Лемма (о вычислении операторов)

$] A \in B(X,Y)$

Тогда $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|$

Док-во: ► 1° $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le a \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow \|Ax\| \le a\|x\| \quad \forall x\in X \Rightarrow \|A\| \le a$

$\|Ax\| \le \|A\|\|x\| \quad \forall x\in X;\ ] x\neq 0 \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|,\ \forall x\neq 0 \Rightarrow a = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|$

2° $b = \sup \|Ax\| \le \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = a$ (при увел. мн-ва $\sup M \uparrow$)

$] x \neq 0 \quad] z = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \|z\| = 1 \qquad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|Az\| \le b \quad \forall x\neq 0 \Rightarrow a \le b$

3° $b = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = c$

$] \|x\| \le 1 \Rightarrow \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \le \|A\| \Rightarrow c \le \|Ax\| = b$

4° $d = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = c$

не модули?

$] \|x\| = 1 \Rightarrow \|\lambda x\| < 1,\ \|Ax\| = \frac{\lambda\|Ax\|}{\lambda} = \frac{\|A(\lambda x)\|}{\lambda} \le \frac{d}{\lambda} \Rightarrow c \le \frac{d}{\lambda} \underset{\lambda\to 1}{\Rightarrow} c \le d$ ◄

$] 0 < \lambda < 1$

$A_n \to A$ — **сходится сильно**, если $A_n x \to Ax \quad \forall x \in X$

Теорема $] X$ — н.п. Y — б.п., тогда $B(X,Y)$ — б.п.

Док-во: ► 1° $] \{A_n\}_{n\in N} \subset B(X,Y)$: $\|A_n - A_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} 0 \Rightarrow \exists M \ge 0: \|A_n\| \le M,\ \forall n\in N$

2° $] x\in X \quad \{A_n x\} \subset Y \quad \|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\|\|x\| \xrightarrow[n\to\infty,\ m\to\infty]{\text{т.к. } Y\text{-полно}} 0 \Rightarrow \exists y \in Y: A_n \to y \quad] Ax = y$

3° $A: X \to Y;\ A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lim\limits_{n\to\infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim\limits_{n\to\infty} A_n x_2 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$

Значит A — линейный

4° $\|Ax\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} A_n x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \lim\limits_{n\to\infty} (\|A\|\cdot\|x\|) \le \lim\limits_{n\to\infty} (M\|x\|) = M\|x\|$ — опер. A ограничен

надо показать сходимость по норме (она влечёт сильную сходимость, но не наоборот)

5° $\|A_n - A_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in N: \|A_n - A_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \ge N$

$] x \in X: \|x\| \le 1 \Rightarrow \|(A_n - A_m)x\| = \|A_n x - A_m x\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$] m \to \infty \Rightarrow A_m x \to Ax;\ A_n x - A_m x \xrightarrow[m\to\infty]{} A_n x - Ax \Rightarrow \underset{\|(A_n - A)x\|}{\underset{\parallel}{\|A_n x - Ax\|}} \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A_n x - Ax\| \le \frac{\varepsilon}{2},\ \forall \|x\| \le 1;\ \forall n \ge N \Rightarrow \|A_n - A\| = \sup \|(A_n - A)x\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n \ge N \Rightarrow A_n \to A$ в $B(X,Y)$ ◄

§ Принцип равномерной ограниченности

Теорема] X – б.п., Y – н.п.
] $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$ Тогда 1° $\sup \|A_n\| < \infty$ $\Longleftrightarrow$ 2° $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty$ $\forall x \in X$

Док-во: ▶ 1°] $\sup \|A_n\| < \infty$
$\exists x \in X$: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\|A_n\|\,\|x\|) \le (\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\|)\|x\| < \infty$

2°] $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| = d(x) < \infty$ $\forall x \in X$

Предположим, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| = \infty$

3° Утв $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in B(x_0,r_0)} \|A_0 x\| = \infty$ $\forall x_0 \in X$ $\forall r_0 > 0$

▷ $x \in B(x_0, r_0) \underset{x = r_0 z + x_0}{\overset{z = \frac{x - x_0}{r_0}}{\rightleftarrows}} z \in B(0,1)$ связь с единичным шаром

$A_n x = r_0 A_n z + A_n x_0$, $z \in B(0,1)$ $x \in B(x_0, r_0)$
$\|A_n x\| = \|r_0 A_n z + A_n x_0\| \geq r_0\|A_n z\| - \|A_n x_0\| \geq r_0 \|A_n z\| - \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x_0\| = r_0\|Az\| - d(x_0)$ $\Rightarrow$
обратное нер-во Δ

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in B(x_0,r_0)} \|A_n x\| \geq r_0 \|Az\|$, $\forall z \in \overline{B(0,1)}$ если бол. для $\forall$ эл-та шара $\Rightarrow$ бол. и для sup:

$\sup\limits_{x\in B(x_0,r_0)} \|A_0 x\| \geq r_0 \sup\limits_{z\in B(0,1)} \|A_n z\| - d(x_0) = r_0\|A_n\| - d(x_0) \Rightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in B(x_0,z_0)} \|A_n x\| \geq r_0 \|A_n\| - d(x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in B(x_0,r_0)} \|A_n x\| \geq r_0 \underbrace{\sup \|A_n\|}_{=\infty} - d(x_0) = \infty$ ◀

$$\boxed{\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in B(x_0,r_0)} \|A_n x\| = \infty \quad (*)}$$

4°] $x \in X$ $r_0 > 0$ $(*) \Rightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in B(x_0,\frac{r_0}{2})} \|A_n x\| = \infty \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\exists x_1 \in B(x_0, \frac{r_0}{2})$: $\|A_{n_1} x_1\| > 1$ $\;(= 1+\alpha_1, \alpha_1 > 0)$

] $x \in X$ $\|A_{n_1} x\| = \|A_{n_1} x_1 - A_{n_1}(x_1 - x)\| \geq \underbrace{\|A_{n_1} x_1\|}_{1+\alpha} - \|A_n(x_1 - x)\| \geq 1 + \alpha - \|A_{n_1}\|\|x_1 - x\| \geq 1$ $\forall x \in X : \|x - x_0\| \le \frac{\alpha}{\|A_{n_1}\|}$

] $r_1 = \min\{\frac{r_0}{2}, \frac{\alpha_1}{\|A_{n_1}\|}\}$] $B_1 = \overline{B}(x_1, r_1) \Rightarrow \overline{B_1} \subset \overline{B_0}$; $r_1 \le \frac{r_0}{2}$; $\|A_{n_1} x\| \geq 1$ $\forall x \in B_1$
...

Предположим, что построены шары : $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots \supset B_{k-1}$; $B_{k-1} = B(x_{k-1}, r_{k-1})$
$(*) \Rightarrow$] $n_k \in \mathbb{N}$; $\exists x_k \in B(x_{k-1}, r_{k-1})$; $\|A_n x_k\| > k$ $\;(= k + \alpha_k)$

] $x \in X$ $\|A_{n_k} x\| = \|A_{n_k} x_k - A_{n_k}(x_k - x)\| \geq \|A_{n_k} x_{n_k}\| - \|A_{n_k}(x - x_k)\| \geq k + \alpha_k - \|A_{n_k}\|\|x - x_k\| \geq k$
] $B_k = B(x_k, r_k)$, $r_k = \min\{\frac{r_{k-1}}{2}; \frac{\alpha_k}{\|A_{n_k}\|}\}$ $\forall x \in X : \|x - x_k\| \le \frac{\alpha_k}{\|A_{n_k}\|}$

$B_k \subset B_{k-1}$; $r_k \le \frac{r_{k-1}}{2}$; $\|A_n x\| \geq k$, $\forall x \in B_k$

5° из теоремы о влож. шарах $\Rightarrow \exists x_* \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k \Rightarrow x_* \in B_k$, $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \exists n_k : \|A_{n_k} x_*\| \geq k$
А значит $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x_*\| = \infty$?! ◀