Отчёт по лабораторной работе № 2
по теме „Транспортная задача"

Выполнили Порошин М.
Заболотских Е.

Вариант 29.

① Постановка задачи:

Решить транспортную задачу методом потенциалов, начальный план строить методом северо западного угла. Решить ту же задачу методом перебора крайних точек. Отдельно учесть и описать в алгоритме разреженность матрицы ограничений.

② Исследование применимости метода:

Для применения метода потенциалов необходимо, чтобы задача была дана в закрытом виде.

③ Описание алгоритма:

Дано: m – поставщиков, a_i - кол-во груза у i-го поставщика
n – покупателей, b_j – кол-во груза, который нужно доставить до j-го покупателя
c_{ij} – цена доставки 1 груза от i-го поставщика к j-покупателю

Представление данных в табличном виде:

	b_1	b_2	...	b_m
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}
a_2	c_{21}			⋮
⋮	⋮			⋮
a_n	c_{n1}	...	...	c_{nm}

← заказы (строка $b_1 \dots b_m$); запасы ($a_1 \dots a_n$)

1° Нахождение начального плана методом северо-западного угла

1) Исходным положением выбираем точку $p := (0;0)$

2) Если $p.x \geq n$ или $p.y \geq m$ – начальное приближение построено, выходим.

3) Находим $v := \min(a_{p.x}\ b_{p.y})$
и вычитаем: $a_{p.x} = a_{p.x} - v$
$b_{p.y} = b_{p.y} - v$

4) Заменяем $X[p.x][p.y] = v$

5) Если $a_{p.x} == 0$, то опускаемся вниз: $p.y = p.y + 1$
иначе: $p.x = p.x + 1$

6) Возвращаемся к пункту 2.

2° Метод потенциалов

1) Вычисление потенциалов:
Для клеток базисного плана составим ур-ния:
$u_i + v_j = c_{ij}$

2) Вычисление Δc_{ij}
Для свободных клеток плана вычислим:
$\Delta c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

3) Если все $\Delta c_{ij} \geq 0$ — план оптимальный

4) Находим клетку с наименьшей величиной Δc_{ij}

5) Начиная с этой клетки строим цикл, который проходит только по клеткам базисного плана, за исключением исходной, для этого реализуем рекурсивную функцию, которая сначала ищет по строке клетки базисного плана, а потом ищет по столбцу и так далее, пока не вернется к исходной.

6) Пересчитываем базисный план, для этого: разделяем клетки цикла на четные и нечетные среди четных находим минимальный элемент и на эту величину уменьшаем четные клетки, а нечетные увеличиваем

7) Переходим к шагу 1.

4 Результаты решения:

1. Метод северо-западного угла

6 / 21	10	9	11	21	21
4 / 1	11 / 7	7	18	19	8
12	2 / 5	13	8	22	5
9	8 / 9	23 / 14	20 / 6	15 / 6	35
22	21	14	6	6	

запасы

заказы

2. Метод потенциалов

1 $\boxed{6}$ **1**	2 $\boxed{10}$	3 $\boxed{9}$ **14**	4 $\boxed{11}$ **6**	5 $\boxed{21}$	21
6 $\boxed{4}$ **8**	7 $\boxed{11}$	8 $\boxed{7}$	9 $\boxed{18}$	10 $\boxed{19}$	8
11 $\boxed{12}$	12 $\boxed{2}$ **5**	13 $\boxed{13}$	14 $\boxed{8}$	15 $\boxed{22}$	5
16 $\boxed{9}$ **13**	17 $\boxed{8}$ **16**	18 $\boxed{23}$	19 $\boxed{20}$	20 $\boxed{15}$ **6**	35
22	21	14	6	6	

Значение целевой функции: 575

Критерием выхода из алгоритма были неотрицательные Δc_{ij}, значит данное решение удов. Th. о необх. и дос. усл. opt. решения.

5 Метод перебора крайних точек

Поставим задачу Л.П. в каноническом виде

Было $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij} \to \min$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1..m & (1) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1..n & (2) \end{cases}$$

Стало: $\sum_{i=0}^{m\cdot n} x_i c_i \to \min$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{i\cdot m+j} = a_i, \quad i = 1..m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{i\cdot m+j} = b_j, \quad j = 1..n \end{cases}$$

Т.е. получим:

$$c^T = (6, 10, 9, 11, 21, 4, 11, 7, 18, 19, 12, 2, 13, 8, 22, 9, 8, 23, 20, 15)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1}
\end{array}\right) \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 5 \\ 35 \\ 22 \\ 21 \\ 14 \\ 6 \\ \cancel{6} \end{pmatrix}$$

Вычеркиваем одну, любую, строчку из системы уравнений, потому что если просуммировать ур-ния (1) и (2), в силу закрытости задачи получим одинаковые уравнения, т.е. исходная задача л.з.

⑥ Алгоритм метода перебора крайних точек:

Будем перебирать все возможные выборки от 1..m среди чисел 1...n. Обозначим такую выборку N

В случае, если $\det(A[N, M]) \neq 0$ найдем с.в., решив систему: $A[N\, M]\, X[N] = B$. Если полученный с.в. не имеет отрицательных координат посчитаем значение целевой функции: $target = C^T[N] \cdot X[N]$ и запомним его.

Среди всех полученных значений выберем наименьшее.

⑦ Результаты решения:

Был получен ответ при выборке индексов: $\{1, 3, 6, 12, 16, 17, 20\}$ что совпадает с решением с помощью метода потенциалов
Полученный с.в.: $X = \{1, 0, 14, 6, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 13, 16, 0, 0, 6\}$

⑧ Сравнение методов:

Для нахождения оптимального значения методом перебора понадобилось C_{20}^{8} итераций, а для метода потенциалов - 3 итерации.

Но метод перебора гораздо проще в реализации и отладке.

Добавленная страница

Предполагалось другое решение:

1 [6] **9**	2 [10]	3 [9] **8**	4 [11] **4**	5 [21]	21
6 [4] **2**	7 [11]	8 [7] **6**	9 [18]	10 [19]	8
11 [12]	12 [2] **3**	13 [13]	14 [8] **2**	15 [22]	5
16 [9] **11**	17 [8] **18**	18 [23]	19 [20]	20 [15] **6**	35
22	21	14	6	6	

Значение целевой ф-ции для данного решения:

$$f(\bar{x}) = 6\cdot 9 + 9\cdot 8 + 11\cdot 4 + 4\cdot 2 + 6\cdot 7 + 3\cdot 2 + 2\cdot 8 + 11\cdot 9 + 18\cdot 8 + 6\cdot 15 = 575$$

Т.е. совпадает с значением целевой функции полученным в ходе решения.

Причиной наличия другого решения является тот факт, что opt может достигаться не на одной точке, а на грани множества S.

С помощью метода перебора крайних точек можно найти другие опорные вектора, на которых достигается opt, например:

1 [6] **6**	2 [10]	3 [9] **14**	4 [11] **1**	5 [21]	21
6 [4] **8**	7 [11]	8 [7]	9 [18]	10 [19]	8
11 [12]	12 [2]	13 [13]	14 [8]	15 [22] **5**	5
16 [9]	17 [8] **8**	18 [23] **21**	19 [20]	20 [15] **6**	35
22	21	14	6	6	