№1. Вероятность вырожд. матрицы:

$A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ $\quad \lambda_i \in [-N; N] \cap \mathbb{Z}$

$$w(\det A = 0) = w(\exists i : \lambda_i = 0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2N}\right)^i \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^{n-i} C_n^i = 1 - \left(1 - \frac{1}{2N}\right)^n \simeq$$
$$\simeq \frac{n}{2N}$$

$n=3 \quad N = 1000 \longrightarrow \underline{\underline{w = 1{,}5 \cdot 10^{-3}}}$

Норма матр. возмущ.

$A = \|\lambda_{ij}\|_{m \times n}$; $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |\lambda_{ij}|^2}$ $\quad (\varepsilon = 1)$

λ_{ij} : $\operatorname{rand}([0;1])$

$$\lambda_{ij}^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \longrightarrow \|A\|_F = \sqrt{\frac{1}{3} m \cdot n}$$

Пусть $m = n = 3 \longrightarrow \|A\|_F = \sqrt{3}$

№2

$$C_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2\|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\Rightarrow C_1^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow C_1 = 1$$

Возьмем $\bar{y} = \begin{pmatrix} sign(x_1) \\ \vdots \\ sign(x_n) \end{pmatrix}$

КБ: $(\bar{x}, \bar{y})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2 \le (\bar{x}, \bar{x}) \cdot (\bar{y}, \bar{y}) =$

$= \|x\|_2^2 \cdot n \Rightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2$

$\Rightarrow C_2 = \sqrt{n}$

№3

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Привести примеры x и A, для которых:

1) $\|x\|_2 \le \sqrt{m}\, \|x\|_\infty$

2) $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\, \|A\|_\infty$

1) $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \le \sqrt{m} \cdot \max_{i=\overline{1,m}} |x_i| \longrightarrow$ выполнено при

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{m} = \sqrt{m}\, \|x\|_\infty$

$\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\, \|A\|_2$

Возьмем $y = \begin{pmatrix} sign(a_{i1}) \\ \vdots \\ sign(a_{im}) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\quad i = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)^2$

$\|A\|_\infty^2 = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2\right) \le \sup_{\|y\|_2 = 1} \sum_{i=1}^{n} n \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right)^2$

$\sup_{\|y\|_2 = 1} \sum_{i=1}^{n} n \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right)^2 = \sup_{\|y\|_2 = 1} \|Ay\|_2^2 \longrightarrow$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{m \times m}$

$\|A\|_\infty = 1$

$$\|A\|_2 = \sup_{\|y\|_2=1} \|Ay\|_2 = \sup_{\|y\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right)^2} = \sup \sqrt{\sum^{n} 1} = \sqrt{n}$$

№4 Док-ть $\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F$

$\triangle$ $\|UA\|_F^2 = tr\left[\left(\overline{UA}\right) UA\right] = tr\left[\bar{A}\bar{U}UA\right] =$

$= tr(\bar{A}A) = \|A\|_F^2$

$\blacksquare$