Свойства интеграла

1° Интеграл от непрерывной сл. ф-ии существует

2° Св-во линейности

Интеграл от сл. ф-ии является линейной операцией.

$$\int_a^b [\alpha(t)X(t) + \beta(t)Y(t)]\,dt = \int_a^b \alpha(t)X(t)\,dt + \int_a^b \beta(t)Y(t)\,dt$$

Если $\alpha(t) = \alpha = const(t)$

$\beta(t) = \beta = const(t)$

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)]\,dt = \alpha\int_a^b X(t)\,dt + \beta\int_a^b Y(t)\,dt$$

3° Интегрирование по частям

$$\int_a^b \dot{\varphi}(t)X(t)\,dt = \varphi(t)X(t)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi(t)\dot{X}(t)\,dt$$

φ – детерминированная дифф. ф-я.

X – дифф. случайная ф-я.

4° Интеграл с переменным верхним пределом

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau \qquad \dot{Y}(t) = X(t)$$

Вычисление корреляционной ф-ии интеграла от стационарной случ. ф-ии.

] $X(t)$ – стационарная случайная ф-я

$\bar{x}$ – мат. ожидание

$K_x(\tau)$ – коррел. ф-я

Введи $Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau$

$\bar{y}(\tau) = \int_0^t \bar{x}\,d\tau = \bar{x}t$ т.к. случ.

$$K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \underset{\text{т.к. стацион.}}{=} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1}(t_1-\tau)K_x(\tau)\,d\tau +$$

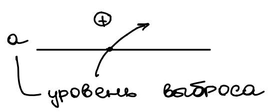
$$+ \int_0^{t_2}(t_2-\tau)K_x(\tau)\,d\tau - \int_0^{|t_2-t_1|}(|t_2-t_1|-\tau)K_x(\tau)\,d\tau.$$

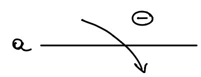
Задачи о выбросах случайных процессов. Теория Райса.

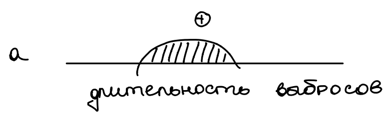
1) § 33 задачника
2) Параграф в книге Свешникова
3) Тихонов В.И., Химченко В.И. „Выбросы траекторий случайных процессов."
4) Тихонов „Выбросы случайных процессов"

Теория

1° Определение понятия выброса







2° Теория Райса (S.O. Rice)

$X(t)$ — стационарный дифф. процесс

$V(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ — существует

$f(x, v; t)$ — совместный закон распределения $X(t)$ и $V(t)$

Уровень выброса a — постоянный

3° Формула Райса для среднего числа выбросов в интервале $[t_1, t_2]$

$N_a^+(t_1, t_2)$ — число положит. выбросов в интервале $[t_1, t_2]$

$N_a^-(t_1, t_2)$ — число положит. выбросов в интервале $[t_1, t_2]$

$$\bar{n}_a^\pm(t_1, t_2) = M[N_a^\pm(t_1, t_2)]$$

$$\bar{n}_a^+(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \nu_a^+(t)\,dt$$

$\nu_a^+(t)$ — интенсивность появления положительных выбросов в момент t

$$\bar{n}_a^-(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \nu_a^-(t)\,dt$$

$\nu_a^-(t)$ — интенсивность появления отрицательных выбросов в момент t

$$\nu_a^+ = \int_0^\infty v\, f_{x\dot x}(a, v; t)\, dv$$

$$\nu_a^- = \int_{-\infty}^0 v\, f_{x\dot x}(a, v; t)\, dv$$

$$\nu_a^\pm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v\, \frac{\mathrm{sign}(v) \pm 1}{2}\, f_{x\dot x}(a, v; t)\, dv$$

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

4° Среднее число пересечений

$$N_a(t_1, t_2) = N_a^+(t_1, t_2) + N_a^-(t_1, t_2)$$

$$\bar n_a(t_1, t_2) = \bar n_a^+(t_1, t_2) + \bar n_a^-(t_1, t_2)$$

$\mu_a(t)$ – интенсивность пересечений

$$\mu_a(t) = \nu_a^+(t) + \nu_a^-(t)$$

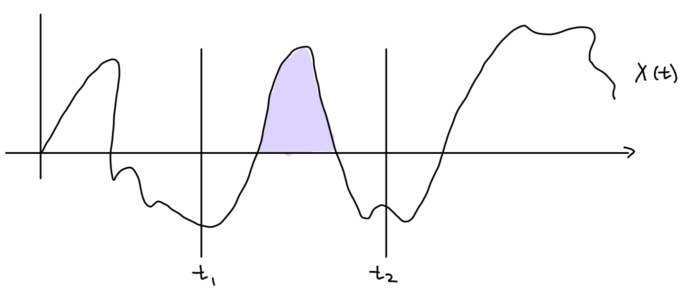
$$\mu_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |v|\, f_{x\dot x}(a, v; t)\, dv$$

5° Средняя длительность выбросов в интервале

$$T_a^\pm(t_1, t_2)$$

$$\bar t_a^+(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} [1 - F_x(a; t)]\, dt$$

$$\bar t_a^-(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F_x(a; t)\, dt$$



6° Средняя длительность одного выброса

$$\bar\tau_a^\pm(t_1, t_2) = \frac{\bar t_a^\pm(t_1, t_2)}{\bar n_a^\pm(t_1, t_2)}$$

7° Среднее число максимумов

$$\bar n_{max}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \nu_{max}(t)\, dt$$

$$\nu_{max}(t) = -\int_0^{\infty} x_2 f_{\dot{x}\ddot{x}}(0, x_2; t)\, dx_2$$

8° Среднее число минимумов

$$\nu_{min}(t) = \int_0^{\infty} x_2 f_{\dot{x}\ddot{x}}(0, x_2; t)\, dx_2$$

9° Среднее число экстремумов

$$\nu_{extr}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| f_{\dot{x}\ddot{x}}(0, x_2; t)\, dx_2$$

Пример N 1

Определить среднее число нулей нормального стационарного центрированного процесса в корр. ф-й: $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$

Решение

$$K_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = \sigma^2\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|)$$

$(X, \dot{X})$ – норм. стац.; центр.; независ.

$$D(x) = \sigma_x^2\alpha^2$$

$$D(\dot{x}) = \sigma_x^2\alpha^2$$

$$K_{x\dot{x}} = 0$$

$$f(x, v; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\alpha} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2\alpha^2}}$$

$$\mu_a = \nu_a^+ + \nu_a^- = \int_{-\infty}^{\infty} |v| f(0, v; t)\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty} |v| \frac{e^{-\frac{v^2}{2\sigma_x^2\alpha^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\alpha}\, dv =$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma_x^2\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_x^2\alpha^2}} v\, dv = \frac{1}{\pi\sigma_x^2\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_x^2\alpha^2}}\, d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\alpha}{\pi}$$

$$\overline{m}_0 = \frac{\alpha t}{\pi}$$

Пример N 2

Найти ср. длительность одного выброса из примера N 1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\right)\right]$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \qquad \bar{x} = 0$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)\right]$$

$$\nu_0^+ = \nu_0^- = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1 - F(0)}{\nu_0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2\pi}} = \frac{\pi}{\alpha}$$