Занятие 28.09

Потоки событий. Поток Эрланга

Теория

1°. <u>Потоком Эрланга r-го порядка</u> называют поток Пальма, в котором интервалы между требованиями распределены по закону

$$a(\tau) = \lambda r \frac{(\lambda r \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda r \tau}, \qquad (1)$$

где числовой параметр $\lambda > 2$ называется <u>интенсивностью</u> потока Эрланга, а целое число $r \geq 1$ — <u>порядком</u> этого потока. Очевидно, поток Эрланга <u>первого</u> порядка ($r=1$) совпадает с <u>простейшим</u> потоком.

2°. <u>Параметры потока Эрланга</u>

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_\tau^2 = \frac{1}{\lambda^2 r}, \quad \gamma_\tau = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (\lambda > 0, r = \overline{1,\infty}). \quad (2)$$

Легко видеть, что коэффициент вариации γ_τ при $r > 1$ всегда меньше единицы, так что поток Эрланга можно использовать для моделирования ситуации „мягкого расписания“, когда флуктуации длин интервалов между требованиями сравнительно невелики.

3°. <u>Связь потока Эрланга с простейшим потоком</u>

Рассмотрим r независимых одинаково распределенных случайных величин X_i, каждая из которых распределена по показательному закону с параметром λr следующего вида

$$f_i(x) = \lambda r e^{-\lambda r x}. \quad (3)$$

Тогда сумма всех X_i

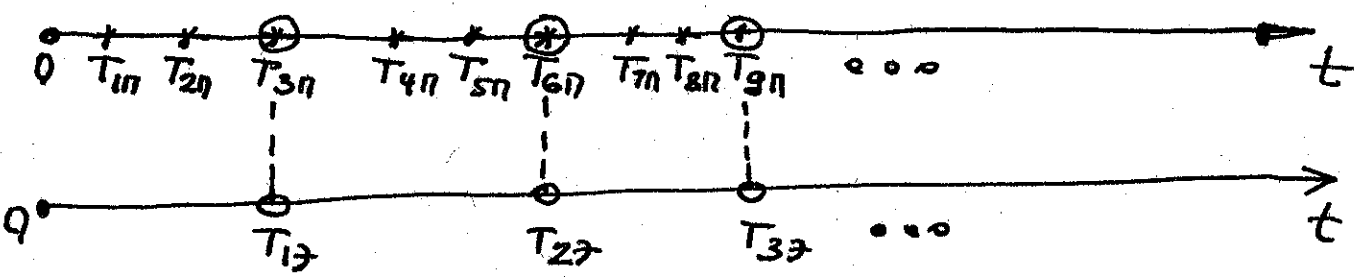
$$X = \sum_{i=1}^{r} X_i \quad (4)$$

будет распределена по закону Эрланга вида (1).

Из этого утверждения следует, что поток Эрланга можно получить путем „просеивания" простейшего потока. Разберем этот вопрос подробнее.

4°. Алгоритм формирования эрланговского потока на основе простейшего потока

Этот алгоритм состоит из двух этапов: 1) Рассматриваем простейший поток интенсивностью λr. 2) Выделяем в этом потоке каждое r-е по счету требование. 3) Формируем поток из выделенных требований а все остальные отбрасываем. 4) Полученный поток является эрланговским с интенсивностью λ и порядком r (см. рисунок, рисунок



соответствует частному случаю $r=3$, $T_{iп}$ обозначают моменты появления требований во вспомогательном простейшем потоке, а $T_{iэ}$ — в эрланговском потоке).

5°. Распределение числа требований в потоке Эрланга

Обозначим через $X(t_1, t_2)$ случайное число требований, попавших на интервал имеющего интенсивность λ. Тогда:

?

$$\mathcal{P}\{X(t_1,t_2)=k\} = \sum_{j=rk}^{rk+r-1} e^{-r\lambda t_2}\frac{(r\lambda t_2)^j}{j!}, \quad (k=\overline{0,\infty}). \qquad (5)$$

Эрланг трактовал формулу (5) в следующем духе: каждое требование в эрланговском потоке проходит r независимых этапов подготовки, причем длительность каждого из этих этапов распределена по показательному закону (3). В этом состоит суть так называемого „метода этапов Эрланга", который позволяет сводить задачи для эрланговских потоков к некоторым вспомогательным задачам для простейшего потока.

6. Гамма-поток

Гамма-потоком называют поток Пальма, характеризуемый

$$a(\tau) = \lambda r \frac{(\lambda r\tau)^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda r\tau}, \quad (\lambda>0, r>0), \qquad (6)$$

где $\Gamma(x)$ обозначает гамма-функцию, λ имеет тот же смысл, что и в (1), а параметр r в отличие от (1) может принимать произвольные положительные значения. Очевидно, при целом r гамма-поток совпадает с потоком Эрланга порядка r, причем сохраняются формулы (2) для параметров потока. Естественно, при произвольном нецелом r уже не имеет место описанная выше связь с простейшим потоком и становится невозможным применять метод этапов Эрланга.

7°. Регулярный поток

Регулярным называют поток, в котором требования поступают через заданное фиксированное интервалу $\overline{\tau}$. В регулярном потоке моменты поступления требований T_k линейным образом зависят от номера k

$$T_k = \overline{\tau} k \; , \quad (k = \overline{1, \infty}). \tag{7}$$

Регулярный поток моделирует „жесткое" расписание поступления требований в отличие от „мягкого" расписания, моделируемого потоком Эрланга. В регулярном потоке игнорируются любые, сколь угодно малые случайные отклонения от расписания.

Можно показать, что регулярный поток представляет собой предельный случай потока Эрланга, когда $r \to \infty$. При этом

$$\lim_{r \to \infty} a(\tau) = \delta\left(\tau - \frac{1}{\lambda}\right), \tag{8}$$

а предельные значения параметров потока (2) получаются такими:

$$\overline{\tau} = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_\tau^2 = 0, \quad \gamma_\tau = 0. \tag{9}$$

Для регулярного потока можно записать

$$a(\tau) = \delta(\tau - \overline{\tau}), \tag{10}$$

что хорошо согласуется с (7).

Примеры

Задача 1

Имеются два независимых случайных потока одной и той же интенсивности λ, первый из которых является простейшим, а второй — эрланговским второго порядка. Какова вероятность того, что первым поступит требование из эрланговского потока.

Решение

Обозначим через X_1 интервал времени до получения первого требования в простейшем потоке, а через X_2 – интервал до получения первого требования в эрланговском потоке. Пусть $f_i(x_i)$ обозначает плотность вероятности X_i $(i=\overline{1,2})$. По условию

$$f_1(x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1},$$

$$f_2(x_2) = 2\lambda \frac{(2\lambda x_2)}{1!} e^{-2\lambda x_2}.$$

Совместный закон распределения X_1 и X_2 благодаря независимости этих случайных величин выразится в виде:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) =$$
$$= 4\lambda^3 x_2 e^{-\lambda(x_1+2x_2)}.$$

Искомая вероятность может быть представлена в виде:

$$p = \mathcal{P}\{X_2 < X_1\} = \int_0^\infty \int_0^{x_1} f(x_1,x_2)dx_2 dx_1 =$$
$$= \int_0^\infty \int_{x_2}^\infty f(x_1,x_2)dx_1 dx_2.$$

Она представляет собой интеграл от двумерной плотности $f(x_1,x_2)$ по заштрихованной области на рисунке 1.

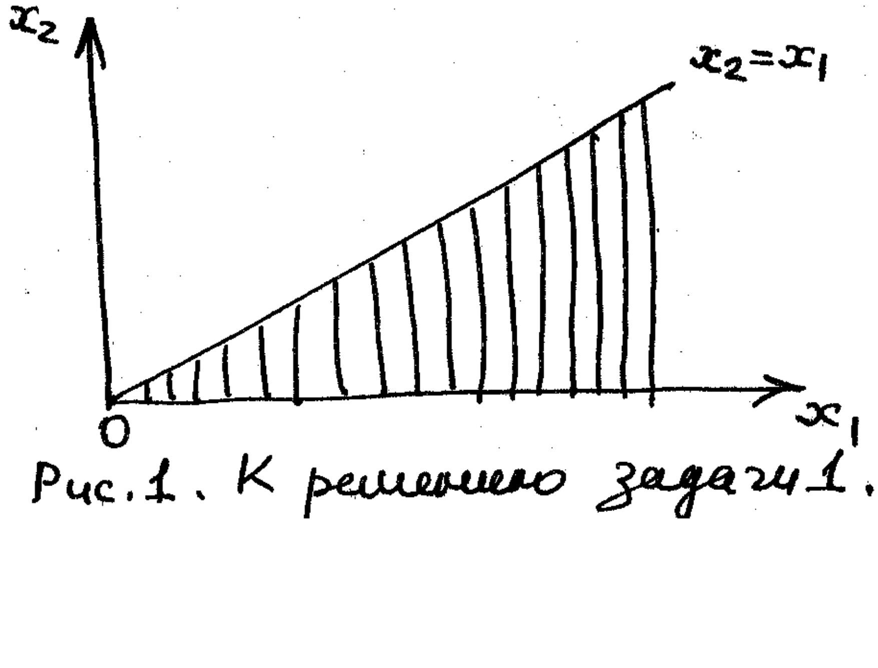


Рис.1. К решению задачи 1.

Далее при вычислении вероятности p воспользуемся вторым из приведенных выше ее представлений, когда внутренний интеграл берется по x_1, а внешний – по x_2. Это удобнее, так как выражение для $f_1(x_1)$ проще, чем для $f_2(x_2)$, и внутренний интеграл легко вычисляется. Имеем,

$$p=\int_0^\infty\int_{x_2}^\infty 4\lambda^3 x_2 e^{-\lambda(x_1+2x_2)}dx_1dx_2=$$

$$=\int_0^\infty 4\lambda^2 x_2 e^{-2\lambda x_2}\left[\int_{x_2}^\infty \lambda e^{-\lambda x_1}dx_1\right]dx_2=$$

$$=\int_0^\infty 4\lambda^2 x_2 e^{-2\lambda x_2}e^{-\lambda x_2}dx_2=$$

$$=\int_0^\infty 4\lambda^2 x_2 e^{-3\lambda x_2}dx_2.$$

Проделывая в последнем интеграле замену переменной $y=3\lambda x_2$, будем иметь

$$p=\frac{4\lambda^2}{(3\lambda)^2}\int_0^\infty y e^{-y}dy=\frac{4}{9}\Gamma(2)=\frac{4}{9}\cong 0.44.$$

Таким образом, в условиях задачи вероятность получить первой заявку из эрланговского потока составляет 44%, а из простейшего потока 56%. Отметим, что по условию интенсивности потоков одинаковы. Более вероятное получение первой заявки из простейшего потока связано исключительно с временной структурой самих рассматриваемых потоков.

Задача 2

Доказать, что функция распределения случайной величины X, распределенной по закону Эрланга r-го порядка с плотностью вероятности

$$f(x) = \lambda r \frac{(\lambda r x)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda r x}$$

дается выражением

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda r x} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda r x)^i}{i!}.$$

Решение

Согласно определению функции распределения имеем при $x > 0$

$$F(x) = \mathcal{P}\{X < x\} = \int_0^x f(y)dy =$$

$$= \int_0^x \lambda r \frac{(\lambda r y)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda r y} dy.$$

Проделаем в последнем интеграле замену переменной $z = \lambda r y$, что дает

$$F(x) = \int_0^{\lambda r x} \frac{z^{r-1}}{(r-1)!} e^{-z} dz.$$

Проинтегрируем здесь один раз по частям. Тогда получим

$$F(x) = \frac{(\lambda r x)^{r-1}}{(r-1)!} \left(- e^{-\lambda r x}\right) + \int_0^{\lambda r x} \frac{z^{r-2}}{(r-2)!} e^{-z} dz =$$

$$= - e^{-\lambda r x} \frac{(\lambda r x)^{r-1}}{(r-1)!} + \int_0^{\lambda r x} \frac{z^{r-2}}{(r-2)!} e^{-z} dz.$$

Проинтегрировав еще один раз по частям, будем иметь:

$$F(x) = -e^{-\lambda r x}\frac{(\lambda r x)^{r-1}}{(r-1)!} - e^{-\lambda r x}\frac{(\lambda r x)^{r-2}}{(r-2)!} + $$
$$+ \int_0^{\lambda r x} \frac{z^{r-3}}{(r-3)!} e^{-z} dz.$$

Прослеживается следующая закономерность: после каждого интегрирования по частям степень z под знаком интеграла уменьшается на единицу, но появляется еще один внеинтегральный член, в котором степень x оказывается на единицу больше, чем степень z под интегралом. Если последовательно проделать $r-1$ интегрирование по частям, находим

$$F(x) = -e^{-\lambda r x}\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(\lambda r x)^i}{i!} + \int_0^{\lambda r x} e^{-z} dz.$$

Получившийся интеграл вычисляется элементарно

$$\int_0^{\lambda r x} e^{-z} dz = 1 - e^{-\lambda r x}.$$

Подставляя это значение в выражение для $F(x)$, получаем

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda r x}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\lambda r x)^i}{i!},$$

что и требовалось доказать.

Задача 3

Имеется поток Эрланга r-го порядка, в котором все интервалы между требованиями τ_k распределены по закону (1). Обозначим, как обычно, через $\overline{\tau}$ среднее значение всех интервалов. Найти вероятность того, что произвольный k-й интервал τ_k будет не меньше, чем $\overline{\tau}$

$$p = \mathcal{P}\{\tau_k \geq \overline{\tau}\}.$$

Решение

Очевидно, искомая вероятность может быть выражена в виде

$$p = 1 - \mathcal{P}\{\tau_k < \overline{\tau}\} = 1 - F(\overline{\tau}),$$

где $F(x)$ обозначает функцию распределения закона Эрланга r-го порядка. Как было показано в задаче 2

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda r x} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda r x)^i}{i!}.$$

при этом согласно формуле (2)

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda}.$$

Подставляя все эти значения в выражение для вероятности p, получим

$$p = e^{-r} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{r^i}{i!}.$$

Легко видеть, что найденное значение не превосходит единицы

$$p = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{r^i}{i!}}{e^r} = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{r^i}{i!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!}}$$

и действительно может трактоваться как некоторая вероятность.

Задача 4

Обозначим через $N_э(t)$ число требований, полученных к моменту времени t в потоке Эрланга порядка r, а через $\bar{n}_э(t) = M[N_э(t)]$ – среднее число требований, поступивших к этому моменту. Вычислить $\bar{n}_э(t)$.

Решение

Обозначим интенсивность потока Эрланга через λ и введем вспомогательный простейший поток интенсивности λr, где r – порядок потока Эрланга. Число полученных требований в этом простейшем потоке обозначим через $N_П(t)$. Согласно общим свойствам потока Эрланга число полученных в этом потоке требований может быть выражено

$$N_э(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le N_п(t) \le r-1, \\ 1, & r \le N_п(t) \le 2r-1, \\ \dots & \dots \\ k, & rk \le N_п(t) \le rk+r-1, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Легко видеть, что между $N_п$ и $N_э$ существует следующая связь

$$N_э(t) = \left[\frac{N_п(t)}{r} \right],$$

где [...] обозначает целую часть числа выписанного в квадратных скобках. При этом хорошо известно, что для простейшего потока с интенсивностью λr

$$P\{N_п(t) = i\} = e^{-\lambda r t} \frac{(\lambda r t)^i}{i!}, \quad (i = \overline{0,\infty}).$$

Поэтому математическое ожидание $N_э$ может быть выражено в виде:

$$\overline{n}_э(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{i}{r} \right] \frac{e^{-\lambda r t} (\lambda r t)^i}{i!}.$$

Задача 5

Данная задача представляет собой продолжение задачи 3 из предыдущего занятия, посвященной анализу отказов технического устройства. На предыдущем занятии потоки отказов всех элементов технического устройства считались простейшими, теперь они будут эрланговскими второго порядка. Интенсивность потоков отказов в обоих случаях считается одинаковой. Представляет интерес изучить, как тип потока отказов влияет на надежность работы системы.

Итак, имеется техническое устройство, состоящее из элементов, соединенных по той же самой схеме (см. рис. 2)

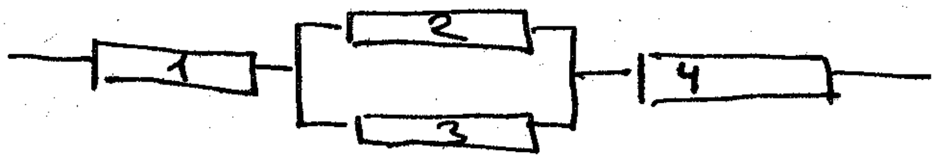


Рис. 2. Схема соединения элементов в задаче 5

Потоки отказов всех элементов – эрланговские второго порядка с одной и той же интенсивностью λ. Требуется определить вероятность безотказной работы системы в целом в интервале $[0,t]$ и среднее время безотказной работы

Решение

Введем, как и раньше, случайные события $A_i = \{$безотказная работа i-го элемента в $[0,t]\}$, $(i=\overline{1,4})$, $A = \{$безотказная работа всей схемы в $[0,t]\}$. Согласно рис. 2 введенные события связаны равенством

$$A = A_1(A_2+A_3)A_4.$$

Если предположить, что отказы различных элементов происходят независимо друг от друга, то тогда

$$P(A) = P(A_1)P(A_4)[P(A_2)+P(A_3)-P(A_2)P(A_3)]$$

Допустим что интенсивности потоков отказов всех элементов одинаковы. Тогда

$$P(A_i) = \mathcal{P}\{N_i=0\} = \varphi(t), \quad (i=\overline{1,4}).$$

Выражение $P(A)$ через $\varphi(t)$ будет таким же, как на предыдущем занятии.

$$P(A) = 2\varphi^3(t) - \varphi^4(t).$$

Изменится только выражение для вероятности $\varphi(t)$. В случае эрланговского потока порядка r это выражение имеет следующий вид:

$$\varphi(t)= e^{-\lambda r t}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\lambda r t)^i}{i!}.$$

В нашем случае по условию $r=2$, поэтому

$$\varphi(t)=e^{-2\lambda t}\sum_{i=0}^{1}\frac{(2\lambda t)^i}{i!}=e^{-2\lambda t}(1+2\lambda t).$$

Таким образом, вероятность безотказной работы будет такой:

$$P(A)= 2e^{-6\lambda t}(1+2\lambda t)^3-e^{-8\lambda t}(1+2\lambda t)^4.$$

Среднее время безотказной работы вычисляется точно также, как в случае простейшего потока

$$\bar{t}=\int_0^\infty P(A)\,dt=\int_0^\infty[2\varphi^3(t)-\varphi^4(t)]\,dt.$$

Усложняется только вычисление последнего интеграла.

Для его вычисления введем вспомогательные интегралы

$$I_k=\int_0^\infty\varphi^k(t)\,dt,\quad (k=\overline{1,\infty}).$$

Тогда будем иметь в нашем случае:

$$\bar{t}=2I_3-I_4.$$

Интегралы I_k можно вычислить с помощью следующей леммы.

Лемма 1.

Интеграл I_k можно представить в виде следующей суммы

$$I_k=\frac{1}{2k\lambda}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{k^j(k-j)!}.$$

Доказательство

Рассмотрим явное выражение

для искомого интеграла

$$I_k = \int_0^\infty e^{-2k\lambda t}(1+2\lambda t)^k dt.$$

Проделаем в этом интеграле замену переменной интегрирования $z = 2k\lambda t$. После указанной замены имеем

$$I_k = \frac{1}{2k\lambda}\int_0^\infty e^{-z}\left(1+\frac{z}{k}\right)^k dz.$$

Далее разложим $\left(1+\frac{z}{k}\right)^k$ по формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{z}{k}\right)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\frac{z}{k}\right)^j$$

и подставим в выражение для I_k

$$I_k = \frac{1}{2k\lambda}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{1}{k^j}\int_0^\infty e^{-z} z^j dz =$$

$$= \frac{1}{2k\lambda}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{1}{k^j}\Gamma(j+1) = \frac{1}{2k\lambda}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{j!}{k^j} =$$

$$= \frac{1}{2k\lambda}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{k^j(k-j)!} = \frac{1}{2k}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{k^j(k-j)!}\,\overline{\tau},$$

что и требовалось доказать.

Для контроля приведем ряд конкретных значений интегралов I_k:

$$I_1 = \frac{1}{2}(1+1)\overline{\tau} = \overline{\tau},$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\left(1+1+\frac{1}{2}\right)\overline{\tau} = \frac{5}{8}\overline{\tau} \cong 0{,}625\,\overline{\tau}$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\left(1+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)\overline{\tau} = \frac{13}{27}\overline{\tau} \cong 0{,}481\,\overline{\tau}$$

$$I_4 = \frac{1}{8}\left(1+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}\right)\overline{\tau} = \frac{103}{256}\overline{\tau} \cong 0{,}402\,\overline{\tau}$$

$$I_5 = \frac{1}{10}\left(1+1+\frac{4}{5}+\frac{12}{25}+\frac{24}{125}+\frac{24}{625}\right)\overline{\tau} = \frac{1097}{3125}\overline{\tau} \cong 0{,}351\,\overline{\tau}$$

$$I_6=\frac{1}{12}\left(1+1+\frac{5}{6}+\frac{5}{9}+\frac{5}{18}+\frac{5}{54}+\frac{5}{324}\right)\overline{\tau}=$$
$$=\frac{1223}{3888}\overline{\tau}\cong 0{,}315\overline{\tau}$$
$$I_7=\frac{1}{14}\left(1+1+\frac{6}{7}+\frac{30}{49}+\frac{120}{343}+\frac{360}{2401}+\frac{720}{16807}+\right.$$
$$\left.+\frac{720}{117649}\right)\overline{\tau}=\frac{236365}{823543}\overline{\tau}\cong 0{,}287\overline{\tau}$$

Для схемы, изображенной на рис. 2, имеем

$$\overline{t}_э=2I_3-I_4=\left(2\frac{13}{27}-\frac{103}{256}\right)\overline{\tau}=$$
$$=\frac{3875}{6912}\overline{\tau}\approx 0{,}561\overline{\tau}.$$

Напомним, что в случае простейшего потока среднее время безотказной работы давалось равенством

$$\tilde{t}_п=\frac{5}{12}\overline{\tau}\cong 0{,}417\overline{\tau}$$

Таким образом при переходе от простейшего потока ($r=1$) к эрланговскому среднее время безотказной работы увеличилось больше, чем на треть