Действие линейного оператора на случайную ф-ю

$D[X(t)] < \infty \Rightarrow$ можно $\exists$ гильбертово пр-во случ. ф-ии (Пугачёв и Синицын)

1° Понятие линейного однородного оператора

L_0 – лин. однородный оператор, если: $\begin{cases} L_0 \alpha X = \alpha L_0 X \\ L_0 (X_1 + X_2) = L_0 X_1 + L_0 X_2 \end{cases}$

2° Линейный неоднородный оператор:

а) $LX = L_0 X + \varphi$
└ неслучайная функция (заданная)

б) $LX = L_0 X + \Phi$
└ случайная, не зависимая от X.

3° Вычисление математического ожидания

$Y = L_{0,t} X$
└ по какой переменной действует оператор

$X(t)$ – случайный процесс

$\bar{y}(t) = L_{0,t}\, \bar{x}(t)$

4° Вычисление м.о. в случае неоднородного оператора

а) $\bar{y}(t) = L_{0,t}\, \bar{x}(t) + \varphi(t)$

б) $\bar{y}(t) = L_{0,t}\, \bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t)$
$\bar{\varphi}(t) = M[\Phi]$

5° Вычисление корреляционной ф-ии

$K_y(t_1, t_2) = L_{0,t_1} L_{0,t_2} K_x(t_1, t_2)$

(для линейного однородного оператора и для неоднородного в случае неслуч. неод. чл.)

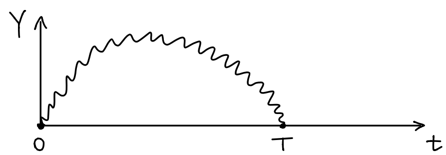
6° Вычисл. корр. ф-ии в случае лин. неод. оператора при наличии случ. неодн. чл.

$K_y(t_1, t_2) = L_{0,t_1} L_{0,t_2} K_x(t_1, t_2) + K_\varphi(t_1, t_2)$

Понятие случайного моста

Пусть имеется процесс $X(t)$

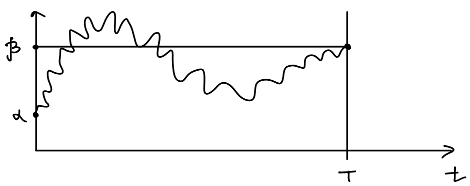
$$Y(t) = [X(t) - X(0)] - \frac{t}{T}[X(T) - X(0)] \qquad 0 \le t \le T$$



Y – мост, натянутый на точки: $(0;0)$ и $(T,0)$

Хотим сместить мост

$$Y^*(t) = \alpha\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \beta\frac{t}{T} + Y(t)$$



def **Винеровский мост** – процесс, который задаётся:

$$Y(t) = \underbrace{W(t)}_{\text{Винеровский процесс (нормальный)}} - \frac{t}{T}W(t) \qquad (0 \le t \le T)$$

Пример №1

Найти корреляционную ф-ю винеровского моста

$$Y(t) = I_t W(t) - \frac{t}{T} P_{t,T} W(t)$$

I_t – тождественный оператор $\qquad I_t X(t) = X(t)$

$P_{t,T}$ – оператор проектирования $\qquad P_{t,T} X(t) = X(T)$

$$Y(t) = \left(I_t - \frac{t}{T}P_{t,T}\right) W(t)$$

$$\bar{y}(t) \equiv 0 \qquad (\bar{w}(t) = 0)$$

$$K_y(t_1,t_2) = \left(I_{t_1} - \frac{t_1}{T}P_{t_1,T}\right)\left(I_{t_2} - \frac{t_2}{T}P_{t_2,T}\right) K_w(t_1,t_2)$$

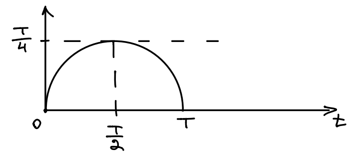
$$K_w(t_1,t_2) = \min\{t_1,t_2\}.$$

$$K_y(t_1,t_2) = \left(I_{t_1 t_2} - \frac{t_1}{T}P_{t_1,T} - \frac{t_2}{T}P_{t_2,T} + \frac{t_1 t_2}{T^2}P_{t_1 T}P_{t_2 T}\right)\min\{t_1,t_2\} =$$

$$= \min(t_1,t_2) - \frac{t_1}{T}\min(T,t_2) - \frac{t_2}{T}\min(T,t_1) + \frac{t_1 t_2}{T^2}\min(T,T) = \min(t_1,t_2) - \frac{t_1 t_2}{T} =$$

$$= \min(t_1, t_2)\left[1 - \frac{\max(t_1,t_2)}{T}\right]$$

$$\sigma_y^2(t) = k_y(t,t) = t\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$



Пример N 2

$$\begin{cases} \dot{Y} + 2\alpha^2 t Y = X \\ Y(0) = 0 \end{cases} \qquad X(t) = Ct$$

, C − случ. постоянная

$M[C] = \bar{C}$

$D[C] = \sigma_c^2$

$K_y(t_1, t_2)$ − ?

Решение

$$\begin{cases} Y(t) = \left[A e^{-\alpha^2 t^2} + \int_0^t e^{\alpha^2 s^2 - \alpha^2 t^2} X(s)\,ds\right] \\ Y(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$Y(t) = \int_0^t e^{\alpha^2 s^2 - \alpha^2 t^2} X(s)\,ds$$

$$Y(t) = L_{0,t}\, X(t)$$

$$\bar{y}(t) = \int_0^t e^{-\alpha^2 t^2 + \alpha^2 s^2} \bar{c} s\,ds = \bar{c}\, e^{-\alpha^2 t^2} \frac{2}{\alpha^2} e^{\alpha^2 s^2}\Big|_0^t = \frac{2}{\alpha^2} \bar{c}\left(1 - e^{-\alpha^2 t^2}\right)$$

$$K_y(t_1, t_2) = e^{-\alpha^2(t_1^2 + t_2^2)} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\alpha^2 s_1^2 - \alpha^2 s_2^2} K_x(s_1, s_2)\,ds_1\,ds_2 =$$

$$= e^{-\alpha^2(t_1^2+t_2^2)} \sigma_c^2 \frac{4}{\alpha^4}\left(e^{\alpha^2 t_1^2} - 1\right)\left(e^{\alpha^2 t_2^2} - 1\right) = \frac{4\sigma_c^2}{\alpha^4}\left(1 - e^{-\alpha^2 t_1^2}\right)\left(1 - e^{-\alpha^2 t_2^2}\right) \quad \blacksquare$$