Слабая сходимость

Пусть X – н.п. $\Rightarrow$ $\exists$ сходимость по норме: $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (сильная сходимость)

У X $\exists$ X^* – сопряженное пространство

X^* – сопряжённое пространство — пространство линейных и ограниченных функционалов на X.

Можно ввести сходимость другим способом:

Опр слабая сходимость: $x_n \longrightarrow x$ ($x_n \xrightarrow{w} x$) в X, если $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ $\forall f \in X^*$

Свойства слабой сходимости

1. Th (единственность слабого предела)

Пусть $x_n \to x_1$, $x_n \to x_2$ в X. Тогда $x_1 = x_2$

Док-во ▷ $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_1)$, $f(x_n) \longrightarrow f(x_2)$, $\forall f \in X^*$

т.е. одна и та же числовая последовательность сх. к $f(x_1)$ и к $f(x_2)$

т.к. для числовых посл-й единств. предела имеет место:

$f(x_1) = f(x_2)$ $\forall f \in X^* \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0$, $\forall f \in X^* \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$ ◀

└ в силу линейности функционала

└ в силу второго следствия теоремы Хана – Банаха

2. Утв Пусть $x_n \to x$ в X

Тогда $x_n \rightharpoonup x$ в X

Док-во: ▷ Пусть $f \in X^*$ (огр. лин. функц.) ограниченность для лин. операторов экв-на непрерывности $\Rightarrow$ f – непр. $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ ◀

Пример: (слабая сх-ть не влечёт сильную)

※ простейшее г.п. ℓ^2 ※ в нём ортонорм. базис: $[e_i]_{i\in\mathbb{N}}$ – о.н.б. в ℓ^2

$e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$
↑ i-ая позиция

※ действие ф-ла на посл-ть: $f \in (\ell^2)^*$

$f(e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k (e_i)_k = u_i$ $\Rightarrow u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$

$\exists u \in \ell^2$
$\parallel$
$(u_1, u_2, \dots)$: $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$ (*)

└ в силу того, что $u \in \ell^2$ и (*) сх (общий член ряда $\to 0$)

имеем $f(e_i) \longrightarrow 0 = f(0)$ $\forall f \in (\ell^2)^*$

$e_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ в ℓ^2

сильно сходиться к 0 e_i никак не может т.к. $\|e_i\| = 1$ и $\|e_i - 0\| = 1$

3. Утв: Пусть $X = \mathbb{R}^n$; пусть $x_k \rightharpoonup x$ в $\mathbb{R}^n$ (слабая и сильная сх. в конечномерных пр-х совпадают)
Тогда $x_k \to x$ в $\mathbb{R}^n$

Док-во: ▷ Рассм. базис в $\mathbb{R}^n$: $e_1, \dots, e_n$; $x \in \mathbb{R}^n$: $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$
Рассм. $f(x) = \alpha_i$, $1 \le i \le n$ — данный ф-л линеен.
(i-ая координата)
В $\mathbb{R}^n$ все нормы экв-ны: пусть $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, тогда $|f(x)| = |\alpha_i| \le \|x\|_0$
Таким образом f — лин. и огр., т.е. $f \in (\mathbb{R}^n)^*$
По усл.: $x_k \rightharpoonup x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$ это значит, что $(\alpha_k)_i \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha_i$
т.е. слабая сх-ть в $\mathbb{R}^n$ порождает покоординатную сходимость, а она влечёт сх-ть по норме, а все нормы в $\mathbb{R}^n$ экв-ны: $x_k \to x$ ◀

4. Пусть $A \in B(X, Y)$, где X, Y — н.п.
(лин. огр. оператор (непр.))
($x_n \to x$ в $X \Rightarrow Ax_n \to Ax$)
а что будет при $x_n \rightharpoonup x$ в X (а будет: $\Rightarrow Ax_n \rightharpoonup Ax$)

Th Пусть $A \in B(X, Y)$, где X, Y — н.п.
Пусть $x_n \rightharpoonup x$ в X
Тогда $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в Y

Док-во: ▷ возьмём $f \in Y^*$ (лин. огр.) и покажем $f(Ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{f(Ax)}_{\text{число}}$
Рассм. $\varphi(x) = f(Ax)$, $\forall x \in X$

- линейность:
$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = f(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = f(\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2) = \alpha_1 f(Ax_1) + \alpha_2 f(Ax_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2)$
(линейность оператора A; линейность ф-ла)
- ограниченность:
$|\varphi(x)| = |f(Ax)| \le \|f\|_{Y^*} \|Ax\|_Y \le \|f\|_{Y^*} \|A\| \|x\|$, $\forall x \in X$ (т.е. норма оценив-ся пр-м $\|f\|_{Y^*} \|A\|$)
(огр-ть ф-ла f; огр-ть оп-ра A)

$\Rightarrow \varphi \in X^*$.
Раз $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \varphi(x_n) \to \varphi(x) \Rightarrow f(Ax_n) \to f(Ax)$ ◀

5. Th: слабая полунепрерывность нормы
Пусть X — н.п.
Пусть $x_n \rightharpoonup x$ (таким образом норма является полунепрерывной снизу относительно слабой сходимости)
Тогда $\|x\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ (норма непрерывна относ-но сильной сх-ти)

Док-во: ▷
введём обозначение: $d = \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ нижний предел обязательно реализуется на какой-то последовательности $\{x_n\}$
$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$: $\|x_{n_k}\| \to d$

1-ое следствие th Хана-Банаха: $\exists f \in X^*$: $\|f\|_{X^*} = 1$
$f(x) = \|x\|$

$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x_{n_k} \rightharpoonup x \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x) = \|x\|$

оценим через собств. модуль $f(x_{n_k})$:

$$f(x_{n_k}) \le \|f(x_{n_k})\| \underset{\substack{\uparrow \\ f\text{-огр-н}}}{\le} \underbrace{\|f\|_{X^*}}_{=1} \underbrace{\|x_{n_k}\|_X}_{\xrightarrow{\text{сх}} d} \longrightarrow d$$

$$d \longleftarrow \cdots \geqslant f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x) = \|x\|$$

переходя к пределу в нер-ве $\|x\| \le d$ ◀