Заболотских, Порошин

1. Постановка задачи.

Дана задача линейного программирования. Необходимо построить прямую и двойственную задачи и решить их симплекс методом с выбором начального приближения методом перебора и методом искуственного базиса.

Исследовать „ценность" ресурсов, указать чувствительность решения к их изменению. Определить как влияет погрешность коэф. функции цели на погрешность решения задачи. Решить задачи в exel и сравнить результаты.

2. Исследование применимости метода.

] A - матрица ограничений задачи в канонической форме.
] rang $(A) = M$, M - число ограничений
] N - число переменных.

Симплекс метод применим при $M \le N$

3. Описание алгоритма.

1 приведение задачи к канонической задаче Л.П.

Входные данные: (в программе)

- размерность задачи (кол-во уравнений, кол-во переменных)
- матрица ограничений задачи $A[M, N]$
- вектор ограничений $b[M]$
- целевая функция $C[N]$

2 Теоретически обоснованно, что оптимальное решение поставленной задачи Л.П. достигается на опорном векторе.

алгоритм нахождения опорного вектора:

$\boxed{1}$ нахождение начального приближения

Пусть общий вид задачи: $c^T[N]\, x[N] \longrightarrow \min$
$S = [x[N] \mid A[M,N]\, x[N] = b[M];\ x[N] \geq 0\}$

$N_0^+ = [i \in N \mid x_0[i] > 0\}$ $N_0^0 = \{i \in N \mid x_0[i] = 0\}$

* вспомогательную каноническую задачу для нахождения опорного вектора (нач. приближения): $\sum_{i \in M} y[i] \longrightarrow \min$

$A[M, N]\, x[N] + E[M,M]\, y[M] = b[M]$, $b[M] \geq 0$ (иначе $\times(-1)$)
$x[N] \geq 0$, $x[M] \geq 0$

В данной задаче начальный опорный вектор таков: $x[N]=0$ $y[M]=b[M]>0$

Методом искуственного базиса, основанного на симплекс методе находим $x_0^*[N]$, $y^*[M]$

существует несколько исходов

$\exists i\in M: y^*[i]>0$

=> исходная задача не имеет допустимых решений

x_0^* – невырожденный

x_0^* – начальное приближ. исходной задачи

x_0^* – вырожденный

заменяем столбцы $E[M,M]$ на столбцы $A[M, N\setminus N^+]$

$\boxed{2}$ Решение исходной задачи с начальным опорным вектором x_0^* (симплекс метод)

опишем один шаг алгоритма

] $k=1$; $|N|=n$; $|M|=m$

$N_k^+ = \{i\in N \mid x_0^*[i]>0\}$; если $|N_k^+|<m$, то дополняем $i\in N: x_0^*[i]=0$ так, что $|N_1^+|=m$.

$L_k = N\setminus N_k$

Матрицу $A[M,N_k^+]$ дополним столбцами из $A[M,N_k^0]$ так, чтобы она стала квадратной и $\det A[M,N_k]\neq 0$

Находим $B[N_k,M]=A^{-1}[M,N_k]$

Строим $y_k^T[M]=c^T[N_k]B[N_k,M]$

$$d_k^T[L_k]=c^T[L_k]-c^T[L_k]B[N_k,M]A[M,L_k]$$

$d_k[L_k]\ge 0$:

$x_0^*[N]$ – оптимальное решение

конец метода

$\exists j_k\in L_k: d_k[j_k]<0$:

продолжаем алгоритм

Строим $u_k[N_k]=B[N_k,M]A[M,j_k]$; $u_k[j_k]=-1$; $u_k[L_k\setminus j_k]=0$

$u_k[N_k]\le 0$

=> ф-я цели не ограничена снизу на S.

конец метода

$\exists i\in N_k: u_k[i]>0$

$x_0^*[N]$ – невыр. оп. вектор

$\Rightarrow N_k = N_k^+$

$\Rightarrow \exists\, \theta_k = \min\limits_{\substack{i \in N_k \\ u_k[i] > 0}} \dfrac{x_0^*[i]}{u_k[i]}$ (*)

Строим новый опорный вектор:

(**) $x_i^*[N] = x_0^*[N] - \theta_k u_k[N]$

переходим к новому шагу алгоритма

$x_0^*[N]$ – выр. оп. в.

- $\exists\, i \in N_k \setminus N_k^+ : u_k[i] > 0$
  замена базиса
  новый шаг алгоритма
- $u_k[N_k \setminus N_k^+] \le 0$
  $\Rightarrow$ находим θ_k и x_i^* по (*)(**)
  переходим к новому шагу алгоритма

3 Замена базиса

Берём столбец $\bar{a}_i : i \in N_k \setminus N_k^+$ и заменяем на $\bar{a}_i : i \in L_k$

проверяем, является ли новая система векторов линейно независимой.
($\det(\dots) \neq 0$)

- ЛНЗ
- ЛЗ
  продолжаем замену столбцов

Для предотвращения зацикливания вносим случайный параметр в выбор сменяемых индексов.

1.2 Нахождение начального приближения методом перебора.

Для каждого набора индексов N_k строится матрица

- $A[M, N_k]$; $k = 1, \dots, C_n^m$
- Если $\det(A[M, N_k]) = 0$, тогда берём следующий N_{k+1}.
- Находим решение л.у. : $A[M, N_k]\, x[N_k] = b[M]$

- $x[N_k] \ge 0$
  $\exists\, x[N \setminus N_k] = 0$
  $x[N]$ – опорный вектор
- $\exists\, x[i] < 0,\ i \in N_k$
  переходим к N_{k+1}

4. Результаты решения

1. Формализация

	медь	цинк	никель
I сплав	x	y	z
II сплав	m	n	ℓ

$$\begin{cases} x, y, z, m, n, \ell \geq 0 \\ 0{,}1\,(x+y+z) \leq x \\ 0{,}4\,(x+y+z) \geq z \\ 0{,}5\,(m+n+\ell) \geq n \\ x+y+z+m+n+\ell \leq 1000 \end{cases}$$

$$f = 1500(x+y+z) - 800x - 500y - 1000z + \\ + 2000(m+n+\ell) - 800m - 500n - 1000\ell = 100\,(7x + 10y + 5z + 12m + 15n + 10\ell)$$

$$\begin{cases} x, y, z, m, n, \ell \geq 0 \\ x+y+z+m+n+\ell \leq 1000 \\ -9x + y + z \leq 0 \\ -2x - 2y + 3z \leq 0 \\ -m + n - \ell \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x, y, z, m, n, \ell, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \\ x + y + z + m + n + \ell + S_1 = 1000 \\ -9x + y + z + S_2 = 0 \\ -2x - 2y + 3z + S_3 = 0 \\ -m + n - \ell + S_4 = 0 \end{cases}$$

и того имеем прямую задачу в каноническом виде:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & m & n & \ell & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = (7\ \ 10\ \ 5\ \ 12\ \ 15\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

Построим двойственную задачу в каноническом виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \\ 12 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \quad c^T = (1000\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

2. Решение

$x=0,\ y=0,\ z=0,\ m=500,\ n=500,\ \ell=0$

а) прямой задачи: $x_n^T = (0\ 0\ 0\ 500\ 500\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

$f = 1350000$

б) двойственной задачи $x_n^T = (1350\ 30\ 180\ 150\ 0\ 0\ 1450\ 0\ 0\ 200)$

$x = 1350;\ y = 30;\ z = 180;\ m = 150;\ n = 0;\ \ell = 0$

$f = 1350000$

в) сравнение результатов с exel:

- прямая задача: $x_n^T = (0\ 0\ 0\ 500\ 500\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

  $f = 1350000$ $\quad x=0;\ y=0;\ z=0;\ m=500;\ n=500;\ \ell=0$

- двойственная задача: $x_n^T = (1350\ 0\ 0\ 150\ 650\ 350\ 850\ 0\ 0\ 200)$

  $f = 1350000$

  $x = 1350;\ y=0;\ z=0;\ m=150;\ n=650;\ \ell=350$

Добавленная страница 1

x – количество килограмм меди в первом сплаве
y – количество килограмм цинка в первом сплаве
z – количество килограмм никеля в первом сплаве
m – количество килограмм меди во втором сплаве
n – количество килограмм цинка во втором сплаве
l – количество килограмм никеля во втором сплаве

S_1, S_2, S_3, S_4 – вспомогательные переменные

Построение двойственной задачи

Прямая задача:

$$100\,(7x + 10y + 5z + 12m + 15n + 10l) \longrightarrow max$$

$$\begin{cases} x + y + z + m + n + l \le 1000 \\ -9x + y + z \le 0 \\ -2x - 2y + 3z \le 0 \\ -m + n - l \le 0 \end{cases}$$

$$x, y, z, m, n, l \ge 0$$

Двойственная задача:

$$1000 y_1 \longrightarrow max$$

$$\begin{cases} y_1 - 9y_2 - 2y_3 \ge 7 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \ge 10 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 5 \\ y_1 - y_4 \ge 12 \\ y_1 + y_4 \ge 15 \\ y_1 - y_4 \ge 10 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

⑤ Ценность ресурсов
Чувствительность решений к их изменению

] cost – цена на металл
f – значение целевой ф-ии

1) медь:	cost - 400	f = 1600000
	cost - 200	f = 1450000
	...	...
	cost + 400	f = 1250000
2) цинк:	cost - 400	f = 1550000
	cost - 200	f = 1450000
	...	...
	cost + 400	f = 1200000
3) никель:	cost - 400	f = 1450000
	cost - 200	f = 1349999,(9)
	...	...
	cost + 400	f = 1350000

Берём изначальную цену за килограмм металла и прибавляем к ней сначала -400, потом -200, -100; -50; 50; 100; 200; 400 и смотрим на изменение целевой функции.

Если при уменьшении стоимости металла целевая ф-я сильно возрасла, то можем сделать вывод, что данный метал „ценен" для данной задачи.

Таким образом получили, что наиболее ценный ресурс — медь. На втором месте цинк, наименее ценный — никель.

⑥ Влияние погрешности коэф-в на погр-ть решения

При изменении матрицы A менее, чем на 1% от нормы данной матрицы значение целевой ф-ии так же изменяется менее, чем на 1% от исходного.

Аналогично при внесении малых изменений в коэф-ты целевой ф-ии мы получаем малые отклонения результата.

Таким образом, можем заключить, что симплекс метод — устойчивый.

Добавленная страница 2

⑦ Обоснование достоверности результата

Воспользуемся следствием 2 из теоремы о необходимых и достаточных условиях оптимальности:

$$x_*[N] \text{ - opt}, \text{ если } \exists y_*[M]: \quad \begin{array}{l} c^T[M] - y_*^T[M]\,A[M,N] \geq 0 \\ (c^T[N] - y_*^T[M]\,A[M,N])\,x_*[N] = 0 \end{array}$$

Полученный $x_*[N] = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 500 \quad 500 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

Возьмем $y = c^T[N_k]\,A^{-1}[M,N_k] = (-13.5 \quad -0.3 \quad -1.9 \quad -1.5)^T$

В силу взятого y второе условие вып. автоматически

Проверим первое условие:

$$d = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ -5 \\ -12 \\ -15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13.5 \\ -0.3 \\ -1.9 \\ -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0 \\ 0 \\ 14.5 \\ 1.9 \\ 2 \\ 13.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \geq 0$$

Таким образом перое условие так же выполнено.

т.е. данное решение оптимальное

⑧ Ананалитическая оценка погрешности

Симплекс-метод является прямым методом, т.е. погрешность в ответе получается только в следствии вычислительной погрешн.

В худшем случае в симплексе методе будет выполнено C_{10}^4 шагов. Таким образом, при условии точности типа double – 10^{-16} получаем погрешность $\sim 10^{-13}$

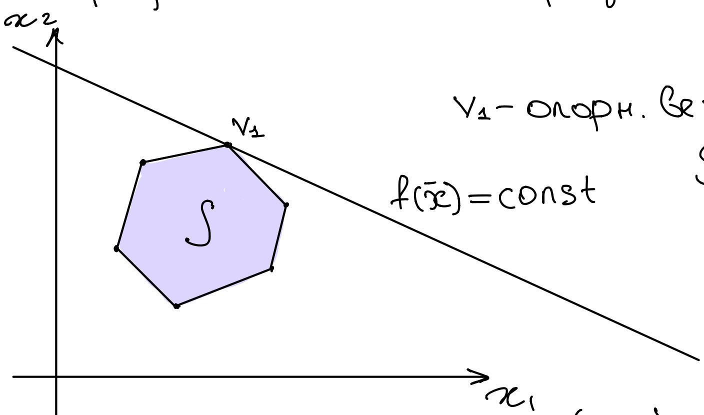
Добавленная стр. 3

Чувствительность решения к изменению коэф. функции цели

Изменение коэф-тов ф-ции цели не изменяет набор опорных векторов. И в силу линейности, а значит и непрер. ф-ции цели в некоторой окрестности коэф. ф-ции цели и её значения линейно зависимы.

При достаточно сильном изменении коэф-тов может измениться опорный вектор на котором достигается минимум целевой функции.

Графическая иллюстрация:



v_1 - опорн. вект. на котором дост. опт. значение

Внесем изменение $(f+\delta)(\bar{x})$