Семинар 4-5: Продажи и линейная регрессия

Задача 1

Предположим, Олег хочет купить автомобиль и считает сколько денег ему нужно для этого накопить[1]. Он пересмотрел десяток объявлений в интернете и увидел, что новые автомобили стоят около 20000, годовалые — примерно 19000, двухлетние — 18000 и так далее.

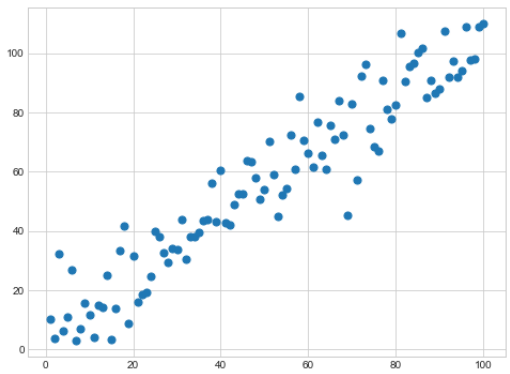
В уме Олег-аналитик выводит формулу: адекватная цена автомобиля начинается от 20000 и падает на 1000 каждый год, пока не упрётся в 10000. Олег сделал то, что в машинном обучении называют регрессией — предсказал цену по известным данным. Давайте попробуем повторить подвиг Олега.

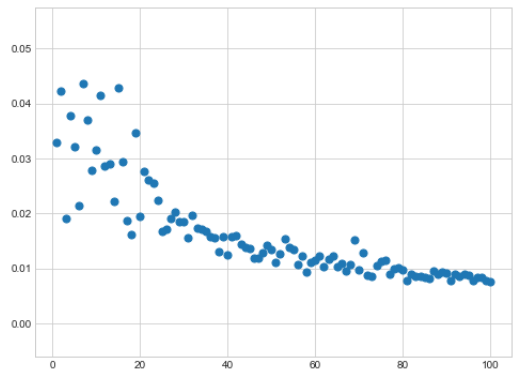
1. Как выглядит формула в случае Олега?
2. За сколько продать старый афон? Как выглядит формула?
3. Сколько шашлыка брать на дачу? Как выглядит формула?
4. Сколько брать шашлыка, если есть толстый друг? Как можно назвать толстого друга в терминах машинного обучения? Испортит ли толстый друг формулу?
5. Сколько одежды брать с собой в путешествие? (тут они начнут рассуждать что это зависит не только от срока путешествия, но и от пола и бац у нас уже много факторов)

Было бы удобно иметь формулу под каждую проблему на свете. Но взять те же цены на автомобили: кроме пробега есть десятки комплектаций, разное техническое состояние, сезонность спроса и еще столько неочевидных факторов, которые Олег, даже при всём желании, не учел бы в голове. Люди тупы и ленивы — надо заставить вкалывать роботов.

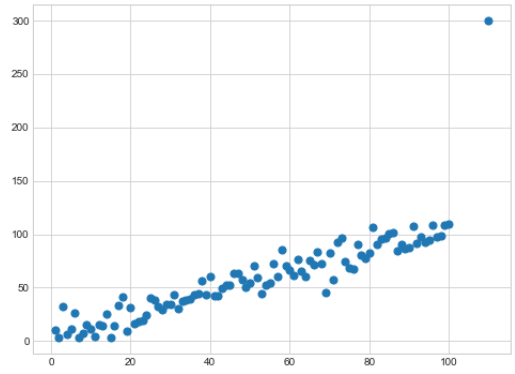
Задача 2

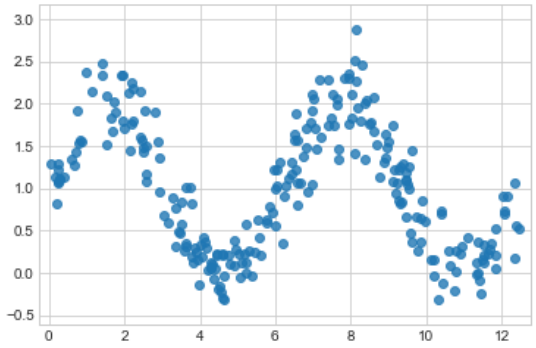
Вот несколько ситуаций, как на ваш взгляд должны пройти линии регрессии? Да, это тоже машинное обучение. Но обычно кривые рисуем не мы, а комплюхтер.



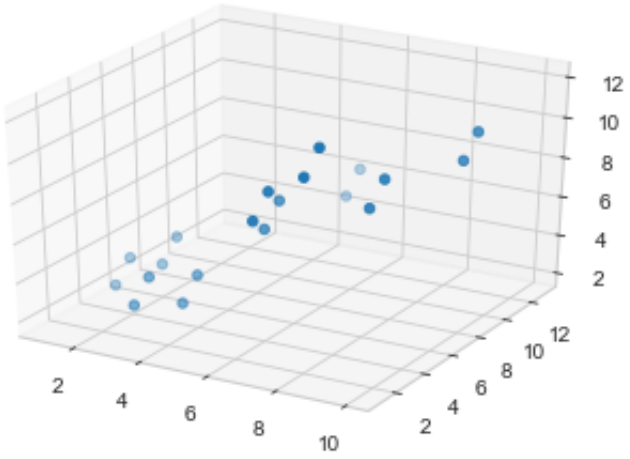


[1] сделано по мотивам https://vas3k.ru/blog/machine_learning/





1. Нарисуйте на каждой из картинок линию регрессии.
2. Как выглядят уравнения регрессии в этих ситуациях? Какие параметры в них нам нужно обучить?
3. В чём проблема на картинке слева снизу? Проинтерпретируйте её на примере шашлыков.
4. Поговорить про полином и переобучение.
5. Как будет выглядеть рисунок, если y — сколько вещей надо брать с собой в путешествие, x_1 — время поездки, x_2 — пол путешественника.
6. Ещё одна, на этот раз трёхмерная картинка! Слабо дополнить её также, как мы делали это выше? Как будет выглядеть уравнение регрессии?



Задача 3

Вася измерил вес трёх упаковок с конфетками, $y_1 = 6$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$. Вася хочет спрогнозировать вес следующего пакетика. Модель для веса пакетиков у Васи очень простая, $y_i = \mu + u_i$, поэтому прогнозирует Вася по формуле $\hat{y}_i = \hat{\mu}$.

Для оценки параметра μ Вася использует следующую целевую функцию:

$$\sum (y_i - \hat{\mu})^2 + \lambda \cdot \hat{\mu}^2$$

1. Найдите оптимальное $\hat{\mu}$ при $\lambda = 0$.
2. Найдите оптимальное $\hat{\mu}$ при произвольном λ.
3. Подберите оптимальное λ с помощью кросс-валидации «выкинь одного».
4. Найдите оптимальное $\hat{\mu}$ при λ_{CV}.

Задача 4

Миша работает в маленькой кофейне. Харио Малабар Монсун является фирменным напитком этой кофейни. Мише интересно узнать как именно ведёт себя спрос на напиток y_i в зависимости от температуры за окном t_i. Четыре дня Миша записывал свои наблюдения:

t_i	y_i
21	1
19	2
12	8
8	8

Сегодня он решил обучить регрессионное дерево. В качестве функции потерь он использует

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

1. Обучите регрессионное дерево.
2. Какой прогноз на сегодня сделает дерево Миши, если за окном 13 градусов?

Задача 5

Предположим, что в наших руках оказались исторические данные по продажам 45 магазинов Walmart, расположенных в разных регионах. Каждый магазан содержит несколько отделов. Нам хотелось бы научиться прогнозировать продажи по каждому отделу.

1. Зачем нам может понадобиться прогнозировать продажи? Какая от этого выгода для магазина?
2. Какую задачу машинного обучения нам предстоит решать? Какие переменные мы могли бы использовать в качестве объясняющих?
3. Какую метрику мы могли бы использовать для оценки бизнес-эффекта от нашей модели? Отталкиваясь от каких характеристик можно было бы сконструировать её?

4. Что такое MAE, MSE, RMSE и MAPE? Предположим, что у нас есть три магазина. Они продали товаров на 5, 10 и 100 рублей. Наша модель предсказывала, что они продадут товаров на 4, 20 и 110. Посчитайте для нашей модели все четыре метрики качества, приведённые выше.

Ещё задачи

Задача 6

Маркетологи Вова и Вася строили регрессию $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Каждый оценивал её по своим данным. У Васи получилось, что $\hat{\beta}_1 = 2$, у Вовы получилось, что $\hat{\beta}_1 = 8$.

Пришла Алиса, отобрала у Вовы и Васи данные, соединила их вместе и построила регрессию сразу на всём. У неё получилось, что $\hat{\beta}_1 = -10$. Может ли такое быть?

Задача 7

Выращиваем регрессионное дерево в домашних условиях! Вот вам выборка для этого:

x_i	y_i
0	5
1	6
2	4
3	100

Критерий деления вершины — минимизация квадратичной функции потерь. Критерий остановки — три листа. Зачем нужен критерий остановки? Как дерево ведёт себя с выбросами?

Задача 8

Каждый день Маша ест конфеты и решает задачи по машинному обучению. Пусть x_i — количество решённых задач, а y_i — количество съеденных конфет.

x_i	y_i
1	1
2	2
2	8

Рассмотрим модель $y_i = \beta x_i + u_i$. Маша использует функцию потерь

$$\sum (y_i - \hat{\beta} x_i)^2$$

1. Найдите МНК-оценку $\hat{b}$ для имеющихся трёх наблюдений.
2. Нарисуйте исходные точки и полученную прямую регрессии.
3. Выведите формулу для $\hat{b}$ в общем виде для n наблюдений.
4. На семинаре по машинному обучению неожиданно выяснилось, что Миша тоже каждый день решает задачи по машинному обучению. Правда он более сдержан в плане конфет. Миша решил взять Машины наблюдения и с помощью функционала

   $$\sum |y_i - \hat{\beta} x_i|$$

   оценить β. Помогите Мише найти оценку.
5. К поеданию конфет решает присоединиться Вадик. У него тоже есть своя функция потерь

   $$\sum (y_i - \hat{\beta} x_i)^2 + 3\beta^2$$

   Оцените β для его случая. Нарисуйте все три прямые на одной картинке и порассуждайте почему они получились именно такими, какими получились.