2. DOMAČA NALOGA

Katarina Černe, 27172036

19. maj 2019

1. naloga

Implementacija 1. naloge se nahaja v datotekah `EulerImplicitna.m`, `EulerIzboljsana.m` in `Heunova.m`, rezultati pa se preverijo v datoteki `preverjanje1.m`. Implementiramo tri različne Eulerjeve metode za reševanje robnega problema oblike $\frac{dy}{dx} = fun(x, y)$, kjer je $x \in [a, b]$, podan imamo še $y(a)$ in korak h.

V datoteki `EulerImplicitna.m` implementiramo implicitno Eulerjevo metodo. Interval $[a, b]$ razdelimo na $n = \frac{b-a}{h}$ delov z delilnimi točkami $\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i = a + i \cdot h$. Približke $y_i \approx y(x_i)$ izračunamo na naslednji način:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot fun(x_i, y_i).$$

Formula je implicitna, zato moramo y_i računati s pomočjo navadne iteracije. Začetni približek za y_i, ki ga označimo z $y_i^{(0)}$, izračunamo s pomočjo eksplicitne Eulerjeve metode:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot fun(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Nadaljujemo z računanjem približkov $y_i^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ na naslednji način:

$$y_i^{(k)} = y_{i-1} + h \cdot fun(x_i, y_i^{(k-1)})$$

in za končni približek vzamemo tisti $y_i^{(k)}$, za katerega je razlika $y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}$ manjša od neke tolerance, v našem primeru za toleranco vzamemo kar 10^{-6}.

V datoteki `EulerIzboljsana.m` implementiramo izboljšano Eulerjevo metodo. Interval $[a, b]$ razdelimo na $n = \frac{b-a}{2h}$ delov z delilnimi točkami $\{x_{\frac{i}{2}}\}_{i=0}^n$, $x_{\frac{i}{2}} = a + \frac{i}{2}h$. Približke $y_i \approx y(x_i)$ izračunamo na naslednji način:

$$y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i-1} + \frac{h}{2} fun(x_{i-1}, y_{i-1}), \text{ kjer } i = 1, 2, \ldots \text{ in}$$
$$y_i = y_{i-1} + h \cdot fun(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{i-\frac{1}{2}}), \text{ kjer } i = 1, 2, \ldots$$

V datoteki `Heunova.m` implementiramo Heunovo metodo. Interval $[a, b]$ razdelimo na $n = \frac{b-a}{h}$ delov z delilnimi točkami $\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i = a + i \cdot h$. Butcherjeva shema za Heunovo metodo je oblike

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Približke $y_i \approx y(x_i)$ izračunamo na naslednji način:

$$k_1 = fun(x_{i-1}, yi - 1)$$
$$k_2 = fun(x_{i-1} + \frac{2}{3}h, y_{i-1} + \frac{2}{3}h \cdot k_1)$$
$$y_i = y_{i-1} + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2).$$

rezultati

2. naloga

Implementacija 2. naloge se nahaja v datotekah `BDF.m` in `RungeKutta4.m`, rezultati pa se preverijo v datoteki `preverjanje2.m`.

V datoteki `BDF.m` implementiramo implicitno 4-člensko BDF metodo za robnega problema oblike $\frac{dy}{dx} = fun(x, y)$, kjer je $x \in [a, b]$, podan imamo še $y(a)$ in korak h.

Približke y_n pri tej metodi računamo po formuli

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} \nabla^i y_n = fun(x_n, y_n).$$

Tu se $\nabla^i y_n$ izraža kot

$$\nabla^i y_n = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} y_{n-j},$$

torej lahko izrazimo

$$y_n = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i}} (h \cdot fun(x_n, y_n) - \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} y_{n-j}).$$

Metoda je implicitna, zato y_n računamo z iteracijo, kot pri 1. nalogi pri implicitni Eulerjevi metodi. Začetni približek $y_n^(0)$ izračunamo z Runge-Kutta metodo reda 4, nato pa računamo

$$y_n^(k) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i}} (h \cdot fun(x_n, y_n^(k-1)) - \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} y_{n-j}),$$

dokler ni razlika $y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}$ manjša od 10^{-6}. Pri implicitni 4-stopenjski BDF metodi moramo najprej določiti y_i za $i = 0, 1, 2, 3$. Poznamo že y_0, y_1, y_2 in y_3 pa določimo z Runge-Kutta metodo reda 4, ki ima naslednjo Butcherjevo shemo:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} &
\end{array}$$

To metodo implementiramo v datoteki `RungeKutta4.m`. rezultati

3. naloga

Implementacija 3. naloge se nahaja v datotekah `MilneSistem.m` in `RungeKutta4.m`.