Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Курсовая работа по дисциплине
"методы оптимизации в экономике"
на тему
"использование аппарата генетических алгоритмов в экономико-математическом моделировании"

Выполнили студенты:
Заболотских Екатерина
Порошин Марк
группа: 3630102/70301

Проверила:
к.ф.-м.н., доцент
Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

1 Введение

Определение 1.1 (Генетический алгоритм) ***Генетический алгоритм*** *- оптимизационный алгоритм, основанный на идее естественного отбора, который, согласно Дарвину, включает в себя три компоненты [2]:*

1. *Возникновение множества наследуемых малых случайных мутаций;*
2. *Выживание наиболее приспособленных мутантов в результате конкуренции и взаимодействия со средой;*
3. *Накопление выживающих на протяжении ряда поколений малых мутаций в адаптивные признаки.*

Таким образом, генетический алгоритм относится к стохастическим алгоритмам, поскольку компоненты мутаций включается в себя случайную состовляющую.

1.1 Основные понятия

Пусть дана задача минимизациодномерной функции:

$$f(x) : R^n \to R$$
$$f(x) \to min$$

Определение 1.2 (Особь/хромосома) *Вектор из R^n называется* ***особью*** *или* ***хромосомой****, а его координаты называется* ***генам****.*

Определение 1.3 (Популяция) *Совокупность хромосом называется* ***популяцией****. Очередная популяция называется* ***поколением****.*

Определение 1.4 (Скрещивание) ***Скрещивание(кроссинговер, кроссовер)*** *- получение новых хромосом из хромосом-предков.*

Определение 1.5 (Мутация) ***Мутация*** *- внесение случайного изменения в гены организма.*

Определение 1.6 (Репродукция) ***Репродукцией*** *называют процесс возникновения новых хромосом, включающий скрещивание и мутации. Сама функция f называется* ***функцией относительной пригодности****(ОП).*

2 Алгоритм

Опишем общую схему работы Генетического алгоритма:

1. Генерируем начальную популяцию из n хромосом (случайно);
2. Для каждой хромосомы вычисляем ее пригодность;
3. Выбираем пару хромосом-родителей с помощью одного из способов отбора;
4. Проводим *кроссиговер* двух родителей с вероятностью p_n;
5. Проводим мутацию потомков с вероятностью p_m;
6. Повторяем шаги 3-5 , пока не будет сгенерировано новое поколение;
7. Повторяем шаги 2-6, пока не будет достигнут критерий окончания;

Рассмотрим наглядную схему алгоритма:

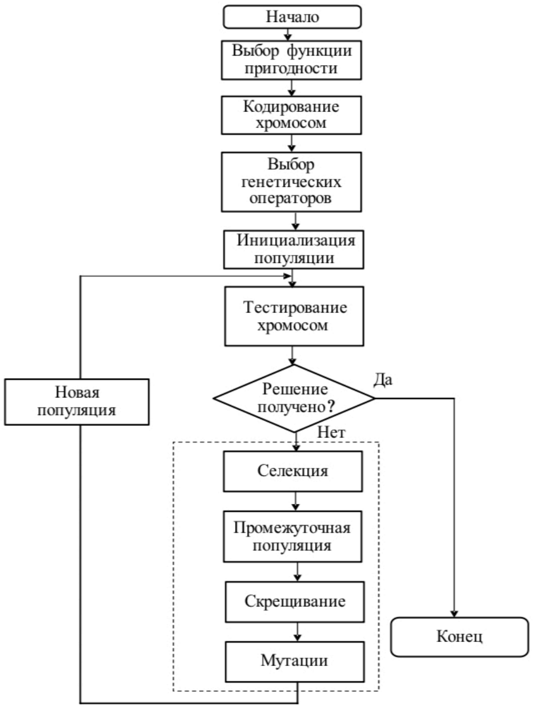

Рис. 1: Схема генетического алгоритма

2.1 Операция селекции

Операция селекции предполагает выбор хромосом, которые будут предками новой популяции. Простейшим методом, реализуемым данную операцию, является метод **колеса рулетки**, в котором происходит выбор случайной хромосомы из биномиального распределения с весами пропорционально относительной полезности:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

2.2 Операция скрещивания

Генетическая операция скрещивания заключается в объединении двух исходных(родительских) хромосом для получения одной или двух новых хромосом-потомков. В качестве примера рассмотрим одноточечное скрещивание(2). Случайно выбираем номер гена, который будет называться **точкой скрещения**. Все гены правее будем считать хвостом гена. Одноточечный кроссовер меняет местами хвосты двух хромосом родителей.

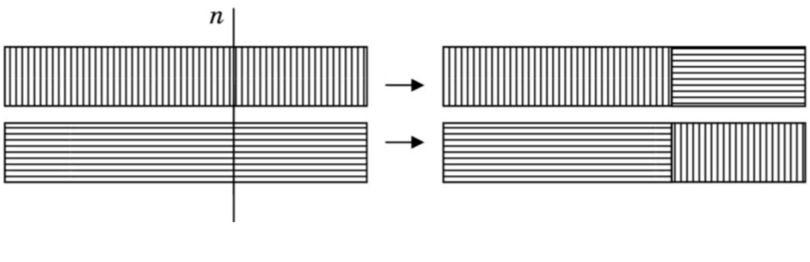

Рис. 2: Иллюстрация одноточечного кроссовера

2.3 Операция мутации

Данная операция сильно зависит от модификации генетического алгоритма, но в общем случае она заключается во внесении случайного шума к одному или нескольким генам особи.

3 Классический генетический алгоритм

В классическом генетическом алгоритме для кодирования используется двоичный алфавит: $0, 1$. В качестве хромосомы используется строка из m битов(генов).

Определение 3.1 (Шаблон) ***Шаблоном(схемой)*** *называют маску, которой соответствует некоторое множество особей, символ * означает произвольное значение: A: 0**** и B: 1****

Если все множетсво значений особей длины n представить как n-мерный гиперкуб, то шаблон в этом случае является гиперплоскостью. Т.е. Шаблоны разбиваю пространство поиска на подпространства. см. рис(3).
Пусть A1: 00***, A2: 01***, B1: 10***, B2: 11***

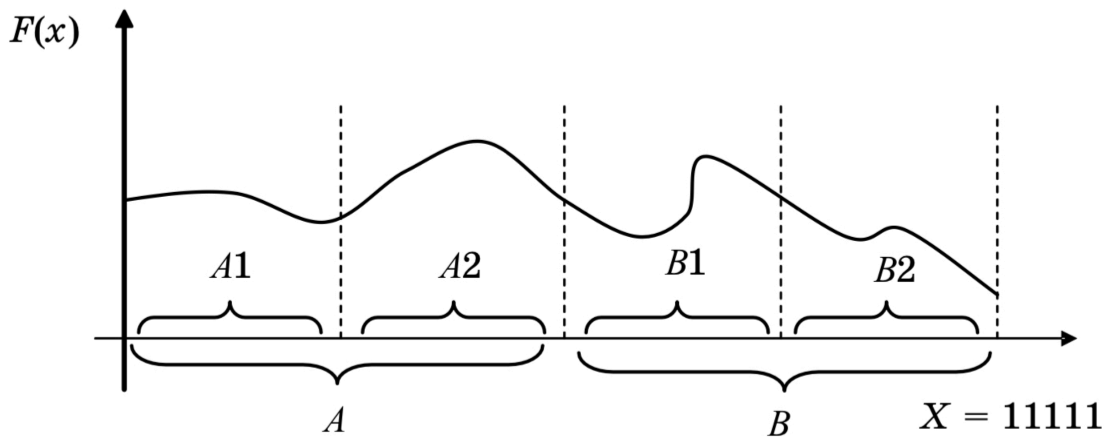

Рис. 3: Разбиение пространства поиска

3.1 Теорема о шаблонах

Для классического генетического алгоритма доказана теорема, позволяющая судить о его эффективности. Для начала требуется ввести некоторые дополнительные обозначения [3] [4]:

1. H - шаблон
2. $N(H, t)$ - количество примеров схемы H на шаге t
3. $f(H, t)$ - функция пригодности схемы на шаге t, которая определяется, как среднее значение на всех особях схемы
4. $f(t)$ - функция пригодности для всей популяции

5. p - вероятность уничтожения схемы под действием генетических операторов.

$$p = \frac{\beta(H)}{l-1} * p_c + o(H) * p_m$$

, где $\beta(H)$ - длина схемы(расстояние между двумя крайними символами "0"и/или "1"), p_c - вероятность скрещивания, p_m - вероятность мутации, $o(H)$ - порядок схемы(число фиксированных позиций в строке)

Тогда существует соотношение между количеством примеров схемы на шаге $t+1$ и t:

$$N(H, t+1) \geqslant N(H, t)\frac{f(H,t)}{f(t)}[1-p]$$

Главный вывод из этой теоремы, что схемы с полезностью больше среднего будут увеличивать свою долю от популяции к популяции

4 Непрерывный генетический алгоритм(Real-GA)

В случае, если функция цели(функция полезности) задана вещественными переменными, для нее используют непрерывный генетический алгоритм. В качестве особи выступают вектора из пространства R^n, а генами являются координаты этих векторов. Оператор селекции можно оставить тем же, что и применяется в классическом ГА. Сильные изменения претерпевают операторы скрещивания и мутации. Рассмотрим одни из возможных вариантов [5]:

4.1 Оператор скрещения(Плоский кроссовер)

Пусть $X^{(1)}, X^22 \in R^n$ - две хромосомы(особи). Тогда помоки задаются по данной формуле:

$$X_i^{child} \leftarrow x \in [X_i^{(1)}, X_i^{(2)}]$$

, где x случано выбрано из приведенного промежутка

4.2 Оператор мутации(Из алгоритма Differential Evolution [6])

Предлагается прежде, чем применять оператор кроссинговера, к обоим выбранным родителям применить опретор мутации, заданный по следующей формуле:

$$X_i' = X_i + F * (A_i - B_i)$$

, где A, B - две, случайно выбранные, особи

5 Пример

Рассмотрим пример решения диафантова уравнения. Напомни, что диафантовым уравнением называется уравнение вида $P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0, a_i, x_i \in N_0$
Пусть дано диафантово уравнение [2]:

$$FD = a + 2b + 3c + 4d = 30$$

Обозначим

$$F := \hat{a} + 2\hat{b} + 3\hat{c} + 4\hat{d}$$

$$\Delta := |FD - F|$$

Задача ставится относительно минимизации функции$\Delta = |FD - F|$ Очевидно, что $1 \geqslant a, b, c, d \geqslant 30$. Сгенерирует начальную популяцию из 5 особей случайно:

[$h!$]

i^1	(a, b, c, d)	Ошибка Δ	ОП(f)
1	(1, 28, 15, 3)	|114-30|=84	0.012
2	(14, 9, 2, 4)	|54-30|=24	0.042
3	(13, 5, 7, 3)	|56-30|=26	0.038
4	(23, 8, 16, 19)	|163-30=133|	0.0075
5	(9, 13, 5, 2)	|58-30|=28	0.036

(1)

Дальше вычисляем относительные функции полезности, которые будем использовать в качестве вероятностей отбора хромосомы:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i}$$

Полученные результаты для начальной популяции

i^1	p_i	$S_i, \%$
1	0.09	9
2	0.31	31
3	0.28	28
4	0.06	6
5	0.26	26

Для выбора хромосом родителей будем использовать метод колеса рулетки. В данном методе каждой особи сопоставляется сектор размера, пропорционально относительной вероятности(4): Результаты отбора методом колеса рулетки:

номер отца	номер матери
3	1
5	2
3	5
2	5
5	3

Дальше требуется выполнить скрещивание, для этого будет использовать одноточечный кроссинговер. Этот метод предполагает выбор произвольного гена в качестве точки скрещения и дальшейший обмен хвостами с условием того, что хвост считаем начиная от точки

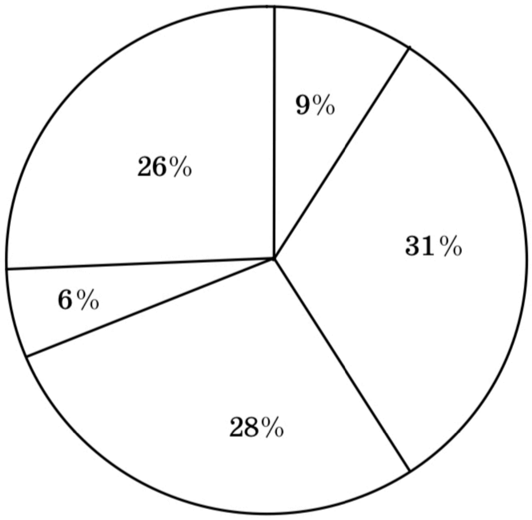

Рис. 4: Метод колеса рулетки

скрещения:

точка скрещения	отец	матерь	потомок
1	(13 | 5, 7, 3)	(1 | 28, 15, 3)	(13, 28, 15, 3)
2	(9, 13 | 5, 2)	(14, 9 | 2, 4)	(9, 13, 2, 4)
3	(13, 5, 7 | 3)	(9, 13, 5 | 2)	(13, 5, 7, 2)
1	(14 | 9, 2, 4)	(9 | 13, 5, 2)	(14, 13, 5, 2)
2	(13, 5 | 7, 3)	(9, 13 | 5, 2)	(13, 5, 5, 2)

Полученная популяция и относительные полезности:

i^2	(a, b, c, d)	Ошибка Δ
1	(13, 28, 15, 3)	|126-30|=96
2	(9, 13, 2, 4)	|57-30|=27
3	(13, 5, 7, 2)	|52-30|=22
4	(14, 13, 5, 2)	|63-30|=33
5	(13, 5, 5, 2)	|46-30|=16

Теперь можно сравнить среднюю ошибку у поколения 1, равную 59, и у поколения 2, равную 39. Видно, что за счет генетических операторов средняя ошибка уменьшилась. Последним шагом нужно выполнить операцию мутации. Для данной задачи она может выражаться в замене одного из генов случайным числом от 1 до 30.

Так же рассмотрим еще один вариант оператора отбора - элитарный отбор. В данном случае, объединяют поколения родителей и потомков и полученную популяцию сортируют по возрастанию функции относительной полезности. В качестве следующего поколения используют n самых лучших особей. В контекте рассматриваемого примера:

Объединенная популяция:

i^2	(a, b, c, d)	Ошибка Δ
1	(13, 28, 15, 3)	|126-30|=96
2	(9, 13, 2, 4)	|57-30|=27
3	(13, 5, 7, 2)	|52-30|=22
4	(14, 13, 5, 2)	|63-30|=33
5	(13, 5, 5, 2)	|46-30|=16
6	(1, 28, 15, 3)	|114-30|=84
7	(14, 9, 2, 4)	|54-30|=24
8	(13, 5, 7, 3)	|56-30|=26
9	(23, 8, 16, 19)	|163-30|=133
10	(9, 13, 5, 2)	|58-30|=28

Слудеющее поколение:

i^2	(a, b, c, d)	Ошибка Δ
1	(13, 5, 5, 2)	|46-30|=16
2	(13, 5, 7, 2)	|52-30|=22
3	(14, 9, 2, 4)	|54-30|=24
4	(13, 5, 7, 3)	|56-30|=26
5	(9, 13, 2, 4)	|57-30|=27

Средняя ошибка и полученного поколения получилась равной 23.

6 Экономическое приложение алгоритма

Генетический алгоритм может найти широкое применение для решения кономических задач, поскольку много из них формулируются в форме комбинаторных задач, для которых ГА эффективен. Конкретными примерами является применение алгоритма для характеристики модели перекрывающихся поколений, применение в теории игр, оптимизации графика и ценообразование активов.

Так же он используется не только для задач оптимизации, но и для визулизации процесса обучения, например для модели паутины, которая описывает спрос и предложение за t периодов [7]

Список литературы

[1] Бураков М. В. Генетический алгоритм: теория и практика — 2008. – с. 6-26

[2] Панченко Т. В. Генетические алгоритмы — 2007. – с. 9-27

[3] Генетический алгоритм, теория схем: сайт – http://qai.narod.ru/GA/schema.html (дата обращения: 28.03.21). – Текст: электронный.

[4] Википедия, теория схем: сайт – https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_схем (дата обращения: 28.03.21). – Текст: электронный.

[5] Википедия, теория схем: сайт – https://basegroup.ru/community/articles/real-coded-ga (дата обращения: 28.03.21). – Текст: электронный.

[6] Habrhabr, Differential Evolution: генетический алгоритм оптимизации функции: сайт – https://habr.com/ru/post/171751/ (дата обращения: 28.03.21). – Текст: электронный.

[7] Википедия, генетические алгоритмы в экономике: сайт – https://ru.qaz.wiki/wiki/Genetic_algorithms_in_economics (дата обращения: 28.03.21). – Текст: электронный.