Занятие 07.09

Цепи Маркова. Вычисление переходных вероятностей

При изучении систем обслуживания одним из основных методов их расчета является метод, основанный на применении теории Марковских процессов. В ТМО используются марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Чтобы лучше понять эти методы целесообразно вначале рассмотреть более простую модель, когда и время дискретно, и множество состояний процесса дискретно. Такие процессы называются цепями Маркова. Их изучению в задачнике Свешникова посвящен §38. Там же даются расчетные формулы и примеры решения задач.

Теория

1°. Понятие случайной функции

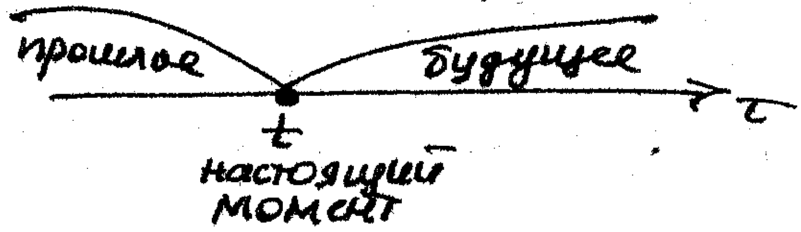
Случайной функцией называют такую функцию, значение которой при каждом значении аргумента является случайной величиной.

Случайная функция одного аргумента t, который трактуется как время, называется случайным процессом.

2°. Марковские процессы

Среди случайных процессов особо выделяют марковские процессы. Они названы по имени А. А. Маркова, впервые рассмотревшего такие процессы для случая дискретного времени.

С физической точки зрения марковский процесс (МП) — это процесс без памяти. Математически МП определяется так. Рассмотрим случайный процесс $U(t)$. Выберем два момента времени: фиксированный начальный момент t и произвольный будущий момент $\tau > t$. Рассмотрим две ординаты процесса $X = U(t)$ и $Y = U(\tau)$. Это есть некоторые случайные величины.



Зафиксируем момент t и ординату процесса $X = x$ в момент t. Тогда если закон распределения Y при любом $\tau > t$ зависит только от t и x и не зависит от поведения процесса в прошлом при $\tau < t$, то процесс называется марковским. Иначе говоря, будущее поведение марковского процесса определено только нынешним состоянием процесса и не зависит от его предыстории

3° Цепь Маркова (ЦМ)

Цепью Маркова называют МПС с дискретным множеством состояний и дискретным временем.

Для цепи Маркова можно пронумеровать все моменты времени t, считая что t принимает целые неотрицательные значения. Можно пронумеровать и отсчитывать номер состояния процесса, а считая что t принимает состояния $N(t)$, значения 0, 1, 2, ...

4° Вероятности состояний ЦМ

Допустим, что имеется m состояний цепи Маркова. Введем вероятности состояний в момент t

$$P_i(t) = \mathcal{P}\{N(t) = i\}, \quad (i = \overline{1,m};\ m \leq \infty). \qquad (1)$$

Из этих вероятностей можно сформировать вектор вероятностей состояний

$$\vec{P}(t) = \{P_i(t)\}_{i=1}^{m}. \qquad (2)$$

При записи формул теории ЦМ часто бывает удобно использовать не вектор (2) а матрицу-строку вероятностей

$$\overline{P}(t) = \| P_i(t) \|_{i=1}^{m} = \vec{P}^{T}(t), \qquad (3)$$

где T — символ транспонирования. Условимся во избежание путаницы строку вероятностей всегда помечать сверху чертой, а вектор-стрелочкой, как это показано в (2) и (3).

Вероятности состояний ЦМ удовлетворяют двум очевидным ограничениям

$$0 \le P_i(t) \le 1, \quad (i = \overline{1,m};\ t = \overline{0,\infty}) \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(t) \equiv 1, \quad (t = \overline{0,\infty})$$

Последнее условие (4) можно переписать в векторной форме

$$\vec{P}^{T}(t)\ \vec{1} \equiv 1, \qquad (5)$$

где $\vec{1}$ обозначает m-мерный вектор, составленный из единиц

$$\vec{1} = \{1, \dots, 1\}.$$

5°. Начальное условие ЦМ

Считаем начальным моментом $t=0$. Номер начального состояния

$$N(0) = N_0, \qquad (6)$$

вообще говоря может быть случайным. Тогда нужно задать распределение N_0

$$\mathcal{P}\{N_0 = i\} = P_{0i}, \quad (i = \overline{1,m}). \qquad (7)$$

Из вероятностей P_{0i} формируется вектор вероятностей начального состояния

$$\vec{P}_0 = \{P_{0i}\}_{i=1}^{m}. \qquad (8)$$

Очевидно, для начального состояния ЦМ

$$\vec{P}(0) = \vec{P}_0 \qquad (9)$$

6°. Вероятности перехода ЦМ

$$P_{ij}(t) = \mathcal{P}\{N(t)=j \mid N(t-1)=i\}, \qquad (10)$$

$$(i, j = \overline{1,m}).$$

Из вероятностей перехода формируется матрица перехода ЦМ

$$\mathcal{P}(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^{m}. \quad (11)$$

Вообще говоря, матрица перехода может зависеть от момента времени t.

7° Ограничение на вероятности перехода

$$0 \le p_{ij}(t) \le 1, \quad (i,j=\overline{1,m};\ t=\overline{1,\infty}),$$
$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t) = 1, \quad (i=\overline{1,m};\ t=\overline{1,\infty}). \quad (12)$$

Второе условие (12) физически означает, что выходе из какого-либо состояния ЦМ мы обязательно перейдем в одно из m имеющихся состояний этой цепи. Математически это значит, что сумма элементов матрицы $\mathcal{P}(t)$ по любой строке должна равняться единице. Такую матрицу называют стохастической.

8° Однородная ЦМ

Цепь называется однородной, если матрица перехода $\mathcal{P}$ постоянна для всех моментов времени

$$\mathcal{P}(t) = \text{const}(t) = \mathcal{P}. \quad (13)$$

9° Конечная цепь Маркова

Цепь называется конечной, если $m < \infty$, в противном случае при $m = \infty$ цепь называется бесконечной.

10° Выражение вероятностей состояния через вероятности начального состояния и матрицу перехода

$$\overline{p}(t) = \overline{p}(0) \prod_{j=1}^{t} \mathcal{P}(j). \quad (14)$$

Это основная формула теории ЦМ. Она отражает марковское свойство цепи и доказывается по индукции.

11°. Случай однородной ЦМ

$$\overline{P}(t) = \overline{P}(0)\,\mathcal{P}^t. \qquad (15)$$

Эта формула показывает, что для подсчета вероятностей состояний однородной цепи на произвольном t-м шаге нужно уметь считать <u>степени матрицы перехода</u>. Эта задача хорошо известна в линейной алгебре и для ее решения можно применить несколько методов.

12°. <u>Теорема Сильвестра</u>

Введем характеристический полином матрицы перехода $\mathcal{P}$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{P} - \lambda E), \qquad (16)$$

где E — единичная матрица порядка m. Рассмотрим корни характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda_s) = 0, \quad (s = \overline{1,m}), \qquad (17)$$

которые будем считать <u>простыми</u>. Тогда

$$\mathcal{P}^n = \sum_{j=1}^{m} \frac{(\mathcal{P}-\lambda_1 E)\ldots(\mathcal{P}-\lambda_{j-1}E)(\mathcal{P}-\lambda_{j+1}E)\ldots(\mathcal{P}-\lambda_m E)}{(\lambda_j-\lambda_1)\ldots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_m)}\lambda_j^n. \qquad (18)$$

Формула Сильвестра (18) позволяет выразить произвольную n-го степень $\mathcal{P}$ через младшие степени $\mathcal{P}$ от 1 до $m-1$.

13°. <u>Диагонализация</u>

В этом методе вначале матрицу $\mathcal{P}$ с помощью преобразования подобия вида

$$\mathcal{P} = H \Lambda H^{-1} \qquad (19)$$

выражают через некоторую ортогональную матрицу H

$$H H^T = E \qquad (20)$$

и диагональную матрицу

$$\Lambda = \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\{\lambda_i\}, \qquad (21)$$

где λ_i обозначают характеристические нения (17), которые считаются простыми. При сделанных предположениях

$$\mathcal{P}^n = H\Lambda^n H^{-1}, \qquad (22)$$

причем матрица Λ^n является диагональной

$$\Lambda^n = \operatorname{diag}_{1\le i\le m}\{\lambda_i^n\}. \qquad (23)$$

14° Формула Перрона

Эта формула в отличие от п. 13° и п. 14° допускает <u>кратные</u> корни λ_i и кроме того позволяет считать не сразу всю матрицу $\mathcal{P}^n$, а лишь отдельные ее элементы, требуемые по смыслу задачи. Положим

$$\mathcal{P}^n = \| P_{ij}^{(n)} \|_{i,j=1}^m . \qquad (24)$$

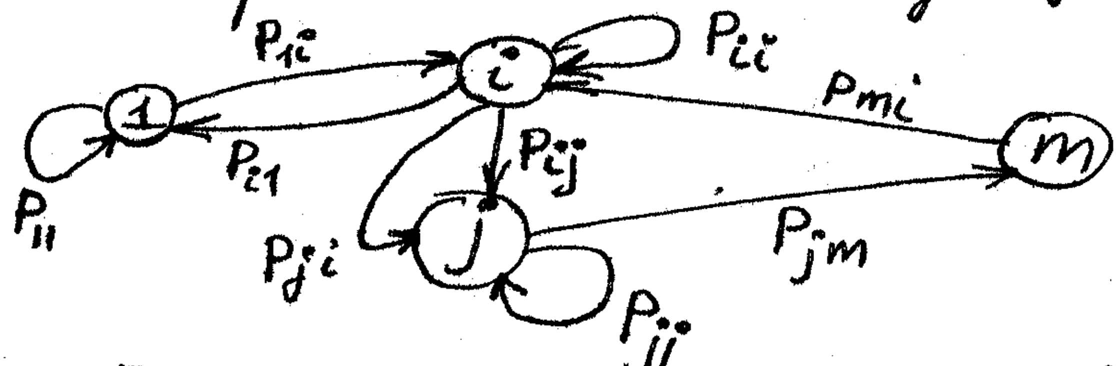
Допустим, что имеется $r \le m$ корней λ_s уравнения (17), причем кратность s-го корня равняется ν_s. Тогда

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{(\nu_s-1)!}\left\{\frac{d^{\nu_s-1}}{d\lambda^{\nu_s-1}}\left[\frac{\lambda^n A_{ji}(\lambda)(\lambda-\lambda_s)^{\nu_s}}{\det(\lambda E-\mathcal{P})}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_s}, \qquad (25)$$

где A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента (j,i) в определителе $\det(\lambda E-\mathcal{P})$. Отметим, что в формуле Перрона под $\Delta(\lambda)$ понимается в отличие от (16) не определитель $\det(\mathcal{P}-\lambda E)$, а определитель $\det(\lambda E-\mathcal{P})$.

15° Размеченный граф состояний ЦМ

Для однородных цепей Маркова структуру матрицы перехода удобно представлять графически в виде <u>размеченного графа состояний</u>. На этом графе состояния ЦМ изображаются как вершины графа, а переходы — в виде ребер графа. Граф является ориентированным, а ребра имеют вид стрелок, указывающих на направление перехода. Если переход происходит с сохранением номера состояния, то на графе появление петли, входящая в то же состояние, из которого она выходит. (см. рисунок). Над стрелочками подписываются вероятности соответствующих переходов.



Примеры решения задач на ЦМ

Пример 1

ЭВМ в автоматическом режиме обрабатывает поток заданий. Каждая новая порция информации с вероятностью α может быть заражена вирусом, а с вероятностью $1-\alpha$ не содержит вирусов. Перед выполнением задания запускается антивирусная программа, которая с вероятностью β переводит ЭВМ в рабочее состояние. Введем состояния ЭВМ

$S_1 = \{$ЭВМ исправна$\}$, $S_2 = \{$ЭВМ заражена$\}$.

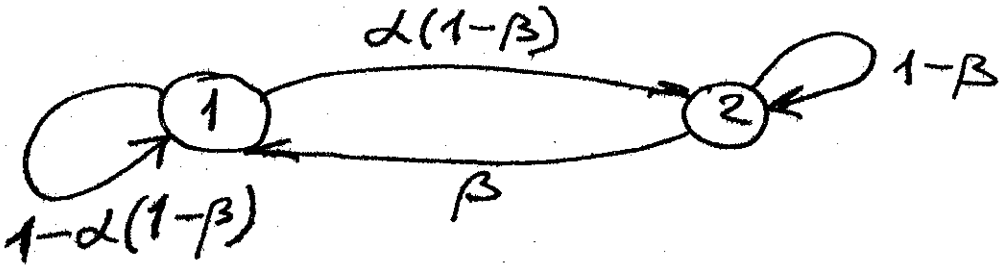
Построить матрицу переходов ЦМ, описывающую изменение состояний ЭВМ.

Решение

Если ЭВМ находилась в исправном состоянии, то для ее перехода в нерабочее состояние должны совместно произойти два события: заражение вирусом и несрабатывание антивируса. Следовательно, $P_{12} = \alpha(1-\beta)$. В силу стохастичности матрицы $\mathcal{P}$ имеем $P_{11} = 1 - \alpha(1-\beta)$. Ясно, что $P_{22} = 1-\beta$, а значит $P_{21} = \beta$. Матрица перехода будет иметь вид

$$\mathcal{P} = \begin{Vmatrix} 1-\alpha(1-\beta), & \alpha(1-\beta) \\ \beta \quad , & (1-\beta) \end{Vmatrix}.$$

Размеченный граф состояний таков:



Пример 2

Определить вероятность того, что после n последовательных перемножений случайных чисел X_j, записанных в троичной системе, получится число, оканчивающееся цифрой k $(k=0,1,2)$, если последней цифрой чисел X_j с равной вероятностью $1/3$ может оказаться 0, 1 или 2.

Решение

Обозначим через $\nu(n)$ последнюю цифру произведения n случайных чисел. Очевидно в условиях задачи $\nu(n)$ образуют марковскую цепь с матрицей перехода

$$\mathcal{P}=\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}.$$

Характеристический полином $\mathcal{P}$:

$$\Delta(\lambda)=|\mathcal{P}-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}-\lambda, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\left[\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^2-\frac{1}{9}\right]=(1-\lambda)\lambda\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\frac{2}{3},\ \lambda_3=0$$

Пользуемся теоремой Сильвестра:

$$\mathcal{P}^n = \frac{(\mathcal{P}-\lambda_2 E)(\mathcal{P}-\lambda_3 E)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\lambda_1^n + \frac{(\mathcal{P}-\lambda_1 E)(\mathcal{P}-\lambda_3 E)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\lambda_2^n$$
$$+ \frac{(\mathcal{P}-\lambda_1 E)(\mathcal{P}-\lambda_2 E)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\lambda_3^n .$$

Поскольку $\lambda_3=0$, то остается в сумме лишь два первых члена.

$$\mathcal{P}-\lambda_2 E = \begin{Vmatrix} 1-\frac{2}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}-\frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}-\frac{2}{3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{3} \end{Vmatrix}$$

$$\mathcal{P}-\lambda_1 E = \begin{Vmatrix} 1-1, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}-1, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}-1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix}$$

$$(\mathcal{P}-\lambda_2 E)(\mathcal{P}-\lambda_3 E) = (\mathcal{P}-\lambda_2 E)\mathcal{P} =$$
$$= \begin{Vmatrix} \frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & 0, & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(\mathcal{P}-\lambda_1 E)(\mathcal{P}-\lambda_3 E) = (\mathcal{P}-\lambda_1 E)\mathcal{P} =$$
$$= \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ \frac{2}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9} \end{Vmatrix}$$

$$\mathcal{P}^n = 3\begin{Vmatrix} \frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & 0, & 0 \end{Vmatrix} - \frac{9}{2}\begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ \frac{2}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9} \end{Vmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$
= \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{matrix} \right\|
$$

$$
\overline{P}(0) = \left\| \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\|
$$

$$
\overline{P}(n) = \overline{P}(0)\mathcal{P}^n = \left\| \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\| \cdot
$$

$$
\cdot \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{matrix} \right\| =
$$

$$
= \left\| 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\|
$$

Пример 3

ЭВМ может находиться в двух состояниях: исправном ($N=1$) и неисправном ($N=2$). После выполнения каждого очередного задания состояние может меняться случайным образом. Вероятность сохранения исправного состояния равна α, неисправного — β. Определить вероятности состояния ЭВМ после n выполнений заданий, если точно известно, что вначале она была исправна

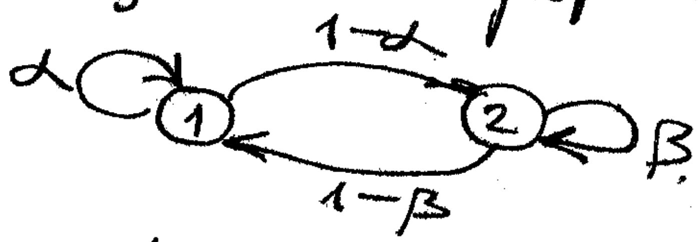
Решение

Имеем по условию:

$$
\overline{P}(0) = \| 1, 0 \|,
$$

$$\mathcal{P} = \begin{Vmatrix} \alpha, & 1-\alpha \\ 1-\beta, & \beta \end{Vmatrix}.$$

Размеченный граф состояний



Характеристический полином

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{P} - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda, & 1-\alpha \\ 1-\beta, & \beta-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda) - (1-\alpha)(1-\beta) =$$

$$= \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda - 1 + (\alpha+\beta),$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \alpha+\beta-1.$$

По теореме Сильвестра:

$$\mathcal{P}^n = \frac{\mathcal{P} - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n + \frac{\mathcal{P} - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^n$$

$$\mathcal{P} - \lambda_2 E = \begin{Vmatrix} 1-\beta, & 1-\alpha \\ 1-\beta, & 1-\alpha \end{Vmatrix}$$

$$\mathcal{P} - \lambda_1 E = \begin{Vmatrix} \alpha-1, & 1-\alpha \\ 1-\beta, & \beta-1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathcal{P}^n = \frac{1}{(2-\alpha-\beta)} \begin{Vmatrix} (1-\beta)+(1-\alpha)\lambda_2^n, & (1-\alpha)(1-\lambda_2^n) \\ (1-\beta)(1-\lambda_2^n), & (1-\alpha)+(1-\beta)\lambda_2^n \end{Vmatrix}$$

$$\overline{p}(n) = \overline{p}(0)\mathcal{P}^n = \frac{1}{(2-\alpha-\beta)} \begin{Vmatrix} (1-\beta)+(1-\alpha)\lambda_2^n, & (1-\alpha)(1-\lambda_2^n) \end{Vmatrix}$$

Интересно заметить, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \overline{p}(n) = \frac{1}{(2-\alpha-\beta)} \begin{Vmatrix} (1-\beta), & (1-\alpha) \end{Vmatrix}$$

то есть

$$P_{1\infty} = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \quad P_{2\infty} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}.$$