Univerzitet u Beogradu
Elektrotehnički fakultet

Seminarski rad
na temu:

Bajesove mreže i primena

Studenti:
Anja Stojanović 2021/0167
Katarina Petrović 2021/0068

Beograd, školska 2023/2024. godina

Sadržaj

1. Uvod

Sa prvim uređajima koji su imali mogućnost da oponašaju neku ljudsku aktivnost, rodila se i ideja o autonomnim uređajima koji će moći da razmišljaju i da se ponašaju onako kako se ponašamo i mi sami. Međutim, koliko god naučnici truda ulagali u ovu ideju, ona je u današnjem svetu idalje samo san. Iako ne postoji uređaj koji će u potpunosti zameniti čoveka, preuzeti njegovu inteligenciju i nezavisno funkcionisati, postoje specifični uređaji koji obavljaju određenu ulogu ili zadatak i na taj način vraćaju veru u to da će jednog dana potpuno autonomni uređaji ugledati svetlost dana.

Ono što je pri projektovanju svakog od njih neophodno jeste da se odluka koja zavisi od ogromne količine podataka donese na pravi način, odnosno da se napravi model koji će pored toga što izvlači značenje iz podataka moći i da upravlja nesigurnošću koja je inherentna u stvarnom svetu. U tom kontekstu se prvi put susrećemo sa pojmom Bajesovih mreža koje služe kao efikasan i snažan instrument za modelovanje verovatnoće i nesigurnosti.

Koreni Bajesovih mreža nalaze se u teoriji verovatnoće, statistike i grafova, ali se javlja jedna ključna razlika. Bajesova statistika, nasuprot klasičnoj, veliki značaj pridaje a priori verovatnoći određenog događaja, tj. početnoj verovatnoći koja se kasnije ažurira na osnovu prikupljenih dokaza iz različitih izvora. Dakle, za razliku od većine drugih okvira za baratanje sa neizvesnošću, kod Bajesovog pristupa neophodan je i dobar teoretski uvid u problem kojim se bavimo, što nam ukazuje na to da ovaj pristup neće biti lako primenljiv u svakoj problematici.

Zbog svoje složenosti Bajesov pristup neće moći da shvati osoba koja nije upoznata sa osnovnim konceptima matematike i automatskog rezonovanja, ali onome ko je već u ovom svetu može biti od velike koristi zbog nebrojeno mnogo primena i koncepata koji se svode na problematiku ovog pristupa.

Iz tog razloga ovaj rad ima za cilj da pruži uvid u osnovne principe i koncepte Bajesovih mreža. Sam rad podeljen je u dve velike celine. U prvoj se upoznajemo sa osnovnim pojmovima koje je neophodno u potpunosti razumeti kako bi ih kasnije sa lakoćom primenjivali u modeliranju, korišćenju i tumačenju Bajesovih mreža, o čemu će se govoriti u drugoj celini rada.

2. Osnovni koncepti Bajesovih mreža

U ovom delu biće definisani osnovni matematički koncepti koji Bajesove mreže koriste. Kao osnovni matematički aparat, koriste se teorija verovatnoće (koncept uslovne verovatnoće i Bajesova teorema) i teorija grafova (od posebnog interesa su aciklični usmereni grafovi).

2.1. Uslovna verovatnoća

Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoća, gde za verovatnoću P(B) događaja B iz skupa Ω važi P(B)>0. Ako realizacija događaja B može uticati na realizaciju događaja A, onda je reč o uslovnoj verovatnoći. Verovatnoća događaja A pod uslovom da se desio događaj B označava se sa P(A|B). U skladu sa ovom notacijom, navodimo sledeću definiciju.

Definicija 1.

Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoća i A, B $\in$ F, pri čemu je P(B)>0. **Uslovna verovatnoća** P(A|B) definiše se na sledeći način:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$$

gde verovatnoća $P(A \cdot B)$ označava verovatnoću da se dese i događaj A i događaj B.

Ukoliko su događaji A i B nezavisni važi:

$$P(AB) = P(A)$$

a iz prethodnih jednačina se u slučaju da su A i B nezavisni može pisati:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravilo množenja se može primeniti na izraz za verovatnoću preseka konačno mnogo skupova:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) ... P(A_n|A_{n-1} ... A_2 \cdot A_1)$$

U skladu sa nezavisnim događajima, od velikog značaja za teoriju verovatnoće predstavlja pojam potpunog sistema hipoteza.

Definicija 2.

Neka je (Ω , F, P) prostor verovatnoća i $H_1,...,H_n \in$ F zadovoljavaju sledeće uslove:

1. P(Hi) > 0, i = 1,...n

2. Hi ∩ Hj = ∅, i, j = 1,...n, i ≠ j,

3. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Događaji $H_1,...,H_n$ nazivaju se hipotezama, a $H_1,...,H_n$ **potpun sistem hipoteza**.

Na osnovu potpunog sistema hipoteza, definišemo formulu totalne verovatnoće koja daje verovatnoću događaja B u skupu čiji je neki potpun sistem hipoteza $H_1,...,H_n$.

Definicija 3.

(**Formula totalne verovatnoće**) Ako je $\{H_1,...,H_n\}$ potpun sistem hipoteza, onda:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

za svako $A \in F$.

Na formulu totalne verovatnoće direktno se nadovezuje Bajesova formula, u literaturi često poznata i kao Bajesova teorema. U suštini, Bajesova teorema daje metod na osnovu koga ažuriramo znanje o događaju A (verovatnoću da se događaj A desi), na osnovu drugih događaja (verovatnoća potpunog sistema hipoteza). Sledi matematička formulacija Bajesove teoreme.

Teorema 1.

(**Bajesova teorema**) Ako je $\{H_1, ..., H_n\}$ potpun sistem događaja, onda važi:

$$P(H_m|A) = \frac{P(H_m) \cdot P(A|H_m)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_m)}$$

$m = 1,...,n$, $A \in F$, $P(A) > 0$.

Očigledno, izraz u imeniocu predstavlja totalnu verovatnoću događaja A.

Dokaz Bajesove teoreme ne navodimo s obzirom da je lako naslutiti ga iz prethodnih definicija, a nije relevantan za dalje predstavljanje Bajesovih mreža.

Često se u svetu automatskog rezonovanja koriste pojmovi apriorne i aposteriorne verovatnoće koje definišu početnu verovatnoću nekog događaja i verovatnoću istog događaja nakon što o sistemu imamo neku dodatnu informaciju, respektivno. Naime, **apriorna verovatnoća** na osnovu navedenog matematičkog aparata predstavlja verovatnoću događaja H_m (pre nego što imamo informaciju o ishodu događaja A), dok **aposteriorna verovatnoća** događaja predstavlja verovatnoću događaja H_m pod uslovom da se desio događaj A, $P(H_m|A)$. Konkretnu primenu koncepta uslovne verovatnoće i Bajesove teoreme ilustrovaćemo na primeru koji predstavlja osnovu rasuđivanja u Bajesovim mrežama.

Primer:

Potrebno je uraditi rutinsku kontrolu dijagnostičkom radiografijom, nakon čega se ispostavi da je rendgen pozitivan na kancer pluća. Poznato je da ovaj test ima lažnu negativnu stopu 0.4 i lažnu pozitivnu stopu 0.02. Odnosno, drugim rečima, 40% je verovatnoća da će test biti negativan iako je kancer prisutan i 2% je verovatnoća da će test biti pozitivan čak i kada kancer ne postoji. Takođe je poznato da je verovatnoća oboljenja od kancera 0,001, odnosno jedna od 1000 osoba ima kancer. Postavlja se pitanje koja je verovatnoća da zaista kancer postoji, ako je rendgentski test bio pozitivan.

Na osnovu uslova zadatka mogu se definisati uslovne verovatnoće:

P(test je pozitivan | kancer pluća je prisutan) = 0.6

P(test je pozitivan | kancer pluća nije prisutan) = 0.02

Sada je potrebno izračunati sledeću verovatnoću:

P(kancer pluća je prisutan | test je pozitivan)
Koristeći sve poznate informacije i primenom Bajesove teoreme moguće je izračunati traženu verovatnoću. Koristimo sledeće oznake:
1. A - kancer pluća je prisutan
2. A - kancer pluća nije prisutan
3. B - test je pozitivan
4. B - test je negativan
S obzirom na zadate oznake možemo pisati:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} = 0.029$$

Na osnovu dobijenog rezultata sledi zaključak da, iako je test pozitivan, verovatnoća prisustva kancera je mala i iznosi 0.029. Ipak, ova vrednost sa sobom nosi veliku informaciju - naše početno znanje (apriorna verovatnoća) o događaju A bila je da je verovatnoća da osoba ima kancer 0,001. Nakon izvršenog testa i pozitivnog ishoda testa, verovatnoća se povećala 29 puta što je indikacija da osoba vrlo verovatno ima rak.
Na osnovu ovog algoritma možemo razmatrati mnoge probleme u nauci, medicini i svakodnevnom životu u čemu leži velika primena Bajesovih mreža čiji je ovo glavni koncept. Više primera biće predstavljeno u delu Modeliranje problema Bajesovim mrežama.

Kako bismo u potpunosti razumeli Bajesove mreže, takođe je neophodno da definišemo osnovne pojmove u teoriji grafova.

2.2 Teorija grafova

Grafovi su matematičke strukture koje se sastoje iz čvorova i grana koje ih povezuju. Oni imaju široku praktičnu primenu. Različite veze koje postoje u prirodi i svakodnevnom životu mogu se predstaviti pomoću grafova. Naredne definicije matematiči formalno opisuju graf, tipove grafova i parametre koji su od značaja u predstavljanju Bajesovih mreža.

Definicija 4.

Neka je V neprazan skup i E skup parova elemenata iz V. Uređeni par (V, E) naziva se **graf**. Elementi skupa V nazivaju se čvorovi, a elementi skupa E nazivaju se grane.

Definicija 5.

Orijentisani graf ili digraf G = (V,E) je uređeni skup parova čvorova i grana gde je E $\subseteq$ V x V. On ima orentaciju, grana (a,b) počinje u tački a, a završava se u tački b. S druge strane ako se može smatrati da je grana koja spaja čvorove a i b isto što i grana koja spaja čvorove b i a, kaže se da je graf **neorijentisan**.

Definicija 6.

Put dužine k ($k \geq 1$) grafa $G = (V,E)$ je niz grana, oblika

$(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{k-1}, v_k)$

kod orijentisanih grafova, odnosno

$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, ..., \{v_{k-1}, v_k\}$

kod neorijentisanih.

Definicija 7.

- **Prost (elementarni) put** je put koji kroz svaki čvor prolazi tačno jednom.
- **Zatvoren (kružni) put** je put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje.
- **Kontura**(ciklus) dužine n je elementarni kružni put.

Definicija 8.

Graf koji sadrži barem jedan ciklus naziva se **cikličan graf**. U suprotnom kažemo da je graf acikličan.

Definicija 9.

Povezan graf je takav neorijentisan graf kod koga su bilo koja dva čvora povezana putem. Ako postoje dva čvora koja se ne mogu povezati, graf je nepovezan.

Definicija 10.

Stepen grafa je broj grana grafa koji imaju kraj u jednom čvoru. Čvor stepena 1 naziva se izolovani čvor.

- Dve grane su susedne ako sadrže isti čvor.
- Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se petlja.
- Graf koji nema nijednu petlju je prost graf.
- Onaj graf kod koga su svaka dva čvora povezana granom naziva se kompletan (potpun) graf.

Stabla predstavljaju najjednostavniju, ali i najvažniju klasu grafova. Pomoću stabala moguće je predstaviti razne strukture poput firme, porodice i turnira.

Definicija 11.

Stablo ili **drvo** je povezan graf koji ne sadrži konture (ciklus). Dodavanjem bilo koje grane dobija se kontura. Dakle, stablo je maksimalni graf bez kontura.

Definicija 12.

Jedan od načina na koji se grafovi predstavljaju jeste pomoću matrice susednosti. Matrica susednosti po čvorovima grafa $G = (V, E)$ je binarna matrica $A = (a_{ij})$ reda $n \times n$, definisana sa:

$x_{ij} = 1$, ako postoji grana od čvora i do čvora j,

$x_{ij} = 0$, ako ne postoji grana od čvora i do čvora j za svako i = 1,...n, j = 1,...,n.

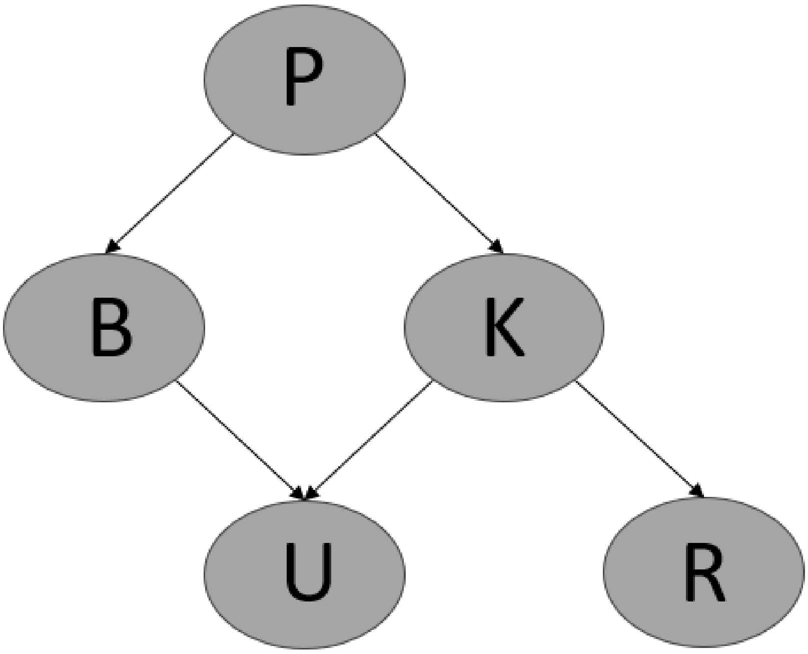
Matrična reprezentacija grafa predstavlja najčešće korišćenu reprezentaciju grafa u memoriji. Ujedno, to je njaefikasniji način modelovanja događaja u Bajesovim mrežama u računarima i programima koji se bave ovim problemima.

3. Formiranje Bajesovih mreža

U prethodnom delu rada bavili smo se matematičkim opisom zavisnošću dveju promenljivih i uvideli da Bajesova teorema daje metod za zaključivanje u ovom slučaju. Međutim, kompleksnost svakodnevnih pojava dovela je do razvoja Bajesovih mreža - alata za modeliranje međusobne zavisnosti velikog broja promenljivih.

Posmatrajmo sledeći primer. Pretpostavimo da postoji situacija u kojoj je nekoliko karakteristika entiteta povezano lancem. Na primer, da li je osoba pušač ili ne ima direktan uticaj na to da li pomenuta osoba ima rak pluća ili bronhitis. Takođe, prisustvo ili odsustvo raka pluća ima direktan uticaj na rezultat rendgenskog snimka pluća, a obe bolesti dovode do osećaja umora i malaksalosti. Iz navedenih veza zaključujemo da svaka od promenljivih utiče na neku drugu promenljivu ili zavisi od neke druge promenljive. Na osnovu ovih veza formira se Bajesova mreža. Za promenljive koje su u direktoj vezi neophodno je da se definišu uslovne verovatnoće, i to na osnovu ranijih iskustava i teorijskog znanja osobe koja vrši zaključivanje. Sledeći korak je određivanje uslovnih verovatnoća za karakteristike koje nisu u direktoj vezi. Na primer, može biti potrebno da se odredi verovatnoća prisustva raka pluća i bronhitisa ako se zna da je osoba pušač, oseća umor i rendgenstki test je pozitivan.
Bajesove mreže predstavljaju usmemrene, aciklične grafove gde čvorovi predstavljaju promenljive, a grane predstavljaju njihovu povezanost. Jedan od osnovnih problema u modeliranju pomoću Bajesovih mreža jeste povezivanje čvorova jer je potrebno utvrditi u kakvoj su vezi sve promenljive. Međutim, iz već formiranog modela moguće je izvesti zaljučak o svakoj od promenljivih, uzimajući u obzir uticaj koje na nju imaju druge promenljive.

U prethodnom delu, definisali smo pravilo množenja koje definiše verovatnoću preseka konačno mnogo događaja. Ovaj izraz se pojednostavljuje ako se pretpostavi da važi tzv. Markovljevo svojstvo. Ono predstavlja jednu od osobina Bajesovih mreža koja podrazumeva da svaki čvor u mreži zavisi samo od svojih roditelja. To bi značilo da se prilikom računanja uslovne verovatnoće za svaku promenljivu u mreži uzima u obzir samo verovatnoća njenih roditelja. Na slici ispod dat je primer Bajesove mreže koji se odnosi na navedeni primer sa pušačima (o formiranju grafa biće reči kasnije). Svaki čvor posmatra se kao promenljiva čiju verovatnoću je potrebno izračunati.



Slika 1. Primer Bajesove mreže

Na osnovu Markovljevog svojstva, za graf prikazan na slici možemo pisati:

$$P(PBKUR) = P(R|K) \cdot P(U|B \cdot K) \cdot P(K|P) \cdot P(B|P) \cdot P(P)$$

Vidimo da, na primer, događaj K zavisi samo od P jer je on njegov jedini roditelj.

Kako bismo formirali Bajesovu mrežu, najpre je potrebno definisati problem, a zatim dodeliti a priori verovatnoće promenljivim.

Naime, potrebno je definisati čvorove u mreži koji predstavljaju promenljive u problemu koji se rešava. Svakom čvoru je potrebno dodeliti moguće ishode. Zatim je potrebno formirati grane između čvorova čime modeliramo međusobnu zavisnost promenljivih, a potom i raspodelu verovatnoće svake od promenljivih u zavisnosti od raspodele verovatnoća njihovih roditelja u mreži.

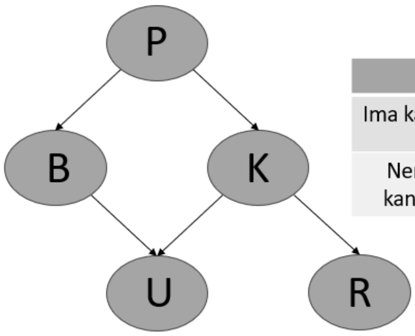
Kako bismo dodelili a priori verovatnoću svakoj promenljivoj, potrebno je da procenimo očekivanje ishoda svake promenljive kada nije poznat dokaz ni za jedan čvor u mreži. Ovaj podatak najčešće se dobija na osnovu prethodnih istraživanja.

3.1 Postupak oblikovanja Bajesove mreže

Promenljiva na koju u mreži ne utiče niti jedna druga promenljiva naziva se roditelj, odnosno **koren**. Ova promenljiva se prva postavlja u mreži. Zatim se roditelji granama povezuju sa promenljivim na koje imaju direktan uticaj i one se nazivaju deca. Ovaj postupak se nastavlja sve dok se ne dodje do krajnjih promenljivih, one koje nemaju decu, odnosno ne utiču ni na jednu promenljivu u postavljenom problemu. Sličan postupak se primenjuje i prilikom dodeljivanja a priori verovatnoća. Najpre je neophodno dodeliti a priori verovatnoće promenljivima koje predstavljaju koren u mreži. Na primer, to može biti verovatnoća da je posmatrana osoba pušač. Zatim se za svaku promenljivu koja ima roditelje formira tablica uslovne verovatnoće. Za svaku promenljivu potrebno je uzeti u obzir sve kombinacije verovatnoća njenih roditelja. Broj roditelja promenljive određuje dimenzionalnost tablice.

Ilustrovaćemo formiranje Bajesove mreže prethodno navedenog primera: Prisustvo bronhitisa, odnosno raka pluća zavisi od toga da li je osoba pušač ili ne. Dalje, rezultat rendgentskog snimka zavisi od prisustva, odnosno odsustva raka pluća, ali s druge strane nije povezano sa bronhitisom. Dakle, ova promenljiva ima jednog roditelja. Promenljiva U, prisustvo umora, ima dva roditelja, zavisi i od brohitisa i od raka pluća. Kako bi ovaj model bio potpun, potrebno je pridružiti svakoj promenljivoj odgovarajuću uslovnu verovatnoću, na način koji je prethodno definisan. Svakoj od promenljivih koja ima roditelje pridružuju se tablice uslovnih verovatnoća koje će uzeti u obzir svaki od ishoda njenih roditelja. Sa povećanjem broja roditelja raste i broj uslovnih verovatnoća koje će biti pridružene pomenutoj promenljivoj. Na primer, čvoru koji ima dva rodtelja biće pridružene ukupno 4 verovatnoće, jer svaki od roditelja ima dva stanja u kojem može da se nalazi. Dakle, ukupan broj uslovnih verovatnoća koje se pridružuju čvoru, koji ima n roditelja, iznosi 2n . Na slici ispod, prethodno predstavljena Bajesova mreža upotpunjena je tablicama uslovnih verovatnoća.

Pušač	Jeste	Nije
	0.2	0.8



	Pušač	Nije pušač
Ima bronhitis	0.25	0.05
Nema bronhitis	0.75	0.95

	Pušač	Nije pušač
Ima kancer	0.003	0.0005
Nema kancer	0.997	0.9995

Bronhitis	Ima		Nema	
Kancer	Ima	Nema	Ima	Nema
Oseća umor	0.75	0.1	0.5	0.05
Ne oseća umor	0.25	0.9	0.5	0.95

	Ima kancer	Nema kancer
Rendgen pozitivan	0.6	0.02
Rendgen negativan	0.4	0.98

Slika 2. Bajesova mreža sa tablicama uslovnih verovatnoća

Promenljiva pušač je koren u ovom primeru. S toga se njoj promenljive dodeljuju na osnovu subjektivnog mišljenja stručnjaka. Promenljiva Kancer ima jednog roditelja, Pušač, njena tablica uslovnih verovatnoća formirana je u zavisnosti od toga da li je osoba pušač ili ne. Ukoliko je osoba pušač, verovatnoća da pomenuta osoba ima kancer iznosi 0,003, a ukoliko nije pušač, ova verovatnoća je znatno manja i iznosi 0,00005. Analogno se izvodi zaključak i za promenljivu Bronhitis, koja takođe ima jednog roditelja. Ukoliko je osoba pušač, verovatnoća da ima bronhitis iznosi 0,25. S druge strane, za nepušača ova verovatnoća iznosi 0,05. Za razliku od prethodne dve, promeljiva Umor ima dva roditelja, jer prisustvo umora može biti povezano i sa bronhitisom i sa kancerom. S toga, ovoj promenljivoj treba dodeliti 4 uslovne verovatnoće, kako bi se uzeli u obzir svi slučajevi.

3.2 Računanje a priori verovatnoća čvorova

A priori verovatnoće čvorova koji nemaju roditelje ne zavise od ostalih čvorova u mreži, te je njihova a priori verovatnoća unapred poznata. Na osnovu korena, moguće je odrediti a priori verovatnoće njihove dece, i tako nastaviti postupak "niz mrežu" sve dok ne stignemo do poslednjeg čvora koji nema decu. Ilustrovaćemo prvi korak, odnosno računanje a priori verovatnoće, u postupku zaključivanja za prethodno opisanu Bajesovu mrežu. Sa prethodne slike, na osnovu formule totalne verovatnoće pišemo:

$$P(K) = P(K|P) \cdot P(P) + P(K|\neg P)$$
$$P(K) = 0.003 \cdot 0.2 + 0.00005 \cdot 0.8 = 0.00064$$

Dakle, verovatnoća da osoba ima kancer iznosi 0.00064 i tako dobijena verovatnoća je a priori verovatnoća za datu promenljivu. Sada se mogu izračunati a priori verovatnoće njene dece. Promenljiva kancer imala je jednog roditelja, pa je računanje bilo jednostavno. Za računanje a priori verovatnoće promenljive umor bilo bi potrebno izračunati a priori verovatnoće dve druge promenljive, kancer i bronhitis, pa bi račun bio složeniji.

3.3 Propagacija unapred i propagacija unazad

Propagacija unapred

U nekim slučajevima može se desiti da su ishodi nekih promenljivih poznati. Dakle za njih postoje dokazi, te u tome slučaju verovatnoću date promenljive nije potrebno računati na prethodno opisani način. Propagacija unazad je situacija u kojoj je poznat ishod nekog od čvorova koji predstavlja dete, te se u skladu s tim menjaju ishodi za roditelje datog čvora. Analogno, kada je poznat ishod čvora koji je roditelj, na osnovu toga zaključujemo kakav je ishod njegove dece. Ako se posmatra prethodni primer i pretpostavi da je poznato da osoba jeste pušač, potrebno je pod tom pretpostavkom izračunati kolika je verovatnoća da je rendgen pozitivan. U ovome slučaju reč je o propagaciji unapred, pošto se zaključuje u smeru od roditelja prema deci.

Pod pretpostavkom da je osoba pušač, najpre je potrebno izračunati verovatnoću prisutnosti kancera. Ova verovatnoća sada iznosi:

$$P(K|P) = 0.003$$

i daleko je veća kada je poznato da je osoba pušač, što ima smisla, jer pušači češće obolevaju od raka pluća. Sledeći korak jeste računanje verovatnoće da je rendgenski snimak pozitivan uzimajući u obzir nove verovatnoće promenljive kancer.

Propagacija unazad

Kao što smo ranije spomenuli, propagacija unazad predstavlja uticaj nove informacije o čvoru na informaciju o njegovim roditeljima. Koristeći prethodni primer, pretpostavimo da je poznato da osoba ima kancer i potrebno je zaključiti kolika je verovatnoća da je osoba pušač. Ovu verovatnoću u mogućee je dobiti direktno koristeći Bajesovu teoremu. Situacija je slična kao i u prethodnom slučaju s tim što se sada zaključivanje odvija u suprotnom smeru - poznato je da osoba ima kancer i potrebno je izračunati a priori verovatnoću njenog roditelja, promenljive pušač. Zaključak je da ukoliko posmatrana osoba ima kancer, verovatnoća da je ista i pušač iznosi 0,9375. Ovaj podatak u većini slučajeva znači da kancer pluća implicira činjenicu da je osoba pušač. U slučajevima kao što je u navedenom primeru posmatrani čvor K informacija o čvoru može dovesti i do propagacije unapred i do propagacije unazad.

4. Oganičenja Bajesove statistike

U prethodnom tekstu dat je detaljan uvid u Bajesovu statistiku i Bajesove mreže koje bi nakon svega što je rečeno o njima svako okarakterisao kao moćan alat sa širokom primenom bez ijedne mane. Međutim, nije sve tako sjajno kao što na prvi pogled deluje. U nastavku ćemo govoriti o ograničenjima, manama i izazovima koje treba uzeti u obzir pri radu sa Bajesovim mrežama.

Odmah na početku treba uzeti u obzir tačnost a priori informacija, odnosno a priori verovatnoće koja predstavlja glavnu informaciju koju od početka pa sve do kraja modeliranja koristimo. Pored toga što su apriori verovatnoće često uzete na osnovu subjektivnog shvatanja, što su to često nepouzdane i neproverene informacije, može se desiti da se javi i nedostatak informacija, što sa sobom nekad nosi posledicu nemogućnosti formiranja potpune mreže.

Drugi izazov koji se može isprečiti ispred nas pri baratanju sa Bajesovim mrežama može biti složenost i to računska i složenost strukture. Bajesove mreže često imaju složeniju strukturu u poređenju sa drugim modelima, što može otežati interpretaciju rezultata i razumevanje kako se donose određene odluke. Računska složenost odnosi se na zahtevnost proračuna u Bajesovim mrežama, posebno kod kompleksnih modela ili kada je potrebno raditi sa velikim skupovima podataka.

U radu sa velikim skupovima se javlja još jedna problematika. Naime, skaliranje Bajesovih mreža može biti nepraktično u nekim velikim sistemima, a dodatno može i otežati shvatanje modela i sistema manje iskusnim korisnicima.

Efikasna primena Bajesovih mreža može zahtevati stručno znanje u definisanju odgovarajućih apriornih verovatnoća i informacija i modeliranju structure mreže, jer su ove mreže jako osetljive na odabir strukture modela. Ovo znači da je potrebno izvršiti pažljiv i stručan odabir kako bi se postiao optimalan rezultat.

Sva prethodno navedena ograničenja ne čine Bajesove mreže neprikladnim izborom. Jedino bitno je da budemo svesni njihovih mana i da budemo spremni na izazove sa kojima se treba suočiti, a kada to jesmo proces modeliranja i korišćenja ovih mreža može biti jako lep i koristan.

Kako bi shvatili kolika je zapravo korist ovih mreža, u drugoj velikoj celini ovog rada govorićemo o njihovim primenama u raznim oblastima, od igara poput pokera, pa sve do medicine, gde je njihova primena sve učestalija.

5. Primene Bajesovih mreža

5.1 Pregled primena u različitim oblastima

Bajesove mreže svoju ulogu pronalaze u širokom spektru oblasti, počevši od računarstva, veštačke inteligencije i mašinskog učenja, preko medicine, psihologije i biologije, pa sve do sporta i ekonomije. Svaka od ovih grana ima razvijene svoje modele i sisteme koje koristi, ali se svi zasnivaju na istim saznanjima o kojima smo u prethodnim poglavljiva govorili.

Kroz narednih par primena ilustrovaćemo fleksibilnost i svestranost Bajesovih mreža, koje omogućavaju donošenje “informisanih” odluka na osnovu analize verovatnoće i međusobne zavisnosti između promenljivih.

- **Računarstvo:**
  Primena Bajesovih mreža u računarstvu je široka i raznovrsna. U mašinskom učenju Bajesove mreže pružaju okvir za modeliranje nesigurnosti i ažuriranje verovatnoća u realnom vremenu. U oblasti računarskog vida, mogu se koristiti za klasifikaciju i raspoznavanje uzoraka na slikama, dok se u sistemima za prepoznavanje govora koriste za modeliranje verovatnoća različitih zvukova ili reči, što omogućava efikasno prepoznavanje govornih obrazaca i konverziju govora u tekst. Kod analize teksta primenjuju se za klasifikaciju dokumenata i filtriranje spam poruka, a u sistemima odlučivanja za modeliranje nesigurnosti i verovatnoće veze između različitih akcija i njihovih posledica. Ovo je jako korisno u autonomnim sistemima i robotici. Mogu se koristiti i za detekciju anomalija i identifikaciju neobičnih ili sumnjivih aktivnosti u mreži.

- **Medicina:**
  Kada je potrebno proceniti verovatnoću određenih bolesti na osnovu simptoma, genetskih faktora i drugih relevantnih informacija, pogodno je koristiti Bajesove mreže. Pomoću njih je moguće i modelirati verovatnoću pojave određenih ishoda bolesti, kao što su recimo rast tumora, dalji razvoj određene bolesti ili uspeštosti određenih terapija u daljem lečenju.Često se primenjuju i pri prilagođavanju terapija i lečenja na osnovu individualnih karakteristika pacijenta (ovo uključuje na primer genetske predispozicije, reakciju na određene lekove, alergije i slično). U epidemiologiji mogu služiti za modeliranje širenja bolesti, analizu faktora rizika i predviđanje pojave određenih bolesti u široj populaciji.

- **Ekonomija:**
  Ključne oblasti primene Bajesovih mreža u ekonomiji su: finansijska analiza, kreditna analiza, ekonomska prognoza, marketinške strategije, praćenje potrošačkog ponašanja, analiza potražnje i ponude itd. One predstavljaju veliko olakšanje analitičarima da bolje razumeju verovatnoću različitih finansijskih događaja, rizike i

da pravilno procene tržišne uslove. Bajesova mreža pokazala se uspešnom i za otkrivanje lažnog finansijskog izveštavanja. Neki izvori kažu da identifikuje lažne izveštaje sa verovatnoćom od čak 90%.

- **Sport:**
  U oblasti sporta Bajesove mreže se najčešće koriste za analizu performansi igrača, na osnovu statistike prethodnih mečeva i rezltata, fizičkih karakteristika, povreda i drugih relevantnih faktora. Ovo može pomoći trenerima da prepoznaju slabosti igrača i na taj način prilagode treninge i taktike njima. Mogu se primeniti i za predviđanje rezultata utakmica, analizu publike i marketing, što je za današnji sport od velikog značaja.

- **Bezbednost i kriminalistika:**
  Kada se radi o bezbednosti, Bajesove mreže se mogu primeniti u analizi kriminalističkih slučajeva, identifikaciji potencijalnih pretnji i proceni rizika na osnovu dostupnih informacija.

- **Biologija:**
  Bajesove mreže koriste se za modeliranje i analizu različitih bioloških sistema, procesa i fenomena. 2000. godine razvijena je svetski poznata tehnika za učenje uzročno-posledične veze među genima. Nju je razvio Friedman analizirajući podatke ekspresije gena, što predstavlja proces kojim se informacija gena koristi za sintezu funkcionalnog genskog produkza. Ova tehnika je rezultat projekta u kojem su primenjene dinamičke Bajesove mreže. One se dodatno koriste i u farmaceutskim istraživanjima, biološkoj signalizaciji, ekološkim modelima, epidemiološkim studijama, analizi evolucije i slično.

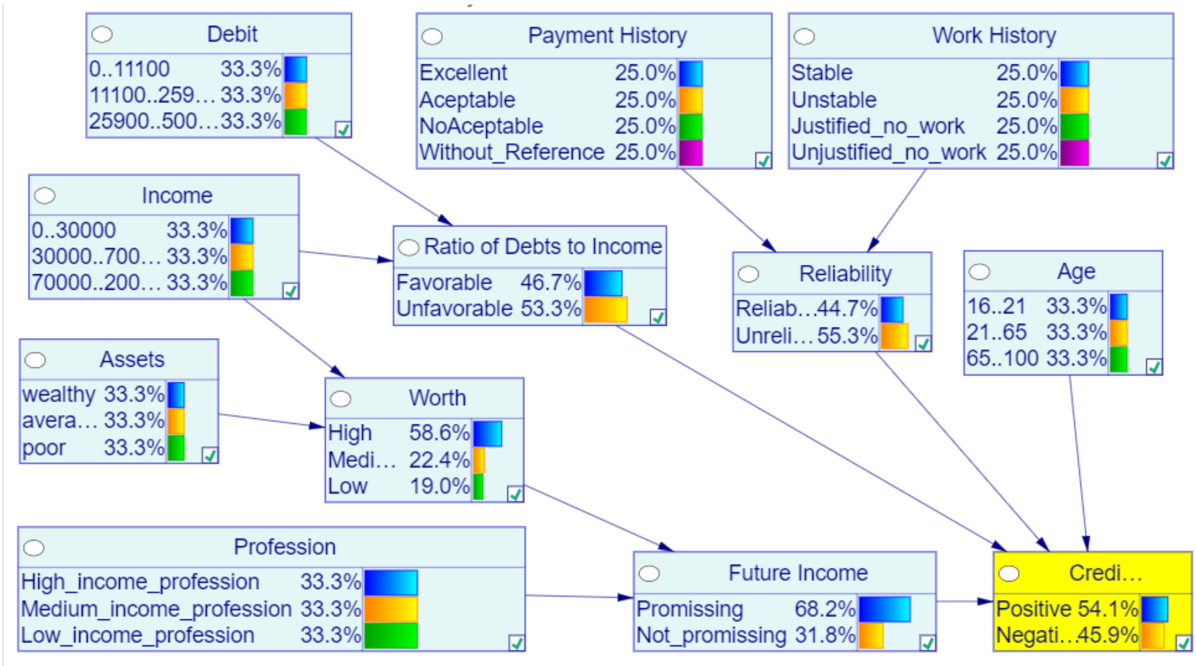
5.2 Primena Bajesovih mreža u konkretnim problemima

Kroz prethodne celine rada upoznali smo se sa osnovnim pojmovima i načinima modeliranja Bajesovih mreža, govorili smo o njihovim ograničenjima i izvršili smo kratak pregled oblasti u kojima se ogleda njihov značaj, a sada ćemo se pozabaviti njihovom primenom na konkretnim primerima iz svakodnevnog života.

Broj softverskih alata kojima je moguće modelirati sopstvene modele Bajesovih mreža je ogroman i svaki od njih ima svoju dokumentaciju i način na koji se koristi. Pored toga postoje i gotovi modeli koji su od ogromnog značaja. Jedna od internet stranica koja pruža razne mogućnosti po pitanju Bajesovih mreža je BayesFusion. Na njoj se mogu naći softverski alati, gotovi modeli i razni tutorijali koji mogu pomoći u korišćenju Bajesovih mreža.

U ovom delu rada govorićemo o jednom od gotovih modela iz “BayesBox-a” ove stranice, koji ćemo detaljno analizirati.

<u>“ Credit worthiness assessment network ”</u>



Slika 3. Bajesova mreža za procenu ispunjenosti uslova za dobijanje kredita

Na slici je prikazana mreža za procenu ispunjenosti uslova za dobijanje kredita na osnovu različitih faktora koji igraju bitnu ulogu kada je reč o budućim mogućnostima za isplatu rata.

Pri podnošenju zahteva za dobijanje kredita uvek je potrebno pružiti banci puno informacija kako bi bilo moguće proceniti trenutno i buduće stanje pojedinca. Upravo te informacije će nam biti čvorovi bez roditelja u stablu, a na osnovu njih ćemo procenjivati dalje parametre odluke.

Ovi čvorovi su:

1. **Primanja (Income)** - Primanja se mogu rangirati u tri kategorije: primanja izmedju 0 i 30.000, zatim 30.000 do 70.000 i na kraju 70.000 do 200.000.
2. **Profesija (Profession)** - Profesije se mogu rangirati u tri kategorije, kao profesije sa generalno visokim primanjima, prosečnim primanjima ili primanjima ispod proseka. Ova promenljiva igra bitnu ulogu u proceni budućih zarada pojedinca.
3. **Sredstva (Assets)** - Pored primanja otplata rata zavisi i od sredstava koje osoba poseduje. To su npr. imovina, nasledstvo, stipendije, nagrade, trenutno stanje na nekom od računa i slično.

4. **Istorija poslovanja (Work History)** - Zavisno od prethodnih poslova osoba može da ima stabilnu ili nestabilnu “istoriju poslovanja”. Pored toga može da se desi da potvrđeno ili nepotvrđeno ima radno iskustvo.
5. **Istorija troškova (Payment History)** - Ulogu u proceni mogućnosti dobijanja kredita igraju i troškovi (odlični, prihvatljivi, neprihvatljivi ili bez informacije o tome).
6. **Zaduženja (Debit) -** Zaduženja su dugovi koje pojedinac već poseduje. Na primer neisplaćene rate nekog već postojećeg kredita
7. **Godine (Age)**

Od ovih parametara možemo formirati “decu”, odnosno čvorove koji će direktno uticati na finalni čvor - “Credit Worthiness”. Pa tako na osnovu istorije poslovanja i istorije troškova dolazimo do verovatnoće **“Pouzdanosti (Reliability)”** osobe. Na osnovu primanja i dugovanja možemo formirati **“Odnos zarade i troškova (Ratio of debts to income)”**, a na osnovu primanja i sredstava se može odrediti **“Lična vrednost (Worth)”**. Dalje, na osnovu trenutne “lične vrednosti” i profesije može se proceniti **“Buduća zarada (Future Income)”**. Za kraj na osnovu buduće zarade, odnosa zarade i troškova, pouzdanosti i godina dolazi se do odgovora na zahtev za dobijanje kredita.

S obzirom da je ovaj model namenjen za široku primenu i predstavlja samo aproksimaciju jednog kompleksnog modela, pretpostavićemo da su a priori verovatnoće svih promenljivih jednake u početnom trenutku. Na osnovu sredine i ciljne grupe za obradu ovih podataka moguće je podesiti druge vrednosti ovih verovatnoća.

Ono što je u ovom modelu interesantno je to što desnim klikom na bilo koji od čvorova možemo da dobijemo uvid u to kako verovatnoća čvora zavisi od roditelja i njihovih apriori (zadatih) verovatnoća.

Na primer, ukoliko proverimo kako “Ratio of debts to income” zavisi od svoja dva roditelja dobijamo sledeće:

Definition: Ratio of Debts to Income

Debit	0..11100			11100..25900			25900..50000		
Income	0..30000	30000..70000	70000..200000	0..30000	30000..70000	70000..200000	0..30000	30000..70000	70000..200000
Favorable	0.5	0.8	0.999	0.001	0.5	0.8	0.001	0.1	0.5
Unfavorable	0.5	0.2	0.001	0.999	0.5	0.2	0.999	0.9	0.5

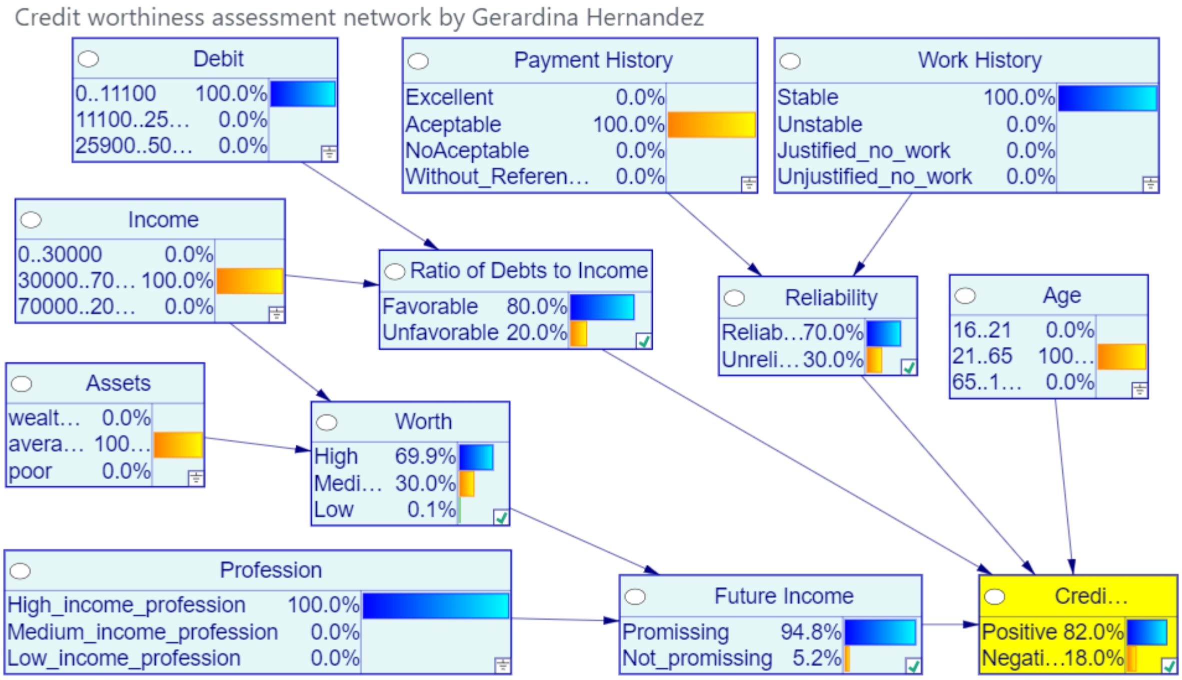
Slika 4. Tabela verovatnoća za jedan čvor Bajesove mreže

Ovaj princip formiranja tabele verovatnoća na osnovu uticaja roditelja teorijski je objašnjen je u delu *3.2*.

U nastavku ćemo analizirati dve osobe sa različitim ulaznim vrednostima.

Osoba 1

Pretpostavimo da prva osoba ima stabilan posao, troškove i primanja. Takođe da nema dugovanja, da je prosečnih mogućnosti i sa velikim poslovnim potencijalom na osnovu profesije.

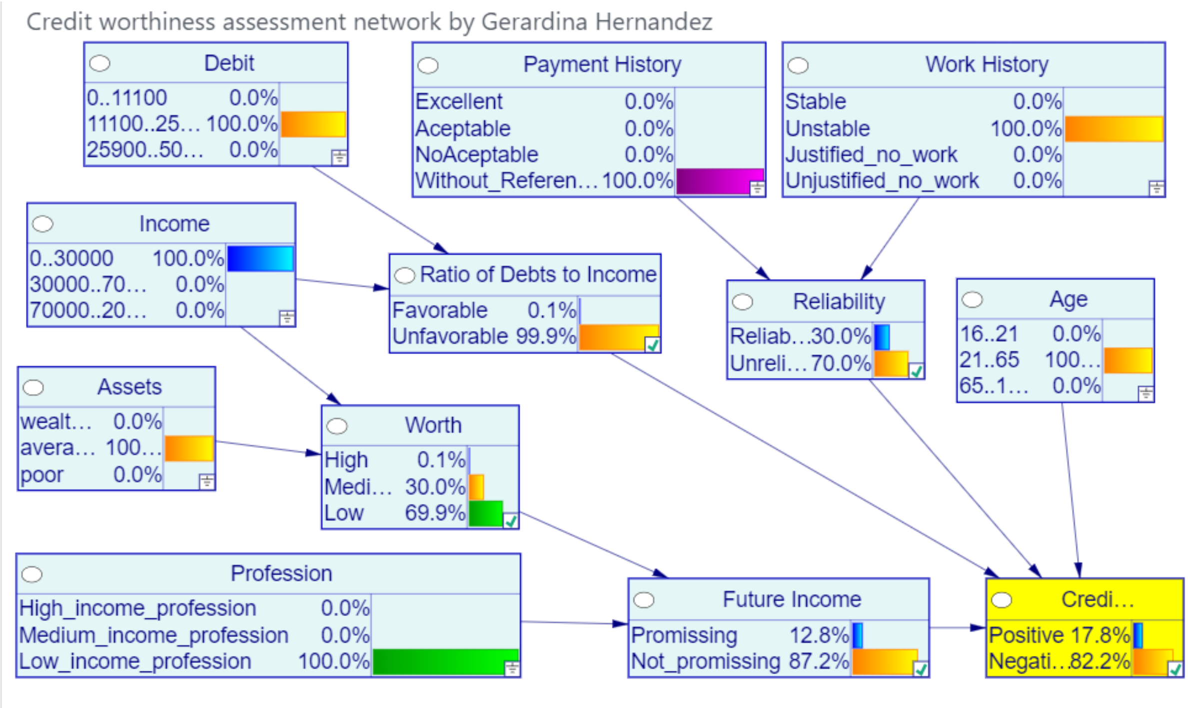


Slika 5. Kreiranje Bajesove mreže za osobu 1

Nakon analize činjenica o ovom pojedincu i formiranja početnih verovatnoća možemo videti da dolazi i do promene parametara, čtako da dolazimo do zaključka da je osoba pouzdana za izdavanje kredita sa verovatnoćom da ga neće dobiti od samo 18%. Takođe, možemo primetiti da se u međukoracima ovog modela verovatnoće stabilizuju tako da vode do ovog konačnog rezultata.

Osoba 2

Za razliku od osobe 1, osoba 2 ima lošiju pozadinu. Dakle, ova osoba ima mala primanja i male poslovne ambicije, dolazi iz loše sredine sa velikim zaduženjima u odnosu na svoje novčane mogućnosti.



Slika 6. Kreiranje Bajesove mreže za osobu 2

Kao što se može videti iz konačnog rezultata, verovatnoća da osoba neće dobiti kredit je čak 82,2%. Ovi podaci su očekivani s obzirom da predstavljaju kontrast u odnosu na prethodni slučaj.

Ovaj model je karakterističan primer malo složenijih Bajesovih mreža i kroz njega možemo uvideti kako se formiraju modeli neophodni za rešavanje sličnih problema. Iz priloženih rezultata, možemo zaključiti da ovaj model dobro obrađuje ulazne podatke o pojedincu i na osnovu njih formira adekvatan odgovor na pitanje: “Da li ovoj osobi treba izdati kredit”.

Zaključak

Zbog svoje široke primene, zastupljenosti i značaja, Bajesove mreže su interesantna i korisna tema za istraživanje i obrađivanje, naročito studentima čija su primarna interesovanja veštačka inteligencija i oblasti sa primenom automatskog rezonovanja.

U ovom radu, analizirali smo osnovne matematičke koncepte modeliranja Bajesovih mreža, počevši od uslovne verovatnoće, preko teorije grafova, do kreiranja mreže. Kao i u svakom drugom istraživačkom radu, potpun smisao, razumevanje i vrednost matematičkih iskaza stiče se nakon obrađene praktične primene kako bi shvatili suštinski značaj svega interpretiranog. Naše istraživanje upotpunili su brojni praktični primeri i pregled raznovrsne primene Bajesovih mreža u današnjem vremenu. Primer koji se posebno istakao je primer procene ispunjenosti uslova za dobijanje kredita čiji se model može pronaći u sklopu "BayesBox" paketa softvera "BayesFusion".

Čvrsto verujemo da će se Bajesove mreže dodatno unapređivati i da će biti još cenjenije u budućnosti onda kada svi nedostaci, o kojima je takođe bilo reči, konačno budu uklonjeni.

Literatura

- Neapolitan R., *Learning Bayesian Networks*, Northeastern Illinois University, Chicago, 2003 ;
- Jensen F., Nielsen T., *Bayesian Networks and Decision Graphs*, Informatics Science and Statistics, 2007 ;
- Pearl J., *Bayesian Networks*, UCLA Department of Statistics Papers