Лекция 1

Понятие случайной функции

Наш курс посвящен изучению случайных функций. Прежде, чем непосредственно переходить к изложению материала, рассмотрим ряд предварительных вопросов по курсу. Начнем с краткого обзора литературы по нашему курсу.

Литература по курсу

Основным нашим пособием будет книга А.А. Свешникова:

[1]. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. СПб: Лань, 2011, 464с.

Арам Арутюнович Свешников – профессор кафедры „Прикладная математика", он работал здесь десять лет с 1969 по 1979 год. Свешников организовал на кафедре преподавание вероятностных дисциплин, воспитал много учеников. До сих пор в учебном процессе используются его методические разработки. Книга [1] является классическим руководством по данной теме, переведена на четыре языка (английский, немецкий, польский и чешский). Не так давно (в 2014 и 2015 годах) это пособие переиздавалось в Англии и США на английском языке, используется в западных университетах (в технических вузах с повышенным уровнем математической подготовки).

Отметим, что книга [1] представляет собой третье, последнее издание. Оно является стереотипным. Практически такое же издание вышло еще в 1968 году в издательстве „Наука" в серии

„Физико-математическая библиотека инженера":

[1*]. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968, 464 с.

Это второе издание. Естественно, им можно пользоваться наравне с третьим изданием [1]. Отличие [1] от [1*] состоит только в списке литературы, который в новом издании проверен и исправлен.

Можно рекомендовать также книгу академика В.С. Пугачева:

[2]. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962, 884 с.

Это классическое руководство, неоднократно переиздававшееся и у нас в стране, и за рубежом. Книга очень подробная, содержит весь необходимый материал по теории вероятностей. Ее можно использовать как справочное руководство для проработки отдельных вопросов.

Из более современных пособий можно рекомендовать курс, который читается в МГТУ:

[3] Волков И.К., Зуев С.М., Цветков Г.М. Случайные процессы. М.: МГТУ, 2006, 448 с.

Это книга из серии „Математика в техническом университете", которая включала около 20 томов. Вся серия была удостоена премии правительства РФ.

Само понятие „случайный процесс"

фактически является синонимом понятия „случайная функция" (в случае процесса аргументом случайной функции является время).

Еще одно полезное пособие написано авторами из МАИ и используется в учебном процессе в этом университете:

[4] Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002, 320 с.

В книге разбирается решение большого числа задач, что может быть полезно на упражнениях.

Для тех, кто захочет более углубленно изучить тему случайных функций, можно рекомендовать более новую книгу академика Пугачева:

[5] Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004, 1000 с.

Это кардинально переработанный и написанный на современном математическом языке курс [3]. И.Н. Синицын — зять академика Пугачева, он сам является известным специалистом по теории случайных процессов. Книга является подробным современным учебником. Ее чтение требует свободного владения аксиоматической теорией вероятностей.

Программа нашего курса основана на методических принципах курса [1] и предусматривает решение большого числа задач. В качестве базового задачника будет использоваться широко известный задачник под редакцией А.А. Свешникова!

[6] Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций (под редакцией А.А. Свешникова). М.: Наука, 1970, 656с.

Отметим, что задачник [6] представляет второе издание данной книги. Есть еще первое издание:

[6*] Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций (под ред. А.А. Свешникова). М.: Наука, 1965,

а также третье издание:

[6**] Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций (под общей редакцией А.А. Свешникова) СПб: Лань, 2007, 448с.

Мы используем второе издание, потому что оно более полное, чем первое издание [6*], в котором отсутствует ряд новых задач, включенных во второе издание [6]. Что касается третьего издания, то в нем отсутствуют примеры решения задач (за счет этого сокращение объема задачника более, чем на 200 страниц), что делает менее удобным использование [6**] в учебном процессе.

Все перечисленные книги (за исключением [5]) будут присланы в электронном варианте по почте. Некоторые из них есть в свободном доступе в интернете.

Из истории возникновения теории случайных функций

Теория случайных функций представляет собой определенный раздел теории вероятностей. По мере развития теории вероятностей предметом ее изучения становились случайные объекты все более сложной природы. Так, на начальном этапе развития теории вероятностей в XVII – XVIII веках разрабатывалась теория случайных событий. В XIX веке в современном виде сформировалась теория случайных величин. В XX веке появился новый раздел – теория случайных функций.

Первые задачи ТСФ возникли в механике и касались броуновского движения. Само броуновское движение было открыто еще в 20-х годах XIX века. Оно заключается в хаотическом беспорядочном движении частиц, взвешенных в жидкости или газе. Научное объяснение этого эффекта было дано значительно позднее, только в начале XX века. Этими задачами занимались крупнейшие физики, такие, как А. Эйнштейн, М. Планк, П. Ланжевен, М. Смолуховский и многие другие.

Практически одновременно с этим появились первые попытки приложения ТСФ в экономике. Они касались финансовой математики. Еще в 1900 году Л. Башелье в своей знаменитой диссертации „К теории спекуляции" Л. Башелье предпринял попытку описания стоимости акций на бирже в виде случайной функции времени. Эти работы Башелье были на долгое время забыты, однако начиная с шестидесятых и семидесятых годов методы ТСФ стали систематически применяться и интенсивно развиваться не только в финансовой математике, но и в других разделах математической экономики, например, в теории управления запасами, в моделях экономического роста, в моделях конкуренции и т.п.

Случайные флуктуации характерны также для поведения биологических объектов. Это может быть связано, например, со случайной изменчивостью окружающей среды.

В теории случайных функций изучаются наиболее общие, универсальные характеристики таких функций вне зависимости от конкретного физического содержания тех задач, где эти функции возникают.

Определение случайной функции

Случайной функцией $U(t)$ неслучайного аргумента t, называют такую функцию, значение которой при любом t является случайной величиной.

Множество возможных значений T аргумента t называют областью определения случайной функции.

Всюду далее аргумент t будем считать неслучайным, скалярным и вещественным.

Замечание. В общей теории рассматривают также случайные функции от нескольких скалярных аргументов $t_1, \dots, t_n$, то есть по существу функции $U(\vec{t})$ от векторного аргумента $\vec{t} = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Такие функции называют случайными полями. Теория случайных полей представляет большой интерес для ряда приложений (например, в механике или в астрономии), но в нашем кратком курсе случайные поля не рассматриваются.

Случайную функцию одного аргумента часто называют случайным процессом, а сам аргумент трактуют как время. Такая терминология применяется для краткости и наглядности. Физический смысл аргумента случайной функции может быть произвольным. Например, в теории транспортных машин

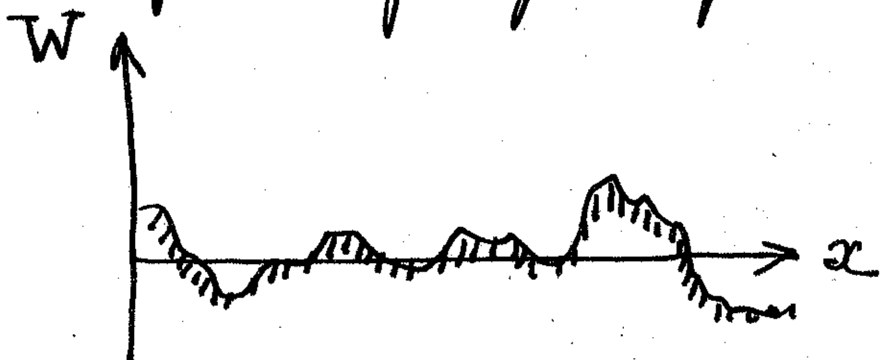

Рис. 1. Микропрофиль автодороги W в функции от путевой координаты x.

неровность автодороги $W(x)$ часто трактуют, как случайную функцию от путевой координаты x, отсчитываемой вдоль дороги (см. рис. 1).

Сама случайная функция $U(t)$ пока предполагалась скалярной. Рассматривают задачи, когда эта функция $\vec{U} = \{U_1(t), \ldots, U_n(t)\}$ является векторной. В таком случае говорят, что рассматривается система случайных функций $U_1(t), \ldots, U_n(t)$. Естественно, что функции $U_i(t)$ могут быть зависящими друг от друга. Например, это может быть курсовая стоимость нескольких видов акций на бирже или различные компоненты скорости турбулентного потока в гидродинамике.

Многомерные законы распределения случайной функции

Детализируем определение случайной функции. Как было отмечено выше, аргумент случайной функции t принадлежит некоторому множеству T — области определения случайной функции. Естественно считать, что T — бесконечное множество. Если бы множество T было конечно, то тогда и множество значений $U(t)$ случайной функции также было бы конечно, и его можно было бы описать обычными методами, принятыми в теории вероятности.

Говорить о случайной функции имеет смысл только в случае, если множество T бесконечно. Тогда эта функция представляет бесконечный параметризованный набор случайных величин, определенным образом связанных друг с другом.

Математическое описание случайной функции можно построить так. Рассмотрим вначале один-единственный момент $t_1 \in T$. Значение функции $X_1 = U(t_1)$ по определению есть

есть *случайная величина*. Ее можно характеризовать плотностью вероятности $f_1(x_1; t_1)$, где x_1 — аргумент плотности вероятности, t_1 — параметр, задающий момент времени, для которого берется ордината случайной функции. Закон распределения $f_1(x_1; t_1)$ называют *законом распределения первого порядка случайной функции* $U(t)$.

Теперь рассмотрим *два* момента $t_1 \in T$, $t_2 \in T$ и для них определим две ординаты случайной функции $X_1 = U(t_1)$, $X_2 = U(t_2)$. Совместный закон распределения системы случайных величин (X_1, X_2), обозначаемый через $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ называют *вторым порядка законом распределения* (или двумерным законом) случайной функции $U(t)$.

Далее предположим, что *задано* произвольное число $k = \overline{1, \infty}$ моментов времени $t_1, \ldots, t_k$ и для всех них подсчитаны ординаты случайной функции $X_i = U(t_i)$, $(i = \overline{1, k})$. Система k случайных величин $(X_1, \ldots, X_k)$ задается совместной плотностью вероятности $f_k(x_1, \ldots, x_k; t_1, \ldots, t_k)$ которая называется *законом распределения k-го порядка случайной функции $U(t)$.*

Задать случайную функцию $U(t)$ —

совокупность ее многомерных законов распределения $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$. Такое определение случайной функции было дано в 1926 году Е.Е. Слуцким.

Нужно подчеркнуть, что функции f_k не могут задаваться совершенно произвольно. Например, должно выполняться условие симметрии. Если мы заменим друг на друга два момента времени, скажем, t_j и t_e и при этом поменяем местами x_j и x_e, то закон k-го порядка f_k $(j \leq k, \ell \leq k)$ не должен менять своего вида.

Второе ограничение касается того, что закон k-го порядка f_k однозначно определяет все законы меньших порядков при всех $j < k$. Например,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)\,dx_i = f_{k-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k; t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k) \quad (1)$$

при любом i. Условие (1) часто называют условием согласования А.Н. Колмогорова. Оно позволяет выразить все законы младших порядков через законы более высокого порядка. Иначе говоря, все законы распределения случайной функции образуют некую иерархию, в которой различные законы согласованы друг с другом по особым правилам.

Важно заметить, что для полного задания случайной функции по Слуцкому необходимо задать всю иерархию ее законов распределения, то есть задать *бесконечное* множество функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Задание f_j до любого конечного k, пусть даже и достаточно большого, вообще говоря, не определяет полностью $U(t)$.

Моментные функции

Рассмотрим альтернативный способ задания случайной функции. Введем *моментные функции*

$$m_{k_1 \dots k_n}(t_1, \dots, t_n) = M\left[U^{k_1}(t_1) \dots U^{k_n}(t_n)\right], \tag{2}$$

где M обозначает символ математического ожидания. Очевидно, момент (2) можно выразить через закон распределения n-го порядка

$$m_{k_1 \dots k_n}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty}(n)\int x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \cdot \tag{3}$$

$$\cdot f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Сумма $k = k_1 + \dots + k_n$ называется *суммарным порядком* момента.

Зафиксируем n и все моменты времени $t_1, \dots, t_n$. Предположим, что мы знаем *все* моментные функции (2) при всевозможных порядках момента $k_1, \dots, k_n$. В математическом анализе доказывается, что при достаточно общих условиях, зная все моменты $m_{k_1 \dots k_n}$ можно по ним восстановить сам закон распределения $f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$. Задача восстановления плотности по известным значениям моментов называется "*проблемой моментов*". Она хорошо изучение и допускает при соответствующих ограничениях на числовые значения моментов точное решение.

Таким образом, если при заданном n мы знаем все моментные функции вида (2) при всевозможных $k_1, \ldots, k_n$, то мы сможем восстановить закон n-го порядка. Но для полного задания случайной функции нужно знать законы всех порядков $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, начиная с первого и до бесконечности. Поэтому при задании случайной функции через ее моменты необходимо задавать все моментные функции вида (2) при всех $n \geq 1$, при всевозможных $k_1, \ldots, k_n$ и при произвольных значениях моментов времени $t_1, \ldots, t_n$. Такое определение будет эквивалентно определению Слуцкого, но здесь важным является требование, чтобы были заданы все без исключения моменты.