

Отчёт о выполнении лабораторной работы
1.4.8

Измерение модуля Юнга методом
акустического резонанса.

Денисова Екатерина, Б01-109, ФРКТ
Преподаватель: Касьянова Надежда Викторовна

14 декабря 2021 г.

1 Аннотация

В данной работе по результатам измерений строится график зависимости частоты гармонических колебаний от номера гармоники для каждого из трёх металлических стержней (из меди, стали и алюминия), проверяется, что эта зависимость линейна. Рассчитывается значение скорости звука по полученным экспериментальным точкам. Определяется модуль Юнга для каждого из металлов - меди, алюминия и стали.

2 Теоретические сведения и методика измерений

Модуль Юнга - основная характеристика упругих свойств твердого тела. По закону Гука при приложении к телу некоторого кратковременного напряжения σ в теле возникает малая деформация, которая распространяется по телу вдоль оси приложения напряжения в форме акустической (звуковой) волны. Скорость этой волны u можно найти по формуле (ρ - плотность тела, E - модуль Юнга тела):

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1)$$

В данной работе мы рассматриваем длинные тонкие стержни. Звукосная волна в таком стержне распространяется только вдоль его длины и он испытывает деформации по закону Гука, а следовательно его упругие свойства описываются только модулем Юнга. При необходимой длине акустической волны в длине стержня помещается целое количество полу-волн и при отражении волн от краев стержня происходит акустический резонанс.

Волновое уравнение имеет вид (u - скорость распространения волны, $\xi(x, t)$ - относительное удлинение элемента стержня в точке x к моменту t):

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = u^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} \quad (2)$$

Решением данного уравнения является $\xi = \phi(x - ut)$ - произвольная функция, зависящая от $X = x - ut$.

Данная функция описывает возмущение среды произвольной формы, которое смещается поступательно во времени по оси x со скоростью u , не меняя своей формы.

При распространении волны против направления оси x решение волнового уравнения примет вид: $\xi = \phi(x + ut)$.

Общее решение волнового уравнения имеет вид: $\xi = \phi_1(x - ut) + \phi_2(x + ut)$ - это сумма двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$ (вид функций ϕ_1, ϕ_2 определяется из начальных и граничных условий задачи).

Продольная волна в тонком стержне может быть представлена как суперпозиция бегущих навстречу гармонических волн:

$$\xi(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота, $k = \frac{1\pi}{\lambda}$ - волновое число (пространственная частота) волны. Соотношения между амплитудами A_1, A_2 и начальными фазами φ_1, φ_2 определяются граничными условиями на концах стержня.

Гармонические стоячие волны - это колебания вида ($A_1 = A_2, \varphi_1 = \varphi_2$):

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Из данного уравнения получаем, что на длине стержня должно укладываться целое число полуволен ($n \in N$):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Собственные частоты колебаний стержня - допустимые значения

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}$$

Амплитуда колебаний смещения среды распределена вдоль стержня по гармоническому закону:

$$\xi_0(x) = 2A \cos kx \quad (5)$$

Точки с максимальной амплитудой (а значит и плотностью) - пучности смещения, с минимальной (нулевой) - узлы смещения.

Номер гармоник n определяет количество узлов смещения на стержне.

3 Оборудование и экспериментальные погрешности

3.1 Экспериментальная установка

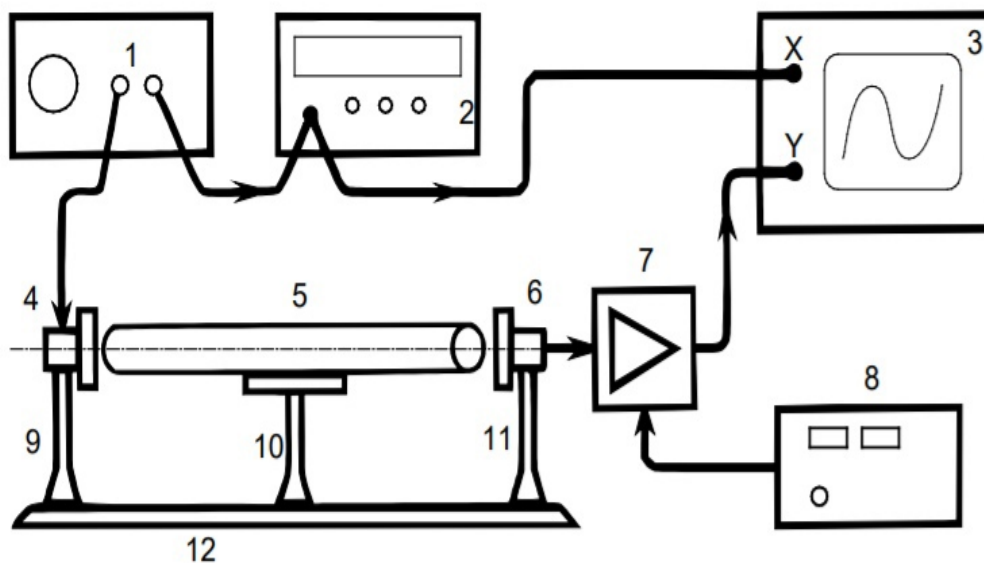


Рис. 3. Схема установки: 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приёмник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9, 11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая

Рис. 1. Экспериментальная установка.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12. Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодиче-

ское воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа.

Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

3.2 Методика измерений

пределения скорости u (необходимой для нахождения модуля Юнга по формуле (1)) в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна. Возбуждение продольных колебаний в стержне происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная номер гармоники n и соответствующую резонансную частоту f_n , на которой наблюдается усиление амплитуды колебаний, можно вычислить скорость распространения продольных волн в стержне:

$$u = 2L \frac{f_n}{n} \quad (6)$$

Таким образом, для измерения скорости необходимо измерить длину стержня L и получить зависимость резонансной частоты от номера резонанса $f_n(n)$. Если все теоретические предположения справедливы, эта зависимость будет прямой пропорциональностью.

3.3 Погрешности измерений

В данной работе мы пользовались: весами для измерения масс фрагментов стержней, металлической линейкой для измерения длин стержней, штанген-циркулем для измерения длин и диаметров фрагментов.

Соответствующие систематические погрешности приборов:

$$\sigma_m = 0.001g$$

$$\sigma_l = 0.5mm$$

$$\sigma_{sh} = 0.1mm$$

Результаты данных измерений:
длины стержней:

$$l_{Al} = l_{Cu} = l_{St} = 600 \pm 0.5mm(\varepsilon = 0.1\%)$$

длины, диаметры и массы фрагментов стержней:

$$l_{Alp} = 41,2 \pm 0.1mm(\varepsilon = 2\%)$$

$$l_{Cup} = 40,2 \pm 0.1mm(\varepsilon = 2\%)$$

$$l_{Stp} = 40,0 \pm 0.1mm(\varepsilon = 3\%)$$

$$d_{Alp} = 12,2 \pm 0.1mm(\varepsilon = 8\%)$$

$$d_{Cup} = 11,5 \pm 0.1mm(\varepsilon = 9\%)$$

$$d_{Stp} = 12,1 \pm 0.1mm(\varepsilon = 8\%)$$

$$m_{Alp} = 37,109 \pm 0.001g(\varepsilon = 0,02\%)$$

$$m_{Cup} = 11,796 \pm 0.001g(\varepsilon = 0,08\%)$$

$$m_{Stp} = 41,023 \pm 0.001g(\varepsilon = 0,02\%)$$

Найдем плотности металлов и с их погрешностями:

$$\rho = \frac{m}{h\pi R^2}$$

$$\sigma_\rho = \sqrt{4\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$$

$$\rho_{Al} = 2,826 \pm 0,016kg/m^3(\varepsilon = 0,6\%)$$

$$\rho_{Cu} = 8,923 \pm 0,018kg/m^3(\varepsilon = 0,2\%)$$

$$\rho_{St} = 7,708 \pm 0,016kg/m^3(\varepsilon = 0,2\%)$$

Отклонения полученных данных от табличных объясняются влиянием большой погрешности измерения длин и диаметров фрагментов.

4 Результаты измерений и обработка данных

При проведении работы получены следующие результаты зависимости частоты колебаний от соответствующего номера гармоники для каждого из металлов (см. табл 1-3).

п гармоники	частота, Гц
1	4262,25
2	8526,93
3	12790,9
4	17053,1
5	21303,4
6	25574,4

Таблица 1. Результаты измерений для алюминия.

п гармоники	частота, Гц
1	3218,89
2	6422,54
3	9646,03
4	12854,4
5	16064,6
6	18255,6

Таблица 2. Результаты измерений для меди.

п гармоники	частота, Гц
1	4132,75
2	8257,89
3	12392,7
4	16522
5	20645,3
6	24758,9

Таблица 2. Результаты измерений для стали.

Построим графики зависимости $f_n(n)$ для каждого из металлов (см Рис. 1.). По графику видим, зависимость линейная, а прямая проходит через начало координат - теоретические предположения подтверждены на практике.

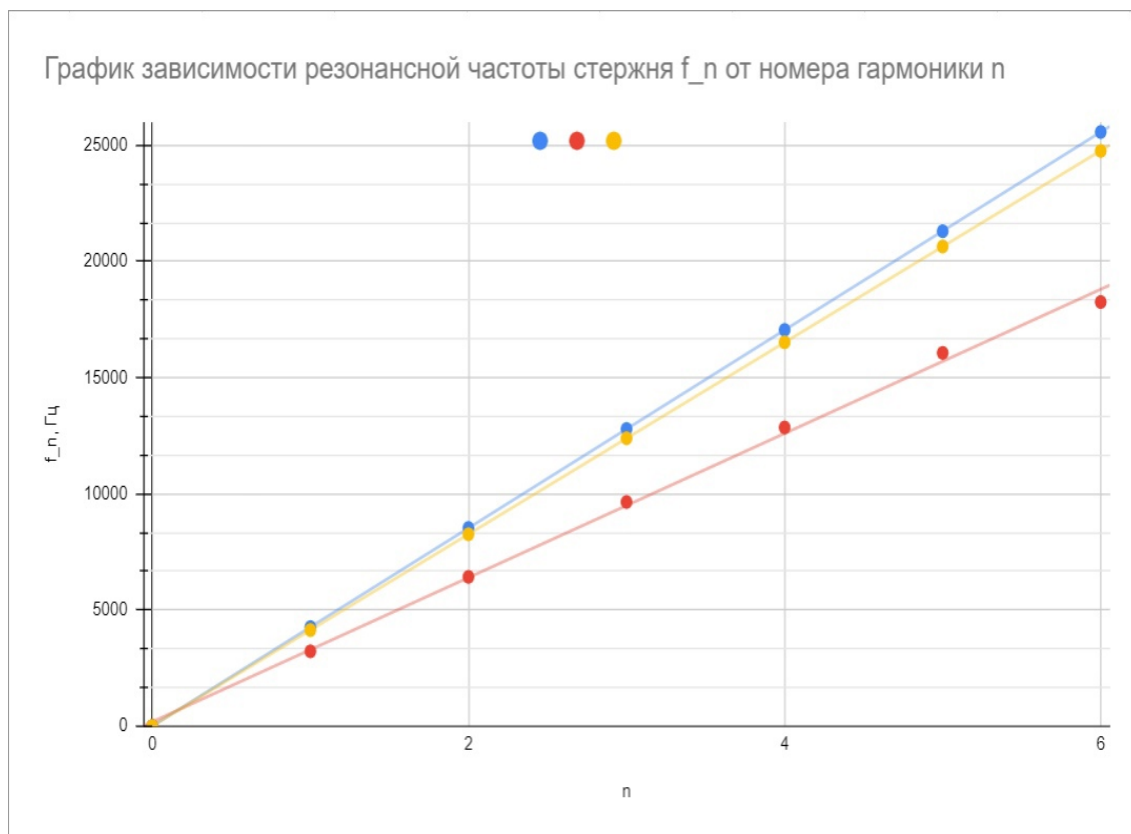


Рис. 1. График зависимости частоты f от номера гармоники n .

По полученным данным найдем значение скорости распространения волны u из формулы (6).

По методу наименьших квадратов для прямой, проходящей через начало координат найдем отношение f_n/n для каждого из металлов:

$$k_{Al} = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle} = 4264,2$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2 \right)} = 0,4 (\varepsilon = 0,01\%)$$

$$k_{Cu} = 3146$$

$$\sigma_k = 34(\varepsilon = 1,1\%)$$

$$k_{St} = 4128,5$$

$$\sigma_k = 0,7(\varepsilon = 0,01\%)$$

Погрешность полученной величины вычислим так:

$$\frac{\sigma_u}{u} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2}$$

Для Алюминия:

$$u = 5114,4 \pm 5,1 m/c^2$$

$$\varepsilon = 0,1\%$$

Для Меди:

$$u = 3723,6 \pm 40,9 m/c^2$$

$$\varepsilon = 1,1\%$$

Для Стали:

$$u = 4952,4 \pm 5,0 m/c^2$$

$$\varepsilon = 0,1\%$$

Найдем модули Юнга для исследуемых материалов по формуле (1):

Погрешность результата будем вычислять по формуле:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{4\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2}$$

Для Алюминия:

$$E = u^2 \rho = 73,9 \pm 0,4 GPa$$

$$\varepsilon = 0,6\%$$

Для Меди:

$$E = u^2 \rho = 127,2 \pm 2,8 GPa$$

$$\varepsilon = 2,2\%$$

Для Стали:

$$E = u^2 \rho = 189,2 \pm 0,6 GPa$$

$$\varepsilon = 0,3\%$$

(табл = 70 ГПа) (табл = 110 ГПа) (табл = 200 ГПа)

5 Выводы

В ходе работы была экспериментально проверена линейность зависимости резонансной частоты стержня от номера гармоники гармонических колебаний. Для алюминия, меди и стали были получены модули Юнга этих металлов. Заметим, что основной вклад в погрешность итогового результата внесла погрешность нахождения плотности металлов.

Полученные значения отличаются от табличных более, чем на 3σ . Это можно объяснить тем, что во время проведения эксперимента на итоговый результат оказывали сильное влияние непоперечные волны, из-за чего изображение на экране осциллографа было нечетким и полученные значения частот носят приближенный характер.