I. 24

Имеется стационарная нормальная центрированная случайная функция $X(t)$ с корреляционной ф-ей :

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$$

по ней строится новая случайная функция

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^{(i)}(t)$$

где α_i – заданные постоянные.
Определить корреляционную функцию $Y(t)$.

Пусть $\alpha_i = (1-p)p^i \quad (0 \le i \le n)$

Построить график $K_y(\tau)$ для $\alpha = 1,\ \sigma = 1$ функции от τ при $0 \le \tau \le 3$ для значений $p = 0.1 \ldots 0.9$ с шагом 0.1.

Решение

Корреляционная функция n-ой производной стационарного процесса :

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n} K_x(\tau)}{d\tau^{2n}}$$

$$K_y(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i K_{x^{(i)}}(\tau)$$

1. $$K_{x^{(1)}}(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = 2\sigma^2\alpha^2 e^{-\alpha^2\tau^2}(1+2\alpha^2\tau^2)$$

1) $$\left(K_x(\tau)\right)^{(1)} = -2\sigma^2\alpha^2\tau e^{-\alpha^2\tau^2}$$

2) $$\left(K_x(\tau)\right)^{(2)} = -2\sigma^2\alpha^2 e^{-\alpha^2\tau^2} + 4\sigma^2\alpha^4\tau^2 e^{-\alpha^2\tau^2} = -2\sigma^2\alpha^2 e^{-\alpha^2\tau^2}(1+2\alpha^2\tau^2)$$

2. $$K_{x^{(2)}}(\tau) = \frac{d^4 K_x(\tau)}{d\tau^4} = 4\sigma^2\alpha^4 e^{-\alpha^2\tau^2}(3 - 12\alpha^2\tau^2 + 4\alpha^4\tau^4)$$

3) $$\left(K_x(\tau)\right)^{(3)} = 4\sigma^2\alpha^4\tau e^{-\alpha^2\tau^2} + 8\sigma^2\alpha^4\tau e^{-\alpha^2\tau^2} - 8\sigma^2\alpha^6\tau^3 e^{-\alpha^2\tau^2}$$

4) $$\left(K_x(\tau)\right)^{(4)} = 4\sigma^2\alpha^4 e^{-\alpha^2\tau^2} - 8\sigma^2\alpha^6\tau^2 e^{-\alpha^2\tau^2} + 8\sigma^2\alpha^4 e^{-\alpha^2\tau^2} - 16\sigma^2\alpha^6\tau^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$$

$$- 24\sigma^2\alpha^6\tau^2 e^{-\alpha^2\tau^2} + 16\sigma^2\alpha^8\tau^4 e^{-\alpha^2\tau^2} =$$

$$= 4\sigma^2\alpha^4 e^{-\alpha^2\tau^2}(1 - 2\alpha^2\tau^2 + 2 - 4\alpha^2\tau^2 - 6\alpha^2\tau^2 + 4\alpha^4\tau^4) =$$

$$= 4\sigma^2\alpha^4 e^{-\alpha^2\tau^2}(3 - 12\alpha^2\tau^2 + 4\alpha^4\tau^4)$$

3. $K_{x^{(3)}}(\tau) = -\dfrac{d^6 K_x(\tau)}{d\tau^6} = 8\sigma^2\alpha^6 e^{-\alpha^2\tau^2}(15 - 90\alpha^2\tau^2 + 60\alpha^4\tau^4 - 8\alpha^6\tau^6)$

4. $K_{x^{(4)}}(\tau) = \dfrac{d^8 K_x(\tau)}{d\tau^8} = 16\sigma^2\alpha^8 e^{-\alpha^2\tau^2}(105 - 840\alpha^2\tau^2 + 840\alpha^4\tau^4 - 224\alpha^6\tau^6 + 16\alpha^8\tau^8)$

$$K_y(\tau) = \alpha_0\sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2} + \alpha_1 2\sigma^2\alpha^2 e^{-\alpha^2\tau^2}(1 + 2\alpha^2\tau^2) + \alpha_2 4\sigma^2\alpha^4 e^{-\alpha^2\tau^2}(3 - 12\alpha^2\tau^2 + 4\alpha^4\tau^4) \ldots$$

$$\frac{d^n K}{d\tau^n} = \sigma^2 2^n e^{-\alpha^2\tau^2}(-\alpha^2\tau)^n n! \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{4^{-k}(-\alpha^2)^{-k}\tau^{-2k}}{k!\,(-2k+n)!}$$

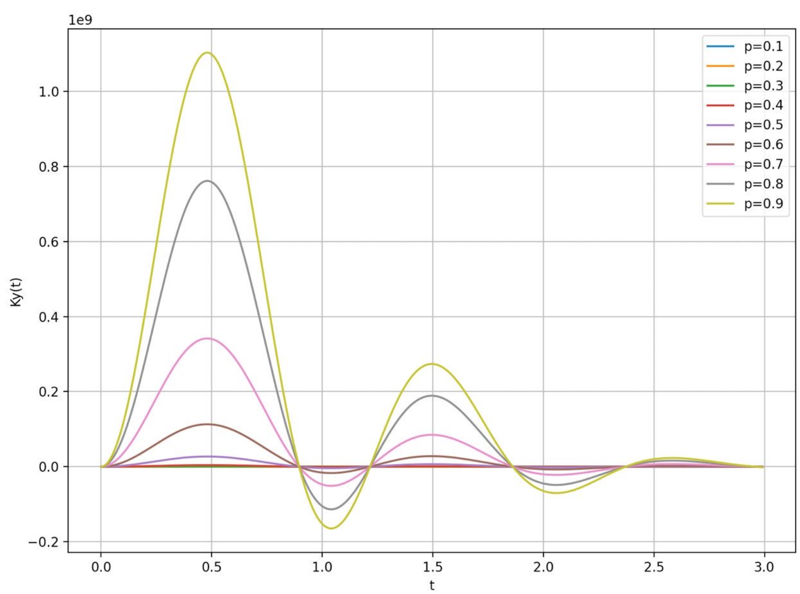
$$\frac{d^{2n} K}{d\tau^{2n}} = \sigma^2 4^n e^{-\alpha^2\tau^2}(-\alpha^2\tau)^{2n}(2n)! \sum_{k=0}^{n} \frac{4^{-k}(-\alpha^2)^{-k}\tau^{-2k}}{k!\,(-2k+2n)!}$$

$$\boxed{K_y(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sigma^2 4^i e^{-\alpha^2\tau^2}(-\alpha^2\tau)^{2i}(2i)! \sum_{k=0}^{i} \frac{4^{-k}(-\alpha^2)^{-k}\tau^{-2k}}{k!\,(-2k+2i)!}}$$

Построим график функции для $\alpha = 1 \quad \sigma = 1$

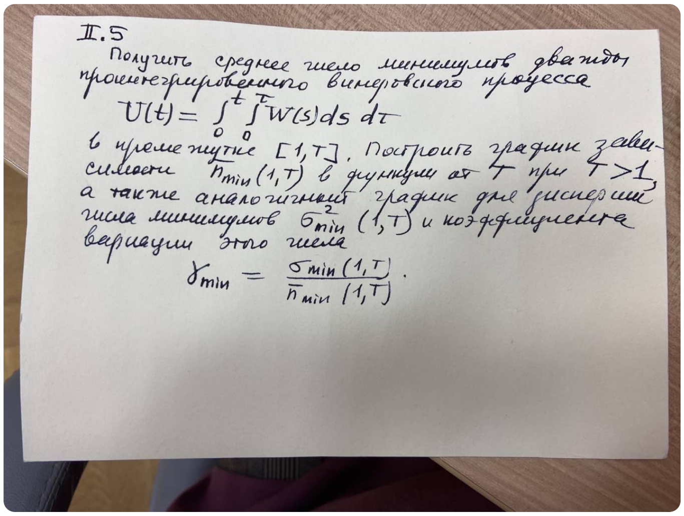
$\tau : 0 \le \tau \le (0{,}01)$

$\alpha_i = (1-p)p^i \qquad p = 0{,}1(0{,}1)0{,}9$



С увеличением p процесс имеет большую амплитуду в начале интервала.

Процесс напоминает затухающие колебания.



II.5

Получить среднее число минимумов дважды проинтегрированного винеровского процесса

$$U(t) = \int_0^t \int_0^\tau W(s)\,ds\,d\tau$$

в промежутке $[1,T]$. Построить график зависимости $\bar{n}_{min}(1,T)$ в функции от T при $T>1$, а также аналогичный график для дисперсии числа минимумов $\sigma^2_{min}(1,T)$ и коэффициента вариации этого числа

$$\gamma_{min} = \frac{\sigma_{min}(1,T)}{\bar{n}_{min}(1,T)}.$$

$$X \sim N(\bar{x}, \sigma^2 t^2)$$

$$Y = X - \bar{x}$$

$$\mu_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v|\, f_{y\dot{y}}(0, v)\, dv$$

$$f_{y\dot{y}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\Delta} \sum \overset{= K_x(t,t)}{A_{22}}\, V^2 \right.$$

$$\| k_{ij} \| = \begin{vmatrix} K_x(t,t) & R_{x\dot{x}}(t,t) \\ R_{\dot{x}x}(t,t) & K_{\dot{x}}(t,t) \end{vmatrix} \qquad R_{xy} = M[\dot{X}\,\dot{Y}] \qquad K_{\dot{x}} = \frac{\partial^2 K_x}{\partial t_1 \partial t_2}$$

$$R_{x\dot{x}} = M\left[X(t_1) \frac{\partial X(t_2)}{\partial t_2} \right] = \frac{\partial}{\partial t_2} K_x(t_1, t_2)$$

$$R_{\dot{x}x} = \frac{\partial}{\partial t_1} K_x(t_1, t_2)$$