128 $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (2xt + 4x^2)\varphi(t)\,dt = 0$ − однородное ур-е Фредгольма II рода

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (2xt + 4x^2)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = 2\lambda x \int_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt + 4\lambda x^2 \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = 2\lambda x C_1 + 4\lambda x^2 C_2$$

$$C_1 = \int_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt \qquad C_2 = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt$$

Подставлем $\varphi(x)$ в C_1 и C_2:

$$C_1 - \int_{-1}^{1} t(2\lambda t C_1 + 4\lambda t^2 C_2)\,dt = 0$$

$$C_1\left(1 - 2\lambda \int_{-1}^{1} t^2\,dt\right) - C_2 4\lambda \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$$

$$C_1\left(1 - 2\lambda \frac{2}{3}\right) - C_2\, 4\lambda \cdot 0 = 0$$

$$C_2 - \int_{-1}^{1} (2\lambda t C_1 + 4\lambda t^2 C_2)\,dt = 0$$

$$-2\lambda C_1 \int_{-1}^{1} t\,dt + C_2\left(1 - 4\lambda \int_{-1}^{1} t^2\,dt\right) = 0$$

$$-2\lambda C_1 \cdot 0 + C_2\left(1 - 4\lambda \frac{2}{3}\right) = 0$$

Имеем систему

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{4}{3}\lambda\right) + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cdot 0 + C_2\left(1 - \frac{8}{3}\lambda\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{4}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1 - \frac{8}{3}\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{3}{4} \qquad \lambda_2 = \frac{3}{8}$$

подставим λ_1 в систему:

$$\begin{cases} C_1(1 - 1) + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cdot 0 + C_2\left(1 - \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Собств. ф-я будет $\varphi_1(x) = 2\lambda C_1 x$

или, полагая, что $C_1\lambda = 1 \Rightarrow \varphi_1(x) = 2x$

Подставим λ_2 в систему:

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{3}{8}\lambda\right) + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cdot 0 + C_2\left(1 - \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0$$

$\Rightarrow$ Собств. ф-я будет $\varphi_2(x) = 4\lambda x^2 C_2$

или, полагая, что $C_1\lambda = 1 \Rightarrow \varphi_2(x) = 4x^2$

Ответ: $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ $\quad \varphi_1(x) = 2x$

$\lambda_2 = \frac{3}{8}$ $\quad \varphi_2(x) = 4x^2$

124 $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t\, \varphi(t)\, dt = 0$ однородное ур-е Фредгольма II рода

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int_0^{2\pi} \cos(t) \varphi(t)\, dt$$

$$\text{Л} \quad C = \int_0^{2\pi} \cos(t) \varphi(t)\, dt \quad (**)$$

$$\varphi(x) = \lambda C \sin(x) \quad (*)$$

Подставим (*) в (**)

$$\lambda C \sin x \int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$$

Данное однородное ур-е при любых λ имеет только одно нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$ => оно не имеет характеристических чисел и собств. ф-й.

Ответ: нет

291 $\int_0^x J_0(x-t)\, \varphi(t)\, dt = \sin x$ — ур-е типа свёртки

$$K(x,t) = J_0(x-t)$$

$$\varphi(x) \div \overline{\varphi}$$

$$J_0 \div \overline{J_0} \qquad \overline{J_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}\; p}$$

$$\sin(x) \div \frac{1}{p^2+1}$$

$$\overline{J_0}\, \overline{\varphi}(x) = \frac{1}{p^2+1}$$

$$\overline{\varphi}(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}\; p}{p^2+1}$$

$$\varphi(x) = J_0(x) \qquad \text{Ответ: } J_0(x)$$

242 $\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt$ $\quad K(x,t) = -\operatorname{sh}(x-t)$

$$\varphi'(x) = 1 - \underbrace{\operatorname{sh}(x-x)}_{0}\varphi(x) - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi'(x) = 1 - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi''(x) = -\underbrace{\operatorname{ch}(x-x)}_{1}\varphi(x) - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi''(x) = -\varphi(x) - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi''(x) = -x + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi''(x) = -x$$

$$\varphi(0) = 0 - \int_0^0 \dots = 0$$

$$\varphi'(0) = 1 - \int_0^0 \dots = 1$$

Задача Коши: $\varphi''(x) = -x$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 1 \end{cases}$$ Решение $\varphi(x) = -\frac{x^3}{6} + x$

Ответ: $\varphi(x) = -\frac{x^3}{6} + x$

291 $\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x$ — ур-е типа свёртки

$$K(x,t) = J_0(x-t)$$

$$\varphi(x) \div \overline{\varphi}$$

$$J_0 \div \overline{J_0} \qquad \overline{J_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}\;p}$$

$$\sin(x) \div \frac{1}{p^2+1}$$

$$\overline{J_0}\,\overline{\varphi}(x) = \frac{1}{p^2+1}$$

$$\overline{\varphi}(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}\;p}{p^2+1}$$

$\varphi(x) = J_0(x)$ $\quad$ Ответ: $J_0(x)$