2. DOMAČA NALOGA

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-2.zip` in jih oddajte preko sistema Moodle (http://ucilnica.fmf.uni-lj.si) najkasneje do 21. maja 2019 (do 22:00). Datoteka naj vsebuje kratko poročilo napisano v `LaTeXu` ali `Wordu`. Zraven priložite programe (s komentarji) in opisne datoteke, s katerimi ste naloge rešili.

1. **Eulerjeve metode za reševanje NDE**

   Pri širjenju nalezljivih bolezni se da ob nekaterih poenostavitvah z relativno preprosto diferencialno enačbo predvideti število okuženih po določenem času. Predpostavimo, da se število ljudi v populaciji ne spreminja, da imajo vsi enako verjetnost okužbe in da okuženi v takem stanju ostanejo. Naj funkcija $x(t)$ predstavlja število zdravih, $y(t)$ pa število okuženih oseb ob času t. Ob dovolj veliki populaciji lahko predpostavimo, da sta $x(t)$ in $y(t)$ zvezni funkciji, diferencialna enačba, ki ju povezuje, pa se glasi

   $$\frac{dy}{dt}(t) = k\,x(t)y(t), \quad x(t) + y(t) = m,$$

   kjer je m velikost cele populacije, k pa konstanta odvisna od stopnje nalezljivosti. Rešiti je torej treba začetni problem

   $$\frac{dy}{dt}(t) = k(m - y(t))y(t).$$

   Naj bo

   $$m = 8 * 10^6, \quad y(0) = 100, \quad k = 2 \cdot 10^{-8},$$

   čas pa merimo v dnevih. Kakšno je število okuženih po 10, 20, 30 dneh?

   Diferencialno enačbo rešite z

   (a) Implicitno Eulerjevo metodo
   (b) Izboljšano Eulerjevo metodo
   (c) Heunovo metodo.

   Za korak vzemite $h = 0.1$.

   V Octavu torej zapišite in uporabite funkcije
   ```
   function y = EulerImplicitna(fun, a, b, y0, h),
   function y = EulerIzboljsana(fun, a, b, y0, h),
   function y = Heunova(fun, a, b, y0, h).
   ```

   Narišite grafe, ki predstavljajo število okuženih, če enačbo rešujete z metodami (a), (b) in (c).

2. **Implicitne BDF metode**

Te metode so k-členske metode, ki temeljijo na t.i. obratnih končnih diferencah. Sodijo v družino metod, pri katerih aproksimiramo odvod v sami diferencialni enačbi. V ta namen funkcijo y aproksimiramo z interpolacijskim polinomom p in diferencialno enačbo zapišemo v zadnji točki, torej v x_n. Polinom p zapišemo v Newtonovi obliki kot

$$p(x) = p(x_n + th) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{-t}{i} \nabla^i y_n.$$

Odvajajmo sedaj interpolacijski polinom in dobimo

$$\frac{dp}{dx}\Big|_{x=x_n} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{dt}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \nabla^i y_n \frac{d}{dt}\binom{-t}{i}\Big|_{t=0} = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\nabla^i y_n.$$

Po drugi strani je $\frac{dp}{dx}\big|_{x=x_n}$ aproksimacija za $y'(x_n)$. Tako torej dobimo metodo

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\nabla^i y_n = hf(x_n, y_n).$$

V Octavu zapišite 4-člensko BDF metodo za reševanje začetnih problemov

```
function res = BDF(fun, a, b, y0, h) ,
```

ki za dano funkcijo `fun`, interval `[a,b]`, začetni približek `y0` in korak `h` reši DE 1. reda z implicitno 4-člensko BDF metodo in vrne vektor `res`, kjer so zapisani približki za vrednosti y_i. Začetne približke izračunajte s pomočjo Runge-Kutta metode reda 4.

Delovanje preverite na naslednjem primeru:

Naj bo

$$y' + 20(y-2) = 0, \quad y(0) = 3,$$

primer toge diferencialne enačbe na intervalu $[a, b] = [0, 2]$. Enačba ima točno rešitev $y(x) = 2 + e^{-20x}$. Vzemite korake $h \in \{\frac{1}{25}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}\}$. Nalogo rešite z eksplicitno Eulerjevo metodo in zgoraj opisano 4-člensko implicitno BDF metodo. Komentirajte rezultate, ki ji dobite.

3. **Veččlenske metode**

V Octavu zapišite veččlensko metodo za reševanje začetnih problemov

```
function res = MilneSistem(fun, a, b, y0, h) ,
```

ki za dano funkcijo `fun`, interval `[a,b]`, začetni približek `y0` in korak `h` reši sistem DE 1. reda z Milneovo prediktor-korektor metodo reda 4 in vrne matriko `res`, kjer so zapisani približki za vrednosti y_i (prva vrstica) in odvode y_i' (druga vrstica).

Milneove metode so poseben razred veččlenskih metod, ki temeljijo na Newton-Cotesovih integracijskih pravilih. Najbolj znana je metoda četrtega reda. Te metode uporabljamo kot prediktor-korektor metode. Prediktor je eksplicitna metoda 4. reda, korektor pa implicitna metoda 4. reda. Sta oblike

$$
\begin{aligned}
y_n^{(p)} &= y_{n-4} + \frac{h}{3}\left(8f_{n-1} - 4f_{n-2} + 8f_{n-3}\right), \\
y_n^{(k)} &= y_{n-2} + \frac{h}{3}\left(f_n^{(p)} + 4f_{n-1} + f_{n-2}\right).
\end{aligned}
$$

Pri tem $^{(p)}$ označuje prediktor, $^{(k)}$ pa korektor. Velja še $f_n^{(p)} := f(x_n, y_n^{(p)})$. Ideja je, da najprej izračunamo približek s pomočjo prediktorja, nato pa ta približek še malo popravimo s pomočjo korektorja.

Delovanje preverite na naslednjem primeru:

Naj bo

$$
y'' - \frac{1}{3}y^2y' + 3xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \tag{1}
$$

diferencialna enačba drugega reda na intervalu $[a, b] = [0, 10]$. Enačbo prevedite na sistem diferencialnih enačb prvega reda in ga rešite z Milneovo prediktor-korektor metodo reda 4. Za korak vzemite $h = 0.1$ in poiščite rešitev na intervalu $[a, b]$. Začetne približke izračunajte z Runge-Kutta metodo 4. reda. Narišite tudi graf dobljene numerične resitve $(x, y(x))$ za $x \in [a, b]$. Vso stvar ponovite še za korak $h = 0.05$. Za obe izbiri koraka h izpišite še numerične približke za $y(b)$.