2. DOMAČA NALOGA

Katarina Černe, 27172036

20. maj 2019

1. naloga

Implementacija 1. naloge se nahaja v datotekah `EulerImplicitna.m`, `EulerIzboljsana.m` in `Heunova.m`, rezultati pa se preverijo v datoteki `preverjanje1.m`. Implementiramo tri različne Eulerjeve metode za reševanje robnega problema oblike $\frac{dy}{dx} = fun(x, y)$, kjer je $x \in [a, b]$, podan imamo še $y(a)$ in korak h.

V datoteki `EulerImplicitna.m` implementiramo implicitno Eulerjevo metodo. Interval $[a, b]$ razdelimo na $n = \frac{b-a}{h}$ delov z delilnimi točkami $\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i = a + i \cdot h$. Približke $y_i \approx y(x_i)$ izračunamo na naslednji način:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot fun(x_i, y_i).$$

Formula je implicitna, zato moramo y_i računati s pomočjo navadne iteracije, ali pa za reševanje uporabimo kar vgrajeno funkcijo `fzero`, pri čemer računamo ničle funkcije

$$g(t) = t - y_{i-1} - h \cdot fun(x_i, t)$$

Pri tem rabimo še začetni približek za y_i, ki ga izračunamo s pomočjo eksplicitne Eulerjeve metode:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot fun(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

V datoteki `EulerIzboljsana.m` implementiramo izboljšano Eulerjevo metodo. Interval $[a, b]$ razdelimo na $n = \frac{b-a}{2h}$ delov z delilnimi točkami $\{x_{\frac{i}{2}}\}_{i=0}^n$, $x_{\frac{i}{2}} = a + \frac{i}{2}h$. Približke $y_i \approx y(x_i)$ izračunamo na naslednji način:

$$y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i-1} + \frac{h}{2} fun(x_{i-1}, y_{i-1}), \text{ kjer } i = 1, 2, \ldots \text{ in}$$

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot fun(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{i-\frac{1}{2}}), \text{ kjer } i = 1, 2, \ldots$$

V datoteki `Heunova.m` implementiramo Heunovo metodo. Interval $[a, b]$ razdelimo na $n = \frac{b-a}{h}$ delov z delilnimi točkami $\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i = a + i \cdot h$. Butcherjeva shema za Heunovo metodo je oblike

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Približke $y_i \approx y(x_i)$ izračunamo na naslednji način:

$$k_1 = fun(x_{i-1}, yi - 1)$$

$$k_2 = fun(x_{i-1} + \frac{2}{3}h, y_{i-1} + \frac{2}{3}h \cdot k_1)$$

$$y_i = y_{i-1} + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2).$$

Dobimo naslednje rezultate: Število okuženih po 10 dneh:

- z implicitno Eulerjevo metodo: $0.050172760083025 \cdot 10^4$
- z izboljšano Eulerjevo metodo: $0.049524536918739 \cdot 10^4$
- s Heunovo metodo: $0.049524536867780 \cdot 10^4$

Število okuženih po 20 dneh:

- z implicitno Eulerjevo metodo: $0.251678987879975 \cdot 10^4$
- z izboljšano Eulerjevo metodo: $0.245220099105067 \cdot 10^4$
- s Heunovo metodo: $0.245220097603792 \cdot 10^4$

Število okuženih po 30 dneh:

- z implicitno Eulerjevo metodo: $1.261187470506422 \cdot 10^4$
- z izboljšano Eulerjevo metodo: $1.213031743398884 \cdot 10^4$
- s Heunovo metodo: $1.213031705461628 \cdot 10^4$

2. naloga

Implementacija 2. naloge se nahaja v datotekah `BDF.m`, `RungeKutta4.m` in `EulerEksplicitna.m`, rezultati pa se preverijo v datoteki `preverjanje2.m`.

V datoteki `BDF.m` implementiramo implicitno 4-členско BDF metodo za robnega problema oblike $\frac{dy}{dx} = fun(x, y)$, kjer je $x \in [a, b]$, podan imamo še $y(a)$ in korak h.

Približke y_n pri tej metodi računamo po formuli

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} \nabla^i y_n = fun(x_n, y_n).$$

Tu se $\nabla^i y_n$ izraža kot

$$\nabla^i y_n = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} y_{n-j},$$

torej lahko izrazimo

$$y_n = \frac{1}{\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i}} (h \cdot fun(x_n, y_n) - \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} y_{n-j}).$$

Metoda je implicitna, zato y_n računamo s pomočjo funkcije `fzero`, kot pri 1. nalogi pri implicitni Eulerjevi metodi. Začetni približek za y_n izračunamo z Runge-Kutta metodo reda 4, nato pa računamo ničle funkcije

$$g(t) = t - \frac{1}{\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i}} (h \cdot fun(x_n, t) - \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} y_{n-j}),$$

Pri implicitni 4-stopenjski BDF metodi moramo najprej določiti y_i za $i = 0, 1, 2, 3$. Poznamo že y_0, y_1, y_2 in y_3 pa določimo z Runge-Kutta metodo reda 4, ki ima naslednjo Butcherjevo shemo:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} &
\end{array}
$$

To metodo implementiramo v datoteki `RungeKutta4.m`.

V datoteki `EulerEksplicitna.m` implementiramo eksplicitno Eulerjevo metodo, pri kateri računamo

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot fun(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Pri koraku $h = \frac{1}{25}$ dobimo z BDF metodo $y(b) = 2.000000000000326$, pri koraku $h = \frac{1}{20}$ dobimo $y(b) = 2.000000000309457$, pri $h = \frac{1}{15}$ dobimo $y(b) = 1.999999909530579$ in pri $h = 1/10$ dobimo $y(b) = 1.999997577067534$. Pri vseh štirih h-jih se dobljene rešitve za večje x_i gibljejo okrog 2, kar se precej približa točni rešitvi, ki konvergira proti 2 in za katero velja $y(b) = 2$. Po drugi strani pa z eksplicitno Eulerjevo metodo dobimo $y(b) = 2$ za $h = \frac{1}{25}$ in $h = \frac{1}{20}$ in $y(b) = 2.000000000000005$ za $h = \frac{1}{15}$. V teh treh primerih se rešitve za velike x_i gibajo okrog 2. Za $h = \frac{1}{10}$ pa dobimo rešitev, ki oscilira med 3 in 1, za sode i je $y_i = 3$, za lihe i je $y_i = 1$. Rešitev se torej v tem primeru ne približa točni rešitvi, torej ta metoda za ta primer ni stabilna.

3. naloga

Implementacija 3. naloge se nahaja v datotekah `MilneSistem.m` in `RungeKutta4.m`. V datoteki `primer3.m` se nahaja sistem diferencialnih enačb, na katerega prevedemo dano diferencialno enačbo drugega reda, v datoteki `preverjanje3.m` pa preverimo rešitve.

Pri $h = 0.1$ dobimo rešitev $y(b) = -0.441424015188975$, pri $h = 0.05$ pa $y(b) = -0.422277970368344$.