UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Katarina M. Dimitrijević

ALGORITMI ZA ODREĐIVANJE MINIMALNOG POVEZUJUĆEG DRVETA U GRAFU

master rad

Beograd, 2025.

Mentor:

dr Vesna Marinković, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

prof. dr Filip Marić, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Mirko Spasić, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: _____

Ovaj rad posvećujem svojoj porodici i prijateljima, uz iskrenu zahvalnost za njihovu podršku tokom studija. Posebnu zahvalnost dugujem mentorki, prof. dr Vesni Marinković, za pomoć i savete tokom izrade master rada.

Naslov master rada: Algoritmi za određivanje minimalnog povezujućeg drveta u grafu

Rezime: Grafovski algoritmi predstavljaju jednu od najznačajnijih oblasti teorije algoritama. Jedan od ključnih problema teorije grafova je problem pronalaženja minimalnog povezujućeg drveta u neusmerenom težinskom grafu, koji se definiše kao zadatak nalaženja povezanog podgrafa zadatog grafa koji sadrži sve njegove čvorove, a čija je ukupna težina grana minimalna. Ovaj problem pronalazi primenu u različitim oblastima: dizajnu različitih vrsta mreža, dizajnu integrisanih kola, segmentaciji slika, klasterovanju, a takođe se koristi i za pronalaženje približnih rešenja nekih NP-teških problema.

U ovom radu predstavljeno je nekoliko algoritama za rešavanje problema konstrukcije minimalnog povezujućeg drveta: Primov, Kruskalov, Boruvkin, Kargerov, Fredman-Tardžanov, Šazelov i algoritam obrnutog brisanja grana. Pored samog pregleda algoritama i njihove implementacije, izvršeno je i poređenje njihove efikasnosti uz evaluaciju dobijenih rezultata.

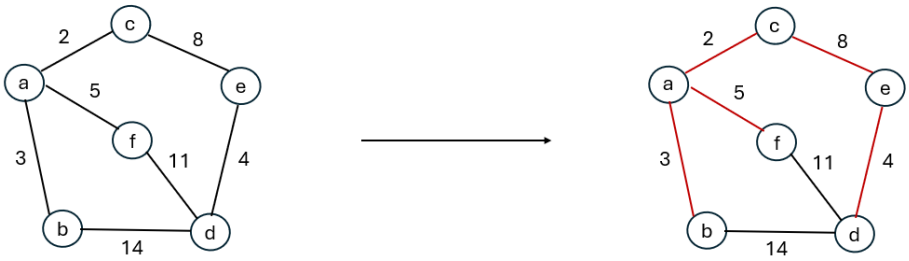
Ključne reči: teorija algoritama, graf, minimalno povezujuće drvo, analiza vremenske složenosti

Sadržaj

Glava 1

Uvod

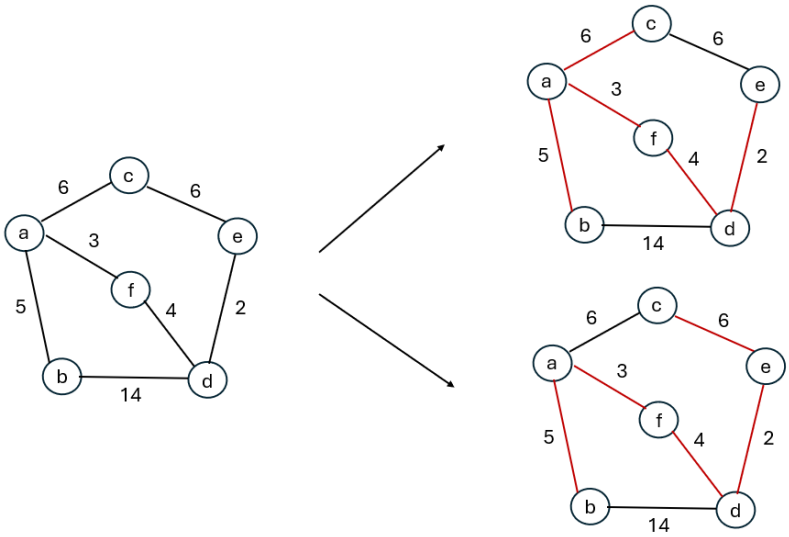
Grafovski algoritmi predstavljaju značajnu podoblast teorije algoritama. Jedan od fundamentalnih problema teorije grafova, koji se smatra osnovom kombinatorne optimizacije, je problem pronalaženja minimalnog povezujućeg drveta (eng. *Minimum Spanning Tree*) u neusmerenom težinskom grafu. U ostatku teksta će za minimalno povezujuće drvo često biti korišćena skraćenica MST.
Minimalno povezujuće (razapinjuće) drvo neusmerenog povezanog težinskog grafa definiše se kao povezan podgraf zadatog grafa koji sadrži sve njegove čvorove, a čija je ukupna težina grana minimalna. Na slici 1.1 je prikazan primer neusmerenog težinskog povezanog grafa i njegovog minimalnog povezujućeg drveta [11].



Slika 1.1: Primer grafa i njegovog minimalnog povezujućeg drveta

U slučaju nepovezanih težinskih grafova za svaku od komponenti povezanosti se može pronaći minimalno povezujuće drvo. Skup svih minimalnih povezujućih drveta nepovezanog težinskog grafa naziva se *minimalna povezujuća šuma* (eng. *Minimum Spanning Forest*). U nastavku će biti referisana uz pomoć skraćenice MSF.

Ukoliko su težine svih grana u grafu međusobno različite, rešenje problema konstrukcije MST je uvek jedinstveno. U suprotnom to ne mora biti slučaj. Primer povezanog težinskog grafa, kod koga se težine svih grana međusobno razlikuju, i njegovo jedinstveno rešenje ilustrovani su na slici 1.1. Na slici 1.2 je dat primer grafa kod koga postoje dve grane iste težine. U zavisnosti od toga koja od njih je u datom trenutku izabrana moguća su dva rešenja.



Slika 1.2: Primer povezanog težinskog grafa koji ima dve grane iste težine i njegova dva različita minimalna povezujuća drveta

1.1 Istorijski pregled metoda za rešavanje problema

Poput većine važnih algoritama, i algoritmi za rešavanje problema pronalaženja minimalnog povezujućeg drveta u datom grafu, motivisani su problemima iz prakse. Ovaj problem datira još od davnina. Naime, od najranijih vremena postojala je težnja ka minimizaciji putanja i rastojanja između geografskih tačaka, naselja ili drugih objekata u prostoru, a kasnije i troškova vodovodnih, električnih, telekomunikacionih i drugih mreža. Formulacija problema konstrukcije MST predstavlja uopštenje svega navedenog. Prva istraživanja na ovu temu potiču još s početka dvadesetog veka. Naime, češki matematičar Boruvka (Otakar Borůvka) je, inspirisan tada aktuelnim problemom koji se odnosio na dizajn električne mreže u regionu

Južne Moravske u Češkoj, objavio rad 1926. godine koji se bavio ovom temom [1]. Tada je po prvi put formulisan problem konstrukcije MST u matematičkim terminima (odnosno njegovo uopštenje). Interesantno je da se rad sastojao od samo jedne strane, ali se, bez obzira na to, smatra ključnim za rešavanje problema konstrukcije MST. Originalna formulacija problema, data u ovom radu, glasi: Dato je n tačaka u ravni ili u prostoru čija su sva međusobna rastojanja različita. Cilj je napraviti mrežu koja povezuje ove tačke tako da važi:

- svake dve tačke su povezane ili direktno ili posredstvom drugih tačaka
- ukupna dužina mreže je najmanja moguća [12].

Više detalja o ovom algoritmu biće dato u poglavlju 2.3. Kasnije je objavljeno još nekoliko radova na temu ovog algoritma, nezavisno od Boruvkinog istraživanja. Inspirisan Boruvkinim radom [12], Jarnik (Vojtěch Jarník) je 1930. godine objavio nešto drugačiji algoritam za rešavanje ovog problema [8]. Taj isti algoritam je objavio i Prim (Robert Prim) 1957. godine, a potom i Dijkstra (Edsger Dijkstra) 1958. godine. U literaturi ovaj algoritam je poznat kao Primov algoritam. Kruskal (Joseph Kruskal) je 1956. godine [10] objavio algoritam zasnovan na dosta intuitivnoj ideji koristeći potpuno drugačiji pristup u odnosu na Primov. Svi do sada spomenuti algoritmi su složenosti $O(|E| \log |V|)$, gde je $|E|$ broj grana, a $|V|$ broj čvorova grafa. Naredni značajan pomak u ovoj oblasti, a i samoj teoriji grafova postigli su Fredman (Michael Fredman) i Tardžan (Robert Tarjan) 1984. godine [7] kada su konstruisali algoritam složenosti $O(|E| \log^* |V|)$[1] koristeći novu strukturu podataka – Fibonačijev hip. Sledeće veliko dostignuće postigao je Karger (David Karger) 1995. godine [9] sa randomizovanim algoritmom očekivane linearne vremenske složenosti. Međutim kako ovo nije bio deterministički algoritam, potraga za algoritmom manje vremenske složenosti je nastavljena. Godine 1997, Šazel (Bernard Chazelle) [2] predstavio je deterministički algoritam vremenske složenosti $O(|E|\alpha(|V|, |E|))$, gde je sa α označena inverzna Akermanova funkcija. Ova funkcija raste izuzetno sporo, sporije čak i od iterirane logaritamske funkcije. Ipak, ona i dalje teži beskonačnosti kada n teži beskonačnosti, tako da ovime i dalje nije pronađen deterministički algoritam linearne složenosti. Pored spomenutih, postoji još veliki broj algoritama koji predstavljaju varijacije ovih, uz manje vremenske uštede, ali za problem MST još uvek nije poznato da li postoji deterministički algoritam linearne vremenske složenosti.

[1] Ovde $\log^*$ označava iteriranu logaritamsku funkciju i predstavlja broj puta koliko je potrebno primeniti logaritamsku funkciju dok argument ne postane manji od 1.

Cilj ovog rada je implementacija i analiza različitih algoritama za rešavanje problema minimalnog povezujućeg drveta. Obrađeni algoritmi biće međusobno poređeni na testnom uzorku odabranih grafova.

1.2 Primene algoritma

Problem određivanja minimalnog povezujućeg drveta nalazi primene u različitim domenima. Jedna od tipičnih primena ovog problema je u dizajnu različitih vrsta komunikacionih mreža, kada je potrebno međusobno povezati čvorove mreže tako da se ne obrazuje ciklus, a da cena mreže bude minimalno moguća. Pored komunikacionih, ovaj problem nalazi primenu i u dizajnu računarskih mreža, električnih i vodovodnih, kao i transportnih mreža.

Problem MST nalazi primenu i u problemu klasterovanja, kada je cilj grupisati slične tačke tako da se minimizuje ukupno rastojanje između klastera (kod hijerarhijskog tipa klasterovanja). Ideja je da se za zadati skup tačaka konstruiše MST korišćenjem nekog poznatog algoritma. MST se smatra jednim klasterom koji sadrži sve čvorove, a zatim se iz njega jedna po jedna grana uklanja (počevši od grane najveće težine), dok se ne zadovolji neki unapred zadati kriterijum (npr. željeni broj klastera). Ovo je klasterovanje naniže, a uz pomoć MST se može postići i klasterovanje naviše.

Takođe, ovaj problem nalazi primenu i u razvijanju približnih algoritama za rešavanje nekih NP-teških problema, na primer, problema trgovačkog putnika (eng. *Traveling Salesman Problem*), za koji se često koristi skraćenica TSP. Zadatak problema trgovačkog putnika je da se u datom grafu pronađe Hamiltonov ciklus sa minimalnom ukupnom težinom grana. MST se može iskoristiti za rešavanje jedne varijante problema trgovačkog putnika, kada težine grana odgovaraju euklidskim rastojanjima između čvorova. Dakle, potrebno je da trgovac obiđe n datih gradova, koje odgovaraju tačkama u ravni, tako da svaki od njih poseti tačno jednom a da pritom pređe što kraći put. Pritom se podrazumeva da su udaljenosti između svaka dva grada poznate i da odgovaraju rastojanju odgovarajućih tačaka u ravni. MST se u ovom algoritmu koristi za izgradnju približnog algoritma sa faktorom aproksimacije 2. Naime, udvostručavanjem grana MST grafa i skraćivanjem ponovljenih čvorova korišćenjem nejednakosti trougla dolazi se do obilaska grafa koji je u najgorem slučaju 2 puta duži od optimalnog rešenja problema TSP. Ovo rešenje je moguće dodatno popraviti.

Glava 2

Algoritmi za konstrukciju minimalnog povezujućeg drveta

2.1 Primov algoritam

Primov algoritam je osmišljen 1930. godine kao matematički algoritam u okviru teorije grafova, a 1957. godine je objavljen rad iz oblasti informatike u kome je, po drugi put, predstavljen isti algoritam.

Kako je minimalno povezujuće drvo određeno skupom grana datog grafa, prirodno se nameće ideja da se ono može konstruisati inkrementalno, dodavanjem jedne po jedne grane. Naredna grana se bira tako da bude najmanje težine od svih grana koje povezuju do tada konstruisano drvo sa čvorovima koji još uvek nisu dodati u tekuće drvo. Postupak se završava kada se svi čvorovi dodaju u drvo. Dokaz korektnosti opisanog algoritma se može izvesti indukcijom po broju grana dodatih u trenutni podgraf minimalnog povezujućeg drveta [11].

Induktivna hipoteza: Za povezan neusmeren težinski graf G, zadat skupom čvorova V i skupom grana E, u oznaci $G = (V, E)$, može se konstruisati drvo T_k koje sadrži k grana, $k < |V| - 1$, tako da je ono podgraf nekog MST-a zadatog grafa.

Baza indukcije: U slučaju kada je k=0, trenutno drvo T_0 ne sadrži nijednu granu i može sadržati proizvoljan čvor grafa. Pošto je zadati graf povezan, minimalno povezujuće drvo uvek postoji i sadrži sve čvorove zadatog grafa, te je baza indukcije ispunjena.

Induktivni korak: Pretpostavimo da imamo na raspolaganju drvo T_k koje zadovoljava induktivnu hipotezu i koje se sastoji od k grana. Postavlja se pitanje kako pronaći narednu granu minimalnog povezujućeg drveta koja bi proširila induktivnu

hipotezu.

Neka je G_k skup koji sadrži sve grane (a, b), čiji jedan krajnji čvor pripada T_k, a drugi ne pripada. Ideja je da se za narednu granu bira grana minimalne težine iz skupa G_k. Neka je grana minimalne težine grana $e = (a, b)$ tako da čvor a pripada T_k, a čvor b ne pripada T_k. Tvrdimo da svaka grana, izabrana na ovaj način, sigurno pripada nekom minimalnom povezujućem drvetu. Odnosno, drugim rečima, tvrdimo da postoji minimalno povezujuće drvo T' koje sadrži T_k i granu e.

Dokaz: Neka je T minimalno povezujuće drvo grafa G. Ukoliko grana e pripada drvetu T grafa G, u tom slučaju je $T = T'$. Ukoliko drvo T ne sadrži granu $e = (a, b)$ dokaz je malo komplikovaniji. Naime, pošto je T povezujuće drvo, mora postojati put od a do b kroz grane minimalnog povezujućeg drveta i on mora biti jedinstven, jer bi u suprotnom postojao ciklus. Takođe, zaključujemo da grana e ne sme pripadati putu od a do b u T. Pošto čvor a pripada, a čvor b ne pripada drvetu T_k, na tom putu mora postojati bar još jedna grana $e' = (a', b')$, tako da se čvor a' nalazi u T_k, a čvor b' ne. Postavlja se pitanje odnosa težina grana e i e':

- Grana e' ne može biti manje težine od grane e jer je e odabrano kao grana minimalne težine iz skupa G_k.
- Međutim e' ne može biti ni veće težine od e jer bi se u tom slučaju, uklanjanjem grane e' iz drveta T i dodavanjem grane e, dobilo drvo manje ukupne težine od T, što bi dovelo do kontradikcije.
- Na osnovu prethodnog razmatranja jasno se zaključuje da u ovom slučaju grane e i e' moraju imati iste težine. Na taj način uklanjanjem grane e' i dodavanjem grane e u drvo T, ono ostaje minimalno povezujuće drvo grafa G. Odnosno, postoji *minimalno* drvo T koji *sadrži* granu e.

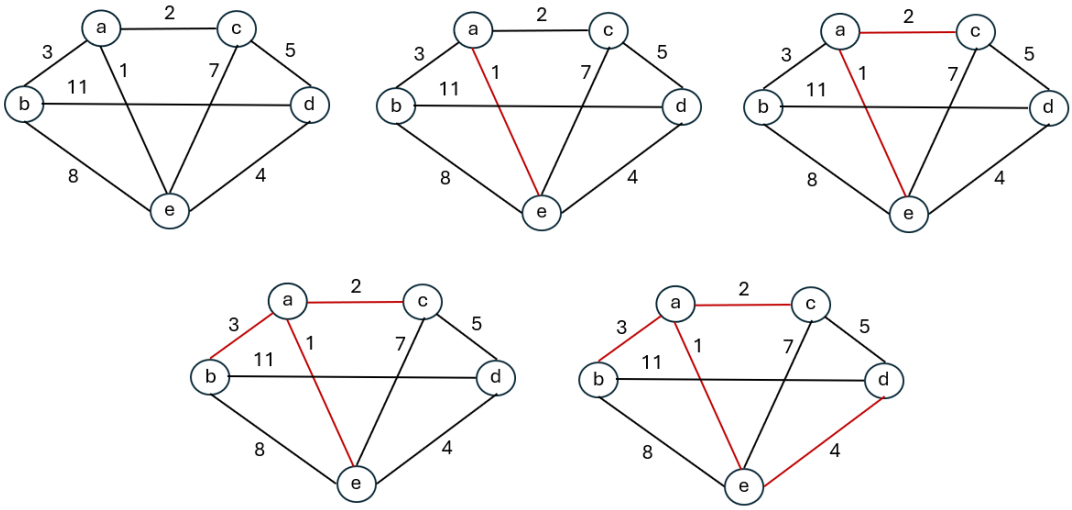
Primov algoritam polazi od praznog skupa grana i u svakoj iteraciji dodaje po jednu granu čime se drvo proširuje. Do svakog čvora, iz skupa čvorova koji još uvek ne pripadaju G_k, pamti se minimalna težina grane od čvorova iz G_k, a ukoliko takva grana ne postoji smatra se da težina iznosi $+\infty$. Nakon odabira naredne grane, proveravaju se težine grana od njenog krajnjeg čvora do svih susednih čvorova: ukoliko je težina neke od tih grana manja od težine tekuće minimalne grane do tog čvora, izračunate u prethodnim iteracijama, minimalna tekuća težina grane do tog čvora se ažurira. Opisani postupak je skoro pa identičan Dajkstrinom algoritmu za računanje najkraćih puteva iz zadatog čvora, izuzev što se kod Dajkstrinog algoritma putanje

minimizuju po ukupnoj težini od početnog čvora, a kod Primovog od trenutno konstruisanog drveta.

Analiza složenosti: U implementaciji Primovog algoritma koristi se red sa prioritetom. Najčešće se za implementaciju reda sa prioritetom koristi binarni hip, koji je drvolika struktura podataka i kod koga operacije dodavanja proizvoljnog elementa i uklanjanja elementa sa najvećim prioritetom imaju u najgorem slučaju logaritamsku složenost. Kako se u korenu binarnog min-hipa čuva minimalni element, pristup minimalnom elementu se izvršava u konstantnom vremenu. Ova struktura podataka se koristi za čuvanje težina grana do svih suseda trenutnog drveta T_k, tako da se u svakom trenutku može efikasno pronaći grana minimalne težine koja se dodaje u trenutno minimalno povezujuće drvo. Svaki od čvorova se najviše jednom dodaje u red sa prioritetom, pa je vreme potrebno za dodavanje svih čvorova, kao i vreme potrebno za brisanje iz reda $O(|V| \log |V|)$. Tokom konstrukcije minimalnog povezujućeg drveta grane najmanje težine do svakog od čvorova van T_k se potencijalno ažuriraju, međutim tih operacija je ukupno najviše $|E|$, a vreme koje je potrebno za sva ažuriranja iznosi $O(|E| \log |V|)$. Stoga je složenost Primovog algoritma ekvivalentna složenosti Dajkstrinog i iznosi $O((|E| + |V|) \log |V|)$.

Umesto binarnog, može se koristiti neki drugi hip, npr. Fibonačijev hip i time se može poboljšati teorijska vremenska složenost. Ovakva poboljšanja postaju značajna u slučaju veoma velikih grafova. Primov algoritam se smatra prilično efikasnim algoritmom, naročito za retke grafove (one koji imaju mali broj grana) i tada složenost iznosi $O(|V| \log |V|)$.

Na slici 2.1 ilustovan je rad Primovog algoritma, korak po korak. Postupak čuvanja težina grana do svih čvorova i njihovo ažuriranje kroz iteracije može se videti u tabeli 2.1. Prvi element i-te vrste tabele odgovara čvoru koji je dodat u i-toj iteraciji, dok ostali elementi te vrste odgovaraju težinama minimalnih, do sada razmatranih, grana između tekućeg drveta i čvorova koji još uvek ne pripadaju konstruisanom drvetu. Vrednost beskonačno označava da put između neka dva čvora još uvek nije poznat. Algoritam započinje rad dodavanjem čvora a na red sa prioritetom. Zatim, razmatraju se svi njegovi susedi i pamte se težine grana koje vode do njih. U prvom redu tabele upisane su odgovarajuće težine grana do čvorova b, c i e jer su oni susedi čvora a, dok se za one čvorove grafa do kojih ne postoji put od čvora a upisuje vrednost beskonačno, što je u ovom slučaju rastojanje do čvora d. Sledeća iteracija



Slika 2.1: Ilustracija izvršavanja Primovog algoritma

započinje uzimanjem čvora sa reda čije je rastojanje od trenutnog drveta najmanje i to je čvor e. Obrađuju se svi njegovi susedi i popravlja se rastojanje do svakog od njih, ukoliko je to moguće, a u suprotnom se zadržava prethodno izračunato rastojanje. U drugoj iteraciji je popravljeno rastojanje do čvora d, jer on prethodno nije bio povezan sa trenutnim drvetom, dok sada postoji grana iz čvora e čija težina iznosi 4. Postupak se ponavlja sve dok se svi čvorovi ne obrade, odnosno dok red sa prioritetom ne postane prazan i tada se grane minimalne težine do svakog čvora nalaze u tabeli 2.1. Minimalno povezujuće drvo za zadati graf sa slike čine grane: $(a, e), (a, c), (a, b)$ i (e, d), a njegova ukupna težina iznosi 11.

	a	b	c	d	e
a	-	$a(3)$	$a(2)$	∞	$a(1)$
e	-	$a(3)$	$a(2)$	$e(4)$	-
c	-	$a(3)$	-	$e(4)$	-
b	-	-	-	$e(4)$	-
d	-	-	-	-	-

Tabela 2.1: Težine minimalnih grana do svakog od čvorova van T_k kroz iteracije

Primov algoritam je primer *pohlepnog* algoritma, što znači da uvek bira trenutno najbolje rešenje, tj. lokalni minimum, koji vodi ka najboljem rešenju kompletnog problema.

2.2 Kruskalov algoritam

Kruskal je 1956. godine osmislio algoritam za konstrukciju minimalnog povezujućeg drveta, koji je zasnovan na nešto drugačijoj ideji od Primovog.

Ideja koja stoji iza Kruskalovog algoritma je da se minimalno povezujuće drvo konstruiše dodavanjem jedne po jedne grane na trenutnu šumu, a ne na trenutno drvo, kao što je to slučaj u Primovom algoritmu. Sam algoritam započinje izvršavanje nad skupom čvorova, tako da svaki čvor predstavlja zasebno drvo, koje nema grana. U svakoj iteraciji se razmatra naredna grana iz skupa grana sortiranih u neopadajućem poretku prema težini. Ukoliko čvorovi, koji su incidenti sa tekućom granom, pripadaju različitim drvetima tekuće šume, ta grana se dodaje u tekuću šumu, dok se u suprotnom preskače. Dodavanjem grane se vrši spajanje drveta kojima pripadaju čvorovi trenutne grane. Na ovaj način se dodavanjem svake grane broj drveta trenutne šume smanjuje za jedan. Lako se zaključuje da se postupak završava nakon dodavanja $|V| - 1$ grane, kada se formira jedinstveno drvo, odnosno podgraf polaznog grafa koji ne sadrži cikluse. Jasno je da ovaj postupak rezultira povezujućim drvetom, samo je još potrebno pokazati da je ono i minimalno [11]. Dokaz se može sprovesti indukcijom po broju obrađenih grana iz neopadajuće sortiranog niza grana na osnovu njihovih težina.

Induktivna hipoteza: Za zadati graf G i skup njegovih grana E (koje su neopadajuće sortirane po težinama), može se formirati šuma K koja sadrži $k-1$ grana iz skupa E, tako da K pripada nekom minimalnom povezujućem drvetu T. Grane se biraju redom iz neopadajuće sortiranog skupa grana, pod uslovom da ne formiraju ciklus. Drugim rečima, postoji minimalno povezujuće drvo T koje sadrži sve grane iz K, a ne sadrži nijednu granu iz $E \setminus K$ (one koje su odbačene jer zatvaraju neki ciklus).

Baza indukcije: Za bazni slučaj se uzima da je $k = 0$, odnosno da nijedna grana još uvek nije obrađena, tako da je trenutna šuma $K = \emptyset$, ali je i skup odbačenih grana takođe prazan.

Induktivni korak: Ako je na osnovu induktivne hipoteze poznato kako kreirati tekuću šumu koja se sastoji od $k-1$ grana, postavlja se pitanje kako na nju dodati narednu granu tako da induktivna hipoteza ostane ispunjena. Ako je sledeća grana koja se razmatra grana e, moguća su tri slučaja:

- Grana e može biti odbačena. Do odbacivanja dolazi ukoliko ona formira neki ciklus sa granama iz K. Pošto se sve grane iz K nalaze i u T, sledi da bi grana

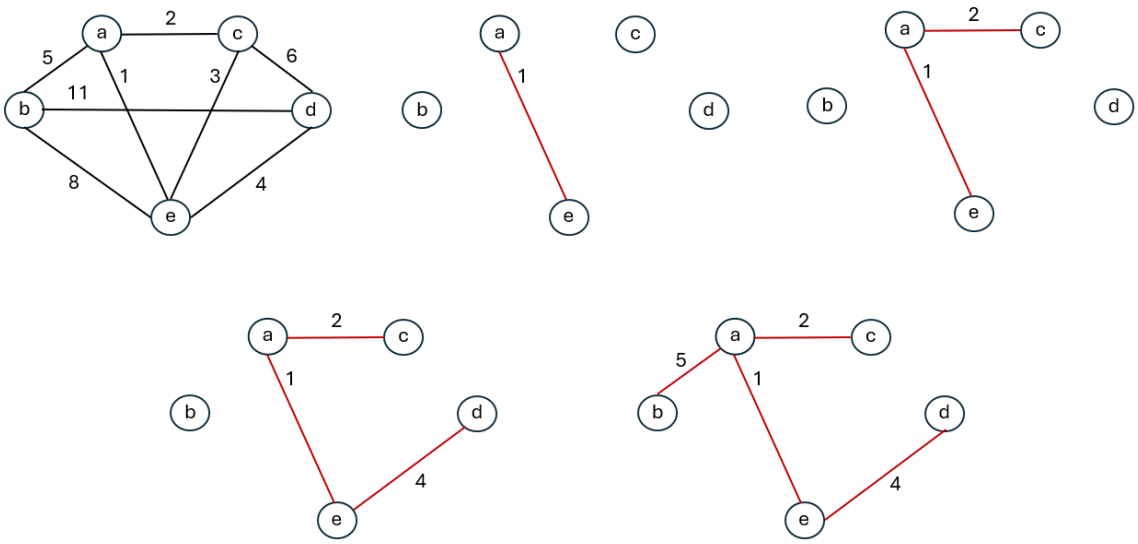
e formirala ciklus i u T. Kako u drvetu T nema ciklusa, grana e ne pripada T, tako da odbacivanjem grane e induktivna hipoteza ostaje ispunjena.

- Ukoliko grana e ne formira ciklus u K, ona se dodaje. U slučaju da se razmatrana grana nalazi u drvetu T induktivna hipoteza ostaje ispunjena i dokaz je završen.

- Ukoliko grana e ne formira ciklus u K, ona se dodaje, ali se može desiti da se ova grana ne nalazi u T. Kako se ona ne nalazi u T, znači da bi se njenim dodavanjem formirao neki ciklus. U tom ciklusu mora postojati neka grana e', koja se ne nalazi u K. Pošto se ona nalazi u T, znači da se ne nalazi u skupu odbačenih grana. Razmotrimo njenu težinu. Kako ona nije još uvek razmatrana od strane algoritma, pa samim tim nije dodata u K, njena težina mora biti veća od težine grane e. Međutim, ako je veća onda se njenim izbacivanjem iz T i dodavanjem grane e dobija drvo manje težine što je kontradikcija jer je T već minimalno. Zaključujemo da su težine grana e i e' zapravo jednake. Na ovaj način zamenom grane e' granom e u drvetu T, ono ostaje minimalno i induktivna hipoteza ostaje ispunjena.

Analiza složenosti: u implementaciji ovog algoritma koristi se struktura podataka DSU (eng. *Disjoint Set Union*), poznata i kao union-find [11]. Ona omogućava efikasno spajanje komponenti (dva drveta prilikom dodavanja grane) i proveru pripadnosti čvorova odgovarajućim podskupovima. Ova struktura podataka omogućava uniranje dva podskupa i određivanje kom podskupu pripada neki element u vremenskoj složenosti koja je logaritamska u odnosu na broj elemenata u skupu. Glavna petlja algoritma se izvršava $|E|$ puta. U petlji se pozivaju operacije pronalaženje predstavnika (eng. *find*) i spajanje drveta (eng. *union*) koje su složenosti $O(\log |V|)$. Takođe, na samom početku je potrebno inicijalizovati ovu pomoćnu strukturu što je vremenske složenosti $O(|V|)$, jer na samom početku svaki čvor predstavlja komponentu za sebe. Takođe, potrebno je izdvojiti i sortirati sve grane, što je u proseku složenosti $O(|E| \log |E|)$. Sumiranjem svega navedenog i korišćenjem poznate nejednakosti $|E| \leq |V|^2$, dolazimo do ukupne složenosti $O(|E| \log |V|)$. Slično kao i Primov, smatra se efikasnim algoritmom, ali naročito za retke grafove. Kruskalov algoritam je takođe primer *pohlepnog algoritma*.

Na slici 2.2 je prikazan primer izvršavanja Kruskalovog algoritma koji na ulazu dobija graf sa slike. Rad algoritma započinje nad skupom čvorova V, gde svaki od njih čini drvo za sebe i zajedno formiraju trenutnu šumu $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ i $\{e\}$. Uz-



Slika 2.2: Ilustracija izvršavanja Kruskalovog algoritma

ima se jedna po jedna grana iz sortiranog niza i uključuje se samo ukoliko ne zatvara ciklus. Grana najmanje težine je grana (a, e) i ona se prva dodaje, pa tekuću šumu nakon prve iteracije čine drveta sa skupom čvorova: $\{a, e\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ i $\{d\}$. Sledeća se razmatra grana (a, c) i kako ne zatvara nijedan ciklus, ona se dodaje, a trenutnu šumu nakon druge iteracije čine drveta: $\{a, c, e\}$, $\{b\}$ i $\{d\}$. Sledeća se razmatra grana (c, e), ali se ona preskače pošto zatvara ciklus, a dodaje se sledeća grana iz sortiranog niza grana, a to je (e, d). Trenutnu šumu nakon treće iteracije čine drveta: $\{a, c, d, e\}$ i $\{b\}$. Na samom kraju se dodaje grana (a, b) i formira se jedinstveno drvo sa skupom čvorova $\{a, b, c, d, e\}$ i skupom grana $\{(a, b), (a, c), (a, e), (d, e)\}$, odnosno, algoritam se zaustavlja kada se konstruiše drvo koje sadrži $|V| - 1$ granu.

2.3 Boruvkin algoritam

Još jedan algoritam za pronalaženje minimalnog povezujućeg drveta zadatog grafa, nastao 1926. godine, je Boruvkin algoritam. Ideja na kojoj se zasniva je veoma intuitivna i jednostavna. Polazi se od skupa čvorova ulaznog grafa, gde se svaki od njih posmatra kao zasebna komponenta povezanosti, odnosno, kao pojedinačno drvo, slično pristupu u Kruskalovom algoritmu. Ideja je da se te komponente spajaju dok ne ostane samo jedna, koja će zapravo predstavljati traženo minimalno povezujuće drvo početnog grafa i tada se algoritam zaustavlja. Ono što se zapravo razlikuje

u odnosu na Kruskalov algoritam je način odabira grana koje ulaze u minimalno povezujuće drvo, odnosno sama konstrukcija drveta.

U prvom koraku se za svaki čvor iz skupa V pronalazi grana najmanje težine koja je incidentna sa tim čvorom i ona se dodaje na trenutnu šumu. Ovime se broj komponenti smanjuje. Ovaj korak se ponavlja, s tim što se nakon prve iteracije više ne biraju grane koje povezuju pojedinačne čvorove, već grane koje povezuju novonastale komponente. Postupak se zaustavlja kada ostane samo jedna komponenta povezanosti. Drugim rečima, u svakom koraku se bira grana koja povezuje dve različite komponente povezanosti, čime se garantuje da neće doći do zatvaranja ciklusa, što je osnovni uslov za konstruisanje povezujućeg drveta grafa. Rezultat prethodno opisanog postupka je povezujuće drvo inicijalnog grafa. Ovo tvrđenje se jednostavno može dokazati indukcijom po broju komponenti povezanosti u trenutnoj šumi.

Ostaje pokazati da je ovo drvo ujedno i minimalno, odnosno drvo najmanje ukupne težine.

Dokaz: Pokažimo da je povezujuće drvo dobijeno opisanim postupkom minimalno svođenjem na kontradikciju. Neka je T minimalno povezujuće drvo zadatog grafa, a T' povezujuće drvo koje je konstruisao Boruvkin algoritam. Ako su sve težine grana grafa međusobno različite, tvrdimo da mora da važi $T = T'$. Pretpostavimo suprotno, tj. da se ova dva drveta razlikuju i neka je $e' = (a, b) \in T'$ prva grana drveta T' dobijena Boruvkinim algoritmom kao grana minimalne težine iz čvora a, za koju važi da ne pripada minimalnom povezujućem drvetu T. Kako je T povezujuće drvo, postoji put od čvora a do čvora b kroz grane drveta T. Taj put mora da sadrži granu $e = (a, v)$ za $v \neq b$. Ova grana ne može biti manje težine od grane (a, b) jer je grana (a, b) izabrana u Boruvkinom algoritmu kao grana najmanje težine iz a. Stoga je težina grane e veća od težine grane e'. Međutim, onda važi da je i $T - e + e'$ manje ukupne težine od težine drveta T , što je u suprotnosti sa tim da je T MST grafa [12].

Prethodni dokaz važi u slučaju kada su sve grane zadatog grafa međusobno različitih težina što je Boruvka i pretpostavio u svom prvom radu iz 1926. godine. Ukoliko bi graf mogao imati grane sa istim težinama, dokaz bi bio malo komplikovaniji, a primeri takvih dokaza dati su u poglavljima 2.1 i 2.2. Kada je nastao, ovaj algoritam je bio poznat pod nazivom *širenje šume* (eng. *parallel merging, forest growing*). Kao i prethodna dva algoritma, i ovaj algoritam pripada klasi pohlepnih algoritama.

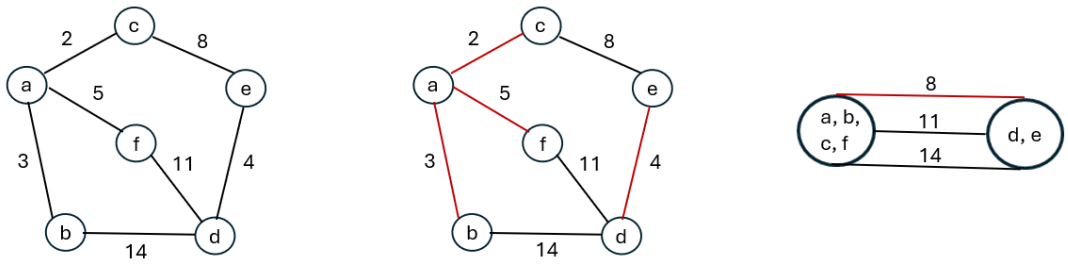
U implementaciji ovog algoritma se novoformirana komponenta identifikuje svo-

Komponenta	Grana	Težina
$\{a\}$	(a, c)	2
$\{b\}$	(a, b)	3
$\{c\}$	(a, c)	2
$\{d\}$	(d, e)	4
$\{e\}$	(d, e)	4
$\{f\}$	(a, f)	5

Tabela 2.2: Grane obeležene u prvoj iteraciji

jim predstavnikom, a sve grane unutar jedne komponente se eliminišu. Takođe, prilikom spajanja komponenti granom najmanje težine, sve ostale grane između njih mogu biti eliminisane. Za potrebe ovih operacija se koristi ranije spomenuta, union-find struktura.

Analiza složenosti: U svakoj iteraciji se na trenutnu šumu dodaje bar $|V|/2$ grana, čime se broj komponenti smanjuje bar dvostruko u odnosu na početni graf, te je broj iteracija algoritma $O(\log |V|)$. U svakoj od tih iteracija se svaka grana razmatra najviše jednom. Dakle, ukupna složenost Boruvkinog algoritma iznosi $O(|E| \log |V|)$. Iako ima istu složenost kao i Primov i Kruskalov algoritam, za razliku od njih, pokazuje se znatno efikasnijim na gustim grafovima. Takođe, njegova velika prednost je mogućnost paralelizacije.



Slika 2.3: Primer izvršavanja Boruvkinog algoritma

Na slici 2.3 je prikazan primer izvršavanja Boruvkinog algoritma. U prvoj iteraciji se svaki čvor grafa iz skupa $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ posmatra kao zasebna komponenta. Za svaki od njih se pronalazi njemu incidentna grana najmanje težine tako da ga ona povezuje sa drugom komponentom. Pregled takvih grana za svaku od komponenti, nakon završene prve iteracije, dat je u tabeli 2.2.

Komponenta	Grana	Težina
$\{a, b, c, f\}$	(c, e)	8
$\{d, e\}$	(c, e)	8

Tabela 2.3: Grane obeležene u drugoj iteraciji

Ove grane se označavaju i tako se formiraju nove komponente koje sadrže njima incidentne čvorove. Primenom operacija unije nastaju nove komponente i one sada postaju ulaz u drugu iteraciju algoritma. Postupak se ponavlja. Grane koje su obeležene u drugoj iteraciji su date u tabeli 2.3.

Obeležavanjem poslednje grane nastaje jedinstvena komponenta i algoritam se zaustavlja. Prolaskom kroz označene grane se konstruiše minimalno povezujuće drvo polaznog grafa. Njega čine grane: (a, c), (a, b), (a, f), (c, e) i (a, c), ukupne težine 22.

2.4 Algoritam obrnutog brisanja grana

Još jedan algoritam iz grupe pohlepnih algoritama za pronalaženje minimalnog povezujućeg drveta je *algoritam obrnutog brisanja grana* (eng. *reverse-delete*). Algoritam na ulazu dobija neusmeren, težinski graf. Ideja algoritma je da se inicijalno grane sortiraju u opadajućem poretku (u opštem slučaju u nerastućem poretku), a da se zatim za svaku od njih razmatra da li nakon njenog uklanjanja graf ostaje povezan. Ukoliko je to slučaj, trenutna grana se uklanja i algoritam nastavlja dalje sa izvršavanjem. U protivnom se ta grana zadržava i prelazi se na sledeću granu iz sortiranog niza. Ideja algoritma je jednostavna i intuitivna i u velikoj meri odgovara ideji Kruskalovog algoritma[1]. Razlika je u tome što se u Kruskalovom algoritmu grane sortiraju u rastući (neopadajući) poredak, razmatraju jedna po jedna i dodaju na trenutnu šumu, osim ukoliko formiraju ciklus.

Dokažimo korektnost ovog algoritma. Prvi deo dokaza, odnosno tvrđenje da algoritam obrnutog brisanja grana nalazi povezujuće drvo je veoma jednostavano pokazati. Algoritam na ulazu dobija povezani, težinski graf G. Pošto je graf povezan, njegovo povezujuće drvo mora postojati. Uklanjanjem jedne po jedne grane, uz uslov da graf sve vreme ostaje povezan, na kraju ostaje graf koji sadrži inicijalni skup čvorova, ali iz koga su uklonjene sve grane koje formiraju neki ciklus, što je po

[1]I algoritam obrnutog brisanja grana i Kruskalov algoritam su objavljeni u istom radu 1956. godine, ali ih ne treba poistovetiti [10].

definiciji povezujuće drvo grafa. Drugi deo dokaza je komplikovaniji i odnosi se na minimalnost ovako dobijenog drveta. Ovaj deo tvrđenja se može pokazati primenom matematičke indukcije.

Induktivna hipoteza: Prepostavimo da F, podgraf polaznog grafa G koji je dobijen obradom $k-1$ grane sa najvećom težinom iz G, sadrži neko njegovo minimalno povezujuće drvo T.

Baza indukcije: Ovo tvrđenje je tačno pre prve iteracije algoritma jer je inicijalno $F = G$, a kako je ulazni graf G povezan, kao takav uvek sadrži minimalno povezujuće drvo T.

Induktivni korak: Neka je F podgraf grafa G koji je nastao nakon $k-1$ iteracije algoritma. Neka je grana e $k-$ta po redu grana sortiranog niza. Moguća su tri slučaja:

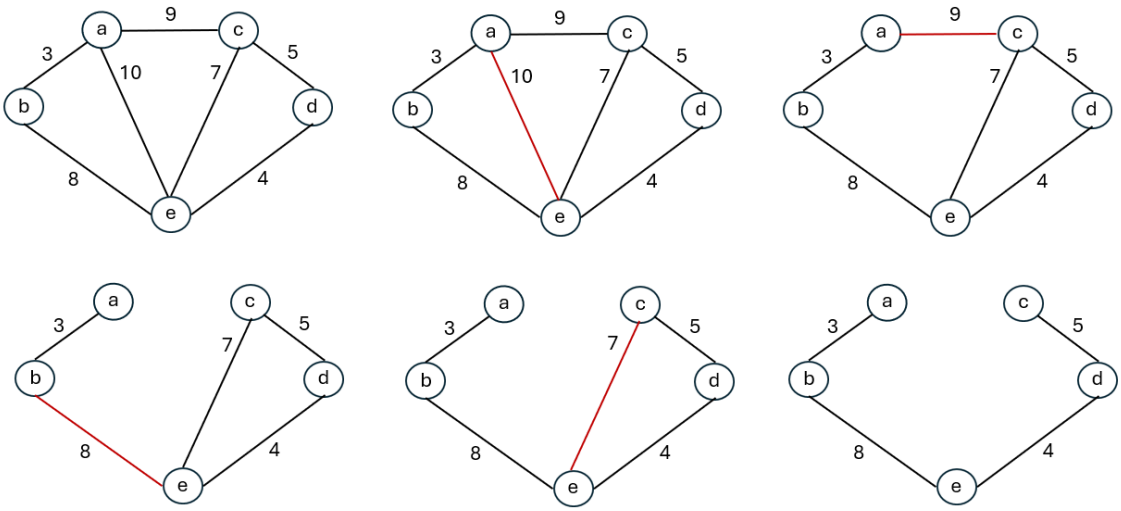
- Grana e se ne izbacuje iz F. Pošto je na osnovu induktivne hipoteze F sadržalo neko MST T, kako se trenutna grana se ne izbacuje iz F, sledi da induktivna hipoteza ostaje nenarušena.

- Grana e se izbacuje iz F i ne pripada T. Ukoliko se grana ne nalazi u T, ona se može izbaciti iz F i time se ne narušava induktivna hipoteza jer i nakon izbacivanja trenutne grane, F i dalje sadrži neko MST T.

- Grana e se izbacuje iz F, ali pripada T. Pošto je ova grana izbačena, može se lako zaključiti da njenim izbacivanjem graf G ostaje povezan. Neka je $e = (u, v)$. U tom slučaju mora postojati neki drugi put od čvora u do čvora v. Jasno je da na tom putu postoji neka grana e' iz tog ciklusa koja se nalazi van T, jer u suprotnom T ne bi bilo povezujuće drvo. Ona mora pripadati nekom drugom drvetu T' koje je takođe podgraf od F za koje važi $T' = T - e + e'$. Lako je pokazati da je da je T' zaista drvo jer nastalo izbacivanjem grane e iz drveta T i dodavanjem nove grane e', tako da se na taj način zadržavaju svojstva drveta. Sada možemo takođe pokazati i da je drvo T' minimalno. Posmatrajmo težine grana e i e'. Lako se pokazuje da nije moguće da je težina grane e veća od težine grane e' jer je T minimalno povezujuće drvo. Takođe, nije moguće ni da je težina grane e manje od težine grane e' jer algoritam uklanja grane u opadajućem redosledu što znači da bi onda grana e' bila razmatrana pre grane e što nije slučaj. Iz navedenog sledi da mora važiti da ove dve grane imaju jednake težine, pa drvo T' ima istu ukupnu težinu kao i drvo T. Zaključujemo da je i drvo T' minimalno, što znači da u svakoj

iteraciji algoritma važi da F sadrži minimalno povezujuće drvo. Na samom kraju izvršavanja, sve grane koje učestvuju u nekom ciklusu su izbačene, što znači da je podgraf F drvo, i to preciznije da je F minimalno povezujuće drvo grafa G.

Analiza složenosti: vreme potrebno za sortiranje grana grafa je $O(|E| \log |E|)$. Zatim, kako bismo utvrdili da li bi nakon izbacivanja svake od grana graf ostao povezan, potrebno je na preostalom grafu pokrenuti neki vid pretrage (npr. DFS pretragu) čija složenost iznosi $O(|E| + |V|)$. Dakle, ukupna vremenska složenost iznosi: $O(|E| \log |E| + |E|(|E| + |V|))$.



Slika 2.4: Ilustracija izvršavanja algoritma obrnutog brisanja grana

Na slici 2.4 je ilustrovano izvršavanje algoritma. Grane se razmatraju jedna po jedna u opadajuće sortiranom redosledu težina (crvenom bojom su obeležene grane koje se trenutno razmatraju) i uklanjaju se sve one koje ulaze u sastav nekog ciklusa. Najpre se razmatra grana (a, e), a zatim i grana (a, c). Za obe se zaključuje da graf nakon njihovog uklanjanja ostaje povezan, te one ne pripadaju MST. Naredna grana koja se razmatra je grana (b, e), međutim, njenim brisanjem bi graf postao nepovezan tako da se ona preskače. Zatim se uklanja i grana (c, e). Sledeća je na redu (b, e), ali se niti ona, niti ijedna od preostalih grana sme ukloniti jer nijedna od njih ne ulazi u sastav nekog ciklusa. Drugim rečima, grane koje su preostale čine minimalno povezujuće drvo.

2.5 KKT algoritam

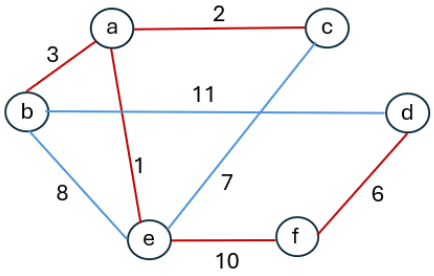
Pokazuje se da je moguće razviti i efikasniji algoritam za računanje MST ukoliko dozvolimo da algoritam koristi koncept nasumičnosti. Karger (David Karger) je 1992. godine objavio *randomizovani* algoritam za konstrukciju MST i čija očekivana vremenska složenost iznosi $O(|E| + |V| \log |V|)$. Klajn (Philip Klein) i Tardžan (Robert Tarjan) su ga 1994. godine optimizovali i popravili njegovu vremensku složenost na $O(|E| + |V|)$. Kako je originalna ideja potekla od Kargera, algoritam je u literaturi poznat i pod nazivom *Kargerov algoritam*. U nastavku će na ovaj algoritam biti referisano kao na *KKT (Karger-Klajn-Tardžanov) algoritam*. Ovaj algoritam spada u grupu tzv. podeli-pa-vladaj (eng. *divide-and-conquer*) algoritama [6].

Ideja na kojoj je zasnovan KKT algoritam je sledeća: konstruiše se nadgraf MST grafa G, a zatim se iz njega odbacuju one grane koje ne pripadaju MST korišćenjem svojstva ciklusa, formulisanog u nastavku. U ostatku grafa, koji ne sadrži prethodno odbačene grane, problem se rekurzivno rešava. Izdvajamo nekoliko bitnih svojstava:

- *Svojsvo ciklusa* (eng. *cycle property*) - za proizvoljan ciklus grafa G važi da grana najveće težine koja pripada tom ciklusu ne pripada minimalnom povezujućem drvetu tog grafa.
- *Svojsvo preseka* (eng. *cut property*) - za proizvoljni podskup čvorova ulaznog grafa važi da od svih grana koje povezuju taj skup čvorova sa ostatkom grafa, ona koja ima najmanju težinu pripada minimalnom povezujućem drvetu tog grafa.

Za potrebe razmatranja algoritma uvodimo pojam teških i lakih grana u odnosu na neku šumu. Neka je F šuma, tako da je ona podgraf od G. Za granu e, koja pripada G, za koju važi da se njenim dodavanjem u F zatvara neki ciklus i da je ona grana najveće težine u tom ciklusu, kažemo da je ona *teška u odnosu na* F, tj. F*-teška* (eng. F*-heavy*). U suprotnom granu e nazivamo *lakom u odnosu na* F (eng. F*-light*), tj. F*-lakom*. Iz ove dve definicije se lako zaključuje da svaka grana koja pripada MST grafa G spada u F-lake, za svaki podgraf $F \subseteq MST(G)$. Ovo tvrđenje važi i u suprotnom smeru, odnosno, svaka F-laka grana pripada MST grafa G. Takođe, za F-teške grane važi da su one teške i u odnosu na minimalno povezujuće drvo grafa G.

Na slici 2.5 dat je primer grafa kod koga su crvenom bojom obeležene F-lake grane, a plavom bojom F-teške, za $F = MST(G)$. Primetimo da skup lakih grana čini MST grafa. Teške grane nisu deo MST grafa i svaka od njih je grana najveće težine u nekom ciklusu trenutnog grafa.



Slika 2.5: Primer grafa na kome su F-lake grane označene crvenom bojom, a F-teške grane plavom bojom

U nastavku sledi opis samog algoritma. Najpre se iz skupa grana $E(G)$ grafa G nasumično odabere podskup grana $E'(G)$, a potom se iz njega uklone sve teške grane. Zatim se na ostatku grana rekurzivno rešava isti problem, ali manje dimenzije. Ideja koja se krije iza opisanog postupka je sledeća: većina grana u grafu se ne nalazi u MST i ako ih možemo efikasno odbaciti, početni problem se svodi na manji potproblem. Umesto da direktno proveravamo svaku granu, bira se mali uzorak grana na slučajan način i konstruiše MST za taj uzorak grana, što je efikasan proces ukoliko je uzorak mali. Ovaj uzorak koristimo da zaključimo koje grane se sigurno ne nalaze u konačnom MST pošto su označene kao teške. Njih odbacujemo i rekurzivno postupak ponavljamo na preostalom grafu. Preciznije, algoritam je sastavljen od kombinacije koraka Boruvkinog algoritma (eng. *Boruvka steps*) i nasumičnog uzorkovanja (eng. *random sampling*). Boruvkin algoritam se koristi kako bi se broj čvorova grafa najmanje dvostruko smanjio, dok nasumično uzorkovanje redukuje broj grana. KKT algoritam se sastoji iz narednih koraka:

- Inicijalno se nekoliko puta (obično tri puta) pokrene Boruvkin algoritam nad grafom $G(V, E)$, a kao rezultat ovog koraka dobija se graf $G'(V', E')$, tako da važi $|V|' \leq |V|/8$ i $|E'| \leq |E|$. Ovaj algoritam, kao što je već objašnjeno u poglavlju 2.3, za svaki čvor grafa pronalazi njemu incidentnu granu najmanje težine, a zatim sažima svaka dva čvora povezana ovim granama u jednu kom-

ponentu. U ovom koraku algoritma se uklanjaju sve petlje koje su postojale na čvorovima ulaznog grafa i zadržavaju se samo grane najmanje težine među svim granama koje povezuju novonastale komponente povezanosti, dok se sve ostale grane uklanjaju. Na ovaj način se broj čvorova smanjuje bar dvostruko. Ukoliko novonastalo drvo G' sadrži samo jedan jedini čvor, to znači da je rezultat Boruvkine faze ujedno i krajnji rezultat KKT algoritma.

- Na skupu grana E', bira se uzorak E_1, nezavisnim uzorkovanjem sa verovatnoćom odabira svake grane od 0.5.
- Algoritam se rekurzivno poziva na novoodabranom skupu grana E_1 čime se kao rezultat dobija minimalna povezujuća šuma $F_1 = MST(V', E_1)$.
- Pronalaze se i uklanjaju sve F_1-teške grane. Skup preostalih grana označićemo sa E_2.
- Algoritam se rekurzivno poziva na skupu grana E_2, čime se kao rezultat dobija minimalna povezujuća šuma $F_2 = MST(V', E_2)$.
- Algoritam vraća uniju skupa grana koje su pronađene u Boruvkinom koraku i grana iz F_2. Ovaj skup grana čini MST inicijalnog grafa.

Dokaz korektnosti algoritma se može sprovesti korišćenjem matematičke indukcije po veličini grafa.

Induktivna hipoteza: Pretpostavimo da KKT algoritam ispravno računa MST za graf G' koji je strogo manjih dimenzija od grafa G.

Baza indukcije: Ukoliko graf G sadrži samo jedan čvor ili ne sadrži nijednu granu, na osnovu induktivne hipoteze, KKT algoritam vraća MST grafa G.

Induktivni korak: Na osnovu svojstva preseka važi da sve grane označene u prvom koraku (Boruvkin algoritam) pripadaju trenutnoj minimalnoj povezujućoj šumi grafa. Boruvkina faza vrši kontrakciju čvorova i vraća graf G' koji je manjih dimenzija od inicijalnog grafa G. Prema svojstvu ciklusa važi da nijedna teška grana ne ulazi u sastav MST originalnog grafa, tako da su sve uklonjene grane van MST. Na osnovu induktivne hipoteze se zaključuje da je minimalna povezujuća šuma redukovanog grafa, odnosno grafa manje dimenzije, ispravno pronađena u svim rekurzuvnim pozivima, te konačno zaključujemo da algoritam vraća MST grafa.

Vremenska složenost: Očekivano vreme izvršavanja KKT algoritma je linearno po veličini grafa, ali je dokaz ovog tvrđenja nešto komplikovaniji. Za potrebe dokaza biće korišćene leme date u nastavku:

Lema 2.5.1 *Očekivani broj nasumično odabranih grana jednak je polovini ukupnog broja grana, tj. važi* $E[E_1] = \frac{|E|}{2}$.

Dokaz 1 *Dokaz sledi na osnovu svojstva linearnosti matematičkog očekivanja.*

Lema 2.5.2 *Neka je* G' *podgraf grafa* G *koji je dobijen uključivanjem svake njegove grane sa verovatnoćom 0.5, a* F *minimalna povezujuća šuma grafa* G'. *Očekivani broj* F*-lakih grana u* G *nije veći od* $2n$, *gde je* n *broj čvorova grafa* G, *tj važi* $E[E_2] \leq 2|V|$.

Dokaz 2 *Jasno je da se podgraf* G' *i njegova minimalna povezujuća šuma* F *konstruišu istovremeno. Za tu konstrukciju se može iskoristiti Kruskalov algoritam. Nakon utvrđivanja da li je grana* F*-teška ili* F*-laka, grana se sa verovatnoćom 0.5 dodaje u* G', *što se može interpretirati kao bacanje novčića. Ukoliko je grana dodata u* G' *i proglašena* F*-lakom granom, ona se dodaje i u minimalnu povezujuću šumu* F *grafa* G. *Ovako dobijena šuma jeste minimalna povezujuća jer je dobijena primenom Kruskalovog algoritma na graf* G'. *Grane koje su proglašene* F*-teškim u trenutku obrade, ostaju teške do kraja jer se grane naknadno ne uklanjaju iz* F. *Slično važi i za* F*-lake grane: one koje su proglašene* F*-lakim u trenutku obrade, ostaju* F*-lake, jer sve grane koje su dodate posle njih imaju veću težinu. Jasno je da je prilikom bacanja novčića poznato da li je, trenutno razmatrana, grana* F*-teška ili* F*-laka. Pritom, ishodi bacanja za* F*-teške grane nisu relevanti jer te grane svakako neće biti dodate u* F. *Cilj je konstruisati minimalnu povezujuću šumu, a najveći mogući broj grana koji može biti dodat je* $|V| - 1$, *drugim rečima, potrebno je* $|V| - 1$ *uspešnih ishoda bacanja novčica u slučaju kada je trenutna grana laka. Ako bismo nastavili da bacamo novčić sve dok ne dobijemo željeni broj uspeha, gde je ukupan broj pozitivnih ishoda određen promenljivom* Y, *zaključujemo da* Y *predstavlja slučajnu promenljivu sa negativnom binomnom raspodelom, gde je ukupan broj bacanja jednak* $|V|$, *a verovatnoća uspeha je* $p = 0.5$. *Matematičko očekivanje slučajne promenljive sa ovakvom raspodelom je poznato i iznosi* $2n$ *[9].*

Ostalo je još pokazati da je očekivano vreme izvršavanja ovog nedeterminističkog algoritma linearno i iznosi $O(|E| + |V|)$. Označimo očekivano vreme izvršavanja algoritma za graf G sa T_G. Najgore vreme izvršavanja nad svim grafovima G sa n čvorova i m grana se može predstaviti kao:

$$T_{m,n} := \max_{G=(V,E),\,|V|=n,\,|E|=m} \{T_G\}$$

Svi koraci, osim samog rekurzivnog poziva, imaju linearno vreme izvršavanja u funkciji broja čvorova i grana grafa, pa je dovoljno pokazati da se i vreme izvršavanja rekurzivnih poziva može odozgo ograničiti sa $c(n+m)$, gde je c konstanta. Neka je vreme izvršavanja algoritma u drugom i četvrtom koraku respektivno T_{G_1} i T_{G_2}, gde je $G_1 = (m_1, n')$ graf koji je dobijen odabirom grana grafa G na slučajan način, a $G_2 = (m_2, n')$ graf dobijen uklanjanjem svih teških grana. Tada važi:

$$T_G \leq c(m+n) + E[T_{G_1} + T_{G_2}] \leq c(m+n) + E[T_{m_1,n'} + T_{m_2,n'}]$$

Pretpostavićemo da važi: $T_{G'} \leq 2c(m'+n')$ za sve manje grafove $T_{G'}$, odnosno da je najgore vreme izvršavanja nad svim manjim grafovima linearno. U nastavku ćemo pokazati da to važi i za graf G [6].

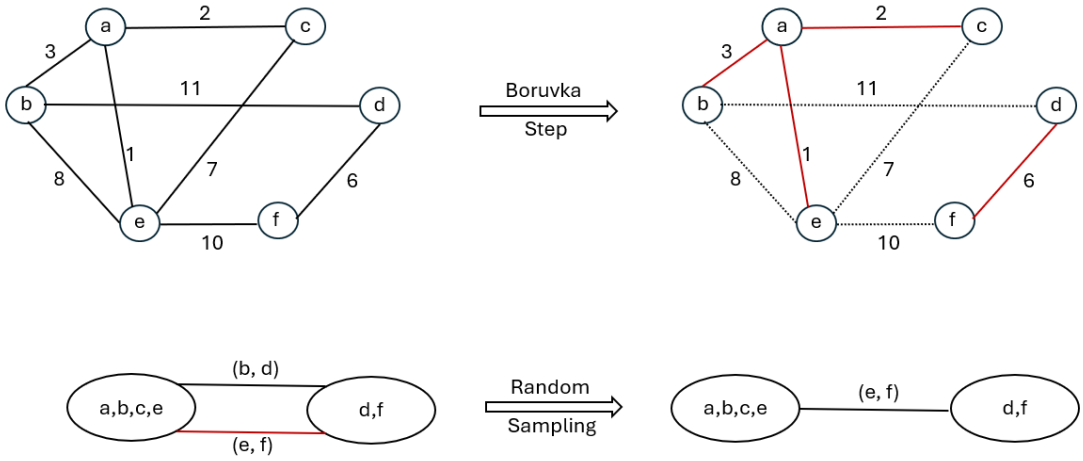
$$\begin{aligned} T_G &\leq c(m+n) + E[2c(m_1+n')] + E[2c(m_2+n')] \\ &\leq c(m+n) + c(m'+2n') + 2c(2n'+n') \\ &= c(m+m'+n+8n') \\ &\leq 2c(m+n) \end{aligned}$$

Drugi red izvođenja se dobija primenom lema 2.5.1 i 2.5.2. Primenom nejednakosti $n' \leq n/8$ i $m' \leq m$ dolazimo do krajnje nejednakosti. Odavde sledi da je očekivano vreme izvršavanja ovog stohastičkog algoritma linearno.

Istaknimo i to da je ovo prvi algoritam za pronalaženje minimalnog povezujućeg drveta koji je uspešno paralelizovan tako da mu ukupno vreme izvršavanja bude linearno [5].

Na slici 2.6 je dat primer izvršavanja KKT algoritma. Prvi korak algoritma čini redukcija broja čvorova koja se vrši pomoću Boruvkinog algoritma. Nakon prvog koraka dobija se graf koji se sastoji od dve nepovezane komponente: $H_1 = \{a, b, c, e\}$ i $H_2 = \{d, f\}$. One nastaju tako što se za svaki čvor inicijalnog grafa odabere njemu incidenta grana najmanje težine. Grane (b, e) i (c, e) se eliminišu iz daljeg razmatranja pošto grade ciklus unutar komponente H_1. Nakon uspešne redukcije grafa, sledeći korak je nasumično uzorkovanje grana sa verovatnoćom 0.5. U ovom primeru su preostale samo dve grane: (b, d) i (e, f), a odabrana je grana (e, f). Algoritam se rekurzivno poziva nad ovom granom i ona se uključuje u krajnji rezultat. Treći korak je pronaći i eliminasati sve teške grane. Jedina takva je grana (b, d) i ona se eliminiše jer zatvara ciklus i predstavlja najtežu granu u njemu. Rezultat ovog postupka je unija grana dobijena u prvom koraku - (a, b), (a, c), (a, e), (d, f) i grane (e, f).

Postupak izvršavanja algoritma je ovde ilustrovan na primeru veoma jednostavnog grafa, iako se u praksi on koristi za pronalaženje MST u znatno većim grafovima.



Slika 2.6: Ilustracija izvršavanja KKT algoritma

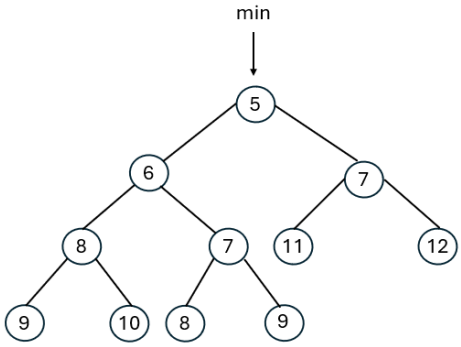
2.6 Fredman-Tardžanov algoritam

Fredman (Michael Fredman) i Tardžan su 1987. godine predložili modifikaciju Primovog algoritma tako da se za implementaciju reda sa prioritetom, koji se koristi za čuvanje susednih grana i brz pristup grani minimalne težine, koristi, umesto binarnog, Fibonačijev hip. Ovim se dolazi do vremenski efikasnijeg algoritma, po cenu nešto složenije implementacije.

2.6.1 Fibonačijev hip

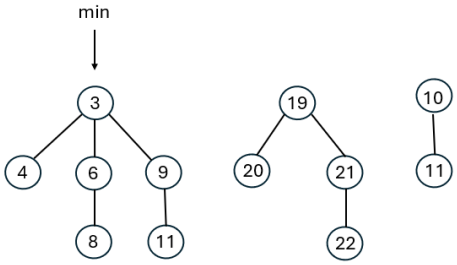
Red sa prioritetom se može implementirati na različite načine. Najčešće korišćen način je korišćenjem binarnog hipa, koji je ilustrovan na slici 2.7. Binarni hip omogućava pristupanje elementu sa najvećim prioritetom u konstantnoj vremenskoj složenosti, a takođe i umetanje proizvoljnog elementa u hip, brisanje elementa sa najvećim prioritetom iz hipa i ažuriranje vrednosti elementa na hipu u logaritamskoj složenosti [15].

Fibonačijev hip je optimizovana verzija binarnog. Za razliku od binarnog hipa, Fibonačijevo drvo ne mora biti binarno. Štaviše, hip se ne sastoji od jednog drveta,



Slika 2.7: Primer binarnog hipa

sada ih može biti više (kao u ilustraciji na slici 2.8). Ovime se sprečava da jedno drvo previše poraste i time naruši ukupnu složenost, ali se istovremeno kontroliše i broj drveta u hipu [7]. Glavna ideja na kojoj je zasnovana sama implementacija ovakve strukture podataka jeste da se operacije izvode *„lenjo“*. U nastavku ćemo pretpostaviti da najveći prioritet ima element sa najmanjom vrednošću.



Slika 2.8: Primer Fibonačijevog hipa

Pristup minimumu ima istu ideju kao i kod binarnog hipa. Održava se pokazivač na čvor u kome se nalazi najmanja vrednost. Pošto se u korenu svakog od drveta Fibonačijevog hipa nalazi najmanja vrednost iz tog drveta, minimum je zapravo minimum među vrednostima korena svih drveta. I dalje je pristup minimalnom elementu složenosti $O(1)$.

Operacija umetanja elementa se izvodi dosta jednostavnije u odnosu na binarni hip. Čvor se ubacuje u hip tako što se dodaje kao novo drvo koje se sastoji samo iz jednog jedinog čvora. Vreme koje se troši na ovu operaciju je $O(1)$, ali se broj drveta u hipu uvećava za jedan.

Operacija uklanjanja minimalnog elementa sa hipa zahteva najpre da se deca poddrveta kome minimalni element pripada odvoje od roditeljskog čvora i oni postaju drveta za sebe, čime se broj drveta povećava najviše za stepen[2] drveta, koji je unapred ograničen nekim prirodnim brojem. Kako broj drveta ne bi previše porastao, vrši se spajanje drveta istog stepena, što oduzima dodatno vreme. Pojedinačno izvođenje ove operacije je skupo, ali se deo posla može pripisati operaciji umetanja, pošto je ona sama po sebi veoma brza, čime se dobija znatno bolja amortizovana složenost. Detaljnijom analizom se zaključuje da amortizovana vremenska složenost ove operacije zavisi samo od stepena drveta. Međutim, zahvaljujući svojstvu binomnih drveta [7], dobija se da je složenost ove operacije $O(\log n)$, jer stepen drveta logaritamski zavisi od broja čvorova.

Ažuriranje vrednosti u Fibonačijevom hipu se može veoma jednostavno izvesti u logaritamskom vremenu. Međutim, pokazuje se da je ažuriranje moguće izvesti u konstantnom vremenu. Kako bi se to postiglo, uvodi se ograničenje da svaki čvor može ostati bez najviše jednog deteta, jer se u suprotnom gubi svojstvo binomnih drveta čime se narušava složenost operacije uklanjanja. Ovim se delimično kvari struktura binomnih drveta jer se dozvoljava uklanjanje čvorova, a binomna drveta imaju striktnu strukturu i za svako takvo drvo sa n čvorova važi da stepen korena tog drveta iznosi $\log(n)$. Međutim, ispostavlja se da kod Fibonačijevih drveta važi nešto slabije svojstvo, tzv. svojstvo Fibonačijevih brojeva, po kome stepen korena drveta takođe logaritamski zavisi od broja čvorova, ali sa osnovom 1.3. Ovime se i dalje obezbeđuje logaritamska složenost operacije izbacivanja. Iako je operacija ažuriranja vrednosti sporija kada se izvodi pojedinačno, ona u proseku daje konstantno vreme, tako da amortizovana složenost i ove operacije iznosi $O(1)$.

2.6.2 Opis algoritma

Podsetimo se da je vremenska složenost Primovog algoritma $O((|E|+|V|)\log|V|)$. Ideja Fredmana i Tardžana je da se na neki način logaritamski faktor smanji, kako bi ukupna složenost algoritma težila linearnoj [6]. Ukoliko bi veličina hipa bila mala, postigla bi se manja cena izbacivanja elemenata iz hipa, što bi značajno uticalo na ukupnu složenost algoritma. Primova verzija algoritma konstruiše samo jedno drvo tokom izvršavanja, čuvajući sve susede trenutnog drveta na hipu, tako da je dimenzija hipa ograničena brojem čvorova u grafu. Optimizovana verzija algoritma koristi

[2]Stepen drveta označava maksimalni broj dece koji svaki čvor drveta može da ima.

malo drugačiji pristup kako bi se veličina hipa održavala što manjom, odnosno, u zadatim granicama. Iz ovako implementiranog hipa je moguće izbacivanje elementa u amortizovanoj složenosti $O(\log K)$, gde K predstavlja maksimalnu veličinu hipa, odnosno maksimalni broj susednih čvorova trenutnom drvetu T_i. Cilj je, naravno, postići da K bude značajno manje od $|V|$.

Postavlja se pitanje kako održati veličinu hipa ispod nekog, unapred određenog, praga K, za koji ćemo najpre pretpostaviti da je fiksan. Fredman i Tardžan su primetili da je to moguće postići kontrolisanjem broja suseda trenutnog drveta na sledeći način: započeti izvršavanje Primovog algoritma i dodavati čvorove na hip sve dok njegova veličina ne dostigne zadati prag. Nakon toga, Primov algoritam se zaustavlja i bira se novi proizvoljni čvor iz kog se opisani postupak iznova započinje i to se ponavlja sve dok se svi čvorovi inicijalnog grafa ne dodaju u tekuću šumu koju čine drveta T_1, T_2, ..., T_k. Nakon završetka svake iteracije algoritma, čvorovi koji pripadaju drvetima T_i za svako $i = 1, \ldots, k$ kontrahuju se u novi čvor, što je slična ideja kao kod Boruvkinog algoritma. Potom se ova procedura rekurzivno poziva nad ostatkom grafa. Drugim rečima, ova procedura se može opisati kao niz iteracija, pri čemu se svaka iteracija može razložiti na tri koraka:

- Na početku svake iteracije su svi čvorovi neoznačeni. Nasumično se bira jedan neoznačen čvor i iz njega se pokreće Primov algoritam za konstrukciju MST. U Fibonačijevom hipu se čuvaju susedni čvorovi trenutnog drveta i time se obezbeđuje efikasan pristup najbližem od njih. Svaki čvor v za koji postoji grana $e(u, v)$, tako da $u \in T$, dok $v \notin T$ smatra se susednim čvorom tekućeg drveta. Susedni čvorovi mogu biti već označeni u prethodnim iteracijama.

- Ukoliko u toku izvršavanja prethodnog koraka veličina hipa premaši unapred zadatu granicu ili se kao susedni, na hip, doda neki već ranije označeni čvor, postupak se zaustavlja. Svi čvorovi koji su dodati u tekuće drvo se označavaju i prethodni korak se ponavlja.

- Ukoliko su svi čvorovi dodati u tekuću šumu, nakon kontrahovanja čvorova, sledi rekurzivno izvršavanje algoritma na novonastalom grafu. [13]

Ovako opisan algoritam zadovoljava svojstvo korektnosti. On se oslanja na korektnost Primovog algoritma čijom primenom nastaju drveta trenutne šume. Tako nastale komponente povezanosti se dalje spajaju u rekurzivnim pozivima pomoću najlakših susednih grana, koje se skidaju sa hipa.

Analiza složenosti: Probajmo da ocenimo vremensku složenost izvršavanja jedne iteracije algoritma. Označimo broj čvorova grafa sa n, a broj grana sa m. Neka je K maksimalni dozvoljeni broj elemenata hipa. Prilikom konstrukcije drveta, svaka grana se razmatra najviše dva puta, po jednom sa oba kraja, što je složenosti $O(m)$. Prilikom konstrukcije drveta dolazi do redukovanja broja čvorova, dok ne ostane jedna jedina komponenta koja predstavlja MST inicijalnog grafa i ovakvih spajanja je najviše n, koliko i čvorova inicijalnog drveta, dok sam pristup hipu, odnosno operacija uklanjanja elementa sa hipa, ima složenost $O(\log K)$. Iz svega navedenog se može zaključiti da složenost jedne iteracije iznosi $O(m_i + n_i \log K)$, gde su $n_i \leq n$ i $m_i \leq m$ respektivno broj čvorova i grana obrađenih u jednoj iteraciji algoritma. Jasno je da K predstavlja značajan faktor i ispostavlja se da on ne mora biti fiksirana vrednost, već se može uvesti kao parametar čija se vrednost menja iz iteracije u iteraciju. Za svaki označeni čvor koji se dodaje na trenutno drvo T_i, suma stepena svih čvorova koji pripadaju tom drvetu iznosi najmanje K. Čvor se označava u slučaju da njegovim dodavanjem veličina hipa premašuje K ili ukoliko je već bio označen, što znači da već pripada nekom drvetu (ono je već dostiglo maksimalni broj suseda) i tada dolazi do spajanja komponenti čime suma stepena svih čvorova postaje još veća. Ako se broj nastalih drveta u ovoj iteraciji označi sa l, a sa $C_1, ..., C_k$ označe komponente koje nastaju na kraju ove iteracije algoritma, dolazi se do sledeće jednakosti:

$$2m = \sum_{v} d_v = \sum_{i=1}^{l} \sum_{v \in C_i} d_v \geq \sum_{i=1}^{l} K \geq K \cdot l$$

Iz ovako dobijene jednakosti se može izraziti broj nastalih drveta l u funkciji parametra K. Odnosno, za broj nastalih drveta u i-toj iteraciji algoritma važi:

$$l_i \leq \frac{2m}{K}$$

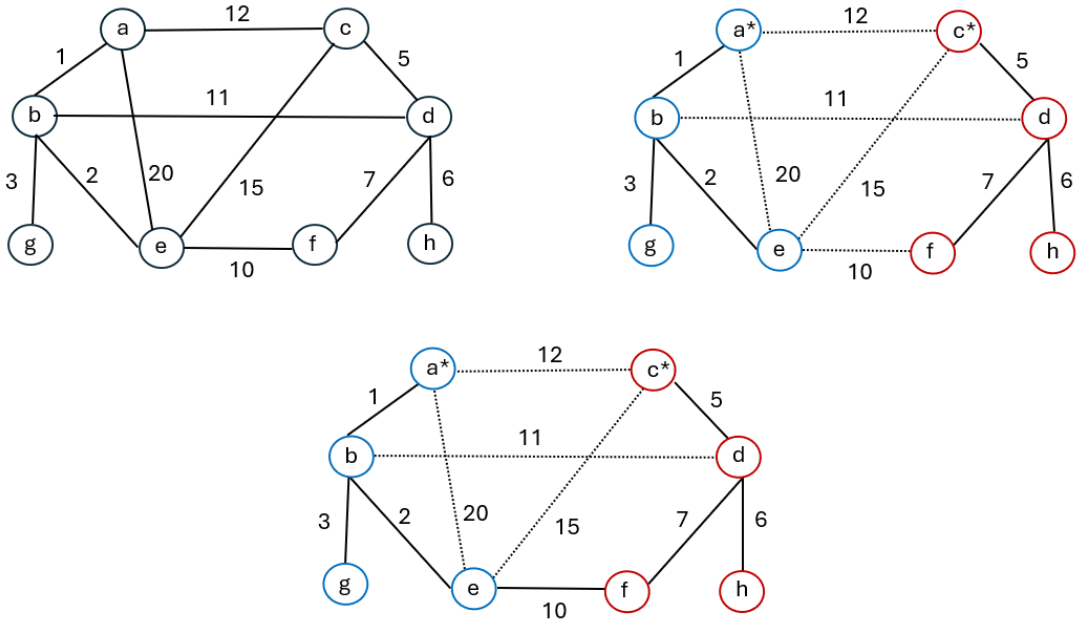
Broj nastalih komponenti zavisi od parametra K, a kako je poznato da se kao rezultat poslednje iteracije konstruiše MST inicijalnog grafa, odnosno, jedinstvena komponenta koja sadrži sve čvorove, intuitivno je jasno da se broj čvorova kroz iteracije smanjuje. Iz tog razloga se K može birati tako da raste kroz iteracije. Ideja je odabrati vrednost parametra K na pogodan način tako da složenost ostane u okvirima linearne po broju grana. Ako se uzme da je u $i-$toj iteraciji $K_i = 2^{\frac{2m}{n_i}}$, dolazimo do sledeće jednakosti [13]:

$$O(m_i + n_i \log K_i) = O\left(m_i + n_i \cdot \frac{2m}{n_i}\right) = O(m)$$

Ovako odabrano K neće pokvariti linearnu složenost, a dodatno, iz prethodne nejednakosti, koristeći da je $l \leq \frac{2m}{K_i}$, gde je l zapravo broj nastalih komponenti na kraju $i-$te iteracije, odnosno one koje će se koristiti u narednoj, može se zaključiti sledeće:

$$K_i \leq \frac{2m}{n_{i+1}} = \log K_{i+1} \;\Rightarrow\; K_{i+1} \geq 2^{K_i}$$

Poslednja nejednakost pokazuje da K ima eksponencijalni rast kroz iteracije, dok n istim tempom opada. Zapravo, pojavljivanje višestrukih eksponenata ukazuje da je rast brži čak i od eksponencijalnog, tzv. *tetracioni*. Broj potrebnih iteracija da K dostigne vrednost n je $\beta(m, n)$, što je funkcija koja izuzetno sporo raste. Nakon $\beta(m, n)$ iteracija, Primov algoritam može da sačuva sve preostale čvorove na hipu, bez da veličina hipa premaši granicu K i formira se minimalno povezujuće drvo inicijalnog grafa. Stoga je vremenska složenost Fredman-Tardžanovog algoritma $O(m\beta(m, n))$.



Slika 2.9: Primer izvršavanja Fredman-Tardžanovog algoritma

Primer izvršavanja algoritma dat je na slici 2.9, za veličinu hipa $K = 2$. Izvršavanje počinje iz čvora a i on se na početku dodaje na hip. Pošto se kao grane najmanje

težine susedne trenutnom drvetu T_1 pronalaze redom grane $(a, b), (b, e)$ i (b, g), čvorovi a, b, g i e se redom dodaju na hip, čime se premašuje zadata veličina hipa. Oni se označavaju, hip se prazni i procedura počinje iznova. Na slici su svi čvorovi koji su dodati u prvoj iteraciji obeleženi plavom bojom i oni formiraju drvo T_1. Čvor u kome počinje druga iteracija je c. On se dodaje na hip, a potom i najbliže susedne grane $(c, d), (d, f)$ i (d, h), odnosno čvorovi c, d, f i h. Ovime se završava druga iteracija, dodati čvorovi se označavaju i hip se ponovo prazni. Na slici su ovi čvorovi označeni crvenom bojom i oni formiraju drvo T_2. U ovom trenutku se zaključuje da su svi čvorovi dodati u trenutnu šumu i sada se drveta sažimaju u nove čvorove i procedura se poziva rekurzivno na novom grafu koji se sastoji iz dva nova čvora i preostalih grana. Bira se ona sa najmanjom težinom i time se algoritam zaustavlja. Dobijeno minimalno povezujuće drvo čine grane: $(a, b), (b, e), (b, g), (c, d), (d, f), (d, h)$ i (e, f).

2.7 Gabov algoritam paketa

Fredman-Tardžanov algoritam predstavlja značajno unapređenu verziju Primovog algoritma za nalaženje minimalnog povezujućeg drveta grafa. Međutim, moguće je algoritam dodatno optimizovati. Iako prethodno razmatrana verzija ima značajno bolju vremensku složenost zahvaljujući korišćenju Fibonačijevog hipa, operacija ažuriranja minimalnih rastojanja, koja se čuvaju na hipu, i dalje predstavlja najskuplju operaciju, odnosno *„usko grlo“* Fredman-Tardžanovog algoritma.

U Fredman-Tardžanovom algoritmu se svaka grana, kao potencijalni kandidat za dodavanje na trenutnu šumu, čuva na hipu, dok se ne premaši gornja granica veličine hipa. Tada se sve sačuvane grane odbacuju i proces kreće iznova. Kako se neki kandidati tokom iteracija veći broj puta odbacuju, može se desiti da neke od njih dođu na red tek u poslednjoj iteraciji, odnosno dodaju se čak $\beta(m, n)$ puta. U najgorem slučaju takvih grana može biti m, što nije zanemarljiv faktor u izrazu za ukupnu vremensku složenost algoritma. Sve ove grane se stavljaju na hip i uklanjaju sa njega iz istog razloga, da bi se pronašla ona koja ima najmanju težinu među svim susednim granama tekuće šume. Na ovom mestu se javlja ideja da je moguće nekako optimizovati ove upite, tako da se ne moraju sve grane svaki put iznova brisati sa hipa kada se njegova veličina premaši, a potom dodavati kako bi se sačuvala najlakša među njima.

Iako je tačno da je operacija dodavanja u Fibonačijev hip veoma efikasna, odnosno konstantne vremenske složenosti u proseku, ne sme se zaboraviti da se to vreme

potroši na svaku dodatu granu, a zatim se kao korisna uzima samo jedna, ona koja je minimalne težine, te je ukupno vreme uloženo u sve ostale, koje nisu minimalne, nezanemarljivo. Upravo se na ovom mestu javlja ideja da je potencijalno pametniji način čuvati samo minimum, a da se ostale grane, koje nisu u tom trenutku značajne, obrađuju kasnije. Naime, Gabov (Harold Gabow) se dosetio da je put koji vodi optimizaciji algoritma upravo čuvanje samo grane najmanje težine na hipu, dok sve ostale, koje su teže od nje, ne moraju biti trenutno „vidljive“. Ovaj način optimizacije će biti detaljnije opisan u nastavku i pripada klasi algoritama zasnovanih na tehnici dinamičkog programiranja i obezbeđuje složenost $O(m \log(\beta(m, n)))$.

Ovo je moguće ostvariti tako što se m grana rasporedi u m/p paketa, gde je $p \in \mathbb{N}$ veličina paketa. Grane incidentne jednom čvoru ili klasteru se stavljaju u isti paket, a grane su unutar svakog paketa sortirane prema težinama. Kako ovo sortiranje ne bi značajno uticalo na složenost, p bi trebalo da bude što manje, jer složenost takvog sortiranja iznosi $O(m \log p)$. Sortiranje obezbeđuje da je početni element svakog paketa ujedno i grana minimalne težine, tako da je paket njome određen. Ostatak algoritma ostaje nepromenjen, osim što sada lista susedstva čvorova ne sadrži niz čvorova, već niz paketa, a na hipu se čuvaju paketi koji su određeni svojim minimalnim elementima. Sve operacije nad Fibonačijevim hipom ostaju nepromenjene, samo se više ne izvršavaju nad granama, nego nad paketima. Spajanjem drveta tekuće šume spajaju se i liste njihovih paketa, a novi minimum se određuje kao minimum minimuma svih paketa koji se trenutno nalaze na hipu.

Analiza složenosti: Na početku algoritma se grane grafa particionišu u pakete i sortiraju, što je vremenske složenosti $O(m+m \log p)$. U svakoj od iteracija, kojih ima $\beta(m, n)$, vrši se skidanje elemenata sa hipa što je složenosti $O(n_i \log k_i)$ i stavljanje svih paketa na hip što je složenosti $O(2m/p)$. Ne treba zaboraviti da se neke grane brišu sa hipa, a samim tim i iz svojih paketa, ali se dimenzija paketa tokom vremena ne menja. Brisanja sa hipa može biti najviše $O(2m)$ jer se svaka grana može naći u dva paketa, posmatrano sa oba kraja po jednom. Pošto svaki rekurzivni poziv sledi nakon brisanja elemenata sa hipa, takvih poziva je najviše $O(2m)$. Dodatno vreme za jedan rekurzivni poziv je konstantno. Na osnovu prethodne analize sledi da ukupna vremenska složenost Gabovog algoritma iznosi:

$$O\left(m + m \log p + \sum_{i=0}^{maxIter} (n_i \log k_i + 2m/p) + 2m\right)$$

Cilj je postići da vreme izvršavanja jedne iteracije bude $O(m/p)$, umesto $O(m)$. Ovo je moguće postići adekvatnim odabirom vrednosti parametra k_i tako da važi $n_i \log k_i = O(m/p)$. Ako se dodatno odabere $p = \beta(m, n)$ postiže se sledeće:

$$O\left(m + m\log p + \sum_{i=0}^{p-1}(m/p) + 2m\right) = O(m\log p) = O\left(m\log\beta(m,n)\right)$$

Pogodno je za vrednost k uzeti $k = 2^{\frac{2m}{pn_i}}$, umesto $k = 2^{\frac{2m}{n_i}}$, jer u tom slučaju potrebno vreme za $n_i \log k_i$ iznosi $O(m/p)$, pa ukupno vreme koje se troši na sumu ostaje linearno u funkciji broja grana m.

Kroz analizu prethodnog algoritma dolazi se do važnog zaključka. Naime, od ukupnog broja grana, što je $2m$, bar k_i njih biva dodato na trenutno drvo. Stoga, sledi da je takvih drveta najviše $2m/k_i$. Potrebno je uveriti se da ovo i dalje važi, uprkos manjim izmenama algoritma. Zapravo, sada bar k_i paketa, od ukupno $2m/p$ njih biva dodato na trenutno drvo, tako da se na kraju konstruiše $2m/pk_i$ drveta što je čak i manji broj i ostaje da važi da k eksponencijalno raste, te je broj iteracija ograničen beta funkcijom [13].

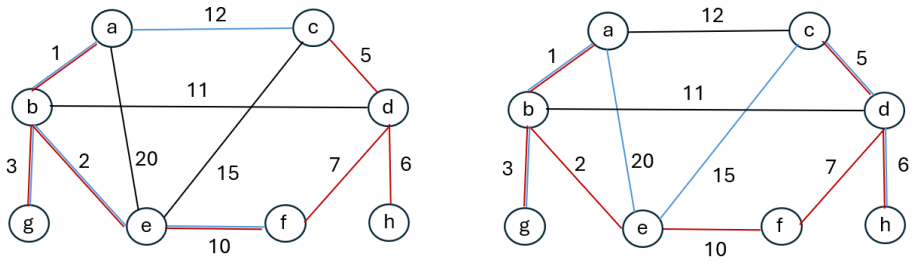
Još jedno bitno zapažanje jeste da se veliki deo vremena troši na inicijalno sortiranje elemenata unutar paketa. Međutim, zahvaljujući ovako sortiranim paketima, preostalo potrošeno vreme je linearno u funkciji broja grana $O(m/p)$. Ovo nikako ne znači da se, pošto se kod prethodne implementacije sve grane odbacuju i ponovo dodaju na hip $\beta(m, n)$ puta, sada svaka grana razmatra tačno jednom. Logika je nepromenjena, i dalje je moguće odbaciti grane i razmatrati ih ponovo, ali se sada to radi samo sa predstavnicima paketa, dok se razmatranje ostalih grana odlaže za kasnije. Tako da se u svakoj iteraciji razmatra najviše $2m/p$ elemenata, a ukupno vreme je baš $O(m)$.

2.8 Šazelov algoritam

Poslednji algoritam za određivanje minimalnog povezujućeg drveta grafa, koji će biti obrađen u ovom radu, objavio je Šazel (Bernard Chazelle) 1999. godine. Ovo je deterministički algoritam najbolje teorijske složenosti, od svih do sada obrađenih, koja iznosi $O(m\,\alpha(m, n))$, gde n predstavlja broj čvorova, m broj grana, a α tzv. inverznu Akermanovu funkciju, koja izuzetno sporo raste.

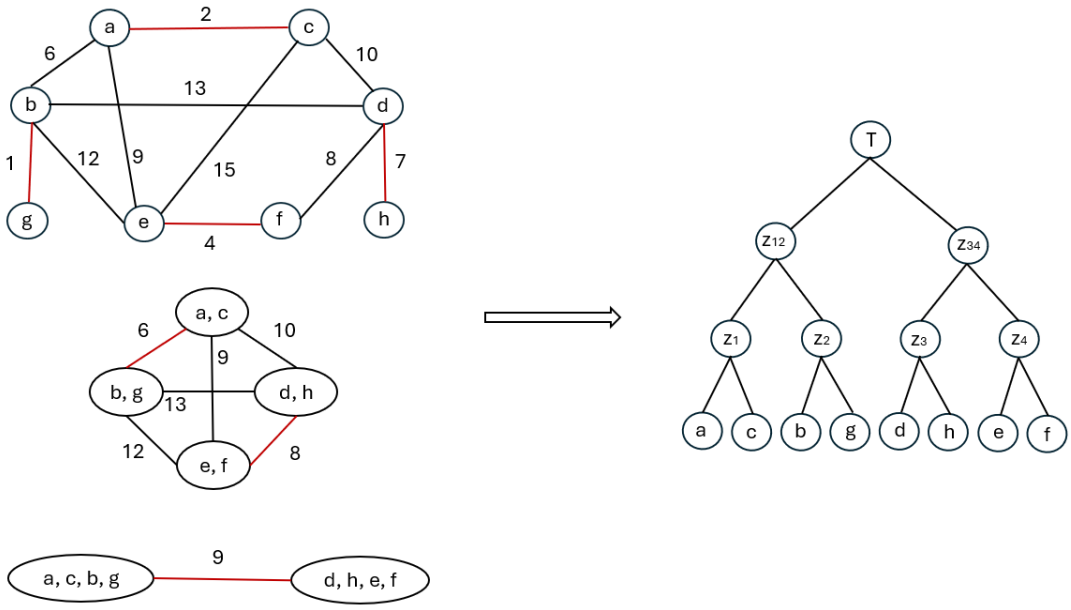
Za razliku od prethodno analiziranih algoritama, koji su konceptualno i idejno jednostavni, ovaj algoritam se zasniva na nešto složenijoj ideji i potpuno drugačijem pristupu. Jedan od ključnih koncepata jeste pojam *kontraktibilnog podgrafa* (eng. *contractible subgraph*). Za podgraf C grafa G kažemo da je kontraktibilan, odnosno da se može kontrahovati u jedan jedini čvor, a da time ne utiče na odabir grana koje će biti dodate u $MST(G)$, ako njegov presek sa $MST(G)$ predstavlja povezan graf. Ovaj koncept je ilustrovan na slici 2.10 gde su crvenom bojom označene grane koje pripadaju MST, dok su plavom označene grane podgrafa za koji se proverava da li je kontraktibilan. Primetimo da je podgraf na slici levo kontraktibilan jer je njegov presek sa $MST(G)$ povezan graf, odnosno sastoji se iz samo jedne komponente povezanosti koja je zadata skupom grana $\{(a,b),\ (b,g),\ (b,e),\ (e,f)\}$. Za desni podgraf to ne važi jer njegov presek sa $MST(G)$ predstavlja podgraf od G koji se sastoji od dve komponente povezanosti koje su zadate skupovima grana: $\{(a,b),\ (b,g)\}$ i $\{(c,d),\ (d,h)\}$. Ono što kontraktibilan podgraf C čini značajnim jeste ideja da se $MST(G)$ može formirati pomoću $MST(C)$ i $MST(G')$, gde je G' graf koji nastaje od G kontrahovanjem podgrafa C. Detektovanje ovakvih podgrafa je bilo jednostavno u nekima od ranije obrađenih algoritama, ali se taj proces odvijao uporedo sa proširivanjem, odnosno formiranjem minimalnog povezujućeg drveta grafa. Sada se javlja ideja da se takvi podgrafi mogu pronaći ranije i da se kao takvi upotrebe pri konstrukciji MST. Podrazumeva se da taj proces mora biti veoma efikasan. Za potrebe rešenja ovog problema definiše se jedna nova varijanta hipa koja se zove *soft hip* (eng. soft heap), koja pored operacija karakterističnih za standardni hip, omogućava i operaciju brisanja u amortizovanoj gotovo konstantnoj vremenskoj složenosti. Ovo je omogućeno time što se dozvoljava da se elementima hipa mogu u određenoj meri izmeniti, tj. pokvariti vrednosti, kao što će biti prikazano u nastavku teksta [3].

U nastavku pasusa sledi opis algoritma, dok će svi tehnički detalji biti objašnjeni nešto kasnije. Da bi se pronašlo $MST(G)$, ideja je da se najpre graf podeli na kontraktibilne podgrafe koji su međusobno disjunktni, a potom svaki od njih kontrahuje. Na taj način nastaje novi graf, koji se naziva *minorni graf* (eng. *minor graph*) grafa G. Isti proces se može primeniti na novonastalom grafu i dalje se ponavljati sve dok ne ostane jedan jedini čvor koji predstavlja kontrakciju čitavog, inicijalnog, grafa G. Hijerarhija podgrafova dobijena tokom iteracija algoritma se može modelovati balansiranim drvetom T, koje ćemo zvati *drvetom minora*, u kome listovi odgovaraju čvorovima polaznog grafa G, dok se u korenu nalazi jedan čvor



Slika 2.10: Primer podgrafa koji zadovoljava svojstvo kontraktibilnosti (levo) i podgrafa koji ne zadovoljava to svojstvo (desno).

koje je zapravo kontrahovani graf G. Svaki unutrašnji čvor z ima neke potomke z_1, z_2, z_3 itd. i svaki od njih je jedan kontrahovani podgraf čvorova sa sledećeg nivoa (idući od korena naniže). Čvoru z odgovara kontrahovani podgraf C_z, čiji su čvorovi upravo potomci čvora z. Jasno je da svaki nivo drveta minora T predstavlja jedan minorni graf od G. Kada se završi konstrukcija drveta minora, MST polaznog grafa se računa rekurzivno za svaki minorni graf C_z. Pošto u tom trenutku zasigurno znamo da svaki od C_z zadovoljava svojstvo kontraktibilnosti, jer se oni konstruišu da zadovoljavaju to svojstvo, $MST(G)$ se dobija spajanjem MST od prethodno izračunatih minora [2]. Ovo je svojstvo kompozicije (eng. *composition property*) koje tvrdi da je $MST(G)$ unija svih $MST(S_i)$, gde su S_i disjuktni, kontraktibilni podgrafi od G. Na slici 2.11 dat je primer grafa (levo) i njegovog drveta minora (desno).
Pre detaljnije analize samog algoritma neophodno je uvesti pojam *izmenjenih grana* (eng. *corrupted edges*). Naime, tokom kreiranja drveta minora T težine nekih grana mogu biti uvećane i takve grane se nazivaju izmenjene grane. Težina se ne može promeniti bilo kojoj grani, već samo ukoliko je ona *granična* (eng. *border edge*). Do uvećanja težine dolazi usled korišćenja soft hipa kojim se efikasno pronalazi minimum, ali uz određenu stopu greške dovodi do uvećanja vrednosti koje čuva, što su u našem slučaju težine grana. Detaljnije o ovoj strukturi i koje su to grane granične sledi u narednoj sekciji. Vratimo se na izmenjene grane. Nisu sve izmenjene grane problematične, već samo one koje su incidentne nekoj komponenti C_z koja je u tom trenutku kontrahovana u jedan čvor. Takve grane nazivamo *lošim* (eng. *bad edges*). One se prilikom procesa kreiranja drveta minora T eliminišu iz razmatranja dok se ostale izmenjene grane smatraju prihvatljivim i prilikom svakog novog rekurzivnog poziva njihove težine se vraćaju na originalne. Dobra stvar je što je broj ovakvih



Slika 2.11: Primer konstrukcije drveta minora T

grana ograničen.

Izvršavanje Šazelovog algoritma se sastoji iz narednih koraka:

- Najpre se izvršava nekoliko rundi Boruvkinog algoritma. Cilj ove faze je redukovati broj čvorova grafa. Kao rezultat se dobija skup grana koji ćemo označiti sa E_{Bor}.
- Zatim se kreira drvo minora T i konstruiše se graf B koji se sastoji od tzv. loših grana.
- Za svaki unutrašnji čvor $z \in T$, rekurzivno se rešava problem manje dimenzije, ali bez loših grana $MST(C_z \setminus B)$. Uniranjem rezultata svih rekurzivnih poziva ovog oblika dobija se drvo F.
- Algoritam se rekurzivno primenjuje nad unijom prethodno dobijenog skupa grana F sa skupom loših grana B. Krajnji rezultat čini $MST(F \cup B) \cup E_{Bor}$.

Sledi detaljniji opis i analiza svakog od navedenih koraka.

Prvi korak: primena Boruvkinog algoritma

S obzirom na to da je ovaj algoritam rekurzivan, mogu se izdvojiti dva specijalna slučaja, kada je $n = O(1)$ i kada je $t = 1$, gde je t parametar koji kontroliše du-

binu rekurzije. Ovo su bazni slučajevi, odnosno čine izlaze iz rekurzije. Prvi slučaj se odnosi na scenario kada ostane veoma mali broj čvorova i tada nije neophodno primenjivati ovaj složeni postupak rekurzivno, već je moguće izračunati MST direktno, korišćenjem nekog poznatog, jednostavnijeg algoritma, npr. Kruskalovog. Drugi slučaj se odnosi na scenario kada je parametar t, koji kontroliše dubinu rekurzije, jednak jedinici. U tom slučaju je u vremenu $O(n^2)$ moguće naći MST grafa samo primenom Boruvkinog algoritma dok na kraju ne ostane samo jedan čvor. Što se tiče Boruvkinih faza, to su one iste faze koje su korišćene u Kargerovom i Fredman-Tardžanovom algoritmu. Ne treba ih poistovetiti sa Boruvkinim algoritmom jer se ovime ne konstruiše nužno kompletno MST grafa, već se primenjuje nekoliko iteracija ovog algoritma. Ukratko, za svaki čvor pronalazi se njemu incidentna grana najmanje težine. Nakon toga se povezani čvorovi kontrahuju u jedan, novi čvor. Ovim postupkom se broj čvorova značajno smanjuje. U svakoj fazi se broj čvorova smanjuje bar upola, tako da se nakon c uzastopnih Boruvkinih faza, dobija novi graf G_0 u kome važi da je $n_0 \leq n/2^c$ i $m_0 \leq m$. Ova faza se izvršava u linearnom vremenu po broju čvorova i grana.

Drugi korak: kreiranje drveta minora

U ovoj fazi algoritma važnu ulogu imaju *aktivne putanje* (eng. *active path*). Neka je prilikom konstrukcije drveta minora T trenutni čvor z. On, kao i svaki unutrašnji čvor, nastaje kontrahovanjem čvorova sa nižeg nivoa. Označimo ih sa $z_1, z_2, ..., z_k$. Oni čine trenutnu aktivnu putanju. Obradom jednog po jednog čvora sa aktivne putanje, počevši od čvora z_1 nastaju grafovi $C_{z_1}, C_{z_2}, ... , C_{z_k}$. Nakon što je poslednji graf C_{z_k} konstruisan, on se kontrahuje u $C_{z_{k-1}}$. Na slici 2.11 ilustrovano je kreiranje drveta minora i ako je trenutni čvor z_{12}, aktivnu putanju čine njegova deca: z_1 i z_2.

Za svako $i < k$ čuva se grana koja spaja komponente C_{z_i} i $C_{z_{i+1}}$, odnosno grana koja povezuje uniju do sada obrađenih čvorova na aktivnoj putanji i naredni čvor $C_{z_{i+1}}$. Takva grana se zove *lančana veza* (eng. *chain-link*). Na slici 2.11, primer grane, koja predstavlja lančanu vezu na aktivnoj putanji koju čine čvorovi z_1 i z_2, je grana (a, b), čija težina iznosi 6. To je grana najmanje težine od svih grana koje povezuju do sada obrađeni deo aktivne putanje (čvor z_1) i narednog čvora na aktivnoj putanji (čvor z_2). Težina lančane veze može biti izmenjena u soft hipu, pa se zato koristi izraz *trenutna težina* (eng. *current cost*). Takođe, važan pojam je *radna težina* (eng. *working cost*) koja je zapravo trenutna težina ukoliko je težina izmenjena, odnosno originalna ukoliko nije. *Granična grana* (eng. *border edge*) je grana

koja povezuje uniju do sada obrađenih komponenti na trenutno aktivnoj putanji sa ostatkom grafa. Drugim rečima, to je grana čiji se samo jedan kraj nalazi u obrađenom delu aktivne putanje. Grane najmanje težine od svih grana koje povezuju trenutnu komponentu sa nekom, već ranije obrađenom, komponentom se nazivaju *min-link* (eng. *min-link*).

Za razumevanje algoritma neophodno je objasniti i svrhu soft hipa. Za svako j granične grane oblika (u, v), gde je $u \in C_{z_j}$, smeštaju se soft hip. Postoje dva oblika soft hipa koji čuvaju granične grane: $H(j)$ i $H(i, j)$, gde je $i < j$. Hip oblika $H(j)$ se može posmatrati kao lokalni hip koji za svaku komponentu C_{z_j} čuva grane koje vode ka čvorovima v koji su već povezani sa nekom ranijom komponentom. S druge strane, hip oblika $H(i, j)$ čuva grane tako da čvor v jeste sused komponente C_{z_i}, ali nije nijedne druge komponente C_{z_l} za $i < l < j$. Posmatrajmo primer ilustrovan na slici 2.11. Neka trenutnu aktivnu putanju čine čvorovi drveta minora z_1 i z_2, tako da još uvek nije došlo do kontrakcije aktivne putanje u čvor z_{12}. Hipovi oblika $H(i, j)$ su svi oni hipovi koji sadrže grane između komponenti drveta: z_1, z_2, z_3 i z_4. U našem primeru to su hipovi: $H_{1,2} = \{(a, b)\}$, $H_{1,3} = \{(c, d)\}$, $H_{1,4} = \{(a, e), (c, e)\}$, $H_{2,3} = \{(b, d)\}$, $H_{2,4} = \{(b, e)\}$ i $H_{3,4} = \{(d, f)\}$. Hipovi oblika $H(j)$ su hipovi koji čuvaju sve grane koje povezuju komponentu z_j sa svim ostalim komponentama koje se nalaze na trenutnom ili roditeljskom nivou drveta, u našem primeru to su hipovi: $H_1 = \{(a, b), (c, d), (a, e), (c, e)\}$, $H_2 = \{(b, a), (b, d), (b, e), (c, e)\}$, $H_3 = \{(d, c), (d, b), (d, ef)\}$ i $H_4 = \{(e, b), (e, a), (e, c), (f, d)\}$.

Tokom izvršavanja algoritma se održavaju dve invarijante.

> *Invarijanta 1:* Trenutna težina lančane veze ne sme biti veća od težine bilo koje granične grane, a radna težina lančane veze mora biti manja od radne težine svake grane koja povezuje C_{z_i} i C_{z_j}, za $j \leq i$.

> *Invarijanta 2:* Svaka grana može pripadati tačno jednom hipu u datom trenutku. Odnosno, za svako j granične grane oblika (u, v), gde je $u \in C_{z_j}$, smeštaju se ili u soft hip sa oznakom $H(j)$ ili u $H(i, j)$, gde je $i < j$.

Održavanjem min-link grana, održava se prva invarijanta, odnosno, uslov koji se tiče radne težine lančane veze. Iz svega navedenog sledi da se održavanjem prve invarijante obezbeđuje opadajući niz lančanih veza, što je ključni uslov za bezbedno kontrahovanje grafova. Bitno zapažanje je da se svakim odabirom lančane veze bira prvi čvor naredne komponente $C_{z_{i+1}}$. Kako sa dodavanjem narednih čvorova komponenta raste, min-link grana može biti ažurirana na neku manju vrednost, te se

njena i težina lančane veze mogu znatno razlikovati. Održavanjem hipova se čuva i druga invarijana i time se smanjuje efekat širenja „loših grana“. Obe invarijante se održavaju tokom čitavog procesa kreiranja drveta minora T koji se realizuje pomoću dve operacije: skraćivanjem aktivne putanje (eng. *retraction*) i njenim proširivanjem (eng. *extension*).

Operacija skraćivanja putanje

U trenutku kada i poslednji podgraf C_{z_k} sa aktivne putanje dostigne ciljanu veličinu, određenu brojem čvorova n_{z_k}, dolazi do retrakcije (skraćivanja putanje). Na taj način se kontroliše veličina komponenti i kraj aktivne putanje se pomera na z_k. Kontrahovanjem komponente C_{z_k} u jedan jedini čvor, koga ćemo označiti sa a, komponenta postaje deo prethodno konstruisane komponente sa putanje $C_{z_{k-1}}$. Komponenta $C_{z_{k-1}}$ dobija novi čvor a, ali i nekoliko novih grana koje ga povezuju sa drugim čvorovima iz $C_{z_{k-1}}$. Među njima je i lančana grana koja je ranije povezivala komponente C_{z_k} i $C_{z_{k-1}}$ na aktivnoj putanji. Obe invarijante ostaju ispoštovane, iako za drugu to nije očigledno i zahteva detaljniju analizu. Naime, nakon kontrahovanja, hipovi $H(k)$ i $H(k-1)$ nam više nisu potrebni. Ovi hipovi se uništavaju, a grane koje su se nalazile u njima se smeštaju u neki od trenutnih hipova, dok se loše grane mogu odbaciti iz daljeg razmatranja. Sve grane iz $H(k)$ i $H(k-1)$ se prvo grupišu u klastere na osnovu spoljašnjeg čvora, a zatim se iz svakog klastera čuva samo ona koja ima najmanju težinu. Tada se grane raspoređuju u hipove. Ispostavlja se da ako se grana nalazila u hipu $H(k)$ i dodatno deli svoj početni čvor a sa nekom granom iz $H(k-1,k)$ ili se nalazila u hipu $H(k-1,k)$ može se smestiti u $H(k-1)$. Drugim rečima, ukoliko je neka grana (a,b) pripadala hipu $H(k)$ i delila čvor a sa nekom granom iz hipa $H(k-1,k)$ to znači da je ta grana bila granična grana komponente C_{z_k}, a kako je njen početni čvor a, baš čvor u kome grana iz $H(k-1,k)$ povezuje komponentu z_{k-1} sa komponentom z_k, spajanjem ove dve komponente grana (a,b) zapravo sada povezuje čvor z_{k-1} sa nekim drugim čvorom na aktivnoj putanji, pa se stoga može smestiti u $H(k-1)$. Takođe, ukoliko grana (a,b) dolazi iz hipa $H(k-1,k)$ to znači da ona povezuje komponente $C_{z_{k-1}}$ i C_{z_k}, pa se nakon spajanja komponenti ona može privremeno smestiti u $H(k-1,k)$ kako bi invarijanta ostala ispunjena. Inače, ukoliko grana dolazi iz $H(k)$ i nije incidentna sa komponentom $C_{z_{k-1}}$, to znači da mora biti incidentna sa nekom komponentom C_{z_i} za $i < k-1$, pa se može smestiti u $H(i,k)$ za $i < k-1$. Za svako $i < k-1$ hip $H(i,k)$ se može stopiti u $H(i,k-1)$ jer nakon kontrahovanja C_{z_k} u $C_{z_{k-1}}$, granične

grane od C_{z_k} postaju granične grane komponente $C_{z_{k-1}}$.

Smeštanje grana u nove hipove nakon kontrahovanja se može ilustovati na primeru sa slike 2.11. Trenutni hipovi, pre operacije kontrahovanja čvorova sa aktivne putanje z_1 i z_2, opisani su ranije u tekstu. Nakon kontrahovanja, odnosno operacije skraćivanja putanje, dolazi do premeštanja graničnih grana i formiranja novih hipova. Označićemo sa $H(p)$ hip koji odgovara novonastalom čvoru $z_{1,2}$. Pošto su čvorovi z_1 i z_2 kontrahovani u jedan čvor, potrebno je napraviti hipove koji čuvaju grane između čvorova z_3, z_4 i novonastalog čvora p, dok se svi hipovi koji su se odnosili na čvorove z_1 i z_2 mogu obrisati. Novi hipovi oblika $H(i, j)$ su: $H(3, p) = \{(d, c), (d, b)\}$ i $H(4, p) = \{(e, b), (e, a), (e, c)\}$, dok su novi hipovi oblika $H(j)$: $H(p) = \{(b, d), (a, e), (b, e), (c, e), (c, d)\}$, $H(3) = \{(d, c), (d, b), (d, f)\}$ i $H(4) = \{(e, b), (e, a), (e, c), (f, d)\}$.

Operacija proširivanja putanje

Operaciji proširivanja putanje često prethodi operacija *fuzije* (eng. *fusion*). Da bi se ona izvršila, potrebno je pronaći graničnu granu najmanje težine među svim granama koje se trenutno čuvaju u hipovima. Neka je to grana (u, v). Posmatrajući unazad komponente na aktivnoj putanji, traži se ona koja je najdalje na putanji, odnosno najranije dodata, a da ima radnu težinu min-link grane ne veću od težine grane (u, v). Drugim rečima, potrebno je odrediti komponentu C_{z_i} za najmanju vrednost i koja ispunjava prethodno navedeni uslov. Ideja je da se prvo sve grane, čija se oba kraja nalaze posle komponente C_{z_i} na aktivnoj putanji, kontrahuju u jedan čvor koji možemo označiti sa b i ovu operaciju nazivamo fuzija. Zatim se vrši kontrahovanje grane (a, b), gde je a kraj grane koji je incidentan sa komponentom C_{z_i}, čime se dobija novi najdalji čvor na putanji i putanja se proširuje. Nakon operacije proširivanja putanje je neophodno ažurirati sve min-link grane i ažurirati hipove koristeći istu logiku kao i u operaciji skraćivanja putanje, sa jednom bitnom razlikom. Ukoliko je došlo do fuzije, što ne mora uvek biti slučaj, potrebno je ažurirati ne samo $H(k)$ i $H(k-1, k)$, već i $H(i+1), ..., H(k)$ kao i sve hipove oblika $H(j, j')$ za $i \leq j < j'$, jer su ovi hipovi čuvali grane incidentne sa komponentama koje su kontrahovane u procesu fuzije. Grane između bilo koje dve komponente koje su kontrahovane u procesu fuzije sada postaju unutrašnje grane nove komponente, tako da se ne moraju čuvati u hipu, dok grane koje su vodile do kontrahovanih komponenti iz drugih čvorova aktivne putanje, sada postaju grane incidentne novoj komponenti koju smo označili sa a. Na taj način i druga invarijanta ostaje očuvana.

Sada kada je objašnjeno kako se realizuju operacije proširivanja i skraćivanja aktivne putanje, jasno je da se pomoću njih veoma jednostavno konstruiše drvo minora T. Ako je trenutni čvor z_k, aktivna putanja se proširuje sve dok je to moguće, odnosno dok komponenta C_{z_k} ne dostigne predviđenu veličinu. Takođe, često se usput, po potrebi, dešava i fuzija. Dostizanjem predviđenog broja čvorova otpočinje operacija skraćivanje putanje.

Treći korak: rekurzija u podgrafima drveta T

Kao rezultat prethodnog koraka konstruisano je drvo minora T. Sada je potrebno rekurzivno pozvati algoritam za svaki njegov čvor z, odnosno za svaki podgraf C_z. U prethodnom koraku algoritma su već odbačene neke grane, koje smo okarakterisali kao loše. Međutim, još uvek postoje neke grane kojima je hip izmenio vrednost, ali pošto nisu predstavljale problem pri kreiranju drveta one nisu odbačene. Pre rekurzivnih poziva potrebno je tim granama vratiti originalne težine. Tada se algoritam poziva za svaki $C_z \setminus B$. Parametar t kontroliše veličinu potproblema, odnosno veličinu komponente C_z. Rezultat unije ovakvih rekurzivnih poziva je skup F koji sadrži grane između čvorova podgrafa oblika C_z. Za svako z, jasno je da svi njegovi čvorovi predstavljaju kontrahovane grafove sa nižeg nivoa, pa se zato algoritam rekuzivno poziva za svu njegovu decu. Međutim, postavlja se pitanje šta se dešava u slučaju da neki čvorovi predstavljaju rezultat fuzija. Situacija je zapravo ista jer svaki takav čvor predstavlja dete kao i svaki drugi čvor unutar C_z, sa samo jednom razlikom, a to je da on ima svoju hierarhiju čvorova koja nastaje usled fuzije. Kako je prethodno objašnjeno, prilikom fuzija značajne su grane oblika (a, b), gde je a čvor incidentan sa komponentom kojom se proširuje putanja, dok je b čvor u kome su kontrahovane prethodne komponente sa aktivne putanje. Ukoliko nisu loše one se dodaju u F, a inače se njihova obrada ostavlja za neke naredne rekurzivne pozive.

Poslednji korak

Kao rezultat druge faze algoritma konstruisano je drvo minora T i dobijen skup B grana koje se ne mogu odmah obraditi jer imaju izmenjene vrednosti težina i potencijalno narušavaju invarijante. U trećem koraku algoritma kreira se skup F grana unutar kontrahovanih podgrafa koje sigurno pripadaju $MST(G)$. Konačno, kako bi se dobile grane koje povezuju već obrađene komponente, algoritam se poziva za $F \cup B$. Rezultat ovog poziva, zajedno sa prethodno pronađenim granama u prvoj, Boruvkinoj fazi, vraća minimalno povezujuće drvo grafa G.

Dokaz korektnosti: Za potrebe dokaza korektnosti ovog algoritma dovoljno je pokazati da važi sledeće: Ako grana originalnog grafa G nije proglašena lošom, niti je dodata u skup F, onda ona sigurno ne pripada $MST(G)$. U nastavku sledi skica dokaza dobijena razmatranjem dva slučaja.

Neka je e grana za koju važi da se njena oba krajnja čvora nalaze u nekom minoru C_i grafa G, a koja ni u jednom koraku algoritma nije odbačena. Pošto ona nije u F, znači da nije deo lokalnog MST, odnosno ne pripada $MST(C_i)$. Pošto grana nije označena kao loša i nije u $MST(C_i)$, na osnovu svojstva kompozicije sledi da je van $MST(G)$. Važno je prisetiti se da čim neka grana nije deo MST, to znači da ona gradi neki ciklus, a dodatno je i najskuplja grana u njemu. Ova analiza je izvršena u odnosu na radne težine grana, a kako grana e nije proglašena lošom, njena težina je zapravo sve vreme jednaka polaznoj. Ostalim granama tog ciklusa u kome je grana e grana najveće težine, se težine mogu vratiti na inicijalne, ali to znači da sada neke od njih mogu biti manje ili ostati iste, ali nikako postati veće. Ako je grana e bila najskuplja u nekom ciklusu, ona to ostaje i nakon resetovanja težina na inicijalne vrednosti.

Razmotrimo slučaj kada je grana $e(u, v)$ odbačena u fazi kreiranja drveta T. Pre nego što je odbačena, postojala je grana $e'(u', v)$ manje težine, odnosno grana koja je takođe incidentna čvoru v. Prilikom operacije skraćivanja putanje ili fuzije dolazi do kontrahovanja obe grane u jedan čvor. Pošto je taj čvor kontraktibilan u G, radne težine ovih grana se ponašaju kao originalne u odnosu na $MST(G)$. Nijedna od ove dve grane nema izmenjenu težinu, ali je e skuplja od e'. Za dve grane koje imaju zajednički čvor, sa originalnim težinama u G, važi da ona koja je skuplja može biti izbačena i sigurno ne pripada $MST(G)$.

Analiza složenosti: Drvo minora T se može opisati visinom drveta minora d i broja čvorova n, gde je naročito značajan broj čvorova n_z svake od komponenti C_z. Nakon dublje analize dolazi se do vremenske složenosti izgradnje drveta T od $O(m+d^3n)$. Posmatrajući ovu vremensku složenost, postavlja se pitanje kako odabrati visinu i broj čvorova svake komponente drveta, tako da izvršavanje ostane efikasno. Ukoliko se odabere mala visina drveta, konstrukcija drveta je izuzetno brza, ali su komponente na kojima se vrši rekurzija veće, imaju više čvorova, pa je vreme koje se troši na rekurziju veliko. Ukoliko se odabere velika visina drveta, konstrukcija drveta jeste značajnije sporija nego u prvom slučaju, ali su komponente C_z značajno manje

i rekurzija je mnogo brža. Ovde je potrebno naći kompromis kako bi kompletan algoritam trošio razumno vreme na proces izgradnje drveta i rekurzivne pozive. Spomenuti kompromis se postiže uvođenjem inverzne Akermanove funkcije.

Biramo parametre tako da ceo graf može da se "smesti" u koren drveta T, pri čemu je parametar t, za koji smo već napomenuli da kontroliše veličinu potproblema, definisan pomoću Akermanove funkcije koja raste izuzetno brzo i time se obezbeđuje da dubina hijerarhije, odnosno, broj nivoa rekurzije bude veoma mali. Ukupno potrošeno vreme na svakom nivou rekurzije je linearno po broju grana. Značajno za analizu ukupne vremenske složenosti algoritma je da je broj grana, koje su obeležene kao loše prilikom konstrukcije drveta T, ograničen sa $|B| \leq m_0/2 + d^3 n_0$.

Moguće je odrediti vremensku složenost svake faze algoritma i ispravnim odabirom vrednosti parametra t uz pomoć Akermanove funkcije, dolazi se do ukupne vremenske složenosti od $O(m\alpha(m, n))$, gde je α inverzna Akermanova funkcija koja jako sporo raste. Dokaz složenosti ovog algoritma je dugačak i sadrži dosta tehničkih detalja i može se naći u [2].

Glava 3

Evaluacija i poređenje rezultata

U ovom radu predstavljeno je nekoliko algoritama za konstrukciju minimalnog povezujućeg drveta grafa: Primov, Kruskalov, Boruvkin, Kargerov, Fredman-Tardžanov, Šazelov i algoritam obrnutog brisanja grana. Algoritmi su implementirani u programskom jeziku *C++* uz korišćenje biblioteke *boost*. Svi grafici koji su korišćeni za potrebe analize rezultata i evaluacije predstavljenih algoritama napravljeni su u programskom jeziku *Python*, korišćenjem biblioteke *Matplotlib*. Implementacije predstavljenih algoritama mogu se naći u javnom repozitorijumu na adresi: `https://github.com/KatarinaDimitrijevic/MSTAlgorithms`.

3.1 Evaluacija razmatranih algoritama

U ovom poglavlju biće predstavljeni rezultati meranja vremena izvršavanja algoritama u zavisnosti od parametra veličine ulaza. Merenja su izvršena na računaru sa sledećom konfiguracijom:

- Processor: Intel(R) Core(TM) i5-8300H CPU @ 2.30GHz 2.30 GHz,
- RAM: 8.00 GB,
- OS: Windows 10 Pro, Version 22H2, OS Build 19045.6332.

Vremena izvršavanja algoritama data su u funkciji veličine ulaza. Ulaz predstavlja neusmeren, težinski graf, zadat listom susedsta. Svi grafovi su generisani na slučajan način. Veličina ulaza predstavljena je jednim parametrom, koji odgovara broju čvorova grafa. Kada su u pitanju grane, razmatrana su dva slučaja:

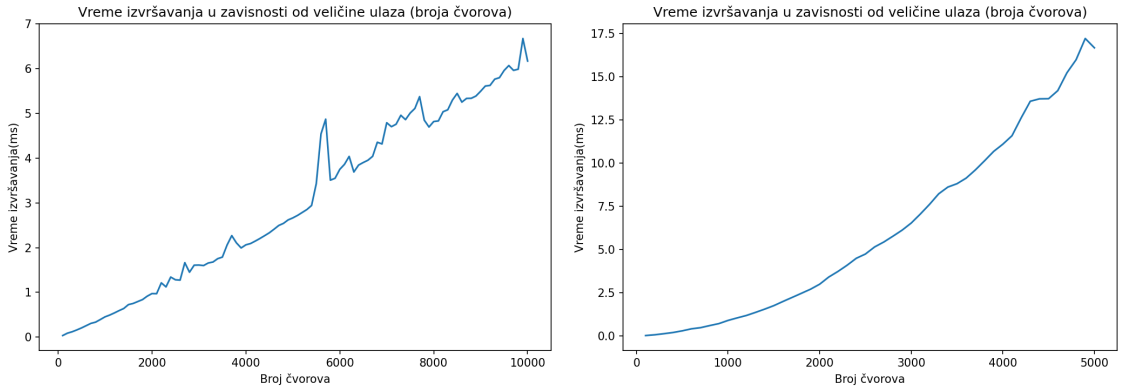
- broj grana je biran tako da grafovi na kojima je vršena analiza budu "srednje gustine", tako da važi $|E| = |V| \log |V|$, gde je $|E|$ broj grana ulaznog grafa, a |V| broj čvorova, što i dalje zapravo spada u *retke* grafove; primetimo da ovako generisani grafovi i dalje spadaju u retke grafove, ali sa nešto većim prosečnim stepenom čvorova

- broj grana je biran tako da grafovi na kojima je vršena analiza budu "gusti grafovi", tako da važi $|E| = |V|^2$.

U nastavku su prikazani grafici zavisnosti vremena izvršavanja algoritama za različite veličine ulaza, od 100 do 10000 čvorova u slučaju retkih i od 100 do 5000 u slučaju gustih grafova, za svaki algoritam pojedinačno. Svaka tačka na grafiku predstavlja prosečno vreme 100 izvršavanja algoritma za zadati ulaz. Svi algoritmi su pokretani na istom skupu grafova.

3.1.1 Primov algoritam

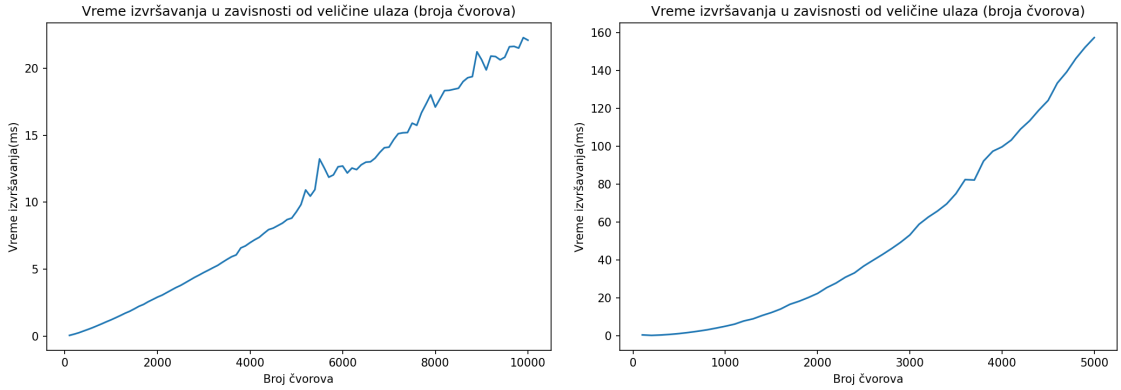
Vremenska složenost Primovog algoritma iznosi $O((|E| + |V|) \log |V|)$. On je implementiran korišćenjem binarnog hipa. Kao što se može videti na grafiku 3.1, u praksi se pokazuje da je i za retke i za guste grafove ovaj algoritam izuzetno efikasan. U slučaju retkih grafova, vreme izvršavanja Primovog algoritma je skoro linearno, ali uz povremenu pojavu oscilacija. U slučaju gustih grafova, gotovo da nema oscilacija i funkcija ima očekivani oblik i nakon 3000 čvorova počinje nešto brže da raste. U svakom pokretanju je Primov algoritam davao ubedljivo najbolje rezultate.



Slika 3.1: Vreme izvršavanja Primovog algoritma u odnosu na broj čvorova grafa izraženo u milisekundama za retke grafove (levo) i guste grafove (desno)

3.1.2 Kruskalov algoritam

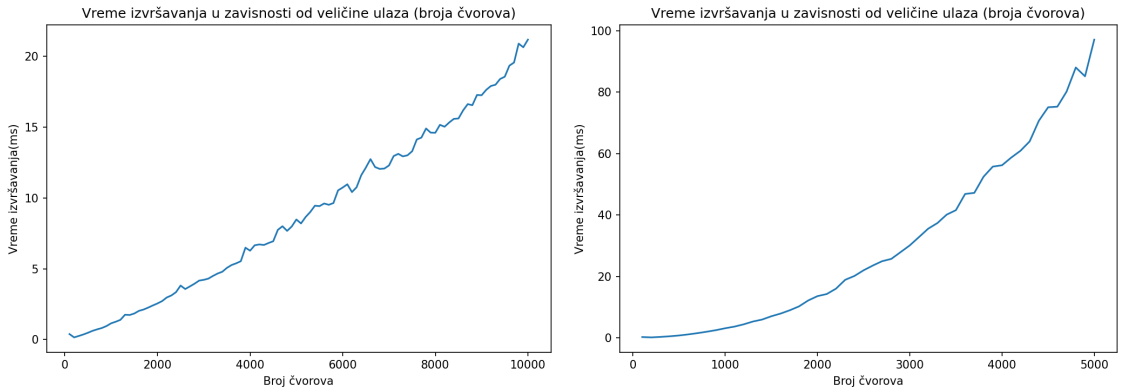
Na grafiku 3.2 prikazana su vremena izvršavanja Kruskalovog algoritma u odnosu na veličinu ulaza za retke i guste grafove. On je implementiran korišćenjem union-find strukture podataka. Vremenska složenost ovog algoritma iznosi $O(|E| \log |V|)$. Grafici su u oba slučaja veoma sličnog oblika kao i kod Primovog algoritma. Međutim, pokazuje se da Kruskalov algoritam troši više vremena od Primovog, a naročito u slučaju gustih grafova. Kruskalov algoritam najviše vremena troši na sortiranje grana.



Slika 3.2: Vreme izvršavanja Kruskalovog algoritma u odnosu na broj čvorova grafa izraženo u milisekundama za retke grafove (levo) i guste grafove (desno)

3.1.3 Boruvkin algoritam

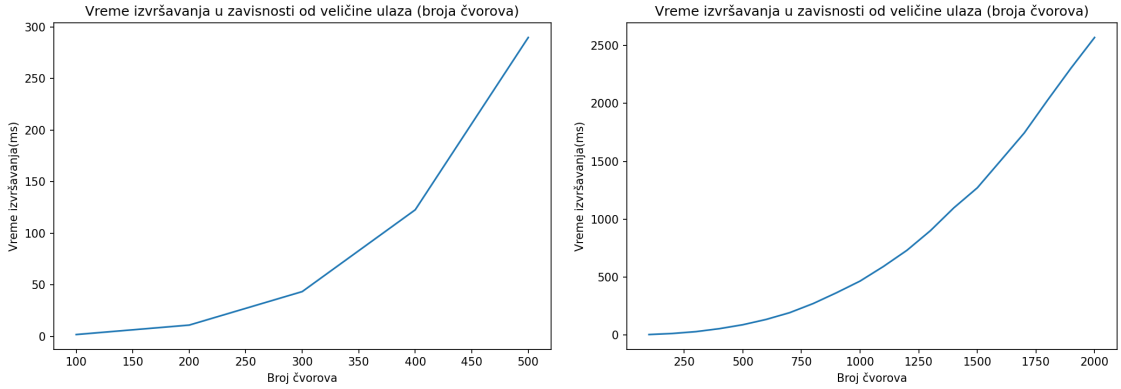
Vremenska složenost ovog algoritma iznosi $O(|E| \log |V|)$, što je teorijski skoro isto kao i prethodna dva. Na grafiku 3.3 prikazana su vremena izvršavanja Boruvkinog algoritma u odnosu na veličinu ulaza, za retke i guste grafove. Dobijeni rezultati u velikoj meri nalikuju rezultatima dobijenim Kruskalovim algoritmom u slučaju retkih grafova i njegov grafik je gotovo linearan. Međutim, manje vremena troši u slučaju gustih grafova, posebno za veće ulaze, preko 2000 čvorova. Velika prednost Boruvkinog algoritma je mogućnost paralelizacije čime se ukupno vreme značajno smanjuje, kako za retke, tako i za guste grafove.



Slika 3.3: Vreme izvršavanja Boruvkinog algoritma u odnosu na broj čvorova grafa izraženo u milisekundama za retke grafove (levo) i guste grafove (desno)

3.1.4 Algoritam obrnutog brisanja grana

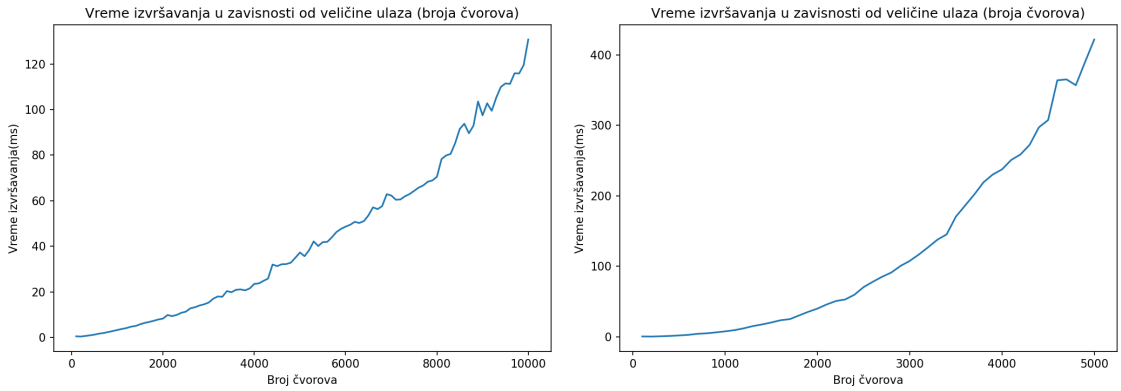
Algoritam obrnutog brisanja grana ima teorijski najgoru vremensku složenost i u praksi se takođe pokazuje najlošije, ne samo za guste, već i za retke grafove. Njegova vremenska složenost iznosi $O(|E| \log |E| + |E|(|E| + |V|))$. Na grafiku 3.4 prikazana su vremena izvršavanja u oba slučaja. Ideja na kojoj je zasnovan ovaj algoritam je veoma intuitivna i jednostavno se implementira. On se za manje ulaze može koristiti, međutim, drastično je sporiji od ostalih i nema smisla koristiti ga za veće ulaze. Deo implementacije koji najviše vremena troši je provera povezanosti grafa nakon svakog uklanjanja grane, što je gotovo kvadratno u funkciji broja čvorova za retke grafove, dok je za guste grafove znatno lošija složenost.



Slika 3.4: Vreme izvršavanja algoritma obrnutog brisanja grana u odnosu na broj čvorova grafa izraženo u milisekundama za retke grafove (levo) i guste grafove (desno)

3.1.5 Kargerov algoritam

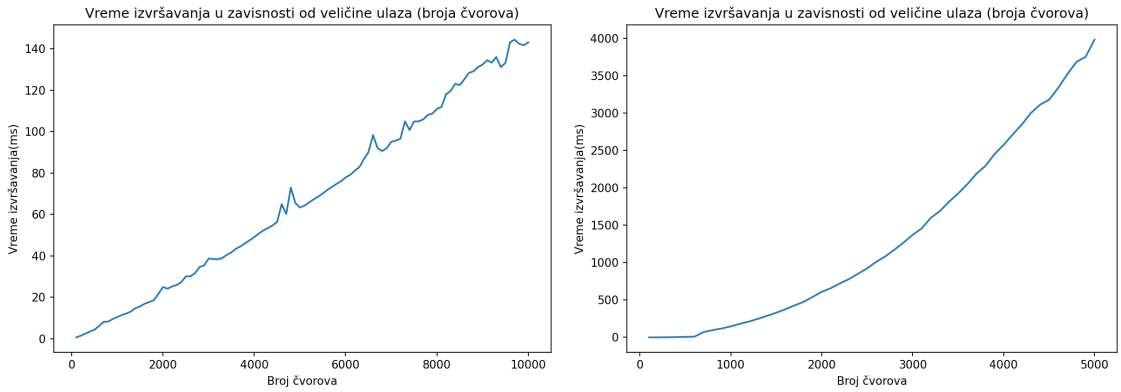
Kargerov algoritam je jedini stohastički algoritam. Njegova očekivana vremenska složenost je linearna i iznosi $O(|E| + |V|)$. Na grafiku 3.5 prikazana su vremena izvršavanja Kargerovog algoritma u odnosu na veličinu ulaza. Njegovi rezultati mogu znatno da variraju zbog korišćenja nasumičnosti u njegovoj implementaciji. Za retke grafove pokazuje slične performanse kao Boruvkin algoritam, što je nešto sporije od Kruskalovog i Primovog, a takođe i sam oblik grafika liči na linearnu funkciju. U slučaju gustih grafika to nije slučaj, pokazuje se nešto lošije, a vreme izvršavanja naglo počinje da raste već sa oko 1000 čvorova.



Slika 3.5: Vreme izvršavanja Kargerovog algoritma u odnosu na broj čvorova grafa izraženo u milisekundama za retke grafove (levo) i guste grafove (desno)

3.1.6 Fredman-Tardžanov algoritam

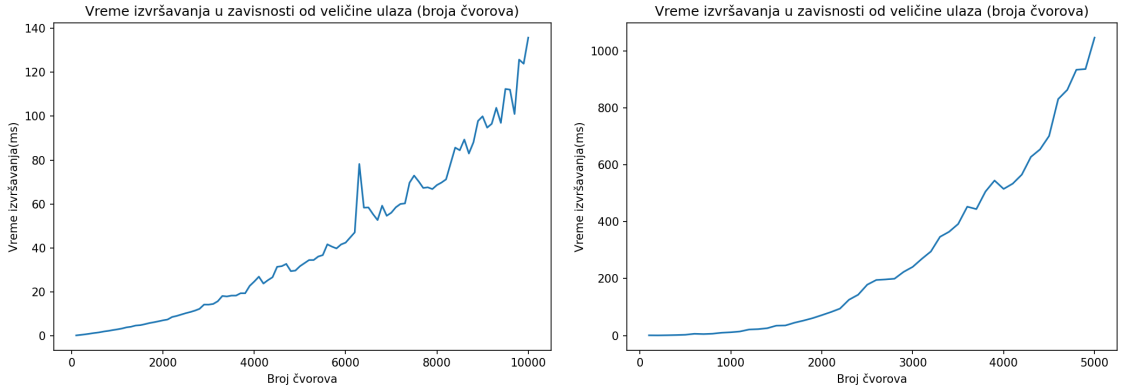
Na grafiku 3.6 prikazano je vreme izvršavanja Fredman-Tardžanovog algoritma u odnosu na veličinu ulaza. Očekivana vremenska složenost ovog algoritma je linearna i iznosi $O(m\beta(m, n))$. Implementacija koja je korišćena za merenje vremena izvršavanja nije optimizovana pomoću Gabovog algoritma. Na retkim grafovima, vreme izvršavanja Fredman-Tardžanovog algoritma linearno zavisi od veličine ulaza i troši slično vreme kao Kargerov algoritam. U slučaju gustih grafova pokazuje izuzetno loše performanse. Razlog lošim performansama može biti što se u implementaciji u slučaju prevazilaženja trenutne veličine hipa, sve pronađene grane odbacuju i počinje se iznova, umesto da se svaka od njih najpre razmotri.



Slika 3.6: Vreme izvršavanja Fredman-Tardžanovog algoritma u odnosu na broj čvorova grafa izraženo u milisekundama za retke grafove (levo) i guste grafove (desno)

3.1.7 Šazelov algoritam

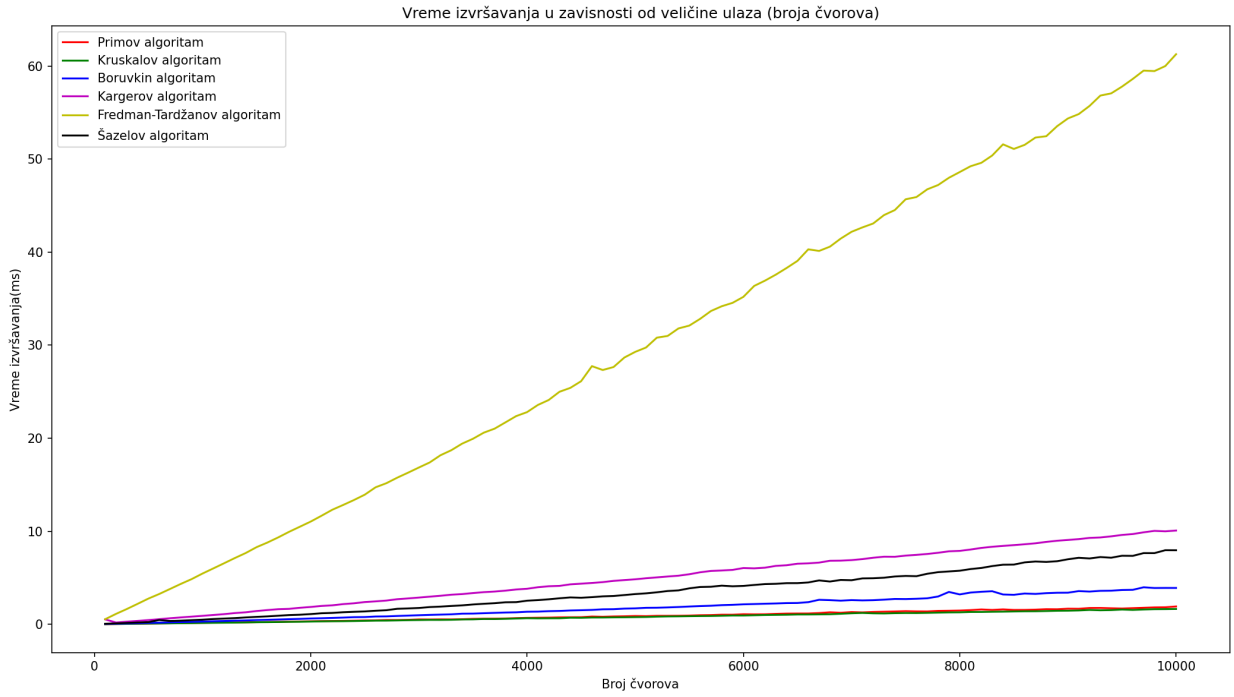
Na grafiku 3.7 prikazano je vreme izvršavanja Šazelovog algoritma u odnosu na veličinu ulaza. Očekivana vremenska složenost ovog algoritma je linearna i iznosi $O(m\alpha(m,n))$ i ovaj algoritam je idejno najkomplikovaniji, a takođe je i implementacija dosta drugačija od ostalih. Koristi strukturu soft hip koja je veoma efikasna, ali bez obzira na dobru teorijsku složenost, u praksi se ne pokazuje baš najbolje, naročito za guste grafove. Pokazuje performanse slične Kargerovom algoritmu u slučaju retkih grafova gde je grafik gotovo linearan, dok u slučaju gustih grafova vreme izvršavanja vidno brže raste sa porastom veličine ulaza.



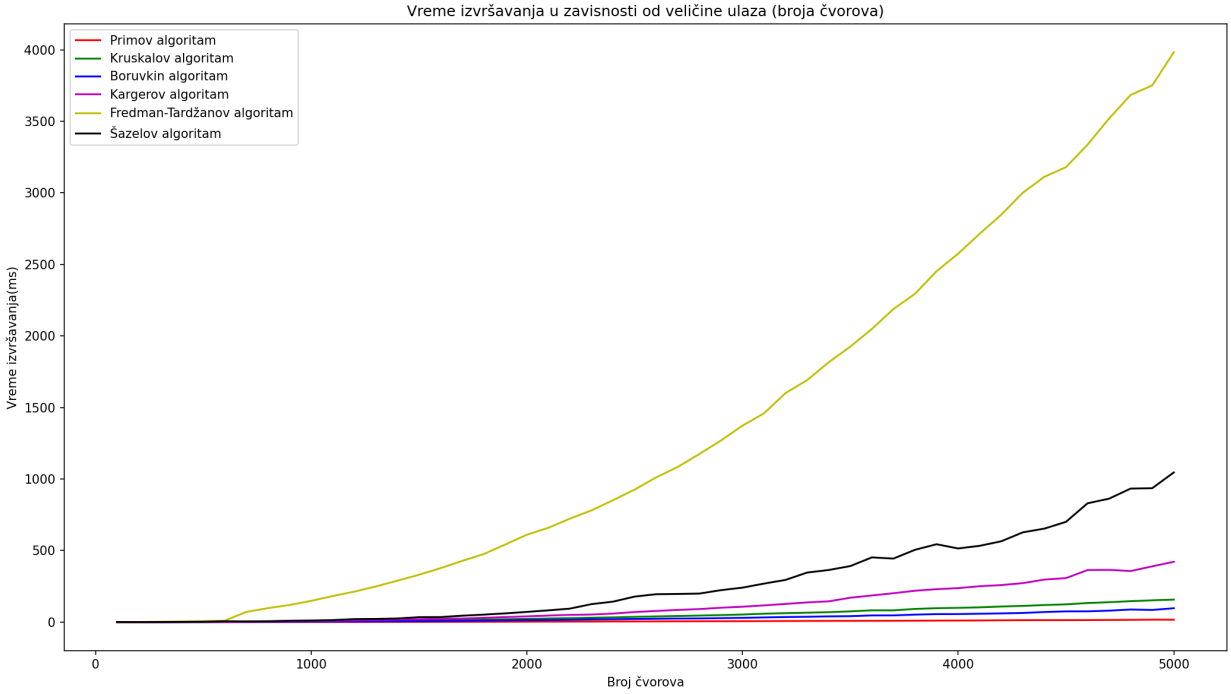
Slika 3.7: Vreme izvršavanja Šazelovog algoritma u odnosu na broj čvorova grafa izraženo u milisekundama za retke grafove (levo) i guste grafove (desno)

3.2 Poređenje dobijenih rezultata

Na slikama 3.8 i 3.9 dat je uporedni prikaz grafika svih razmatranih algoritama, osim algoritma obrnutog brisanja grana jer je on dosta sporiji od ostalih i nema smisla njegovo vreme izvršavanja prikazati na istom grafiku. Generalno se najbolje ponašaju Primov, Kruskalov i Boruvkin algoritam i na retkim i na gustim grafovima. Kargerov i Šazelov algoritam pokazuju nešto lošije performanse. Fredman-Tardžanov algoritam daje najlošije rezultate i razlog tome može biti što se u implementaciji u slučaju prevazilaženja trenutne veličine hipa, sve pronađene grane odbacuju i počinje se iznova, umesto da se svaka od njih najpre razmotri.



Slika 3.8: Poređenje vremena izvršavanja razmatranih algoritama u slučaju retkih grafova



Slika 3.9: Poređenje vremena izvršavanja razmatranih algoritama u slučaju gustih grafova

Glava 4

Zaključak

Problem konstrukcije minimalnog povezujućeg drveta je problem koji pripada oblasti grafovskih algoritama. U ovom radu je predstavljeno nekoliko algoritama za rešavanje ovog problema: Primov, Kruskalov, Boruvkin, Kargerov, Fredman-Tardžanov, Šazelov i algoritam obrnutog brisanja grana. Svaki algoritam predstavljen je osnovnom idejom na kojoj je zasnovan, analizom vremenske složenosti, analizom korektnosti, opisom implementacije i evaluacijom dobijenih rezultata.

Analizirana su vremena izvršavanja svih razmatranih algoritama u funkciji veličine ulaza koji je zadat brojem čvorova grafa. Analiza je izvršena u slučaju retkih i gustih grafova. Ubedljivo najbolje rezultate dao je Primov algoritam, kako za retke, tako i za guste grafove. Odmah posle njega su Kruskalov i Boruvkin algoritam, s tim što je Kruskalov algoritam nešto sporiji na gustim grafovima. Iako Kargerov, Fredman-Tardžanov i Šazelov algoritam imaju najbolju očekivanu teorijsku složenost, u praksi se pokazuju dosta lošije od Primovog, Kruskalovog i Boruvkinog algoritma. Razlika je jedva primetna na retkim grafovima, međutim u slučaju gustih grafova, oni troše znatno više vremena, a to naročito važi za Fredman-Tardžanov algoritam za koji se ispostavlja da mu je potrebno oko deset puta više vremena od ostalih algoritama. Najlošije rezulatate generalno daje algoritam obrnutog brisanja grana što je i očekivano, imajući u vidu njegovu vremensku složenost, posebno u slučaju gustih grafova.

Neke od ideja za nastavak istraživanja na temu rešavanja problema konstrukcije minimalnog povezujućeg drveta bile bi implementacija Primovog algoritma korišćenjem Fibonačijevog hipa i optimizacija Fredman-Tardžanovog algoritma korišćenjem Gabovog rešenja zasnovanog na memoizaciji. Takođe, moguća je paralelizacija Boruvkinog algoritma, kao i paralelizacija sortiranja koje u slučaju Kruskalovog

algoritma troši dosta vremena. Pored razmatranih, moguće je razmatrati i druge postojeće algoritme za rešavanje ovog problema, npr. algoritam Petija (Seth Pettie) i Ramahandrana (Vijaya Ramachandran), koji je u literaturi poznat kao optimalni deterministički algoritam [14] i Jaov (Andrew Chi chih Yao) algoritam zasnovan na Boruvkinom algoritmu čija je složenost $O(|E| \log(\log |V|))$ [4].

Bibliografija

[1] Otakar Boruvka. Otakar Borůvka on minimum spanning tree problem Translation of both the 1926 papers, comments, history, 1927. on-line at: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X00002247.

[2] Bernard Chazelle. A minimum spanning tree algorithm with inverse-Ackermann type complexity, 2000. on-line at: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=MR1866456.

[3] Bernard Chazelle. The soft heap: an approximate priority queue with optimal error rate, 2000. on-line at: https://dl.acm.org/doi/10.1145/355541.355554.

[4] Andrew Chi chih Yao. An 0(|E|loglog|V|) algorithm for finding minimum spanning trees, 1975. on-line at: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0020019075900563?via%3Dihub.

[5] Richard Cole, Philip Klein, and Rober Tarjan. A linear-work parallel algorithm for finding minimum spanning trees, 1994. on-line at: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://cs.brown.edu/research/pubs/pdfs/1994/Klein-1994-LWP.pdf.

[6] Jason Eisner. State-of-the-Art Algorithms for Minimum Spanning Trees, 1997. on-line at: www.cs.jhu.edu/~jason/papers/eisner.mst-tutorial.pdf.

[7] Michael Fredman and Bob Tarjan. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms, 1987. on-line at: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=MR0904195.

[8] Vojtěch Jarník. O jistém problému minimálním, 1930. on-line at: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/500725.

[9] David Karger, Philip Klein, and Rober Tarjan. A randomized linear-time algorithm to find minimum spanning trees, 1995. on-line at: `https://cs.brown.edu/research/pubs/pdfs/1995/Karger-1995-RLT.pdf`.

[10] Joseph Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem, 1956. on-line at: `https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=MR0078686`.

[11] Filip Marić and Vesna Marinković. Konstrukcija i analiza algoritama, 2024. on-line at: `https://poincare.matf.bg.ac.rs/~filip/kiaa/kiaa.pdf`.

[12] Jaroslav Nesetril and Helena Nesetrilova. The Origins of Minimal Spanning Tree Algorithms - Boruvka and Jarnik, 2010. on-line at: `https://www.cs.cmu.edu/~15850/notes/lec1.pdf`.

[13] CMU School of Computer Science. Minimum Spanning Trees, 2024. on-line at: `https://www.cs.cmu.edu/~15850/notes/lec1.pdf`.

[14] Seth Pettie and Vijaya Ramachandran. An optimal minimum spanning tree algorithm, 2002. on-line at: `https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=MR2148431`.

[15] Miodrag Živković i Vesna Marinković. Algoritmi i strukture podataka. on-line at: `https://poincare.matf.bg.ac.rs/~vesna.marinkovic/asp/asp.pdf`.