Отчёт по лабораторной работе № 3
по теме „Одномерная минимизация"

Выполнили: Порошин, Заболотских

① Постановка задачи

Реализовать метод золотого сечения и метод дихотомии поиска минимума унимодальной одномерной функции. Исследовать зависимость числа обращений к функции от задаваемой точности. Визуализировать алгоритм метода с помощью графика

② Исследование применимости метода

$y = f(x)$ - должна быть унимодальной на $[a; b]$

③ Описание алгоритма

- Метод дихотомии:

Дано: f – функция; a, b – границы исследуемого отрезка;
ε – требуемая точность.

Алгоритм:

1. $y_1 = f(a)$; $y_2 = f(b)$ – находим начальные значения
2. Если $|b-a| < \varepsilon$ значит необходимая точность достигнута и возвращаем $(a+b)/2$, иначе переходим к шагу 3
3. $x_1 = \frac{b+a}{2} - \delta(b-a)$; $x_2 = \frac{b+a}{2} + \delta(b+a)$
4. Если $f(x_1) < f(x_2)$:
   $b = x_2$
   иначе:
   $a = x_1$
   возвращаемся к шагу 2

Переходим к шагу 2

- Метод золотого сечения

Дано: f – функция; a, b – границы исследуемого отрезка;
ε – требуемая точность.
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Алгоритм.

1. Находим начальные значения:

$$x_1 = b - \frac{(b-a)}{\Phi}; \quad x_2 = a + \frac{(b-a)}{\Phi}$$

$$y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2)$$

2. Если $|b-a| < \varepsilon$ – возвращаем $\frac{b+a}{2}$
иначе переходим к шагу 3

3. Если $y_1 > y_2$:

$$a = x_1;\ x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi};\ y_2 = f(x_2)$$

иначе:

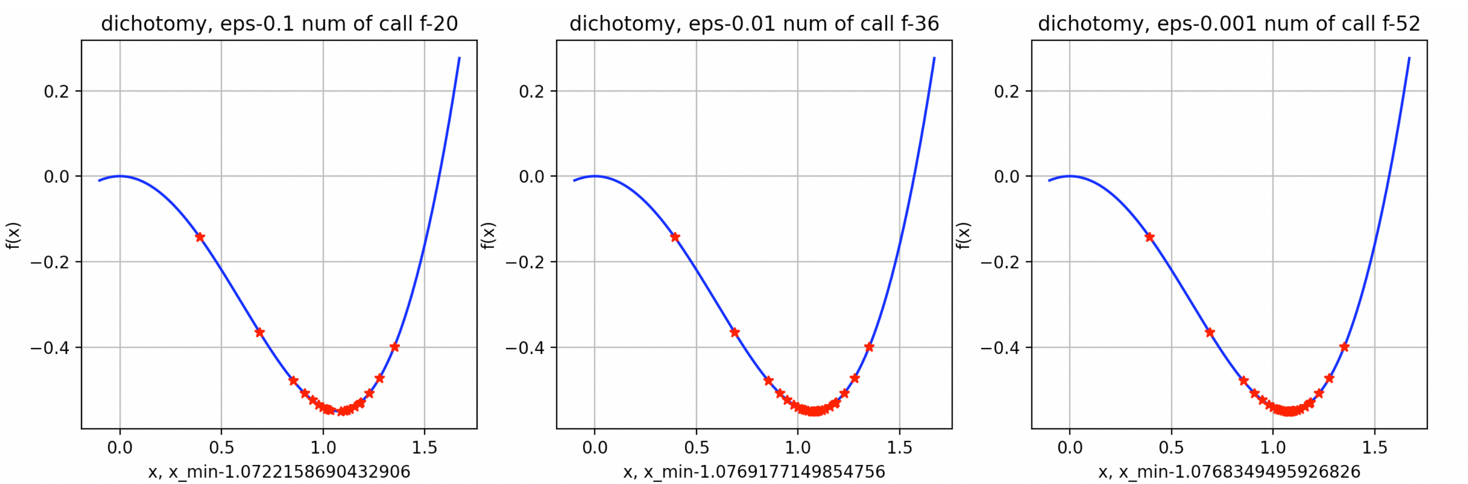
$$b = x_2;\ x_2 = x_1;\ y_2 = y_1;\ x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi};\ y_1 = f(x_1)$$

переходим к шагу 2

(4) Результаты решения

* $f = -\cos(x)\cdot x^2$ на промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$

• Метод дихотомии: $(\delta = 0.25)$

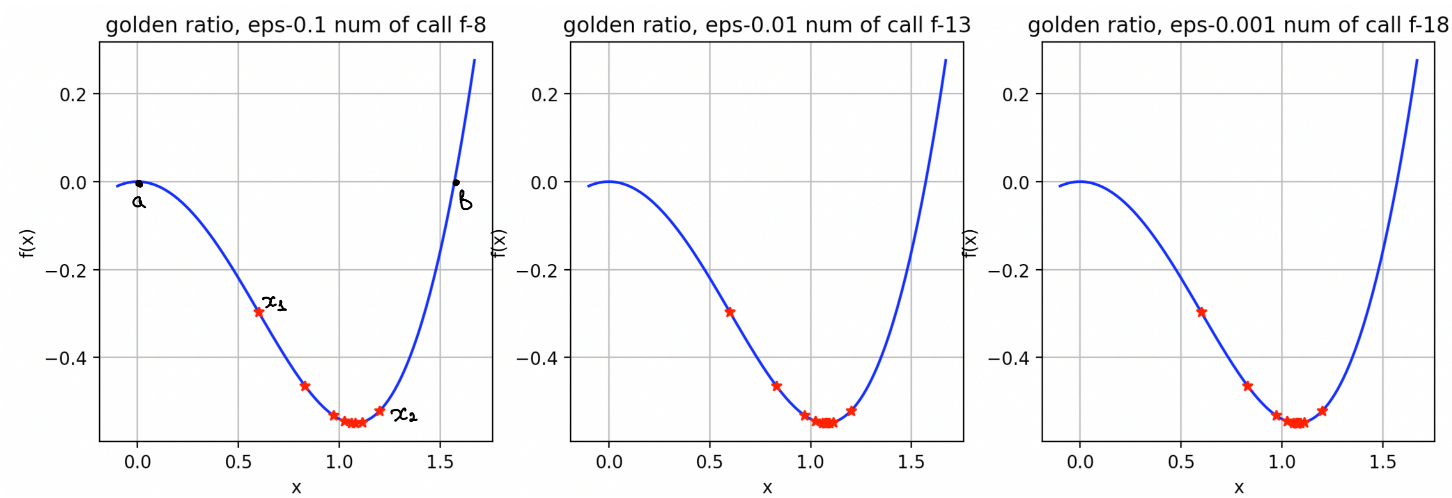


Для заданной точности: $\varepsilon = 0.1$ потребовалось 20 вызовов $f(x)$
и был получен ответ: $x_{min} = 1.072$

$\varepsilon = 0.01$ потребовалось 36 вызовов $f(x)$
и был получен ответ: $x_{min} = 1.0769$

$\varepsilon = 0.001$ потребовалось 52 вызовов $f(x)$
и был получен ответ $x_{min} = 1.0768$

- Метод золотого сечения



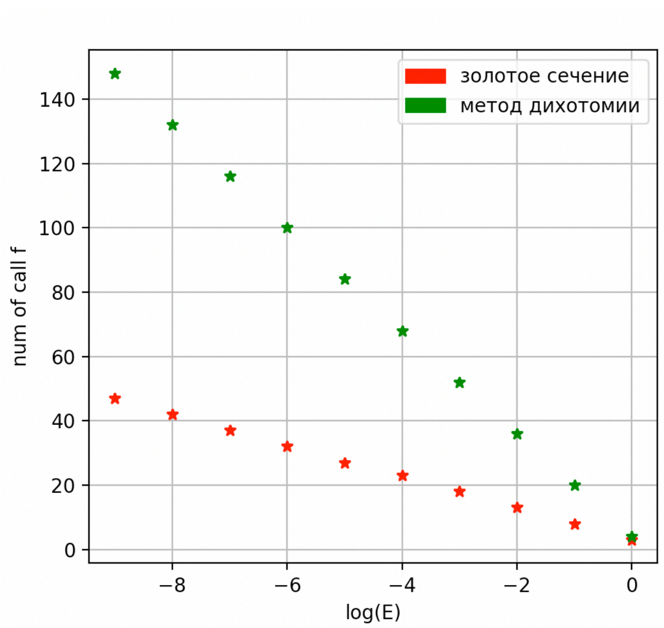
Исследование метода золотого сечения

Для заданной точности: $\varepsilon = 0.1$ потребовалось 8 вызовов $f(x)$ и был получен ответ: $x_{min} = 1.068$

$\varepsilon = 0.01$ потребовалось 13 вызовов $f(x)$ и был получен ответ: $x_{min} = 1.075$

$\varepsilon = 0.001$ потребовалось 18 вызовов $f(x)$ и был получен ответ $x_{min} = 1.0767$

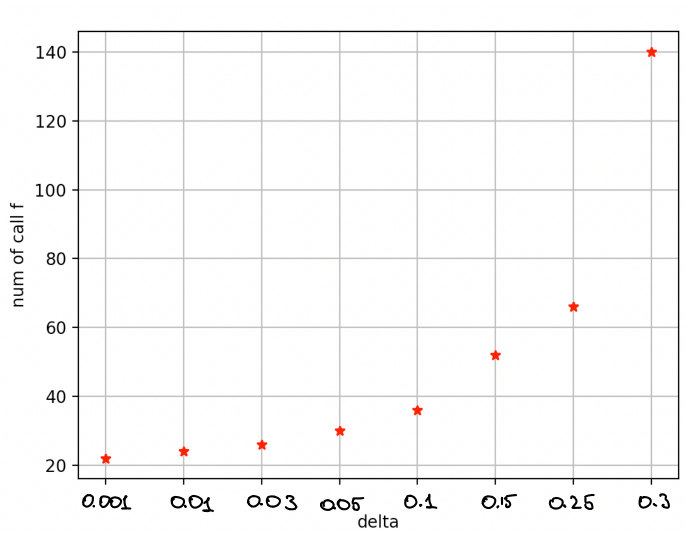
- Сравнение методов:



Данный график иллюстрирует зависимость количества вызовов функции от порядка точности

Полученный результат объясняется тем, что в методе золотого сечения происходит только одно обращение к функции, а в методе дихотомии 2.

5 Исследование выбора δ в методе дихотомии



Данный график иллюстрирует зависимость кол-ва обращений к ф-ции в методе дихотомии в зависимости от выбранного δ.

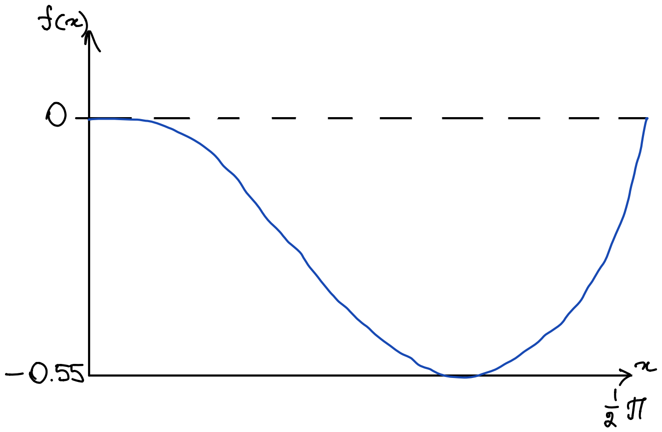
Объясняется данный график тем, что чем ближе δ к 0 тем ближе метод к бинарному поиску, т.е. длина отрезка:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

Добавленная страница

Обоснование применимости

$$f(x) = -\cos(x)\,x^2 \quad , x \in [0; \tfrac{\pi}{2}]$$



Из графика функции видим что ф-я имеет единственный глобальный минимум на промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$, слева от которой $f(x)$ монотонно убывает, а справа монотонно возрастает.

Следовательно, данная ф-я унимодальна на промежутке.

А если ф-я унимодальна ; $(\exists x_1 = a, x_2 = b)$ $x_1 \neq x_2$, то можем рассматривать сокращённый интервал неопределённости.

Обоснование достоверности

① Чтобы ф-я достигала в точке локального экстремума необходимо, чтобы $f(x)$ была дифференцируема в этой точке, и $f(\tilde{x}) = 0$ в ней.

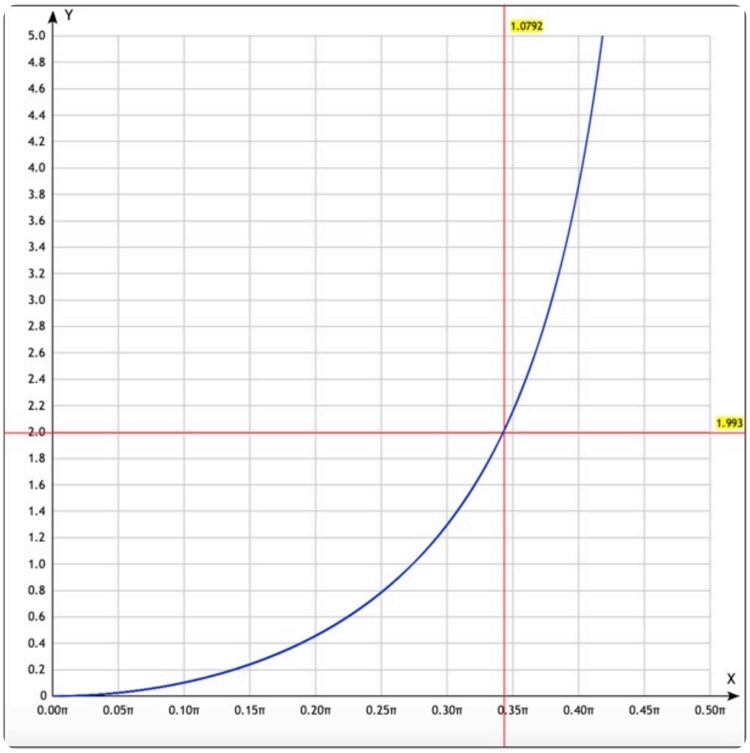
② Для того, чтобы $\tilde{x}$ была точкой локального экстремума достаточно, чтобы $f(x)$ была n раз дифференцируема в $\tilde{x}$, и в этой (·) все производные $f(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно были равны нулю; $f^{(n)}(\tilde{x}) \neq 0$.
Тогда, если n – чётное число, то при $f^{(n)}(\tilde{x}) > 0$ $\tilde{x}$ – точка локального минимума.

$$f(x) = -\cos(x) \cdot x^2$$
$$f'(x) = \sin(x)x^2 - 2x\cos(x)$$

$$x(tg(x) \cdot x - 2) = 0$$
$$x = 0$$
$$tg(x) \cdot x = 2$$

$$f''(x) = \cos(x)x^2 + 2\sin(x)x - 2\cos(x) + 2\sin(x) \cdot x = $$
$$= \cos(x)x^2 + 4\sin(x) \cdot x - 2\cos(x)$$

Данное уравнение сложно решить аналитически, решим графически.



Подозрительная на экстремум точка лежит в пр-ке $[\frac{1}{3}\pi; \frac{7}{20}\pi]$

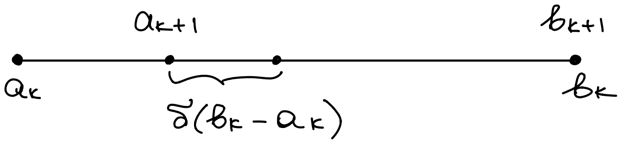
$f''(x)$ положительна на этом пр-ке

Следовательно, ф-я удволет воряет необходимым и достаточным условиям локального минимума, и эта точка принадлежит промежутку: $[\frac{1}{3}\pi; \frac{7}{20}\pi]$

Формулы связи исходного и конечного интервалов] $I_k = b_k - a_k$

Метод дихотомии:

связь k и k+1 интервалов



$$I_{k+1} = \frac{I_k}{2} + \delta(b_k - a_k) = I_k\left(\frac{1}{2} + \delta\right)$$

$$\Rightarrow I_k = I_1\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^k$$

Метод золотого сечения:

$$I_{k+1} = I_k\left(1 - \frac{1}{\Phi + 1}\right) \Rightarrow I_k = I_1 \Phi^k$$