Лекция 28.09

Поток Эрланга

Рассмотренный на предыдущей лекции простейший поток является наиболее удобной математической моделью для реальных потоков, так как он обладает сразу тремя общими свойствами, упрощающими использование этой модели на практике: стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия. К сожалению, далеко не всегда такую удобную модель можно использовать в прикладных исследованиях из-за того, что простейший поток имеет строго фиксированное, и притом достаточно большое значение коэффициента вариации интервала между требованиями $\gamma_\tau = 1$. На практике могут встречаться потоки с любым значением $\gamma_\tau \in [0, \infty)$.

Например, часто возникают потоки с небольшой степенью нерегулярности, характеризуемой значением γ_τ, заметно меньшим единицы. Этот случай обычно называют случаем „легкого расписания". Физически он может означать, что нерегулярность случайного потока с стараниями уменьшить, но полностью исключить случайные отклонения от „жесткого расписания" не удается.

Примером может служить поток деталей, поступающих на обработку рабочему в цехе, или поток больных на прием к врачу в поликлинике, которым выдаются специальные номерки. И в том, и в другом случае фактически сохраняется пусть и небольшие, но случайные отклонения от принятого расписания подачи заявок на обслуживание.

Для случая слабонерегулярных потоков применяется модель потока Эрланга. В этой модели все интервалы τ_k распределены по закону распределения Эрланга

$$a(\tau) = \lambda r \frac{(\lambda r \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda r \tau}, \quad (\lambda > 0, \ r = \overline{1,\infty}), \quad (1)$$

где положительный параметр λ представляет собой интенсивность потока, а целочисленный параметр r называется порядком потока Эрланга (и соответствующего закона распределения (1)).

Легко видеть, что при $r = 1$ закон (1) превращается в показательный закон как раз того вида, который был разобран на прошлой лекции. Следовательно, простейший поток является частным случаем потока Эрланга, отвечающим $r = 1$.

Подсчитаем характеристики так введенного потока при произвольном r. Для среднего интервала $\overline{\tau}$ имеем:

$$\overline{\tau} = \int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau = \int_0^\infty \lambda r \tau \frac{(\lambda r \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda r \tau} d\tau. \quad (2)$$

Проделав в интеграле (2) замену переменной $y = \lambda r \tau$, получим

$$\overline{\tau} = \frac{1}{\lambda r!} \int_0^\infty e^{-y} y^r dy = \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda r!} = \frac{1}{\lambda} \frac{r!}{r!} = \frac{1}{\lambda}. \quad (3)$$

Этот результат показывает, что параметр λ в (1) действительно имеет смысл интенсивности потока.

правилам имеем:

$$\sigma_\tau^2 = M(\tau_k^2) - \bar{\tau}^2. \qquad (4)$$

Здесь $M(\tau_k^2)$ подсчитывается аналогично (2) следующим образом

$$M(\tau_k^2) = \int_0^\infty \tau^2 a(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty \lambda r \tau^2 \frac{(\lambda r \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda r \tau}\,d\tau \qquad (5)$$

или после замены переменной интегрирования τ на $y = \lambda r \tau$

$$M(\tau_k^2) = \frac{1}{\lambda^2 r\, r!} \int_0^\infty e^{-y} y^{r+1}\,dy = \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^2 r\, r!} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\frac{(r+1)!}{r\, r!} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{r+1}{r} = \frac{1}{\lambda^2}\left(1+\frac{1}{r}\right). \qquad (6)$$

Подставляя найденные значения моментов τ_k из (3) и (6) в выражение (4), находим

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{\lambda^2 r}, \qquad (7)$$

откуда следует, что

$$\gamma_\tau = \frac{1}{\sqrt{r}}. \qquad (8)$$

Таким образом, увеличивая порядок закона распределения Эрланга r, можно добиться любого сколь угодно малого коэффициента вариации длины интервала между требованиями γ_τ. При этом для значений порядка $r \geq 2$ соответствующие значения коэффициента вариации $\gamma_\tau \in (0,1)$. Поэтому часто говорят, что поток Эрланга моделирует ситуацию „мягкого расписания", когда имеются сравнительно небольшие случайные отклонения от среднего значения интервала $\bar{\tau}$, определяемого выражением (3).

Качественный вид семейства плотностей

вероятности закона Эрланга при различных r представлен на рис. 1.

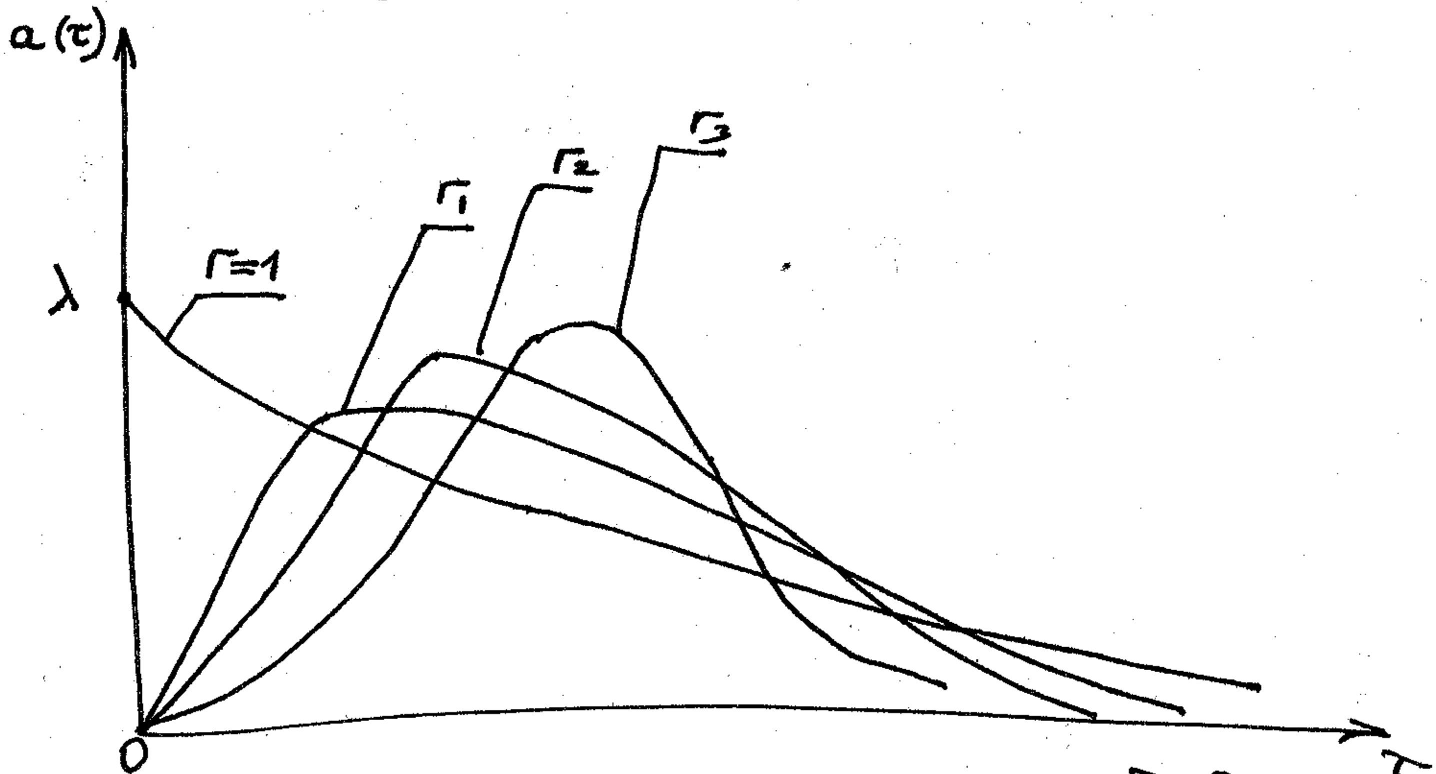

Рис. 1. Семейство распределений Эрланга для $1 < r_1 < r_2 < r_3$.

При $r = 1$ имеем монотонно убывающую экспоненту $\lambda e^{-\lambda\tau}$. При $r > 1$ получаем унимодальную плотность $a(\tau)$, обращающуюся в нуль при $\tau = 0$ и имеющую один максимум. Абсцисса максимума увеличивается с ростом n, его ордината также увеличивается. Математическое ожидание для всех кривых остается постоянным и равным $\frac{1}{\lambda}$, а соответствующая дисперсия убывает с ростом порядка закона Эрланга обратно пропорционально r.

Связь потока Эрланга с простейшим потоком

Удобство использования потока Эрланга при моделировании слабонерегулярных реальных потоков связано, в частности, с тем, что этот поток может быть получен путем „просеивания" некоторого вспомогательного простейшего потока. Как мы помним по предыдущей лекции, модель простейшего потока является наиболее удобной в математическом отношении и поэтому наличие такой связи является чрезвычайно полезным свойством.

Остановимся на этом вопросе подробнее. Для этого докажем следующее утверждение.

Утверждение 1.

Пусть случайная величина Y распределена по закону Эрланга порядка r

$$f_y(y) = \lambda r \frac{(\lambda r y)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda r y}. \qquad (9)$$

Тогда эту величину можно представить в виде суммы r независимых одинаково распределенных величин X_j:

$$Y = \sum_{j=1}^{r} X_j, \qquad (10)$$

причем каждая из величин X_j подчиняется показательному закону распределения

$$f_x(x) = \lambda r e^{-\lambda r x} \qquad (11)$$

с параметром λr.

Доказательство

Докажем вначале более общее утверждение, а именно, покажем, что сумма j независимых величин X_i с указанными свойствами

$$Y_j = \sum_{i=1}^{j} X_i \qquad (12)$$

распределена по закону

$$f_j(y) = \lambda r \frac{(\lambda r y)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda r y}, \quad (j = \overline{1, r}). \qquad (13)$$

Доказательство проведем по методу математической индукции. При $j = 1$ сформулированное свойство, очевидно, имеет место.

Пусть теперь распределение (13) справедливо при некотором произвольном $j > 1$. Тогда

$$Y_{j+1} = Y_j + X_{j+1}, \tag{14}$$

где Y_j и X_{j+1} независимы, причем Y_j распределено по закону (13), а X_{j+1} — по закону (11).

Распределение Y_{j+1} представляет собой композицию законов распределения $f_j(y)$ и $f_X(x)$ и выражается в виде свертки

$$f_{j+1}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y-x) f_j(x) dx, \tag{15}$$

Поскольку обе случайные величины Y_j и X_{j+1} неотрицательны, то обе плотности $f_X(x)$ и $f_j(x)$ обращаются в нуль при $x < 0$, поэтому фактически интеграл (15) сводится к интегралу по конечному промежутку $[0, y]$:

$$f_{j+1}(y) = \int_0^y f_X(y-x) f_j(x) dx. \tag{16}$$

Подставляя выражения (11) и (13) в (16), получим

$$f_{j+1}(y) = \int_0^y \lambda r e^{-\lambda r(y-x)} \lambda r \frac{(\lambda r x)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda r x} dx =$$

$$= \lambda r e^{-\lambda r y} \int_0^y \lambda r \frac{(\lambda r x)^{j-1}}{(j-1)!} dx =$$

$$= \lambda r e^{-\lambda r y} \frac{(\lambda r y)^j}{j!}, \tag{17}$$

а это означает, что равенство (13) имеет место при всех $j \geq 1$.

Применяя формулу (13) при $j = r$, убеждаемся в справедливости сформулированного выше утверждения.

Доказанное утверждение позволяет

установить важную связь между потоком Эрланга и простейшим потоком. Допустим, что мы хотим смоделировать поток Эрланга порядка r с интенсивностью λ. Введем вспомогательный простейший поток интенсивностью λr, в r раз большей, чем требуемая интенсивность эрланговского потока. Далее сформируем новый поток, в который включим каждое r-е требование из вспомогательного простейшего потока. Так сформированный поток будет эрланговским порядка r, а его интенсивность будет равняться λ (см. рис. 2)

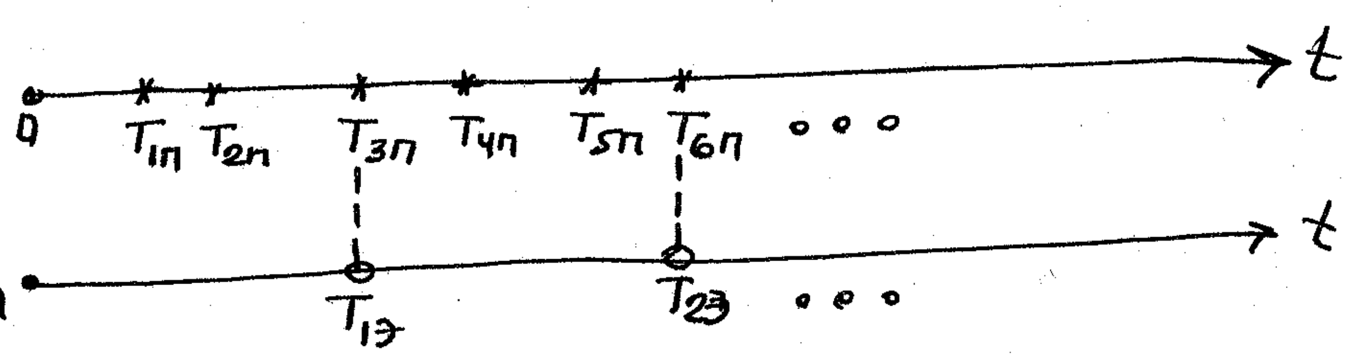

Рис. 2. Формирование эрланговского потока (порядка $r=3$) на основе вспомогательного простейшего потока

А. Эрланг дал интересную интерпретацию эрланговского потока. Он говорил, что каждое очередное требование в таком потоке проходит r „этапов" подготовки, причем все эти этапы „независимы", а их длительность распределена по показательному закону с параметром λr. Этот остроумный прием получил название „метода этапов Эрланга". Если следить не за поступлением самих требований, а за сменой „этапов", то дело сводится к исследованию простейших потоков, и задача сильно упрощается. Таким образом, эрланговский поток можно получать путем *просеивания* простейшего потока.

Регулярный поток

В ТМО иногда встречаются задачи, в которых требования приходят через строго фиксированный заданный постоянный интервал $\bar{\tau}$, то есть

$$T_k = \bar{\tau} k, \quad (k=\overline{1,\infty}). \qquad (18)$$

Эта ситуация, представленная на рис. 3, означает наличие „жесткого" расписания, а сам поток в этом случае называют *регулярным* потоком.

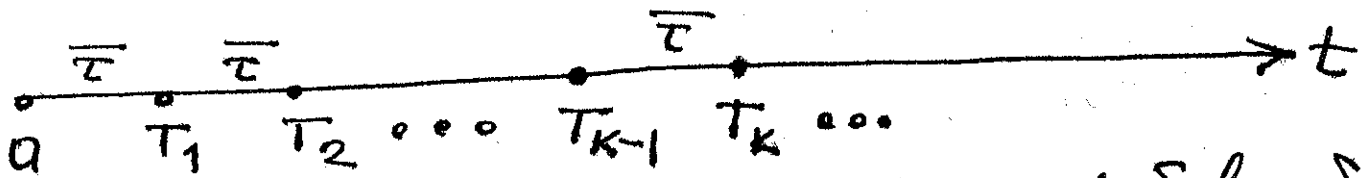

Рис. 3. Моменты поступления требований в регулярном потоке

Для такого потока исходя из общих правил можно ввести интенсивность

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}}. \qquad (19)$$

Регулярный поток удобно представить как предельный случай потока Эрланга интенсивности λ, когда порядок r неограниченно увеличивается. Рассмотрим более подробно, как ведет себя закон распределения Эрланга (1) с ростом r. Для этого изучим график функции $a(\tau)$. Найдем при $r > 1$ точку максимума $a(\tau)$.

Представим плотность (1) в виде

$$a(\tau)=C\tau^{r-1}e^{-\lambda r\tau} \tag{20}$$

и вычислим производную

$$a'(\tau)=a(\tau)\left[\frac{r-1}{\tau}-\lambda r\right]. \tag{21}$$

Обозначим точку максимума, то есть <u>моду</u> распределения (1) через τ_0. Она находится из уравнения

$$a'(\tau_0)=0, \tag{22}$$

решая которое находим

$$\tau_0=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{1}{r}\right)=\bar{\tau}\left(1-\frac{1}{r}\right), \tag{23}$$

где $\bar{\tau}$ обозначает среднюю длину интервала между требованиями в потоке Эрланга, определяемую равенством (3).

В результате получим график функции (1), представленной на рис. 4.

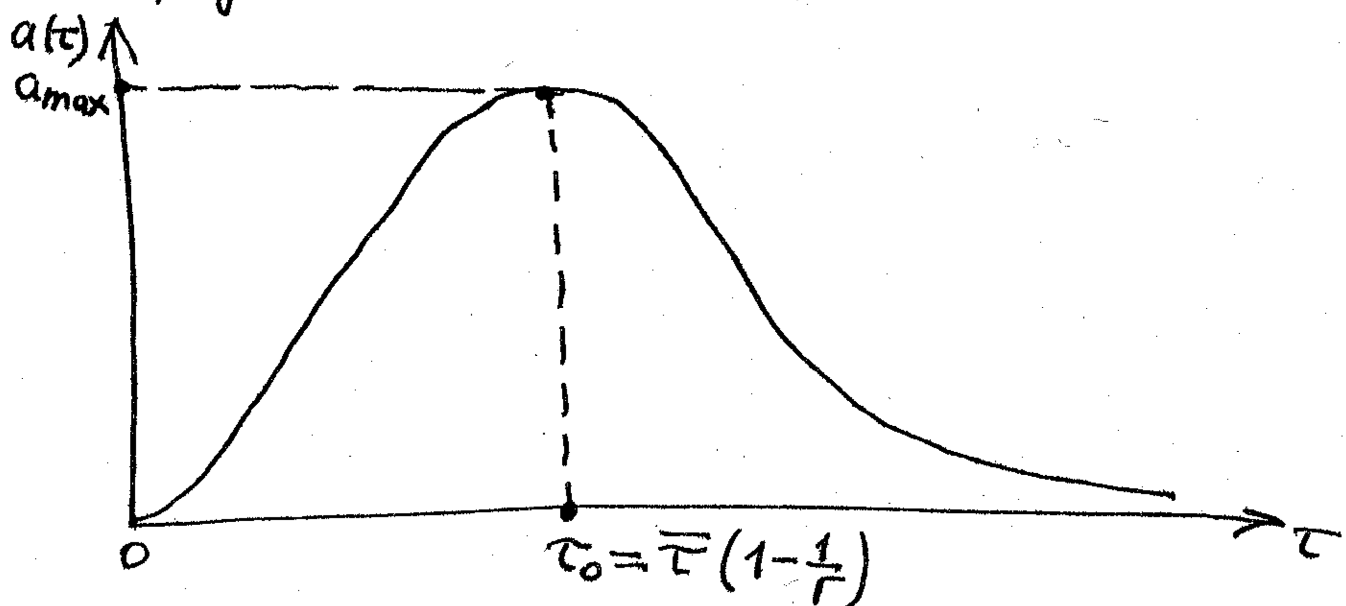

Рис. 4. График плотности вероятности закона распределения Эрланга порядка $r > 1$

Найдем ординату точки максимума a_{max}. Имеем

$$a_{max}=a(\tau_0)=\frac{\lambda r\, e^{-(r-1)}(r-1)^{r-1}}{(r-1)!}. \tag{24}$$

Исследуем поведение a_{max} при неограниченном увеличении r. Для этого воспользуемся асимптотической формулой Стирлинга для факториалов

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad (0<\theta<1,\ n\gg 1). \tag{25}$$

Используя (25), находим при $r\to\infty$ асимптотику для a_{max} вида

$$a_{max} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{r}\left(1+o\left(\frac{1}{r}\right)\right) \tag{26}$$

Таким образом, при больших r максимум плотности (1) располагается вблизи точки $\tau=\bar{\tau}$ и стремится к бесконечности при $r\to\infty$.

В результате аналогичных рассуждений можно показать, что при $\tau\neq\bar{\tau}$ предел функции $a(\tau)$ при $r\to\infty$ будет равняться нулю, то есть

$$\lim_{r\to\infty} a(\tau) = \begin{cases}\infty, & \tau=\bar{\tau},\\ 0, & \tau\neq\bar{\tau}\end{cases} \tag{27}$$

и при этом для любого r продолжает выполняться условие нормировки

$$\int_0^\infty a(\tau)\,d\tau = 1. \tag{28}$$

Предельные соотношения (27) и (28) означают, что

$$\lim_{r\to\infty} a(\tau) = \delta(\tau-\bar{\tau}), \tag{29}$$

где $\delta(\tau)$ обозначает дельта-функцию Дирака. Она соответствует детерминированному значению всех интервалов между требованиями τ_k, равному $\bar{\tau}$. Следовательно, в пределе при $r\to\infty$ поток Эрланга переходит в регулярный поток, в котором моменты прихода требований задаются формулой (18).