Стохастическое доминирование

Принятие решений в условиях риска.

Каждой альтернативе соответствует некоторое последствие

$A \qquad\qquad X$

$a \longrightarrow \tilde{x}$

$\tilde{x} \in X \subseteq \mathbb{R}$

Если мы знаем закон распределения случайной вел-ны, то при принятии решения можем воспользоваться стохастическим доминированием.

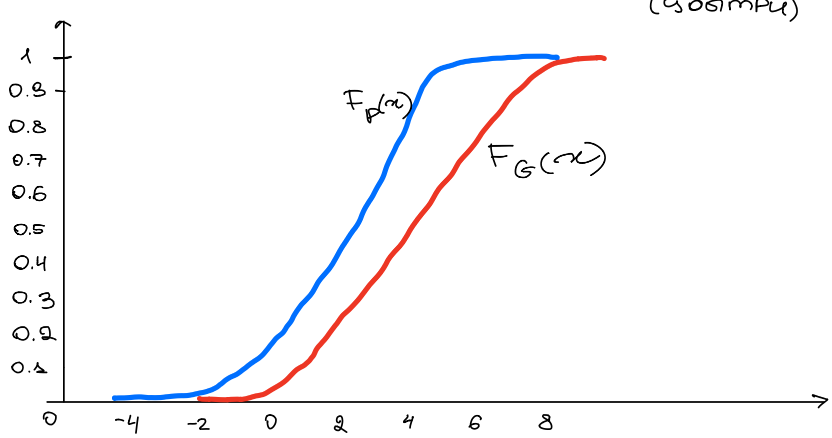
$P \in \mathbf{P} \longrightarrow F_P(x)$ – ф-я распределения
L мн-во вероятностных распределений на измеримом пр-ве.

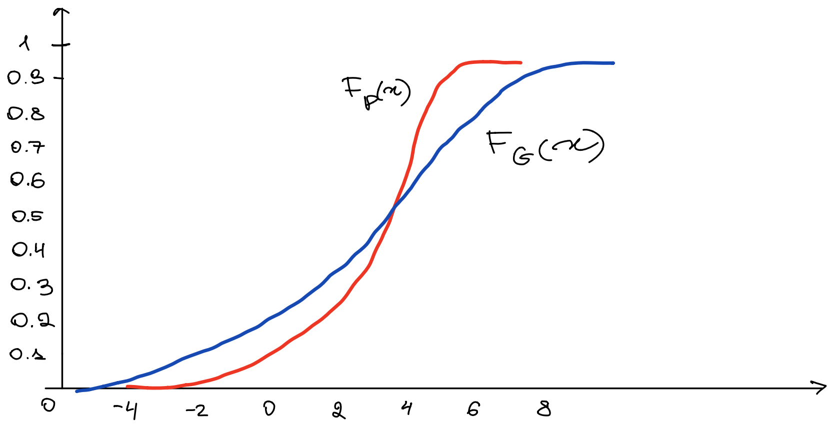
$S_P(x) = 1 - F_P(x)$ $\qquad\qquad$ $P, G \in \mathbf{P}$
L доп. ф-я распр-я
(ф-я надёжности)

Если заданы два распр-я P и G, то:

def имеет место стохастическое доминирование 1-го порядка I рода: $P \le_{1,I} G$, если $F_P(x) \ge F_G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
(распр. G доминирует P) (прибыль)

def имеет место стохастическое доминирование 1-го порядка II рода: $P \le_{1,II} G \Leftrightarrow S_P(x) \le S_G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
(убытки)





def имеет место стохастическое доминирование k-го порядка I-го рода

$$P \leq_{k,I} G \Leftarrow F_P^{(k)}(x) \geqslant F_G^{(k)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

где $$F^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{(k-1)}(t)\,dt; \quad k = 2, 3 \ldots$$

def имеет место стохастическое доминирование k-го порядка II-го рода

$$P \leq_{k,II} G \Leftarrow S_P^{(k)}(x) \leq S_G^{(k)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

где $$S^{(k)}(x) = \int_{x}^{\infty} S^{(k-1)}(t)\,dt; \quad k = 2, 3 \ldots$$

Утв (усл-е $\exists$ ф-й F и S k-го порядка)

$\exists$ X - с.в. с ф.р. F_P; $P \in \mathbf{P}$; $\exists$ $\underbrace{M[|X^k|]}_{\text{мат. ож.}} < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists F_P^{(k+1)}(x); \ \exists S_P^{(k+1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Утв

Если вып. условие домин. 1-го порядка, то и 2-го, ...

$$P \leq_{1,I} G \Rightarrow P \leq_{2,I} G \Rightarrow P \leq_{3,I} G \Rightarrow \ldots$$

$$P \leq_{1,II} G \Rightarrow P \leq_{2,II} G \Rightarrow P \leq_{3,II} G \Rightarrow \ldots$$

Пример

P

X	0	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

G

Y	0	1
P	0	1

$P \leq_{1,I} G$ $\quad$ $P \leq_{1,II} G$

не рвн-но!

Теория ожидаемой полезности
(Нейман Моргенштерн)

полезность денег нелинейна

Задача о страховании коллекции

Альтернатива	Состояние среды	
	Украдут $P_1 = 0.001$	Не украдут $P_2 = 0.999$
Страховать	W — 500 (каждый год)	W — 500
Не страховать	W — 10000	W

Альтернатива	Состояние ревы	
	Украдут $P_1 = 0.001$	Не украдут $P_2 = 0.999$
Страховать	500	500
Не страховать	10 000	0

M ≈
Ожидаемые потери : 500
(страховка)

M ≈
Ожидаемые потери : 10
(нет страховки)

сопоставлена значение полезности исхода.
Для каждой альтернативы вычисл. ожидаемую полезность.
(макс. ожид. пол-ть)

$\exists$ Лотерея : $L = \langle P_1, x_1, \dots, P_n, x_n \rangle$ X — все знач. контрол. фактора
(исходы)

множество набора благ, при принятии решения о выборе между ними, каждый из которых может быть получен с заданной вер-тью.

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ - мн-во исходов — полная гр. несовместных событий

1) Вырожденная лотерея : $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$: $P_i = 1$

2) Равновероятные исходы : $n = 2 \Rightarrow \langle P, x_1, (1-P)\, x_2 \rangle \Rightarrow \langle x_1, P, x_2 \rangle$

$P = \frac{1}{2} \rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle$

Отношение предпочтения — бинарное отношение слабого порядка (т.е. • транзит. • рефл-но • антисим.)

$\succcurlyeq$

$L_1 \succcurlyeq L_2 \longrightarrow L_1 \succ L_2$

Отношение строгого предпочтения — бин. отн-е сильного порядка (т.е. • транз. • ассим.)

Отношение безразличия (индиф-ти) — транз. — отношение экви-ти
рефл.
симм.

$L_1 \sim L_2$

Аксиомы ТОП

1. Полнота: $\forall$ два исхода сравнимы по предпочтению

$$(x_1 \succcurlyeq x_2) \vee (x_1 \preccurlyeq x_2); \left[(x_1 \succcurlyeq x_2) \wedge (x_1 \preccurlyeq x_2)\right]$$

т.е. $(x_1 \sim x_2)$

2. Транзитивности (состоятельности):

$$(x_1 \succcurlyeq x_2) \wedge (x_2 \succcurlyeq x_3) \rightarrow x_1 \succcurlyeq x_3$$

$$(L_1 \succcurlyeq L_2) \wedge (L_2 \succcurlyeq L_3) \rightarrow L_1 \succcurlyeq L_3$$