
Отчёт по работе 2.1.3

Определение C_p/C_v по скорости звука в газе

Карташов Константин Б04-005

I. Аннотация

Цель работы:

1. Измерение частоты колебаний и длины волны при резонансе звуковых колебаний в газе, заполняющем трубу.
2. Определение показателя адиабаты с помощью уравнения состояния идеального газа.

В работе используются:

- ▷ Звуковой генератор ГЗ
 - ▷ Электронный осциллограф ЭО
 - ▷ Микрофон
 - ▷ Телефон
 - ▷ Раздвижная труба
 - ▷ Теплоизолированная труба, обогреваемая водой из термостата
 - ▷ Баллон со сжатым углекислым газом
 - ▷ Газгольдер
-

II. Теоретическая часть

i. Необходимые знания для проведения эксперимента

Скорость распространения звуковой волны в газах зависит от показателя адиабаты $\gamma = C_p/C_v$. В этой работе будет измерена скорость звука для нахождения показателя адиабаты.

Скорость звука в газах определяется формулой:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

где R – газовая постоянная, T – температура газа и μ – его молярная масса. Преобразовав формулу найдём:

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} c^2. \quad (1)$$

Если длина трубы L равна целому числу полуволен, то длину волны можно найти по формуле:

$$L = n\lambda/2, \quad (2)$$

где λ – длина волны в трубе, а n – любое целое число. Если условие (2) выполнено, то в трубе возникает резонанс. В этом случае в торцах трубы будут узлы смещения, которые будут повторяться вдоль длины трубы через $\lambda/2$. Скорость звука c связана с его частотой f и длиной волны λ соотношением:

$$c = \lambda f. \quad (3)$$

Условия резонанса можно вызвать двумя способами:

1. При неизменной частоте f можно изменять длину трубы L . Для этого применяется раздвижная труба (из рис. 1). С увеличением длины трубы можно наблюдать несколько последовательных резонансов. Для последовательных резонансов имеем:

$$L_n = n\frac{\lambda}{2}, \quad L_{n+1} = (n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \dots, \quad L_{n+k} = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2},$$

т. е. $\frac{\lambda}{2}$ равно угловому коэффициенту графика зависимости длины трубы L от номера резонанса k .

2. При постоянной длине трубы можно изменять частоту звуковых колебаний. В этом случае следует плавно изменять частоту f звукового генератора. Для последовательных резонансов получим:

$$L = \frac{\lambda_1}{2}n = \frac{\lambda_2}{2}(n+1) = \dots = \frac{\lambda_k}{2}(n+k).$$

Подставляя в это выражение (7) получим:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L}n, \quad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{2L}(n+1), \quad \dots, \quad f_k = \frac{c}{\lambda_k} = \frac{c}{2L}(n+k) = f_1 + \frac{c}{2L}k.$$

Скорость звука делённая на $2L$ таким образом определяется по коэффициенту наклона графика зависимости частоты от номера резонанса.

ii. Контрольные вопросы

Вопрос 1: Выведите формулы (1.16) и (1.17).

Возьмём соотношение:

$$\Delta P = -E \frac{\Delta V}{V},$$

где E – модуль юнга. При $T = \text{const}$:

$$\Delta P = \Delta V \frac{dP}{dV}.$$

Из $\rho V = \text{const}$ путём дифференцирования получаем:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}.$$

Подставив всё в первое выражения получим:

$$E = \rho \frac{dP}{d\rho}.$$

Известно, что:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

из чего получаем формулу (1.16):

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}.$$

Вопрос 2: Зависит ли γ от температуры в выбранном интервале температур?

Нет, не зависит. Показатель γ уменьшается с увеличением температуры за счёт появления колебательных степеней свободы, увеличивающих как C_p , так и C_v , при этом разность между ними остаётся примерно одинаковой. Однако при комнатной температуре это явление не наблюдается.

Вопрос 3: Будет ли наблюдаться такая зависимость при изменении температуры от очень малых значений до 1000 °С?

Нет. При температурах около 1000 °С влияние колебательных степеней свободы будет достаточно значительным, чтобы изменить показатель γ .

III. Экспериментальная часть

i. Устройство экспериментальной установки

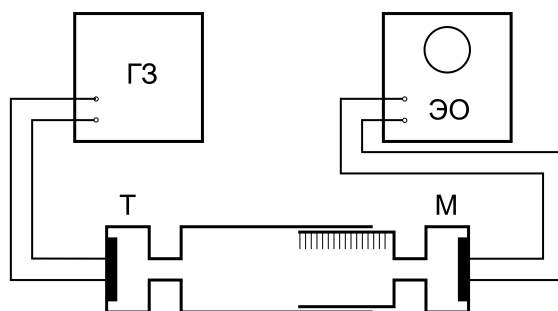


Рис. 1: Схема первой установки

Описание экспериментальных установок. Для двух методов измерения скорости звука в работе имеются две установки (рис. 1 и 2). В обеих установках звуковые колебания в трубе возбуждаются телефоном Т и улавливаются микрофоном М.

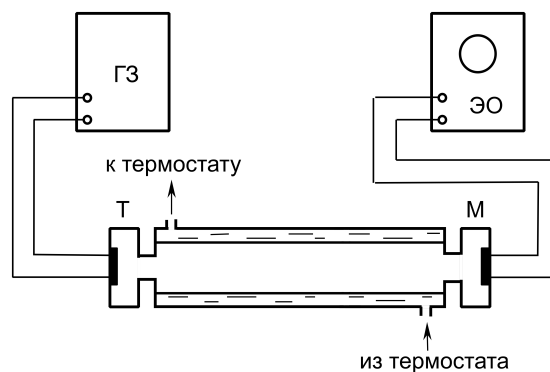


Рис. 2: Схема второй установки

ii. Проведение эксперимента

1. Включим ЭО и ГЗ и дадим и прогреться 5-7 минут. Добьёмся того, чтобы на экране осциллографа была видна линия.
2. Подберём напряжение на выходе генератора так, чтобы при резонансе на осциллографе наблюдались колебания достаточной амплитуды. Убедимся в том, что колебания имеют неискажённую синусоидальную форму, в противном случае уменьшим амплитуду сигнала поступающего с генератора до уровня при котором не происходит искажений.
3. Измерения на первой установке.
 - а) Исходя из примерного значения скорости звука (300 м/с), рассчитаем диапазон частот при котором следует вести измерения. (При удлинении трубы следует увидеть 2-5 резонанса)
 - б) Плавно меняя длину трубы последовательно пройдем через все наблюдения точки резонанса. Повторим измерения для 4-6 различных значений частот. Для каждого резонанса измерим соответствующее удлинение трубы.
 - в) Изобразим полученные результаты на графике с номером резонанса k по оси абсцисс и удлинения по оси ординат. Проведём через точки соответствующие одной частоте наилучшую прямую. Коэффициент её наклона будет длиной полуволны.
По графику оценим ошибку вычисления $\lambda/2$. Вычислим значение скорости звука и оценим точность полученного результата. Найдём наилучшее значение скорости звука используя все результаты измерений.
 - д) Измерим скорость звука в углекислом газе. Перед началом измерений продует трубку. Для этого при открытом крае подвижную часть трубы несколько раз медленно выдвинем и затем резко вдвинем трубу. Измерять резонансные максимумы нужно при открытом кране CO_2 и при медленных перемещениях подвижной части трубы как внутрь, так и наружу. По окончании этих измерений подвижную часть трубы оставим во вставленном состоянии и проведём измерения резонансных максимумов при увеличении, а затем при уменьшении длины частоты. Сравним результаты с полученными при изменении длины трубы.

4. Измерения на второй установке.

- Измерим скорость звука в трубе постоянной длины. Плавно увеличивая частоту генератора получим ряд последовательных резонансных значений частоты, отмечая момент резонанса по увеличению амплитуды колебаний на экране осциллографа. Убедимся в повторяемости результатов при уменьшении частоты.
- Полученные результаты изобразим на графике с номером резонанса k по оси абсцисс и разностью между частотой последующих резонансов и частотой первого резонанса $f_{k+1} - f_1$ по оси ординат. Через точки проведём наилучшую прямую, угловой коэффициент которой будет $c/2L$. Вычислим значение скорости звука и оценим ошибку измерений.
- Включим термостат и повторим измерения пунктов а) и б) при трёх значениях температуры. Найдём скорость звука при каждой температуре.

5. Вычислим значение $\gamma = C_p/C_v$ по формуле. Оценим ошибку измерений.

iii. Обработка результатов для первой установки

Измеренные данные. Зафиксируем положение трубы для резонансов при удлинении и уменьшении трубы для воздуха (таблица 1) и углекислого газа (таблица 2).

f , Гц	1	2	3	4	5
719	↑ 46, ↓ 47	—	—	—	—
1398	↑ 25, ↓ 22	↑ 146, ↓ 150	—	—	—
2095	↑ 40, ↓ 41	↑ 123, ↓ 122	↑ 205, ↓ 206	—	—
2793	↑ 48, ↓ 47	↑ 109, ↓ 110	↑ 171, ↓ 171	—	—
3500	↑ 42, ↓ 43	↑ 92, ↓ 93	↑ 142, ↓ 143	↑ 191, ↓ 191	—
4206	↑ 41, ↓ 41	↑ 82, ↓ 83	↑ 125, ↓ 124	↑ 165, ↓ 165	↑ 206, ↓ 206

Таблица 1: Данные полученные для воздуха

f , Гц	1	2	3	4	5	6
702	↑ 27, ↓ 28	↑ 218, ↓ 217	—	—	—	—
1405	↑ 80, ↓ 81	↑ 178, ↓ 176	—	—	—	—
2099	↑ 6, ↓ 6	↑ 70, ↓ 70	↑ 135, ↓ 134	↑ 198, ↓ 199	—	—
2799	↑ 21, ↓ 21	↑ 69, ↓ 69	↑ 117, ↓ 117	↑ 165, ↓ 165	↑ 213, ↓ 214	—
3495	↑ 32, ↓ 32	↑ 72, ↓ 70	↑ 108, ↓ 108	↑ 147, ↓ 147	↑ 190, ↓ 185	↑ 226, ↓ 225

Таблица 2: Данные полученные для CO_2

Построение графиков. По измеренным данным построим графики зависимости длины трубы L от номера резонанса N . И проведём наилучшую прямую по методу наименьших квадратов:

$$B = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad A = \langle y \rangle - B \langle x \rangle. \quad (4)$$

$$\sigma_B \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - B^2}, \quad \sigma_A = \sigma_B \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (5)$$

Для наших целей значение A не требуется, получим формулы:

$$\lambda/2 = \frac{\langle NL \rangle - \langle N \rangle \langle L \rangle}{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}, \quad \sigma_\lambda \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2}{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2} - (\lambda/2)^2}. \quad (6)$$

Подставив значения из таблицы 1 в формулы получим значения для воздуха:

f	1398	2095	2793	3500	4206
$\langle N \rangle$	1.5	2.0	2.0	2.5	3.0
$\langle L \rangle$	85.75	122.83	109.33	117.13	123.8
$\langle NL \rangle$	159.75	300.67	259.83	354.75	453.9
$\langle N^2 \rangle$	2.5	4.67	4.67	7.5	11.0
$\langle L^2 \rangle$	11231.25	19625.83	14496.0	16787.63	18729.8
$\lambda/2$	124.5	82.5	61.8	49.6	41.3
$\sigma_{\lambda/2}$	1.8	0.3	0.2	0.2	0.2

Подставив значения из таблицы 2 в формулы получим значения для углекислого газа:

f	702	1405	2099	2799	3495
$\langle N \rangle$	1.5	1.5	2.5	3.0	3.5
$\langle L \rangle$	122.5	128.75	102.25	117.1	128.5
$\langle NL \rangle$	231.25	217.25	335.88	447.5	562.75
$\langle N^2 \rangle$	2.5	4.67	7.5	11.0	15.17
$\langle L^2 \rangle$	24031.5	18905.25	15607.25	18339.7	20892.0
$\lambda/2$	190.0	96.5	64.2	48.1	38.7
$\sigma_{\lambda/2}$	0.5	0.8	0.2	0.1	0.3

Покажем на графике полученные данные.

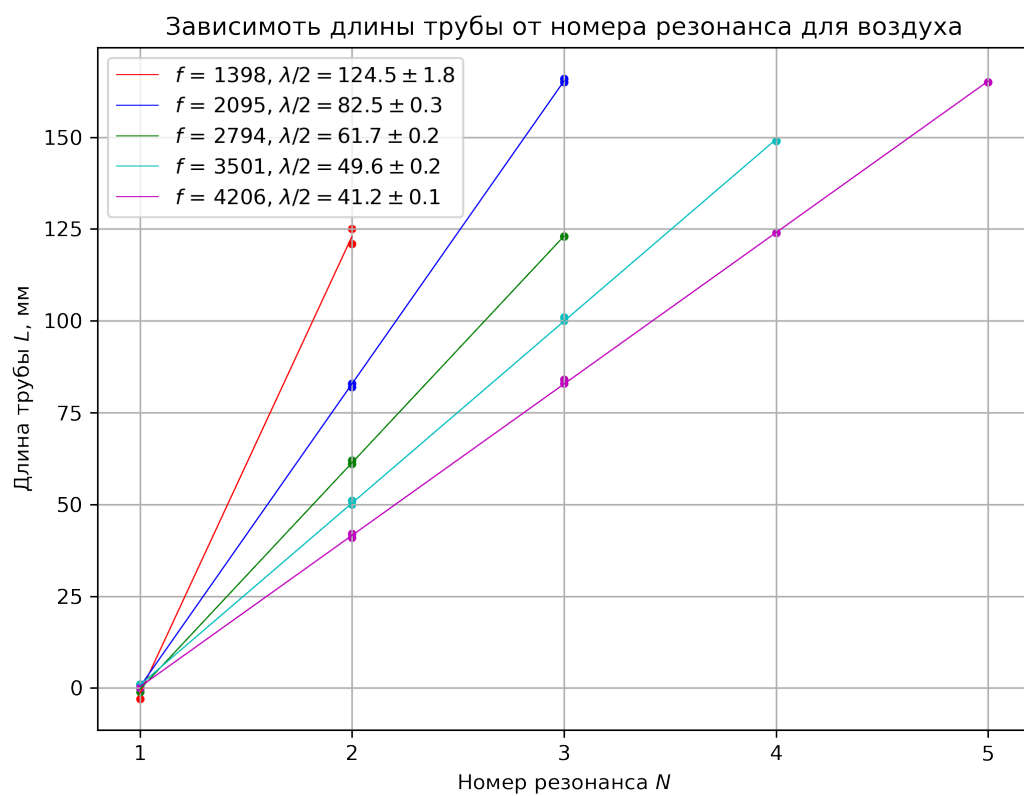


Рис. 3: График для воздуха

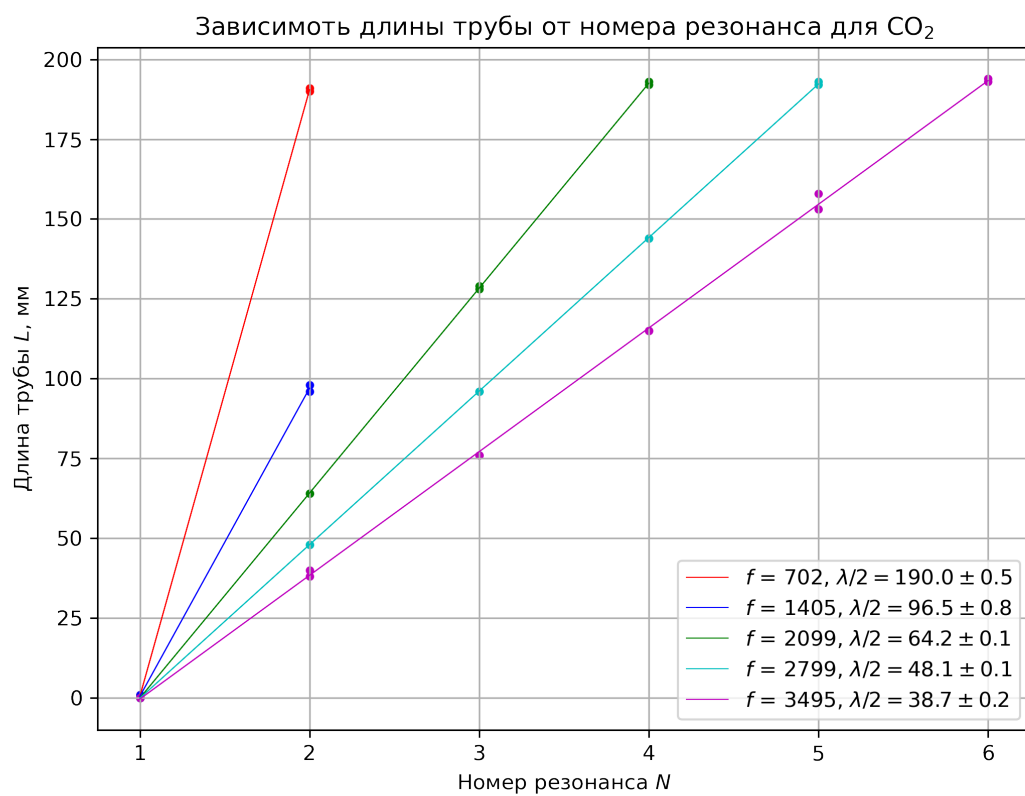


Рис. 4: График для CO₂

Вычисление C_p/C_v . Найдём по полученным из графиков значениям скорость звука по формулам:

$$c = f\lambda, \quad \sigma_c = c\sqrt{(\sigma_f/f)^2 + (\sigma_\lambda/\lambda)^2}, \quad (7)$$

где f – частота, λ – длина волны, $\sigma_f = 1$ Гц, $\sigma_\lambda = 2\sigma_{\lambda/2}$.

Подставив в (7) значения для воздуха получим:

f	1398	2095	2794	3501	4206
λ	249.0	165.0	123.4	99.2	82.4
σ_λ	3.6	0.6	0.4	0.4	0.2
c	348.0	346.0	345.0	347.0	347.0
σ_c	6.0	2.0	2.0	2.0	1.0

Подставив в (7) значения для углекислого газа получаем:

f	702	1405	2099	2799	3495
λ	380.0	193.0	128.4	96.2	77.4
σ_λ	1.0	1.6	0.2	0.2	0.4
c	267.0	271.0	270.0	269.0	271.0
σ_c	1.0	3.0	1.0	1.0	2.0

Далее вычислим $\gamma = C_p/C_v$ по формуле (1) подставив полученные значения для c и $\mu_{\text{возд.}} = 0.02897$ кг/моль, $\mu_{\text{CO}_2} = 0.044$ кг/моль:

$$\gamma_{\text{возд.}} = \frac{\mu_{\text{возд.}}}{RT} c_{\text{возд.}}^2, \quad \gamma_{\text{CO}_2} = \frac{\mu_{\text{CO}_2}}{RT} c_{\text{CO}_2}^2, \quad \sigma_\gamma = \gamma \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_c}{c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{T} \right)^2}.$$

Исходя из данных в таблицах возьмём $c_{\text{возд.}} = 346 \pm 2$ м/с, $c_{\text{CO}_2} = 270 \pm 2$ м/с, температура воздуха $T = 297 \pm 2$ К:

$$\gamma_{\text{возд.}} = \frac{0.02897}{8.314 \cdot 297} \cdot 346^2 \approx 1.40, \quad \sigma_{\gamma_{\text{возд.}}} = 1.40 \cdot \sqrt{4 \left(\frac{2}{346} \right)^2 + \left(\frac{2}{297} \right)^2} \approx 0.02;$$

$$\gamma_{\text{CO}_2} = \frac{0.044}{8.314 \cdot 297} \cdot 270^2 \approx 1.30, \quad \sigma_{\gamma_{\text{CO}_2}} = 1.30 \cdot \sqrt{4 \left(\frac{2}{270} \right)^2 + \left(\frac{2}{297} \right)^2} \approx 0.03.$$

Полученные нами значения для показателей адиабаты: $\gamma_{\text{возд.}} = 1.40 \pm 0.02$, $\gamma_{\text{CO}_2} = 1.30 \pm 0.03$.

IV. Выводы

1. Измерили скорость звука в воздухе и углекислом газе при комнатной температуре. Получили значения: $c_{\text{возд.}} = 346 \pm 2$ м/с ($\varepsilon_c = 0.6\%$), $c_{\text{CO}_2} = 270 \pm 2$ м/с ($\varepsilon_c = 0.7\%$).
2. Вычисли показатель $\gamma = C_p/C_v$ для воздуха и углекислого газа при комнатной температуре: $\gamma_{\text{возд.}} = 1.40 \pm 0.02$ ($\varepsilon_\gamma = 1.5\%$), $\gamma_{\text{CO}_2} = 1.30 \pm 0.03$ ($\varepsilon_\gamma = 2.4\%$).
3. Полученные данные соответствуют табличным с хорошей погрешностью.