Лекция 2

Некоторые наиболее важные моментные функции

На предыдущей лекции мы ввели понятие моментных функций и отметили, что, если задать все без исключения моментные функции, то тем самым будет задан и сам процесс. Задание множества моментных функций представляет альтернативный способ задания случайного процесса.

На практике часто ограничиваются рассмотрением лишь нескольких младших моментов случайного процесса. Конечно, знание конечного числа моментов процесс полностью не определяет, но моменты позволяют дать упрощенное описание процесса, уяснить некоторые его простейшие, общие свойства. При этом точно также, как в классической теории вероятностей наиболее важными являются моменты младших порядков.

Математическое ожидание

Все моменты можно выразить через конечномерные законы распределения случайного процесса. Математическое ожидание представляет собой начальный момент первого порядка

$$\bar{x}(t) = M[X(t)]. \tag{1}$$

Если ордината процесса является случайной величиной непрерывного типа, и существует плотность вероятности, то тогда определение (1) может быть переписано в виде:

$$\overline{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x;t)\, dx, \qquad (2)$$

где $f_1(x;t)$ есть закон распределения первого порядка. Если же процесс относится к дискретному (или смешанному типу), то тогда интеграл (2) следует записывать через функцию распределения первого порядка

$$F_1(x;t) = P\{X(t) < x\}. \qquad (3)$$

При этом вместо (2) получаем

$$\overline{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_1(x;t). \qquad (4)$$

Напомним, что в случае непрерывного типа распределения существует производная

$$\frac{dF_1(x;t)}{dx} = f_1(x;t) \qquad (4)$$

и тогда (4) сводится к (2).

Независимо от используемого определения ((2) или (4)) математическое ожидание задает при каждом фиксированном значении t некоторое среднестатистическое значение ординаты процесса. Вполне естественно, что функция $\overline{x}(t)$ уже является детерминированной (неслучайной).

На рисунке 1 для примера приведена реализация случайного процесса

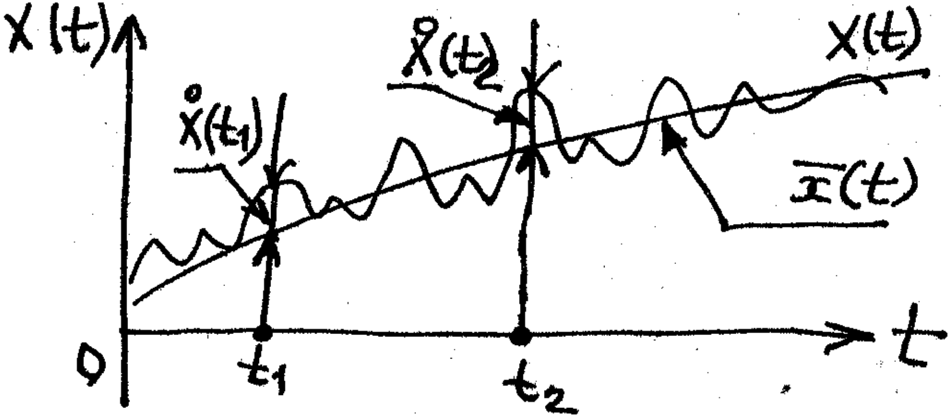

Рис. 1. К определению понятия математического ожидания

в виде нерегулярно, хаотически меняющейся функции $X(t)$, а также математическое ожидание $\overline{x}(t)$, которое является более плавно меняющейся детерминированной функцией.

Часто вводят в рассмотрение <u>центрированный процесс</u>

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - \overline{x}(t), \qquad (5)$$

вычитая из ординаты процесса его математическое ожидание. Величина $\overset{\circ}{X}(t)$ задает <u>случайные флуктуации</u> процесса относительно его среднего значения.

<u>Дисперсия процесса</u>

Как известно, дисперсия в теории случайных величин задает рассеяние случайной величины относительно ее среднего значения. В теории случайных функций эта интерпретация дисперсии, конечно, сохраняется, но сам разброс относительно среднего может быть различным для разных моментов времени. Аналогично (1) дисперсия случайной функции определяется так:

$$D[X(t)] = M\left[\left(X(t)-\bar{x}(t)\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\overset{\circ}{X}{}^2(t)\right] = \sigma_x^2(t). \qquad (6)$$

Величина $\sigma_x(t)$, равная корню квадратному из дисперсии, называется <u>среднеквадратическим отклонением</u> процесса $X(t)$.

Дисперсия может быть выражена через одномерный закон распределения следующим образом

$$\sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\bar{x}(t)\right)^2 f_1(x;t)\,dx \qquad (7)$$

Конечно, здесь сохраняется выражение дисперсии через начальные моменты

$$\sigma_x^2(t) = M\left[\left(X(t)-\bar{x}(t)\right)^2\right] =$$

$$= M\left[X^2(t) - 2\bar{x}(t)X(t) + \bar{x}^2(t)\right] =$$

$$= M\left[X^2(t)\right] - 2\bar{x}(t)M\left[X(t)\right] + \bar{x}^2(t) =$$

$$= m_2(t) - 2\bar{x}(t)m_1(t) + \bar{x}^2(t). \qquad (8)$$

Вспоминая, что $\bar{x}(t) \equiv m_1(t)$, откуда следует хорошо известная формула:

$$\sigma_x^2(t) = m_2(t) - m_1^2(t). \qquad (9)$$

<u>Корреляционная функция</u>

Оба рассмотренных выше момента выражались через <u>одномерный</u> закон распределения случайной функции. В принципе, эти характеристики вводились точно также, как это делалось в классической теории вероятностей, появлялась только их зависимость от времени.

В теории случайных функций появляется возможность рассмотреть и другой вид моментов второго порядка, когда рассматривается корреляционная связь между ординатами процесса, относящимися к различным моментам времени, а именно

$$K_x(t_1,t_2) = M[(X(t_1)-\bar{x}(t_1))\cdot$$
$$\cdot (X(t_2)-\bar{x}(t_2))]\ . \qquad (10)$$

Функция вида (10) называется корреляционной функцией процесса $X(t)$. Она представляет собой корреляционный момент между ординатами процесса, относящимися к разным моментам времени. Аналогично (6) корреляционную функцию можно выразить через центрированную ординату процесса

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] \qquad (11)$$

Корреляционная функция задает статистическую связь между ординатами процесса, относящимися к различным моментам времени (см. рис. 1).

Если повторить рассуждения, проделанные при выводе формулы (9), то можно получить

$$K_x(t_1,t_2) = m_{1,1}(t_1,t_2) - m_1(t_1)\boxed{m_1}(t_2)\ . \qquad (12)$$

Здесь начальный момент первого порядка m_1

и, следовательно, требует для своего вычисления только одномерного закона распределения процесса. Вместе с тем момент $m_{1,1}$ будет зависеть уже от двух моментов времени t_1 и t_2, поэтому здесь потребуется двумерный закон распределения процесса.

Выражение для искомого момента имеет вид:

$$m_{1,1}(t_1,t_2)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2. \qquad (13)$$

Если подсчитывать корреляционную функцию непосредственно по формуле (10), то приходим к следующему интегралу

$$K_x(t_1,t_2)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1-\bar{x}(t_1))(x_2-\bar{x}(t_2))\cdot f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2 \qquad (14)$$

Таким образом задача вычисления корреляционной функции оказывается более сложной, чем задача вычисления дисперсии по формуле (7) или задача вычисления математического ожидания по формуле (2).

В заключение этого раздела отметим, что во многих случаях исследователи, занимающиеся прикладными задачами теории случайных функций, бывают готовы ограничиться получением только моментов искомых процессов, причем моментами не выше, чем <u>второго</u> порядка. Раздел теории случайных функций, занимающийся анализом только первых и вторых моментов, называется <u>корреляционной теорией</u>. В нашем курсе будет показано, что многие инженерные задачи могут быть эффективно решены в рамках корреляционной теории, а также примыкающих к ней теории выбросов и спектральной теории. Изложению указанных разделов теории случайных функций и будет посвящен наш курс.

Конечно, есть задачи, решение которых выходит за рамки корреляционной теории, например, получение законов распределения искомых процессов в нелинейных системах. Такие задачи решаются методами теории марковских процессов, которые у нас на кафедре излагаются в отдельных курсах.

Классификация случайных функций

Случайные функции могут быть классифицированы по целому ряду признаков. Рассмотрение классификации случайных функций начнем с наиболее общих различий, касающихся самой структуры области определения и области значений случайной функции.

I. Классификация в зависимости от структуры области определения и области значений случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$, определенную на некотором множестве T и принимающую значения в множестве $\mathfrak{R}$. Каждое из множеств T и $\mathfrak{R}$ может быть как дискретным, так и непрерывным (континуальным). В зависимости от этого различают несколько типов случайных функций (см. таблицу 1). Напомним еще раз, что случай, когда область определения T является конечным множеством не интересен математической точки зрения, так как не несет в себе ничего нового по сравнению с теми моделями, которые рассматриваются в классической теории вероятностей. Таким образом, нужно рассмотреть два принципиально различных случая, когда множество T <u>счетно</u> и когда оно представляет собой <u>континуум</u>.

Таблица 1. Типы случайных функций

T \ Ω	Дискретное (счетное)	Непрерывное (континуум)
Дискретное (счетное)	I	II
Непрерывное (континуум)	III	IV

Согласно таблице 1 можно выделить <u>четыре</u> типа случайных функций.

<u>Тип I</u>. В этом случае процесс скачком меняет свое состояние в заданные дискретные моменты времени. Такой процесс называют <u>цепью</u>. Примером может служить хорошо известная <u>цепь Маркова</u>. Этот случай для нас не очень интересен, так как он по существу может быть изучен стандартными методами теории вероятности.

<u>Тип II</u>. Этот тип процессов допускает ординате процесса принимать произвольные значения из некоторого континуального множества, но изменение

состояние системы происходит только в заданные дискретные моменты времени. Такой процесс называют случайной последовательностью или временным рядом. Случайные последовательности рассматривались в общем курсе теории вероятности (например, при доказательстве предельных теорем). Случайные последовательности представляют интересный объект для исследования, но нужно иметь в виду, что в природе и технике все процессы развиваются в реальном (непрерывном) времени. Если время дискретизуется, то это представляет некоторое огрубление модели и потерю части информации. Анализ процессов в непрерывном времени представляет особый интерес, например, в финансовой математике после разработки совсем непрерывного времени моделей был сделан гигантский шаг вперед.

Тип III. Он соответствует процессам с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Такие процессы интересные для некоторых приложений. Они, например, детально изучаются в теории массового обслуживания. В данном курсе эти вопросы мы оставим в стороне.

Тип IV. Это процессы, которые развиваются в непрерывном времени и ординаты которых также меняются непрерывным образом. Эти процессы интересны для многих приложений, в том числе для механики, экономики, биологии. Мы сосредоточим свое внимание именно на них. В связи с этим далее будут рассматриваться такие вопросы, как непрерывность случайного процесса, его дифференцируемость, интегрируемость и т. п.

Стационарность случайных процессов

Случайный процесс представляет собой весьма сложный объект. Как мы видели, чтобы корректно задать случайный процесс, нужно задать бесконечное множество функций (многомерных законов распределения). Поэтому является вполне естественным желание как-то упростить математическую модель, сузив класс рассматриваемых процессов. Одним из таких более узких специальных классов процессов являются <u>стационарные</u> процессы.

Процесс называется <u>стационарным</u>, если он не меняет своих свойств при произвольном изменении начала отсчета времени.

Свойства процесса определяются иерархией его законов распределения. Для стационарного процесса все его многомерные законы должны сохранять свой вид при произвольном сдвиге начала отсчета времени.

Проследим, как сдвиг времени влияет на многомерные законы процесса. Сдвинем начало отсчета времени на некоторую величину $t_0>0$. Если процесс стационарен, то должно быть

$$f_1(x;t)=f_1(x;t-t_0)=f_1(x)=\text{const}(t) \qquad (15)$$

Следовательно, для стационарного процесса одномерный закон вообще не должен зависеть от времени. Для доказательства этого свойства достаточно принять в (15) $t_0 = t$.

Поскольку f_1 не зависит от t, то для стационарного процесса его математическое ожидание и дисперсия постоянны.

Теперь обратимся к закону второго порядка. В силу стационарности имеем

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; (t_1 - t_0), (t_2 - t_0)). \quad (16)$$

Полагая в (16) $t_0 = t_1$, получаем

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1). \quad (17)$$

Отсюда следует, что корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ стационарного процесса фактически зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$ моментов времени.

Следует обратить внимание на одну тонкость. Данное выше определение стационарности, требующее инвариантности всех законов распределения относительно сдвига времени, называют стационарностью в узком смысле. При выполнении условий

$$\bar{x} = \text{const}(t), \quad K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) \quad (18)$$

А.Я. Хинчин предложил называть процесс стационарным в широком смысле.

Ясно, что из стационарности в узком смысле всегда следует стационарность и в широком смысле, обратное, вообще говоря, неверно. Стационарность в широком смысле влечет стационарность в узком смысле только для нормальных процессов (см. далее).

Далее разберем класс марковских процессов.

Марковские процессы

Процесс $X(t)$ называют **марковским**, если задание его ординаты в произвольный момент времени t однозначно определяет **закон распределения** процесса в любой момент $\tau > t$. При этом существенно, что поведение процесса при $\tau < t$ никакого влияния на его эволюцию при $\tau > t$ не оказывает, вся информация заключена в ординате процесса при $\tau = t$. Поэтому марковские процессы часто называют еще процессами **без памяти**.

Сам термин „марковский" происходит от имени А.А. Маркова, который впервые рассмотрел такие процессы в случае дискретного времени и дискретного множества состояний.

Марковские процессы обладают важным свойством, которое необходимо разобрать более подробно. Рассмотрим марковский процесс $X(t)$. Введем n упорядоченных моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Положим $X_i = X(t_i)$, $(i = \overline{1, n})$. Для краткости при написании закона распределения n-го порядка f будем опускать все временные аргументы t_i, считая, что все они в дальнейших рассуждениях фиксированы.

Выразим закон распределения n-го порядка $f_n(x_1, \dots, x_n)$ через такой же закон $(n-1)$-го порядка $f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Имеем для произвольной случайной функции

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}). \tag{19}$$

Но для марковского процесса

$$f(x_n|x_1,\dots,x_{n-1}) = f(x_n|x_{n-1}), \qquad (20)$$

так как задание $(n-1)$ ординаты исключает всякую зависимость от всех предшествующих ординат. Поэтому

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = f(x_n|x_{n-1})\, f_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}). \qquad (21)$$

Если применить формулу (21) еще $(n-1)$ раз, то получим

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=2}^{n} f(x_j|x_{j-1})\, f_1(x_1). \qquad (22)$$

Таким образом, закон n-го порядка для марковского процесса выражается через две функции: плотность вероятности перехода $f(x_j/x_{j-1})$ и одномерную плотность вероятности f_1. Но сами эти две функции выражаются через закон <u>второго</u> порядка, а именно

$$f(x_j|x_{j-1}) = \frac{f_2(x_j, x_{j-1})}{f_1(x_{j-1})}, \qquad (23)$$

$$f_1(x_{j-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_j, x_{j-1})\, dx_j. \qquad (24)$$

Следовательно, для марковского процесса закон произвольного порядка можно выразить через закон второго порядка или через условную плотность $f(x_j/x_{j-1})$ и начальное распределение. Этот факт делает марковские процессы удобным инструментом анализа случайных функций, особенно в нелинейных задачах. Отметим, что функция $f(x_j/x_{j-1})$ для марковского процесса удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных (так называемому уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова), что позволяет свести получение закона распределения процесса к некоторой задаче математической физики.

Нормальные (гауссовские) процессы

Процесс называется нормальным (или гауссовским), если все многомерные законы его распределения являются нормальными законами.

Рассмотрим нормальный процесс $X(t)$. Фиксируем n моментов времени $t_1, \ldots, t_n$ и введем ординаты процесса $X_i = X(t_i)$, $(i=\overline{1,n})$. В силу нормальности совместного закона распределения $X_1, \ldots, X_n$ при любом n будет нормальным. Для того, чтобы его фактически выписать, нужно знать все математические ожидания

$$\overline{x_i} = M(X_i), \quad (i=\overline{1,n}), \tag{25}$$

а также все корреляционные моменты

$$k_{ij} = M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j], \quad (i,j=\overline{1,n}). \tag{26}$$

Допустим, что нам известно математическое ожидание процесса $X(t)$, обозначаемое как $\overline{x}(t)$ и его корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$. Тогда, как легко видеть,

$$\overline{x_i} = \overline{x}(t_i), \quad (i=\overline{1,n}), \tag{27}$$

$$k_{ij} = K_x(t_i,t_j), \quad (i,j=\overline{1,n}). \tag{28}$$

Иначе говоря, многомерный закон распределения любого порядка для нормального процесса элементарно выражается через корреляционные характеристики этого процесса.