegral.m`, rezultati pa se preverijo v datoteki `preverjanje2.m`

V datoteki `skalarniInt.m` ustvarimo funkcijo, ki računa skalarni produkt dveh funkcij z utežjo ρ:

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Pri tem za integracijo uporabimo vgrajeno funkcijo `integral` z absolutno toleranco 0 in relativno toleranco 10^{-15}.

V datoteki `ONBaza.m` implementiramo algoritem, ki prejme podatek o uteži ρ, intervalu, na katerem računamo skalarni produkt in maksimalni stopnji polinomov n, in izračuna in vrne ortonormirane polinome $Q_i(x)_{i=-1}^n$ in seznama koeficientov $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$ in $\{b_i\}_{i=0}^n$, ki nastopajo v tričlenski rekurzivni zvezi

$$b_i Q_{i-1}(x) + a_i Q_i(x) + b_{i+1} Q_{i+1}(x) = x Q_i(x).$$

Algoritem je naslednji:
Definiramo $Q_{-1} = 0$.
$b_0 = ||1||$, kjer za računanje norme uporabimo prej definirani skalarni produkt.
$Q_0 = \frac{1}{b_0}$
Za i=0,...,n:
$a_i =< xQ_i(x), xQ_i(x) >$, kjer za računanje uporabimo prej definirani skalarni produkt
$\tilde{Q}_{i+1}(x) = (x - a_i)Q_i(x) - b_i Q_{i-1}(x)$
$Q_{i+1}(x) = \frac{1}{b_{i+1}} \tilde{Q}_{i+1}(x)$

V datoteki `GaussUteziVozli.m` implementiramo funkcijo, ki izračuna vozle in uteži za Gaussovo integracijsko pravilo z $n+1$ vozli na danem intervalu $[am, bm]$ pri uteži ρ. Funkcija najprej s pomočjo funkcije `ONBaza` izračuna koeficiente $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$ in $\{b_i\}_{i=0}^n$ in ortonormirane polinome $Q_i(x)_{i=-1}^n$. Koeficiente nato s pomočjo vgrajene funkcije `spdiags` sestavi v tridiagonalno matriko `A` (kot v navodilih domače naloge, pri čemer ne uporabi koeficientov b_0 in b_n). Nato z vgrajeno funkcijo `eig` izračuna lastne vrednosti in lastne vektorje matrike `A`. Lastne vrednosti so ravno vozli tega integracijskega pravila. Lastne vektorje normiramo, nato pa izračunamo uteži $\alpha_{j,n}$ integracijskega pravila kot

$$\alpha_{j,n} = z_{j,0}^2 \int_{am}^{bm} \rho(x)dx,$$

kjer so z_j normirani lastni vektorji, torej je $z_{j,0}$ prva komponenta j-tega normiranega lastnega vektorja. Za računanje integrala uporabimo vgrajeno funkcijo `integral` z absolutno toleranco 0 in relativno toleranco 10^{-15}

V datoteki `GaussIntegral.m` implementiramo funkcijo, ki s pomočjo prej pripravljene metode `GaussUteziVozli` izračuna približek za integral

$$\int_{am}^{bm} f(x)\rho(x)dx$$

z Gaussovim integracijskim pravilom z utežjo ρ na $n+1$ vozlih kot

$$\int_{am}^{bm} f(x)\rho(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_{i,n}).$$

V datoteki `preverjanje2.m` preverimo rezultate metod pri podatkih $\rho(x) = 4x^2(4-x)^2$ in $f(x) = xe^{-x}$ na intervalu $[am, bm] = [0, 4]$ in $n+1$ vozlih, kjer je $n = 1, 2, 3, 5, 10$. Dobljeni približek za integral primerjamo še z integralom, ki ga izračuna vgrajena funkcija `integral` z absolutno toleranco 0 in relativno toleranco 10^{-15}.

Pri $n = 1$ dobimo uteži:
`alfa1 = 68.266666666666637 68.266666666666666`,
vozle:
`xn1 = 1.244071053981545 2.755928946018455`,
izračunani približek za integral:
`I1 = 36.433308183703254`
in absolutno razliko med rezultatom vgrajene metode in izračunanim rezultatom:
`0.801653960971116`

Pri $n = 2$ dobimo uteži:
`alfa2 = 29.257142857142817 78.019047619047655 29.257142857142849`,
vozle:
`xn2 = 0.845299461620748 2.000000000000000 3.154700538379251`,
izračunani približek za integral:
`I2 = 35.674279786085776`
in absolutno razliko med rezultatom vgrajene metode in izračunanim rezultatom:
`0.042625563353639`

Pri $n = 3$ dobimo uteži:
`alfa3 = 13.018809202969898 55.247857463696768 55.247857463696768 13.018809202969869`,
vozle:
`xn3 = 0.610506818786269 1.498874385828537 2.501125614171463 3.389493181213732`,
izračunani približek za integral:
`I3 = 35.632650114524914`
in absolutno razliko med rezultatom vgrajene metode in izračunanim rezultatom:
`0.000995891792776`

Pri $n = 5$ dobimo uteži:
`alfa5 = 3.158103888199260 20.696558213983682 44.412004564483716 44.412004564483659 20.696558213983700 3.158103888199259`,
vozle:
`xn5 = 0.360308009073026 0.918790725225282 1.622645155018428 2.377354844981572 3.081209274774718 3.639691990926975`,
izračunani približek za integral:
`I5 = 35.631654340999035`
in absolutno razliko med rezultatom vgrajene metode in izračunanim rezultatom:
`0.000000118266897`

Pri $n = 10$ dobimo uteži:
`alfa10 = 0.230464731154313 2.115814079225607 7.707457785521400 16.972012044839509 26.192248625741296 30.097338800369062 26.192248625741186 16.972012044839584 7.707457785521364 2.115814079225610 0.230464731154316`,
vozle:
`xn10 = 0.143967099141640 0.378907566714977 0.700988921701185 1.093038557364620 1.533960995508908 1.999999999999999 2.466039004491092 2.906961442635380 3.299011078298816 3.621092433285024 3.856032900858359`,
izračunani približek za integral:
`I10 = 35.631654222732124`
in absolutno razliko med rezultatom vgrajene metode in izračunanim rezultatom:
`0.000000000000014`

Vidimo lahko, da se razlika med izračunanim približkom za integral in rezultatom, ki ga vrne vgrajena metoda, hitro manjša, ko večamo število vozlov.