Корреляционная ф-я квадрата от нормального центрированного процесса

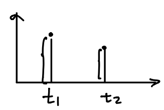
$X(t)$ – процесс нормальный (гауссовский)
$\bar{x}(t) \equiv 0$

Общий случай (нестационарный процесс): $K_x(t_1;t_2)$

$\sigma_x^2(t) = K_x(t,t)$

$X(t) \in N(0;\sigma_x(t))$
$Y(t) \in \chi^2(t)$
$\bar{y}(t) = M[X^2(t)] = K_x(t,t) = \sigma_x^2(t)$

$$K_y(t_1,t_2) = M[\mathring{Y}(t_1)\mathring{Y}(t_2)] = M[(X^2(t_1)-\sigma_x^2(t_1))(X^2(t_2)-\sigma_x^2(t_2))] =$$
$$= M[X^2(t_1)X^2(t_2)] - \sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2)$$



момент: $m_{jk} = M[X^j(t_1)X^k(t_2)]$

Воспользуемся методом характеристических ф-й.

$$E(z_1,z_2) = M[e^{i(z_1X(t_1)+z_2X(t_2))}] =$$

вещ. аргумента
две ординаты

Имеем систему норм. вел-н: $X(t_1)$ $X(t_2)$ знаем $\bar{x}, \sigma_x^2, K_x(t_1,t_2)$

=> можем задать хар-ю ф-ю для нормального закона центрированного:

$$= e^{-\frac{1}{2}[\sigma_x^2(t_1)z_1^2 + \sigma_x^2(t_2)z_2^2 + 2K_x(t_1,t_2)z_1z_2]}$$

тогда $m_{jk} = \frac{1}{i^{j+k}} \frac{\partial^{j+k} E}{\partial z_1^j \partial z_2^k}\Big|_{\vec{z}=\vec{0}}$ $\qquad i^4 = 1$

$$\Rightarrow m_{22} = \frac{\partial^4 E}{\partial z_1^2 \partial z_2^2}\Big|_{\vec{z}=\vec{0}}$$

Введём $S(z_1,z_2) = \frac{1}{2}[\sigma_x^2(t_1)z_1^2 + \sigma_x^2(t_2)z_2^2 + 2K_x(t_1,t_2)z_1z_2]$

$S|_{\vec{z}=\vec{0}} = 0$

$E(z_1,z_2) = e^{-S}$

$E|_{\vec{z}=\vec{0}} = 1$

$\exists\ S_j(\vec{z}) = \frac{\partial S}{\partial z_j}$ $(j=\overline{1,2})$ – однородный полином

$S_{jk} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_j \partial z_k}$ – const

$S_{11} = \sigma_x^2(t_1)$ $\qquad S_{22} = \sigma_x^2(t_2)$ $\qquad S_{12} = k_x(t_1 t_2)$

$\square$ $\dfrac{\partial E}{\partial z_1} = E(-S_1)$

правило Лейбница

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z_1^2} = E(S_1)^2 + (-S_{11})E = E(S_1^2 - \underbrace{S_{11}}_{\text{const}})$$

$$\frac{\partial^3 E}{\partial z_1^2 \partial z_2} = E[-S_1^2 S_2 + S_{11}S_2] + E[2S_1S_{12}] = E[2S_1S_{12} + S_2S_{11} - S_1^2 S_2]$$

$$\frac{\partial^4 E}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} = E[2S_1S_{12} + S_2S_{11} - S_1^2 S_2](-S_2) +$$

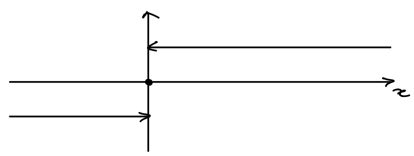
$$+ E[2S_{12}^2 + S_{22}S_{11} - 2S_1S_{12} - S_1^2 S_{22}]$$

$$m_{22} = 2K_x^2(t_1,t_2) + \sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2)$$

$$K_{x^2}(t_1,t_2) = 2K_x^2(t_1,t_2) \quad \blacksquare$$

Корреляционная ф-я знака нормальной центрированной случайной ф-ии

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



] $X(t)$ - случайная ф-я

] $\bar{x}(t) \equiv 0$

] корр. ф-я $K_x(t_1,t_2)$

$Y(t) = \mathrm{sign}[X[t]]$

$K_y(t_1,t_2)$ - ?

] $X_j = X(t_j)$ $(j = 1,2)$

] $f(x_1,x_2)$ - совместный з-н распр-я двух величин x_1, x_2

— плотность вер-ти

Общий вид: $$f(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-k_x^2(t_1,t_2)}} e^{-\frac{1}{2(1-k_x^2(t_1,t_2))}\left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{2k_x(t_1,t_2)x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}\right]}$$

$$k_x(t_1,t_2) = \frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$$ - норм. корр. ф-я X.

Важно: $\bar{y}(t) \equiv 0 \ \forall t$

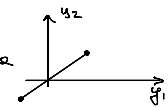
$$K_y(t_1,t_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(x_1)\,\mathrm{sign}(x_2)\, f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \underbrace{M[\mathrm{sign}(X(t_1))\,\mathrm{sign}(X(t_2))]}_{\text{в силу центрированности}} =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sign}(x_1)\,\mathrm{sign}(x_2)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-k_x^2}} e^{-\frac{1}{2(1-k_x^2)}\left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{2k_x(t_1,t_2)x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}\right]} dx_1\,dx_2 = \begin{bmatrix} y_1 = \frac{x_1}{\sigma_1} \\ y_2 = \frac{x_2}{\sigma_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(y_1)\,\text{sign}(y_2)}{2\pi\sqrt{1-k_x^2}}\, e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2+2k_x y_1 y_2)}{2(1-k_x^2)}}\, dy_1\, dy_2$$

– обладает центральной симметрией отн-но y_1, y_2

$\Rightarrow$ можем взять полупр-во.



Перейдём к полярным координатам $\begin{cases} y_1 = r\cos(\varphi) \\ y_2 = r\sin(\varphi) \end{cases}$ $(y_1, y_2) \Rightarrow (r, \varphi)$

$$K_y(t_1,t_2) = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\text{sign}(\cos\varphi)\,\text{sign}(\sin\varphi)}{\pi\sqrt{1-k_x^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-k_x^2)}\left[1+k_x\sin(2\varphi)\right] r^2}\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-k_x^2}}\,\frac{(1-k_x^2)}{(1+k_x\sin(2\varphi))}\,d\varphi - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1-k_x)^2}{\pi\sqrt{1-k_x^2}}\,\frac{1}{(1-k_x\sin(2\varphi))}\,d\varphi$$

Замена $z = \operatorname{tg}\varphi$ ...

$K_y(t_1,t_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin(k_x(t_1,t_2))$ при $t_1 = t_2$ $K_y(t_1,t_2) = 1$