Семинар 6: Регрессия

В этом семинаре мы впервые столкнёмся с настоящим машинным обучением и попробуем понять что стоит за его магией. В ручной части семинара мы пойдём по следующему плану:

- разберёмся чем классификация отличается от регрессии ;
- сформулируем задачу регрессии и поймём её специфику;
- поймём с помощью каких метрик можно оценить качество прогноза в случае регрессии;
- попробуем разобраться какой смысл стоит за этими метриками;
- разберёмся как выглядит простейшая линейная модель регрессии;
- на пальцах прикинем как она обучается.

Задача 1 (формулируем задачу)

Представьте себе, что у вас есть паблик с мемами. Вы — Хозяин мемов. Как и любой другой Хозяин мемов, вы любите лайки под мемами. Возникает желание привлечь в паблик целевую аудиторию, которая будет ставить под мемы лайки. Для этого вы хотите запустить рекламную кампанию паблика. Ясное дело, что рекламу хочется показывать не всем подряд, а только подходящим людям.

У вас есть данные по профилям всех тех людей, которые уже ставили в паблике лайки. По этим данным вам хочется построить модель, котороя могла бы предсказать подходит ли конкретный человек для вашей рекламной компании (поставил бы ли он в паблик лайк, если бы был на него подписан).

1. Сформулируйте задачу машинного обучения. Какой должна быть целевая переменная, чтобы перед вами была задача классификации. Какой должна быть целевая переменная, чтобы это была задача регрессии?
2. Какие факторы из профилей вы бы использовали, чтобы спрогнозировать подходит ли человек для рекламной кампании?
3. Приведите ещё парочку примеров задачи классификации и задачи регрессии.

Решение:

Если м будем пытаться спрогнозировать факт лайка (пользователь поставил хотя бы один лайк в паблик), то мы будем решать задачу классификации, так как мы стараемся предсказать бинарную переменную. Если мы будем пытаться спрогнозировать непрерывную переменную: количество лайков, которое пользователь поставил в паблике, то мы будем решать задачу регрессии.

В качестве факторов для прогноза можно использовать абсолютно любую информацию из профилей: пол, возраст, есть ли аватар, как часто человек что-то репостит, на какие другие похожие паблики он подписан и тп.

Классификация: предсказание оттока клиентов, вернёт ли человек кредит, болен ли человек, содержит ли письмо спам, мошенническая ли транзакция, сделает ли человек клик, поставит ли лайк и т.д. **Регрессия**: предсказание цен, спроса, выручки, валютного курса, ВВП страны, инфляции, качества вина, уровня преступности и т.д.

Задача 2 (качество прогноза)

Итак, мы решили, что будем прогнозировать число лайков, которое человек оставил в паблике. Давайте предположим, что мы по лучшим заветам машинного обучения оценили какую-нибудь модель, которая нам эти прогнозы выписывает. Возникает резонный вопрос: как проверит качество модели?

а) Какие метрики мы могли бы использовать, чтобы оценить качество предсказания лайков? Какими особенностями обладают этим метрики?

б) Что такое MAE, MSE, RMSE и MAPE? Предположим, что у нас есть три пользователя и они поставили 5, 10 и 100 лайков. Наша модель предсказывала, что они поставят 4, 20 и 110 лайков. Посчитайте для модели все четыре метрики качества.

Решение:

Все пункты про метрики подробно расписаны в юпитерской тетрадке к семинару.

$$\begin{aligned}
&\text{MAE} = \frac{1}{3} \cdot (|5-4| + |10-20| + |100-110|) = 7 \\
&\text{MSE} = \frac{1}{3} \cdot ((5-4)^2 + (10-20)^2 + (100-110)^2) = 67 \\
&\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}} \approx 8.19 \\
&\text{MAPE} = 100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|5-4|}{5} + \frac{|10-20|}{10} + \frac{|100-110|}{100} \right) = 43\%
\end{aligned}$$

Задача 3 (как выглядит модель)

Предположим, Олег хочет купить автомобиль и считает сколько денег ему нужно для этого накопить[1]. Он пересмотрел десяток объявлений в интернете и увидел, что новые автомобили стоят около 20000, годовалые — примерно 19000, двухлетние — 18000 и так далее.

В уме Олег-аналитик выводит формулу: адекватная цена автомобиля начинается от 20000 и падает на 1000 каждый год, пока не упрётся в 10000. Олег сделал то, что в машинном обучении называют регрессией — предсказал цену по известным данным. Давайте попробуем повторить подвиг Олега.

а) Как выглядит формула в случае Олега?

[1] сделано по мотивам https://vas3k.ru/blog/machine_learning/

б) За сколько продать старый афон? Придумайте формулу для предсказания. Проинтерпретируйте каждый коэффициент в ней.

в) Сколько одежды брать с собой в путешествие? Придумайте формулу для предсказания. Проинтерпретируйте каждый коэффициент в ней.

г) Сколько шашлыка брать на дачу? Как выглядит формула?

д) Сколько брать шашлыка, если есть толстый друг? Как можно назвать толстого друга в терминах машинного обучения? Испортит ли толстый друг формулу?

Было бы удобно иметь формулу под каждую проблему на свете. Но взять те же цены на автомобили: кроме пробега есть десятки комплектаций, разное техническое состояние, сезонность спроса и еще столько неочевидных факторов, которые Олег, даже при всём желании, не учел бы в голове. Люди тупы и ленивы — надо заставить вкалывать роботов.

Решение:

а) Формула Олега: $y_i = 20000 - 1000 \cdot x_i$, где y_i— цена машины, x_i — её возраст. Если бы мы собрали данные о машинах и загнали их в компьютер, нам нужно было бы оценить модель

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i.$$

Коэффициент β_0 отражает базовую стоимость машины, а β_1 то, насколько она дешевеет с каждым годом.

б) Я не знаю, к чему мы пришли при обсуждении на семинаре, но скорее всего к чему-то похожему на случай Олега.

в) Это зависит как минимум от двух вещей: длительности поездки и пола. Девушкам обычно нужно больше вещей. Формула для обучения может выглядеть, например, вот так:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \beta_2 \cdot femail_i \cdot x_i,$$

где x_i — срок поездки, а $femail_i$ принимает значение 1, если путешественник — девушка. Тогда коэффициент β_1 будет говорить сколько дополнительной одежды нам надо взять, если срок путешествия увеличивается на один день. Коэффициент β_2 будет говорить на сколько единиц одежды надо взять больше, на каждый дополнительный день, если путешественник — девушка. Коэффициент β_0 — какое-то базовое количество одежды, которое надо взять с собой в любом случае.

в) Это зависит от числа людей и числа дней, на которое мы едем на дачу. Наверное логично было бы брать полкило на человека в день, то есть $y_i = 0.5 \cdot x_i \cdot z_i$, где x_i — число человек, z_i — число дней. Модель получилась нелинейной.

Можно линеаризовать её. Обычно это делается с помощью логарифмирования:

$$\ln y_i = \ln 0.5 + \ln x_i + \ln z_i.$$

В данном случае мы подобрали все коэффициенты из головы, задействовав свой природ-

ный оцениватель. Другой путь: собрать данные о поездках на дачу и заставить компьютер оценить модель:

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln x_i + \beta_2 \cdot \ln z_i.$$

Такие модели, записанные в логарифмах интерпретируются чуть сложнее линейных. Коэффициент β_1 отражает то, на сколько процентов будет расти количество необходимого шашлыка, при росте числа людей на 1%. Коэффициент β_2 будет говорить, на сколько процентов будет расти количество необходимого шашлыка, при увеличении числа дней.

г) Если есть толстый друг, он много ест. Это выброс. Если использовать модель выше для этого друга, то нам не хватит еды. Он всё съест. Если оценивать модель по выборке, включающей толстого друга, то она подстроится под него и будет выдавать плохие прогнозы для обычных людей.

Можно модернизировать нашу модель и ввести на этого друга дамми-переменную, которая будет принимать значение 1, если наблюдение — он, и 0, если кто-то другой. Модель тогда будет выглядеть:

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln x_i + \beta_2 \cdot \ln z_i + \beta_3 \cdot fat_i.$$

Тогда после оценивания модели коэффициент β_3 будет отражать то, сколько шашлыка надо взять чисто для толстого друга.

Очень важно понимать, что интерпретация коэффициентов верна только в тех случаях, когда мы изменяем только одну какую-то переменную. Более того, все эти изменения верны в среднем, а не для каждого конкретного случая. То есть в модели

$$y_i = \beta_1 \cdot x_i + \beta_2 \cdot z_i$$

значение y в среднем (не всегда) увеличится на β_1, при увеличении x_i на 1, если при этом z_i останется неизменной (при прочих равных).

Задача 4 (как обучаются модели)

Давайте попробуем совсем-совсем на пальцах почувствовать как модели обучаются. Пусть у Хозяина мемов есть две переменные: x — возраст подписчика, y — число лайков, которое он оставил. Хозяин мемов хочет оценить регрессию $y = \beta \cdot x$, то есть он хочет попытаться предсказать число лайков по возрасту подписчика. Хозяин собрал два наблюдения для оценивания модели: $x_1 = 15, y_1 = 10$ и $x_2 = 22, y_2 = 2$.

Теперь хозяину надо подобрать коэффициент β так, чтобы ошибка прогноза, измеряемая с помощью MSE оказалась поменьше.

1. Пусть $\beta = 1$. Какие значения нам спрогнозирует модель? Какая у неё будет ошибка?

2. Пусть $\beta = 0.5$. Найдите прогнозы и ошибку модели.
3. Какое значение для β нам больше подходит? Как можно найти оптимальное β?

Решение:

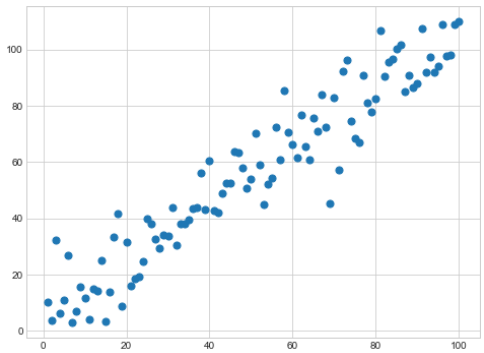
При $\beta = 1$ получаем прогнозы $\hat{y}_1 = 1 \cdot 15 = 15 \hat{y}_2 = 1 \cdot 22 = 22$. Находим ошибку: $MSE = (15 - 10)^2 + (22 - 2)^2 = 25 + 400 = 425$.

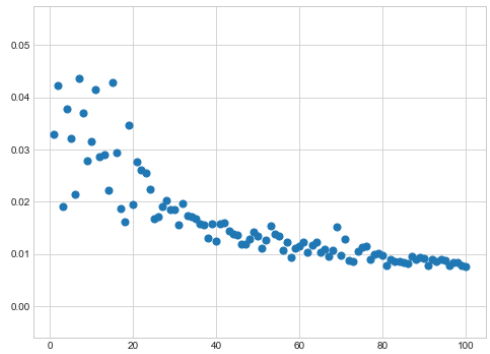
При $\beta = 0.5$ получаем прогнозы $\hat{y}_1 = 5$ и $\hat{y}_2 = 11$. Ошибка составит $MSE = (10 - 5)^2 + (11 - 2)^2 = 25 + 81 = 106$.

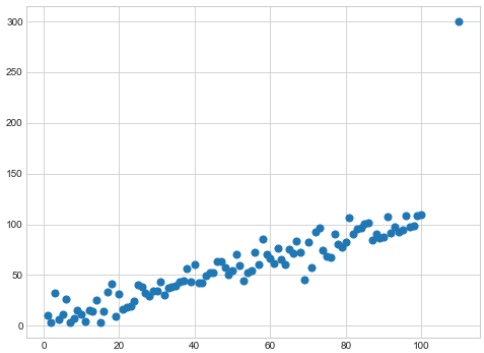
В случае $\beta = 0.5$ ошибка ниже. Методом перебора мы можем найти оптимальное значение β для нашей формулы. Конечно же на практике компьютеры не перебирают влоб все возможные значения. Они делают перебор по-умному. Обычно находят производную функции ошибки по параметру β и по ней понимают куда надо шагать и какое значение β надо проверить на "оптимальность"следующим. Такой перебор называется градиентным спуском. Но о нём мы поговорим подробнее как-нибудь в другой раз.

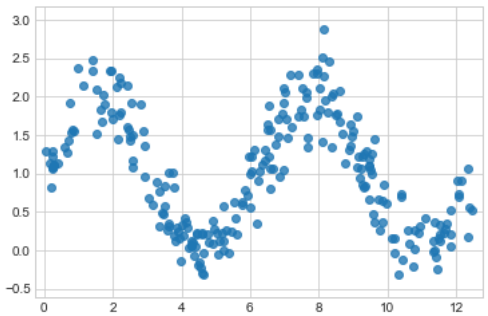
Задача 5 (картинки)

Вот несколько ситуаций, как на ваш взгляд должны пройти линии регрессии? Да, это тоже машинное обучение. Но обычно кривые рисуем не мы, а комплюхтер.









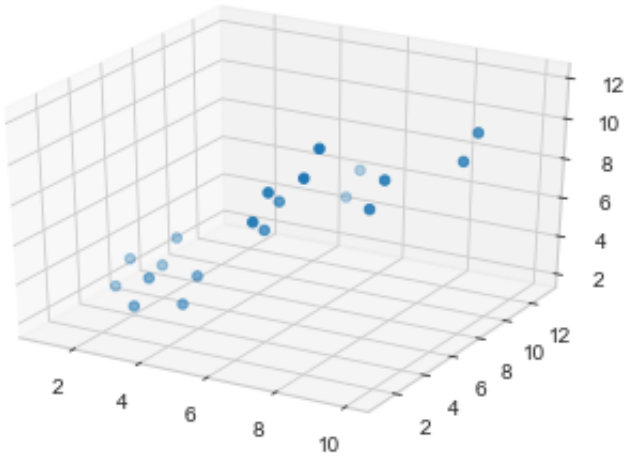
а) Нарисуйте на каждой из картинок линию регрессии.

б) Как выглядят уравнения регрессии в этих ситуациях? Какие параметры в них нам нужно обучить?

в) В чём проблема на картинке слева снизу? Проинтерпретируйте её на примере шашлыков.

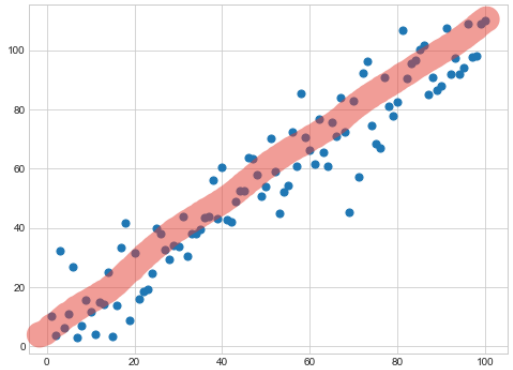
г) В четвёртой ситуации мы выбрали для обучения полином. А почему бы не взять его в каждой ситуации и не обучить через каждую точку?

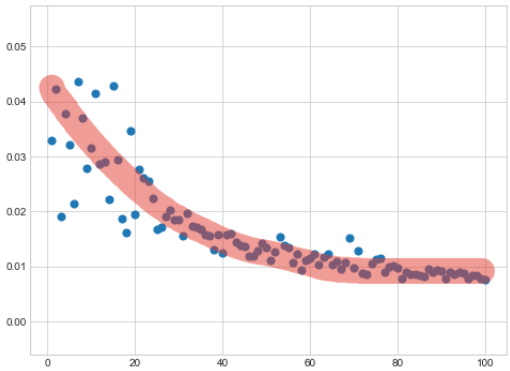
д) Ещё одна, на этот раз трёхмерная картинка! Слабо дополнить её также, как мы делали это выше? Как будет выглядеть уравнение регрессии?

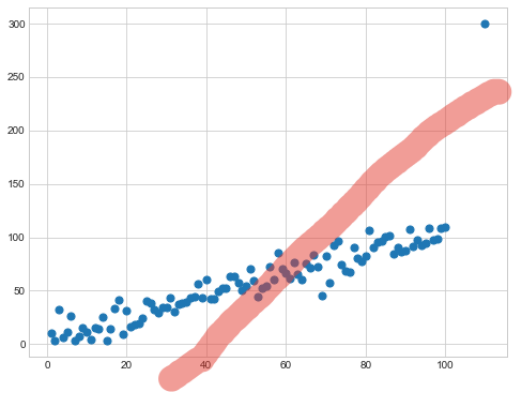


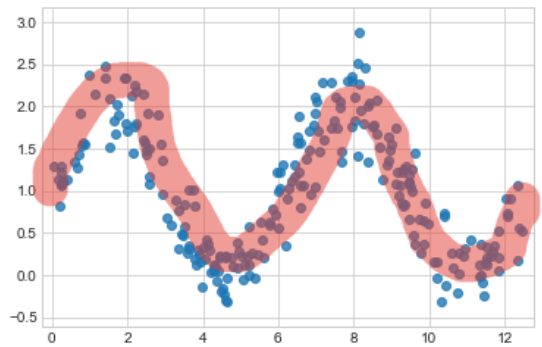
Решение:

а) Берём и рисуем!









б) В первой ситуации это обычная линейная модель $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$. Во второй ситуации перед нами нелинейная модель. Внешне картинка похожа на гиперболу. Можно попробовать обучить модель $y_i = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 x_i}$. Однако на практике обычно поступают иначе. Если взять от x_i логарифм, то модель стане линейной, и модно будет обучить $y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i$.

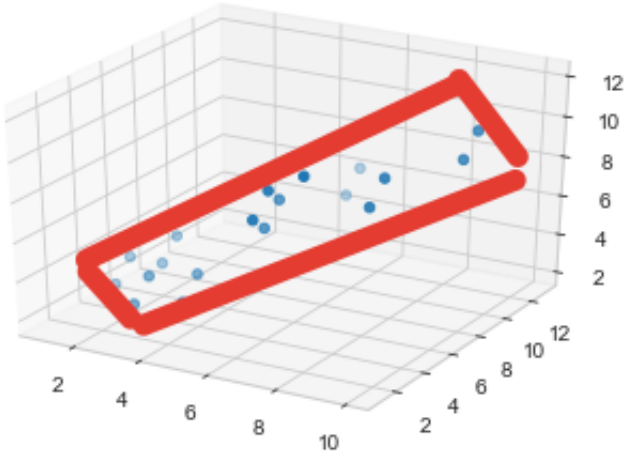
В третьей ситуации это снова обычная линейная модель. В четвёртой ситуации это либо многочлен, либо какой-нибудь косинус. Об этих двух ситуациях мы поговорим подробнее ниже.

в) Это толстый друг, который много ест. Он портит обучение модели и прямая, вместо того, чтобы пройти через облако точек, подстраивается под него. Такие ситуации обычно называют выбросами. Если последовать рецепту из первого упражнения и наложить на тостого друга дамми, то ситуация нормализируется, и красная прямая пройдёт сквозь облако также как и в первой ситуации. Это эквивалентно тому, что мы выбрасываем друга из выборки и работаем с ним отдельно.

Другой путь: использовать модели, которые нечувствительны к выбросам. Внимательный студент помнит как мы обсуждали на семинаре по статистике то, что медиана нечувствительна к выбросам. Можно попробовать

г) В четвёртой ситуации мы взяли полином. Возможно, у вас возник соблазн обучить и в первых трёх ситуациях модель, которая пройдёт через все возможные точки. Это неправильно. В таком случае наша модель слишком сильно вылизывает данные. Обычно в них много шума, и модель подстраивается под него, вместо того, чтобы вычленить сигнал. Это обычно называют переобучением.

д) В этой ситуации мы строим модель не на одну переменную (y на x), а на две (y на x и на z). Уравнение будет иметь вид $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \beta_2 \cdot z_i$. В алгебре такое уравнение описывает двумерную плоскость в трёхмерном пространстве. Новость: в трёхмерном случае мы учим не линию, а плоскость. Если размерность пространства ещё больше, мы учим некоторую гиперплоскость.



1. Ещё задачи

Тут находится несколько задачек, о которых вам нужно подумать самостоятельно. Возможно, что похожие задачи попадутся вам на самостоятельной работе.

Задача 6

Драгомир пытается предсказать продажи видео-игр. Для моделирования он использует две переменные: x_1 — возраст игры, x_2 — на кого она ориентирована. Если на мужчин, $x_2 = 1$, если на женщин, $x_2 = 0$. Целевая переменная y — сумма продаж. Драгомир оценил линейную регрессию:

$$y = 1000 - 100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2.$$

Проинтерпретируйте полученные коэффициенты. Предположим, что мы выпускаем на рынок свежую игру для женщин. Спрогнозируйте наши продажи.

Задача 7

Маше 13 лет. Всю свою жизнь она занималась коллекционированием моделей. Вчера она пообщалась с Мишей. Он тоже коллекционер. Он спросил у неё, какое у её моделей качество? Маша не смогла ответить и решила проверить его. У неё есть три наблюдения y_i. Она для каждого построила прогнозы. Найдите для её прогнозов MAE, MSE, RMSE и MAPE. В чём измеряются эти ошибки? Проинтерпретируйте их.

y_i	1	2	3
Нейросеть	2	3	1
Регрессия	2	3	4
Случайный лес	1	1	1

Задача 8

Объясните мемас:

Задача 9

В какой из следующих ситуаций какую метрику качества вы бы использовали?

Продублировать сюда примеры из лекции Валеры про самолеты, деньги и тп