Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчет по лабораторной работе № 2
по эконометрике
"Постороение регрессионной модели, нелинейной по параметрам"

Выполнила студентка:
Заболотских Екатерина
группа: 3630102/70301

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Иванков Алексей Александрович

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Имеется реализация случайного процесса. Построить две регрессионные модели:

1. **линейную по параметрам.** Разложить детерменированную функцию в ряд Тейлора и через замену предположить о линейности модели. Оценить коэффициенты полинома модели с помощью МНК.

2. **нелинейную по параметрам.** Оценить параметры β_0 и β_1 напрямую, применя метод отжига.

2 Теория

В данной лабораторной работе мы так же будем рассматривать аддитивную модель.

$$X(t) = g(t) + \xi(t)$$

Только теперь первомоментная функция поведения процесса будет иметь вид:

$$g(t) = \beta_0 * e^{\beta_1 * t}.$$

Стахостическое слагаемое так же как и в прошлый раз - случайная функция: $\xi(t) \sim N(0, \sigma)$.

2.1 Построение регрессионной модели линейной по параметрам

Для того, чтобы свести детерменированное слагаемое к линейному виду, разложим $e^{\beta_1 * t}$ в ряд Тейлора до 4-ой степени:

$$g(t) = \beta_0(1 + \beta_1 * t + \frac{\beta_1^2 * t^2}{2} + \frac{\beta_1^3 * t^3}{6} + \frac{\beta_1^4 * t^4}{24} + o(t^4))$$

Сделаем замену переменных:

$$\gamma_1 = \beta_0\beta_1 \qquad \gamma_2 = \beta_0\frac{\beta_1^2}{2} \qquad \gamma_3 = \beta_0\frac{\beta_1^3}{6} \qquad \gamma_4 = \beta_0\frac{\beta_1^4}{24}$$

Мы получили линейную по параметрам регрессионную модель:

$$X(t) = \beta_0 + \gamma_1 * t + \gamma_2 * t^2 + \gamma_3 * t^3 + \gamma_4 * t^4 + \xi(t) \qquad (1)$$

Оценки параметров $\hat{\beta}_0$ и $\{\hat{\gamma}_i\}_{i=1}^{4}$ находим применяя регуляризацию Тихонова.

Теперь нам нужно вернуться к исходному виду модели:

$$\hat{\beta}_1^1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\beta}_0} \qquad \hat{\beta}_1^2 = \frac{\sqrt{2\hat{\gamma}_2}}{\hat{\beta}_0} \qquad \hat{\beta}_1^3 = \frac{\sqrt[3]{6\hat{\gamma}_3}}{\hat{\beta}_0} \qquad \hat{\beta}_1^4 = \frac{\sqrt[4]{24\hat{\gamma}_4}}{\hat{\beta}_0}$$

2.1.1 Регуляризация по Тихонову

Пусть дана СЛАУ: $Ax = b$. Матрица А - вырожденная или плохо обусловленная. Решение данной задачи неустойчиво к малым изменениям правых и левых частей.

$$A^T * A * x = A^T * b \qquad cond(A) = \frac{|\lambda(A)_{max}|}{|\lambda(A)_{min}|}$$

Регуляризация заключается во внесении параметра α:

$$||Ax - b||^2 + \alpha||y||^2 \to min$$

$$(A^T A + \alpha E)x_\alpha = A^T b$$

Оператор $(A^T A + \alpha E)$ называется оператором регуляризации Тихонова.
Устойчивость оператора:
$AX = \lambda X \qquad | + \alpha X$
$(A + \alpha E)X = (\lambda + \alpha)X$

Тогда:

$$cond(A) = \frac{|\lambda(A)_{max} + \alpha|}{|\lambda(A)_{min} + \alpha|}$$

2.2 Построение регрессионной модели нелинейной по параметрам

В данном случае модель будет иметь вид:

$$X(t) = \beta_0 * e^{\beta_1 * t} + \xi(t)$$

Для оценки параметров β_0 и β_1 будем решать задачу минимизации функционала:

$$S(\hat{\beta}) := \sum_{i=1}^{n} (X(t_i) - \hat{g}(t_i))^2$$

Будем использовать метод отжига. В данной работе использовался метод Коши.

2.2.1 Метод отжига Коши

Это стахастический метод, использующий случайный поиск, иммитирующий процесс остывания метала, входе которого система принимает минимальную энергию.

Пусть задан компакт возможных решений $S(\beta_0, \beta_1)$, необходимо минимизировать функционал: $f : R^2 \to R$.

Алгоритм:

1. случайным образом выбирается начальная точка $x_0(\beta_0, \beta_1) \in S$
2. задается начальное значение энергии: $E_0 = f(x_0)$
3. цикл (пока не достигнем желаемой температуры T_n) $(\{i\}_{i=1}^{n})$
   (a) сравниваем текущее значение энергии E с функционалом в точке: $f(x)$. Если $f(x) < E$, то $E = f(x)$.
   (b) понижаем температуру: $T_i = \frac{T_0}{\sqrt{i}}$
   (c) генерируем новую точку для предполагаемого перехода: $x' \sim C(x, T)$
   (d) вычисляем $t = H(\triangle E, T) = e^{(-\triangle E / T_i)}$, где $\triangle E = E - f(x')$
   (e) генерируем $u \sim U([0, 1])$
   (f) проходим проверку:
      i. если $(t < u)$, то $x = x'$ и переходим к пункту (a)
      ii. иначе переходим к пункту (b)

3 Реализация и выводы

3.1 Линейная по параметрам

Параметр α в регуляризации Тиханова принимает значения $0, 0.1, 0.2, ..., 1$. В результате разбиения временного ряда на интервалы, апроксимация тренда была наилучшей для $\alpha = 0$ на всех интервалах. Невязка большая на всем временном интервале.

3.2 Нелинейная по параметрам

Модель лучше апроксимирует тренд при малом задаваемом средневкадратическом отклонении. Работа модели во многом зависит выбора конечной температуры.