Занятие 1

Общие свойства корреляционных функций и законов распределения

Материал этого занятия разбирается в § 31 задачника Свешникова.

Теория

1°. Определение случайной функции

Случайной функцией называется такая функция $X(t)$, значение которой при любом значении аргумента t является случайной величиной.

Если время t меняется непрерывно, то имеем случайный процесс, если t меняется дискретно — то случайную последовательность или временной ряд.

2°. Многомерные законы распределения случайной функции

Рассмотрим n моментов времени $t_1, \dots, t_n$ и определим случайные величины $X_i = X(t_i)$, $i = \overline{1,n}$. Законом n-го порядка называется закон распределения

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \qquad (1)$$

системы случайных величин $(X_1, \dots, X_n)$.

3° Математическое ожидание процесса

$$\overline{x}(t) = M[X(t)] \qquad (2)$$

4° Центрированный процесс

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - \overline{x}(t) \qquad (3)$$

Он имеет смысл отклонения процесса от среднего

5° Корреляционная функция процесса

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\left(X(t_1) - \overline{x}(t_1)\right)\left(X(t_2) - \overline{x}(t_2)\right)\right] = \qquad (4)$$
$$= M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right].$$

6° <u>Выражение математического ожидания через закон распределения первого порядка</u>

$$\bar{x}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x;t)\,dx. \qquad (5)$$

7° <u>Выражение корреляционной функции через закон распределения второго порядка</u>

$$K_x(t_1,t_2)=\iint_{-\infty}^{\infty}(x_1-\bar{x}(t_1))(x_2-\bar{x}(t_2))\cdot f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (6)$$

8° <u>Дисперсия процесса</u>

$$D[X(t)]=\sigma_x^2(t)=K_x(t,t)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x}(t))^2 f_1(x;t)\,dx. \qquad (7)$$

9° <u>Нормированная корреляционная функция</u>

$$k_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}. \qquad (8)$$

Функция k_x безразмерна, причем $|k_x|\le 1$.

10° <u>Понятие стационарного процесса</u>

Процесс $X(t)$ называется <u>стационарным</u>, если его свойства не меняются при произвольном изменении начала отсчета времени.

11° <u>Характеристики стационарного процесса</u>

$$\begin{gathered}
f_1(x_1;t_1)=\mathrm{const}(t_1)=f_1(x_1),\\
f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;t_2-t_1),\\
K_x(t_1,t_2)=K_x(t_2-t_1)=K_x(\tau),\ (\tau=t_2-t_1),\\
\bar{x}(t)=\bar{x}=\mathrm{const}(t),\\
\sigma_x^2(t)=\sigma_x^2=\mathrm{const}(t)=K_x(0),\\
k_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_2-t_1)}{K_x(0)}=\frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}.
\end{gathered} \qquad (9)$$

12°. Общие неравенства для корреляционной функции

$$|K_x(t_1,t_2)| \le \sigma_x(t_1)\,\sigma_x(t_2),$$

$$|k_x(t_1,t_2)| \le 1, \qquad (10)$$

$$|K_x(t_1,t_2)| \le \frac{1}{2}\left[\sigma_x^2(t_1) + \sigma_x^2(t_2)\right],$$

$$|k_x(t_1,t_2)| \le \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_x(t_1)}{\sigma_x(t_2)} + \frac{\sigma_x(t_2)}{\sigma_x(t_1)}\right].$$

Примечания

1) Если процесс $X(t)$ – комплекснозначный, то в формуле (4) берется

$$K_x(t_1,t_2) = M\left[\left(X(t_1) - \bar{x}(t_1)\right)^*\left(X(t_2) - \bar{x}(t_2)\right)\right],$$

где звездочка означает комплексносопряженное выражение.

2) При вычислениях с корреляционной функцией и математическим ожиданием кроме использования явных формул (5) – (7) часто бывает удобно применять общие теоремы о математическом ожидании и дисперсии, известные из теории вероятностей.

Примеры

Пример 1

Случайная функция $X(t)$ выражена в виде

$$X(t) = A + Bt, \qquad (1.1)$$

где A, B – независимые случайные величины, распределенные по закону $f_a(a)$ и $f_b(b)$ соответственно. Получить математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и нормированную корреляционную функцию процесса (1.1).

Решение

По теореме о математическом ожидании и дисперсии непосредственно по формуле (1.1) получаем:

$$\overline{x}(t) = \overline{a} + \overline{b}t,$$
$$\sigma_x^2(t) = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 t^2.$$

Найдем центрированную функцию $\overset{\circ}{X}(t)$

$$\overset{\circ}{X}(t) = (A + Bt) - (\overline{a} + \overline{b}t) =$$
$$= \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}t,$$

тогда

$$K_x(t_1, t_2) = M[(\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}t_1)(\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}t_2)] =$$
$$= \sigma_a^2 + \sigma_b^2 t_1 t_2.$$

благодаря независимости A и B

Нормированную корреляционную функцию находим согласно (8)

$$k_x(t_1, t_2) = \frac{(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 t_1 t_2)}{\sqrt{(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 t_1^2)(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 t_2)}}.$$

Проверим, что выполняется неравенство (10)

Возводя обе части в квадрат, находим

$$k_x^2 = \frac{\sigma_a^4 + 2t_1 t_2 \sigma_a^2 \sigma_b^2 + \sigma_b^4 t_1^2 t_2^2}{\sigma_a^4 + (t_1^2 + t_2^2)\sigma_a^2 \sigma_b^2 + \sigma_b^4 t_1^2 t_2^2}.$$

Поскольку всегда

$$|2t_1 t_2| \le t_1^2 + t_2^2,$$

то получаем

$$|k_x| \le 1.$$

<u>Пример 2</u>

Получить одномерный закон распределения случайной функции из примера 1 и с его помощью вычислить явно $\overline{x}(t)$.

<u>Решение</u>

Перепишем (1.1) в виде

$$X(t) = A + Y, \tag{2.1}$$

где

$$Y = Bt, \tag{2.2}$$

причем A и Y в (2.1) независимы, так как независимы A и B. Согласно (2.2) получаем

$$f_y(y) = \frac{1}{t} f_b\left(\frac{y}{t}\right).$$

Формула (2.1) представляет собой сумму независимых случайных величин. Допустим для простоты, что A и B неотрицательны. Тогда согласно (2.1)

$$f_1(x;t) = \int_0^\infty f_a(x-y) f_y(y)\,dy =$$

$$= \int_0^x f_a(x-y) \frac{1}{t} f_b\left(\frac{y}{t}\right) dy.$$

По определению математического ожидания

$$\overline{x}(t) = \int_0^\infty x \int_0^x f_a(x-y) \frac{1}{t} f_b\left(\frac{y}{t}\right) dy\,dx.$$

Поменяем в последнем интеграле порядок интегрирования по x и y:

$$\overline{x}(t) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_b\left(\frac{y}{t}\right) \int_y^\infty x f_a(x-y)\,dx\,dy.$$

Теперь во внутреннем интеграле по x заменим переменную интегрирования x на $z = x-y$

$$\overline{x}(t) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_b\left(\frac{y}{t}\right) \int_0^\infty (z+y) f_a(z)\,dz\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{t} f_b\left(\frac{y}{t}\right)(\overline{a}+y)\,dy = \overline{a} + \overline{b}t.$$

Естественно, получился тот же самый результат, что в примере 1, но использование теоремы о математическом ожидании позволило в примере 1 существенно сократить и упростить вычисления.

Пример 3

Получить математическое ожидание

и корреляцию функции процесса

$$X(t)=\sin(\omega t+\xi), \tag{3.1}$$

где ω — заданная фиксированная частота, а ξ — случайная фаза, распределенная равномерно в интервале $[0, 2\pi]$.

Решение

Представим функцию (3.1) в виде:

$$X(t)=\sin(\omega t)\cos(\xi)+\cos(\omega t)\sin(\xi).$$

Поскольку

$$M[\cos(\xi)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x)dx=0,$$

$$M[\sin(\xi)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)dx=0,$$

то, очевидно,

$$\overline{x}(t)\equiv 0.$$

Найдем корреляционную функцию:

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\left(\sin(\omega t_1)\cos(\xi)+\cos(\omega t_1)\sin(\xi)\right)\cdot\left(\sin(\omega t_2)\cos(\xi)+\cos(\omega t_2)\sin(\xi)\right)\right]=$$

$$=\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)M[\cos^2(\xi)]+$$

$$+\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2)M[\sin^2(\xi)]+$$

$$+\left(\sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2)+\sin(\omega t_2)\cos(\omega t_1)\right)M[\sin(\xi)\cos(\xi)].$$

Нетрудно показать, что

$$M[\cos^2(\xi)]=M[\sin^2(\xi)]=\frac{1}{2},$$

$$M[\sin(\xi)\cos(\xi)]=0.$$

Поэтому

$$K_x(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\left[\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)+\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\omega(t_2-t_1)).$$