Взаимная корреляционная ф-я

Теория

1° Система случайных ф-й

$(X_1, \dots, X_n)$ $\quad \exists\; n=2$ т.е. (X, Y)

2° Корреляционный анализ системы сл. ф-й

$\bar x(t) = M[X(t)]$; $\bar y(t) = M[Y(t)]$

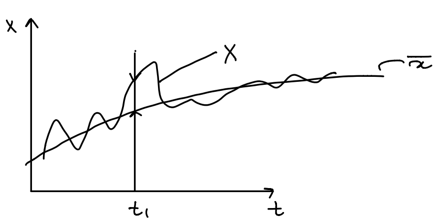
Автокорреляционные ф-ии

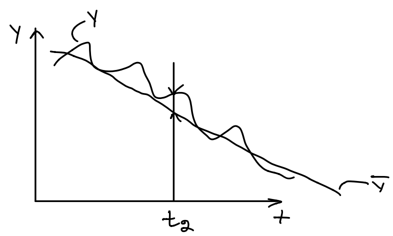
$$K_x(t_1, t_2) = M[\mathring{X}(t_1)\mathring{X}(t_2)]$$

$$K_y(t_1, t_2) = M[\mathring{Y}(t_1)\mathring{Y}(t_2)]$$

Взаимная корреляционная ф-я

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M[\mathring{X}(t_1)\mathring{Y}(t_2)]$$





3° Другое представление

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[X(t_1)Y(t_2)] - \bar x(t_1)\bar y(t_2)$$

4° Выражение через совместный закон распр-я $X(t)\ \ Y(t)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \bar x(t_1))(y - \bar y(t_2))\, f_{1,1}(x, y; t_1, t_2)\, dx\, dy$$

5° Корреляционный момент между $X(t), Y(t)$

$$k_{xy}(t) = M[\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t)] = R_{xy}(t, t)$$

6° Ограниченность

$$|R_{xy}(t_1, t_2)| \le \sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)$$

7° Нормированная взаимная корр. ф-я

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)},$$

$|r_{xy}| \le 1$

r_{xy} - безразм. вел-на

8° Другой вид ограничений

$$|R_{xy}(t_1,t_2)| \le \frac{1}{2}\left[\sigma_x^2(t_1) + \sigma_y^2(t_2)\right]$$

9° Симметрия относительно замены аргументов

$$R_{xy}(t_1,t_2) = R_{yx}(t_2,t_1)$$

!!!

10° Случай стационарных и стационарно связанных ф-й.

требуем: $\begin{cases} f_1(x;t) = \text{const}\,(t) \\ f_1(y;t) = \text{const}\,(t) \\ f_2(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_2(x_1,x_2,t_2-t_1) \\ f_2(y_1,y_2;t_1,t_2) = f_2(y_1,y_2,t_2-t_1) \end{cases}$

стационарная связь означает

$$f_{1,1}(x,y,t_1,t_2) = f_{1,1}(x,y;t_2-t_1)$$

$$K_x(t_1,t_2) = K_x(t_2-t_1) \qquad K_y(t_1,t_2) = K_y(t_2-t_1)$$
$$R_{xy}(t_1,t_2) = R_{xy}(t_2-t_1)$$

Примеры

Пример № 1

$$Z(t) = a(t)X(t) + b(t)Y(t)$$

$a(t)$, $b(t)$ – заданные детермин. ф-ии.

$\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $K_x(t_1,t_2)$, $K_y(t_1,t_2)$, $R_{xy}(t_1,t_2)$

$\bar{z}(t)$; $K_z(t_1,t_2)$

Мат. ожид.

$$\bar{z}(t) = M[a(t)X(t)] + M[b(t)Y(t)] = a(t)\bar{x}(t) + b(t)\bar{y}(t)$$

Корреляционная формула

$$\mathring{Z}(t) = Z(t) - \bar{Z}(t) = a(t)X(t) + b(t)Y(t) - a(t)\bar{x}(t) - b(t)\bar{y}(t) =$$

$$= a(t)\underbrace{[X(t) - \bar{x}(t)]}_{\mathring{X}(t)} + b(t)\underbrace{[Y(t) - \bar{y}(t)]}_{\mathring{Y}(t)} = a(t)\mathring{X}(t) + b(t)\mathring{Y}(t)$$

$$K_z(t_1,t_2) = M\Big[\underbrace{\big(a(t_1)\mathring{X}(t_1) + b(t_1)\mathring{Y}(t_1)\big)}_{\mathring{Z}(t_1)}\underbrace{\big(a(t_2)\mathring{X}(t_2) + b(t_2)\mathring{Y}(t_2)\big)}_{\mathring{Z}(t_2)}\Big] =$$

$$= a(t_1)a(t_2)\underline{K_x(t_1,t_2)} + b(t_1)b(t_2)\underline{K_y(t_1,t_2)} + a(t_1)b(t_2)\underline{R_{xy}(t_1,t_2)} +$$
$$+ a(t_2)b(t_1)\underline{R_{xy}(t_2,t_1)}$$

Пример №2

$X(t)$, $Y(t)$ – стационарные, нормальные, центрированные.

σ_x^2, σ_y^2, $R_{xy}(\tau)$

$R_{x^2y^2}(\tau)$ – ?

нелинейная зависимость

Вопрос: если взять $X_1(\tau) = X^2(\tau)$ $Y_1(\tau) = Y^2(\tau)$ $\overset{?}{\mapsto}$ найдется ли $R_{x_1y_1}(\tau)$

$$R_{x_1y_1}(\tau) = R_{x^2y^2}(\tau) = M[(X^2(t) - \sigma_x^2)(Y^2(t+\tau) - \sigma_y^2)]$$

$$M[X^2(t)] = K_x(t,t) = \sigma_x^2$$

аналогично $M[Y^2(t)] = K_y(t,t) = \sigma_y^2$

Воспользуемся другим выр-м

$$R_{x^2y^2}(\tau) = M[X^2(t)\,Y^2(t+\tau)] - \sigma_x^2\sigma_y^2$$

$$m_{22}(\tau) = M[X^2(t)\,Y^2(t+\tau)]$$

Выразим момент через хар-ю ф-ю:

$$E(z_1, z_2) = M[e^{i(z_1X(t) + z_2Y(t+\tau))}] =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}[\sigma_x^2 z_1^2 + \sigma_y^2 z_2^2 + 2R_{xy}(\tau)z_1z_2]}$$

$$m_{2,2} = \frac{1}{i^4}\left.\frac{\partial^4 E(z_1,z_2)}{\partial z_1^2\,\partial z_2^2}\right|_{z_1=z_2=0}$$

$$E(z, z_2) = e^{-S(z_1,z_2)}$$

$$S(z_1,z_2) = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 z_1^2 + \sigma_y^2 z_2^2 + R_{xy}z_1z_2)$$

$$S_j(z_1, z_2) = \frac{\partial S}{\partial z_j} \qquad j = \overline{1,2}$$

$$S_{jk} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_j\,\partial z_k}$$

$$S_{11} = \sigma_x^2$$
$$S_{22} = \sigma_y^2$$
$$S_{12} = S_{21} = R_{xy}$$

$$S\big|_{z_1=z_2=0}=0 \qquad E\big|_{z_1=z_2=0}=1$$

$$\frac{\partial E}{\partial z_1}=E\left(-S_1\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z_1^2}=E\,S_1^2-E\,S_{11}$$

$$\frac{\partial^3 E}{\partial z_1^2\,\partial z}$$