Случайная величина

Пусть задано вероятностное пр-во $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Ω – пр-во элементарных событий
(дискретно, если конечно или сч.
недискретно/непрерывно, если рез-ты исп-я – точки числового арифметич. или коорд. пр-ва)

$\mathcal{A}$ – семейство подмн-в Ω
└ Булева алгебра
(замкнуто отн-о операции объедин)

$\mathcal{P}$ – измеримая ф-я (вероятн. мера)

$\mathcal{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1$

1. $\mathcal{P}(\varnothing) = \varnothing$
2. $\mathcal{P}(a) \geqslant 0$
3. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
4. $a_1, a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{P}(a_1) + \mathcal{P}(a_2) \geqslant \mathcal{P}(a_1 \cup a_2)$

Сл. величина – измеримая ф-я $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^1$

Определение 1.1. *Случайным процессом* называется семейство случайных величин $\{\xi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in \mathbb{T}\}$.

Как обычно в теории вероятностей, мы будем опускать зависимость от элементарного исхода и писать $\xi(t)$ вместо $\xi(\omega, t)$, если эта зависимость не является существенной для наших рассуждений.

Как правило, полагают, что $\mathbb{T} = \{t \geqslant 0\}$, и в этом случае параметру t можно придать смысл времени. Однако природа множества $\mathbb{T}$ может быть и другой. Конечное множество $\mathbb{T} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ приводит нас к понятию n-мерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k = \xi(t_k)$, и тем самым мы возвращаемся в рамки теории вероятностей. Таким образом, естественно полагать, что множество $\mathbb{T}$ бесконечно. Если множество $\mathbb{T}$ счётно, $\mathbb{T} = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, или *случайной последовательностью*. Для многих физических моделей характерно, что множество $\mathbb{T}$ лежит не на числовой прямой, а в многомерном пространстве, например в обычном трёхмерном евклидовом пространстве. Определение 1.1 в этом случае остаётся без изменений, а случайный процесс $\xi(t)$ как правило называют *случайным полем*, или *случайной функцией*. Поскольку математические основы теории случайных процессов практически не зависят от того, какова размерность множества $\mathbb{T}$, далее мы будем считать, что параметр t – действительное число, более того, выбирать в качестве множества $\mathbb{T}$ счётное множество $\{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, или множество $\mathbb{R}_+ = \{t \geqslant 0\}$, или конечный интервал $[0, T]$, $0 < T < \infty$.

Случайную ф-ю одного аргумента часто называют случайным процессом, а сам аргумент трактуют как время

Случайной функцией $U(t)$ неслучайного аргумента t называют такую функцию, значение которой $\forall t$ явл. случайной вел-й

Поток событий наз-ся стационарным, если все его вероятностные характеристики остаются неизм. при произвольном изменении начала отсчёта

Случайный процесс $\xi(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если все конечномерные функции распределения любого порядка инвариантны относительно сдвига по времени, т. е. при любых n и t_0 справедливо равенство

$$F(x_1,t_1;\ldots,x_n,t_n) = F(x_1,t_1-t_0;\ldots,x_n,t_n-t_0)\,. \tag{2.1}$$

Это значит, что вероятностные характеристики стационарного случайного процесса $\xi(t)$ не меняются при изменении начала отсчета времени наблюдения на произвольную величину t_0. Разумеется, что аналогичное равенство должно выполняться и для плотностей вероятностей

$$w(x_1,t_1;\ldots,x_n,t_n) = w(x_1,t_1-t_0;\ldots,x_n,t_n-t_0)\,, \tag{2.2}$$

а также для характеристических, моментных и корреляционных функций.

Из определения стационарности (2.2), в частности, следует:

$$w(x_1,t_1) = w(x_1,t_1-t_1) = w(x_1)\,, \text{ если } t_0 = t_1\,; \tag{2.3.а}$$

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2) = w(x_1,t_1-t_1;x_2,t_2-t_1) = w(x_1,x_2,\tau)\,, \tag{2.3.б}$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Математическое ожидание (среднее значение) стационарного в узком смысле случайного процесса также не зависит от времени

$$m_\xi = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x)dx\,. \tag{2.4}$$

Корреляционная и ковариационная функции зависят лишь от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_\xi(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 w(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2 = K_\xi(\tau)\,; \tag{2.5}$$

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\{[\xi(t_1)-m_\xi][\xi(t_2)-m_\xi]\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_\xi)(x_2-m_\xi)w(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2\,. \tag{2.6}$$

Причем

$$R_\xi(\tau) = K_\xi(\tau) - m_\xi^2\,. \tag{2.7}$$

Дисперсия стационарного процесса постоянна и равна значению корреляционной функции при нулевом значении аргумента:

$$D_\xi = \sigma_\xi^2 = M\{[\xi(t)-m_\xi]^2\} = R_\xi(0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_\xi)^2 w(x)dx = M\{\xi^2(t)\} - m_\xi^2\,. \tag{2.8}$$

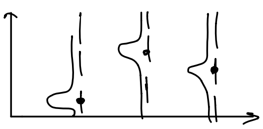
Стационарный процесс $\xi(t)$ с конечной дисперсией называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание и корреляционная (ковариационная) функция инвариантны относительно сдвига во времени, т. е. математическое ожидание постоянно (не зависит от времени), а корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$ и конечна при $\tau = 0$:

$$m_\xi = const; \quad K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_1 - t_2) = K_\xi(\tau). \tag{2.11}$$

На основании (2.4)÷(2.6) заключаем, что случайные процессы, стационарные в узком смысле, всегда стационарны и в широком смысле. Однако обратное утверждение в общем случае неверно.

Нестационарные случ. п.

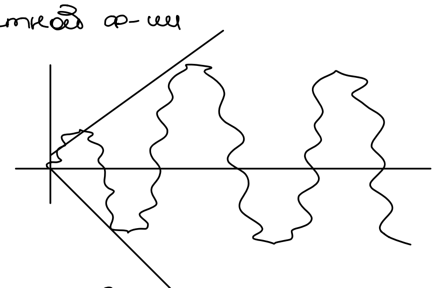
1. Нестационарные в смысле первой моментной ф-ии



мат. ожидание изм.
остальные моменты сохр,

2. Нестационарные в смысле $2^{ой}$ моментной ф-ии
Пр: Броуновское движение

Мат. ожидание сохр. инвариантно
Дисперсия изменяется



∃ классификация нестацион. процессов на основе их структуры.

I аддитивные модели: ордината = сумма ординат простых процессов.

$$X(t) = g(t) + h(t)$$

II мультипликативные модели: ордината = произв. орд простых пр.

$$X(t) = g(t) * h(t)$$

III мультипликат.-аддитивные модели: композиция

$$X(t) = g(t) + h(t) f(t)$$

IV квазипериодические модели: $F_x(x, t+dt) = F_x(x, t) + \delta(t)$ б.м.в.