1 Гильбертовы пространства

1.1 Евклидово пространство

Пусть X — линейное пространство (л.п.) над $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Пусть задана функция $(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$. (x,y) - скалярное произведение, если удовлетворяет 4 аксиомам :

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ $(= (y,x)$ в случае $\mathbb{R})$, $\quad \forall x, y \in X$
2. $(\alpha x, y) = \alpha\,(x,y)$, $\quad \forall x, y, z \in X$
3. $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$, $\quad \forall x, y \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$
4. $(x,x) \geqslant 0$, причём $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Замечание. $(x,x) \in \mathbb{R}$ даже для $x \in \mathbb{C}$, это вытекает из условия 1.

Определение. $[X, (\cdot,\cdot)]$ — евклидово пространство. Если пространство над $\mathbb{C}$,то говорят, что это унитарное пространство.

Теорема (Неравенство КБШ — Коши–Буняковского–Шварца)**.**
Пусть X — евклидово пространство, $x, y \in X$. Тогда

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Определение. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ — норма, порождённая скалярным произведением, евклидова норма.

Определение. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется гильбертовым (г.п.).

Пример.

$$\mathbb{R}^n \qquad (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{C}^n \qquad (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Пример.

$$\ell^2 \qquad (x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

КБШ = неравенство Гельдера для сумм при p = 2.

(ℓ^2 - простейшее Гильбертово пространство, сепарабельно)

Пример.

$$L^2(E) \qquad (f,g) = \int\limits_E f(x)g(x)dx \qquad \|f\| = \left(\int\limits_E |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Из неравенства Гёльдера вытекает существование интеграла. КБШ = интегральное неравенство Гельдера при p = 2.

1.2 Теорема о ближайшем элементе. Ортогональность.

Пусть H — г.п., $M \subset H$.

Определение. M называется выпуклым, если

$$\forall x, y \in M \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in M.$$

Теорема (О ближайшем элементе)**.**
Пусть H — г.п.(или конечномерное евклидово пространство) Пусть $M \subset H$, M — замкнутое выпуклое множество. Пусть $x \in H$ Тогда

$$\exists!\, y \in M \ : \ \|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Определение. Такая точка $y = P_M x$ называется проекцией x на M. P_M — оператор проектирования, проектор.

Утверждение.
X - евклидово пространство

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \frac{1}{2}\|y-z\|^2 + 2\|x - \frac{y+z}{2}\|^2; \quad \forall x, y, z \in X$$

Лемма (О непрерывности скалярного произведения)**.**
Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$ в X - евклидово. Тогда

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y).$$

Определение. H — г.п., $M \subset H$.
$M^\perp = \{y \in H \mid (x,y) = 0 \ \forall x \in M\}$ — ортогональное дополнение M.

Утверждение.
$M^\perp$ — подпространство H.

Определение. Пусть $M, N \subset H$.

- Говорят, что H раскладывается в сумму M и N и пишут $H = M + N$ если

$$\forall x \in H \ \exists\, m \in M, n \in N \ : \ x = m + n;$$

- Говорят, что H раскладывается в прямую сумму M и N и пишут $H = M \oplus N$ если

$$\forall x \in H \ \exists!\, m \in M, n \in N \ : \ x = m + n.$$

Теорема.
Пусть M — подпространство в H - г.п.. Тогда:

1. $H = M \oplus M^\perp$;
2. $\left(M^\perp\right)^\perp = M$.

1.3 Ортонормированные системы в гильбертовых пространствах

Пусть H — г.п. над $\mathbb{R}$

$\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$. - система векторов

Определение. Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$. Если

$$(e_k, e_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j; \\ 0, k \neq j; \end{cases}$$

то говорят, что $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система векторов (о.н.с).

Определение. Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — о.н.с., $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. $\sum_{k=1}^{N} c_k e_k$ сх-ся и его сумма равна

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

если

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ в } H,$$

, т.е ($\|S_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

Теорема.
Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — о.н.с в H - г.п. Тогда:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \text{ сходится} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty;$$

2. Сумма ряда не зависит от порядка суммирования;

3. Пусть
$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$
Тогда
$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Определение. $L_n = \operatorname{Lin}\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x \in H \mid \exists c_1,...,c_n \in \mathbb{R} : x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\}$

$L = \operatorname{Lin}(M) = \{x \in H \mid \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \exists\, x_1, \dots, x_n \in M : x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\}$ — линейная оболочка M (множество конечных линейных комбинаций).

L_n – подпространство в H, то по теореме о ближайшем элементе $\forall x \in H, \forall y \in L_n \exists!\ x_{Ln} \in L_n : \|x - x_{Ln}\| \leq \|x - y\|$

Утверждение.

$$x_{Ln} = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k.$$

Теорема (Неравенство Бесселя)**.**
Пусть $x \in H$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — о.н.с. в H. Тогда

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)^2.$$

Определение. Пусть $x \in H$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — о.н.с. в H.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$$

— ряд Фурье x по $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Утверждение.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$$

сходится. Обозначим сумму как $\mathrm{T}(x)$.

Определение. Говорят, что о.н.с. $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ замкнута относительно $x\ inH$, если $x = T(x)$.

Теорема.
Для того, чтобы система была замкнута необходимо и достаточно чтобы неравенство Бесселя выполнялось как равенство.

$$\mathrm{T}(x) = x \ \Leftrightarrow\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)^2$$

— равенство (тождество) Парсеваля.

Определение. Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — о.н.с в H. Говорят, что $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — полная о.н.с. или ортонормированный базис (о.н.б.), если она замкнута относительно $\forall x \in H$.

Пример. $H = \ell^2$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$:

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, 0, \ldots)\,, \\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)\,, \\ \ldots, \end{gathered}$$

т.е. $(e_k; e_i) = \delta_{ki}$.
$x \in H$ $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ $x_k = (x,\, e_k)$ $\ \Rightarrow ||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)^2$

Пример. $H = L^2\left([-\pi,\pi]\right), \left\{e_k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2\left([0,2\pi]\right):$
$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f\left(t\right) \bullet g\left(t\right) dt\right.$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$
$$e_{2k-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,$$
$$e_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx.$$

Тогда $\left\{e_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ — о.н.б. в $L^2\left([0,2\pi]\right)$.

Теорема (Критерий базиса в г.п.)**.**
Пусть $\left\{e_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ — о.н.с. в H. Тогда

$$\left\{e_k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ — о.н.б. в } H \;\Leftrightarrow\; H = \overline{\operatorname{Lin}\left\{e_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}}.$$

Теорема.
Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в H существует о.н.б.

2 Линейные операторы

2.1 Основные понятия

Пусть X, Y — множества.

Определение. Оператором (отображением) называется однозначное соответствие элементов Y элементам X.
$A\colon X \to Y$.
X — пространство (множество) прообразов.
Y — пространство (множество) образов.
$\mathcal{D}(A) = \{x \in X \mid \exists\, y \in Y : y = A(x)\}$ — область определения.
$\mathrm{R}(A) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : A(x) = y\}$ — область значений.

Определение. A — инъективный оператор, если
$\forall y \in \mathrm{R}(A)\ \exists!\, x \in \mathcal{D}(A) : y = A(x)$.
$(\nexists x_1,x_2 \in D\left(A\right)\ \left(x_1 \neq x_2\right):\ Ax_1 = Ax_2)$

Определение. A — сюръективный оператор, если $\mathrm{R}(A) = Y$.

Определение. A — биективный оператор, если он инъективен и сюръективен.

Пусть X, Y — метрические пространства (м.п.), $A\colon X \to Y$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

Определение. Говорят, что A непрерывен в точке x, если
$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A) : x_n \to x$ в X: $A(x_n) \to A(x)$ в Y .

Определение. Говорят, что A непрерывен, если он непрерывен в $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Пусть X, Y — линейные пространства (л.п.), $A\colon X \to Y$.

Определение. Говорят, что A — линейный оператор и пишут $A \in \mathrm{L}(X,Y)$, если

1. $\mathcal{D}(A)$ — линейное многообразие в X;

2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\ \ \forall x, y \in \mathcal{D}(A)\ \ A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Если $A \in \mathrm{L}(X,Y)$, то вместо $A(x)$ пишут Ax.

Замечание: В дальнейшем, под словом оператор будем подразумевать «линейный оператор». Под отображением – «нелинейное отображение».

Определение. Пусть $A \in \mathrm{L}(X,Y)$. $\mathrm{Ker}\, A = \{x \in \mathcal{D}(A) \mid Ax = 0\}$ — ядро оператора A.

Утверждение.
Пусть X, Y – линейные пространства. Пусть $A \in L\,(X,Y)$ (линейный оператор из X в Y) Тогда A - инъективный $\Leftrightarrow \quad Ker\,(A) = 0$.

Определение. Пусть X — л.п. над полем чисел $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, . Оператор $A\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ – называется функционалом.

2.2 Линейные операторы в нормированных пространствах

Пусть X, Y — н.п., $A \in \mathrm{L}(X, Y)$.

Утверждение.
A непрерывен $\Leftrightarrow$ A непрерывен в 0.

Заметим сразу, что $D(A)$ – лин.мн. значит $0 \in D(A)$.

Определение. Пусть $A \in \mathrm{L}(X, Y)$. Говорят, что A — ограниченный, и пишут $A \in \mathrm{B}(X, Y)$, если

$$\exists c \geqslant 0 : \forall x \in \mathcal{D}(A)\ \|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X.$$

Тогда $\inf c$ называют нормой оператора A и обозначают $\|A\|$.

Теорема.
Пусть X, Y — н.п., $A \in \mathrm{L}(X, Y)$. Тогда $A \in \mathrm{B}(X, Y) \Leftrightarrow A$ — непрерывный.

Определение. A_0 — продолжение A, где $A\colon X \to Y$, если $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_0)$ и $\forall x \in \mathcal{D}(A)\ A_0x = Ax$.

Утверждение.
Пусть $A, A_0 \in \mathrm{B}(X, Y)$ и A_0 — продолжение A. Тогда $\|A\| \leqslant \|A_0\|$.

Теорема (О продолжении ограниченного оператора с плотной областью определения)**.**
Пусть X — н.п., Y — б.п., $A \in \mathrm{B}(X, Y)$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
Тогда
1. $\exists! A_0 \in \mathrm{B}(X, Y) : A_0$ — продолжение A, $\mathcal{D}(A_0) = X$.
2.$\|A_0\| = \|A\|$.

2.3 Пространство линейных операторов

Пусть X, Y — л.п.
Рассмотрим $\mathrm{L}_0(X, Y) = \{A \in \mathrm{L}(X, Y) \mid \mathcal{D}(A) = X\}$.
$\forall A, B \in \mathrm{L}_0(X, Y)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ введём операции сложения и умножения на скаляр:
$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$
$\forall x \in X \quad (A + B)x = Ax + Bx$
$\mathcal{D}(\alpha A) = \mathcal{D}(A)$
$\forall x \in X \quad (\alpha A)x = \alpha(Ax)$.

Утверждение.
$\mathrm{L}_0(X, Y)$ с введёнными выше операциями образует л.п.

(По-хорошему, здесь следует рассмотреть все 8 аксиом линейного пространства, но нам лень, так что рассмотрим только одну. Найдем ноль. $0 \in L\left(X,Y\right)$, $D\left(0\right) = X$ $0x = 0$ Таким образом лин.операторы образуют линейное пр-во.)

Пусть X, Y — н.п.
Рассмотрим $\mathrm{B}_0(X, Y) = \{A \in \mathrm{B}(X, Y) \mid \mathcal{D}(A) = X\} \subset \mathrm{L}_0(X, Y)$ $\mathrm{B}_0(X, Y)$ - л.п.

Утверждение.
$\mathrm{B}_0(X, Y)$ н.п. относительно $\|A\|$.

Лемма (О вычислении нормы оператора)**.**
Пусть $A \in \mathrm{B}(X, Y)$. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\|$$

Определение. Сильная сходимость
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ X,Y - н.п.
$A_n \to A$ сильно если $A_n x \to Ax\ \forall x \in X$

Следствие. из определения.
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} (A_n \to A)\ \Rightarrow A_n \to A$ сильно.
Обратное в общем случае не верно.

Теорема.
Пусть X — н.п., Y — б.п. Тогда $\mathrm{B}_0(X, Y)$ — б.п.

(Пространство линейно ограниченных операторов банахово, как только образы есть банахово пространство.)

2.4 Принцип равномерной ограниченности

Теорема.
Пусть X — б.п., Y — н.п., $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{B}(X, Y)$ $(\mathcal{D}(A_n) = X\ \forall n \in \mathbb{N})$. Тогда эквивалентны утверждения

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty.$$

Утверждение.
$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in B(x_0,r)}\|A_nx\| = \infty, \forall x_0\in X, \forall r>0$

Теорема (Банаха–Штейнгауза)**.**
Пусть X — б.п., Y — н.п., $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset \mathrm{B}(X,Y)$, $A\in\mathrm{B}(X,Y)$. Тогда

$$\forall x\in X\ A_nx \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax \text{ (сильная операторная сходимость)} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A_nx_0\to Ax_0\ \forall x_0\in X_0,\ \overline{X_0}=X, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\|<\infty \end{cases}$$

Пример (Приложение к теории квадратурных формул интегрирования)**.** лень вставлять

Теорема (Сёге)**.**
Для того, чтобы квадратурная ф-ла сходилась к интегралу при измельчении разбиения для любой непрерывной ф-ции, необходимо и достаточно, чтобы: Эта ф-ла сходилась во сюду пл-ном мн-ве. Должен быть конечн. супремум сумм коэфф-тов.

$$\sum_{k=1}^{n}A_{n,k}f\left(t_k\right)\to_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(t\right)dt, \forall f\in C\left([0,1]\right)\Leftrightarrow$$

1)
$$\sum_{k=1}^{n}A_{n,k}g\left(t_k\right)\to_{n\to\infty}\int_0^1 g\left(t\right)dt, \forall g\in X_0, \bar{X}_0 \ \ = \ C\left([0,1]\right)$$

2)
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}|A_{n,k}|<\infty$$

2.5 Обратные операторы

Пусть $A\colon X\to Y$, A – инъективный.

Определение. A^{-1} — обратный оператор, если

$$A^{-1}: Y\mapsto X$$
$$\mathcal{D}(A^{-1})=\mathrm{R}(A),$$
$$\forall y\in\mathcal{D}(A^{-1}): A^{-1}(y)=x\Leftrightarrow y=A(x).$$

Утверждение.
Пусть X,Y — л.п., $A\in\mathrm{L}(X,Y)$. Тогда $A^{-1}\in\mathrm{L}(Y,X)$.

Утверждение.
Пусть $A\in\mathrm{L}(X,Y)$, тогда
$\exists m>0: \|Ax\|\geqslant m\|x\|\ \forall x\in\mathcal{D}(A)$ (коэрцитивность оператора).
Тогда $\exists A^{-1}\in\mathrm{B}(Y,X)$ и $\|A^{-1}\|\leqslant\frac{1}{m}$.

Лемма.
Пусть X — н.п., $X_0 \subset X : \overline{X_0} = X$. Тогда

$$\forall x \in X, x \neq 0 \quad \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_0 \;:\; x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\; \|x_n\| \leqslant \frac{3}{2^n}\|x\| \;\forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Теорема (Банаха об обратном операторе)**.**
Пусть X, Y — б.п., $A \in \mathrm{B}(X,Y)$ — биекция, $\mathcal{D}(A) = X$.
Тогда $\exists A^{-1} \in \mathrm{B}(Y,X)$.

Замечания.
Ни одно из утверждений в условии не может быть ослаблено.

2.6 Операторы, действующие из X в X

Пусть X — б.п., $B\left(X\right) = \left(A \in B\left(X,X\right)\right); D\left(A\right) = X\right)$ $B(x)$-б.п. .
Пусть $A, B \in \mathrm{B}(X)$. Определим $A * B$ как оператор $AB : X \mapsto X;\; D\left(AB\right) = X;$ $\left(AB\right)x = \;A\left(B\right)x \quad \forall x \in X$ — умножение операторов.

Утверждение (Свойства операторов)**.**
$\forall A, B, C \in \mathrm{B}(X)$

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$;
3. $\alpha\left(AB\right) = \left(\alpha A\right)B = A\left(\alpha B\right);\; \forall A,B \in B\left(X\right), \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$;
4. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$;
5. $\exists I \in \mathrm{B}(X) : IA = AI = A$;
6. $\|I\| = 1$.

Определение. Л.п. над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, на котором введено векторное умножение и выполняются свойства 1–3, называется вещественной (комплексной) алгеброй.

Определение. Если, кроме того, на этом пространстве введена норма таким образом, что оно стало банаховым, и выполнены ещё и свойства 4–6, то данная структура называется банаховой алгеброй.

Таким образом, $\mathrm{B}(X)$ — банахова алгебра.

Замечание. В общем случае $AB \neq BA$

Утверждение.
Пусть $A, B \in \mathrm{B}(X)$, $AB = BA = I$.
Тогда A — биекция и $\exists A^{-1} \in \mathrm{B}(X)$, $A^{-1} = B$.

Следствие. Пусть $A, B, A^{-1}, B^{-1} \in \mathrm{B}(X)$.
Тогда $\exists (AB)^{-1} \in \mathrm{B}(X), (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Определение. степень $A \in B(X)$, $n \in \mathbb{N}, (A^n = A \bullet A \bullet \ldots \bullet A)$-n умножений, $A^0 = I$

Теорема (фон Неймана).
$A \in \mathrm{B}(X)$, $\|A\| < 1$. Тогда

$$\exists (I - A)^{-1} \in \mathrm{B}(X) \quad \text{и} \quad (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{ - сумма геометрической прогрессии.}$$

Теорема (О возмущении обратимого оператора).
Пусть $A_0, A_0^{-1}, A \in \mathrm{B}(X)$; $\|A_0^{-1}\|\|A_0 - A\| < 1$. Тогда $\exists A^{-1} \in \mathrm{B}(X)$:

$$A^{-1} = A_0^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} \left(A_0^{-1} \left(A_0 - A\right)\right)^k); \tag{1}$$

$$\left\|A^{-1} - A_0^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left\|A_0^{-1}\right\|^2 \|A_0 - A\|}{1 - \left\|A_0^{-1}\right\| \|A_0 - A\|}. \tag{2}$$

2.7 Введение в спектральную теорию линейных операторов

Пусть X — б.п. над $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Определение. $\lambda \in \rho(A)$ ($\rho(A)$ — резольвентное множество),
если $\exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathrm{B}(X)$, $\mathcal{D}((A - \lambda I)^{-1}) = X$.
$\lambda \in \sigma(A) = c\rho(A)$ — спектр оператора, т.е. $\sigma(A) = \mathbb{C}(\mathbb{R}) \setminus \rho(A)$.

$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I)$ биективен — следствие теоремы Банаха.

Случаи нарушения биективности:

1. $A - \lambda I$ не инъективен $\Leftrightarrow \exists y \neq 0 : Ay = \lambda y$.
   λ — собственное число, $\lambda \in \sigma_p(A)$ — точечный спектр A.
   Если $\lambda \in \sigma_p(A)$ то $\nexists (A - \lambda I)^{-1}$.

2. $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ не замкнуто в X. Тогда $\lambda \in \sigma_c(A)$ — непрерывный спектр A.
   Если $\lambda \in \sigma_c(A)$ и $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то $\exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathrm{L}(X,X)$, но $(A - \lambda I)^{-1}$ не огр..

3. $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ замкнуто, но $\mathrm{R}(A - \lambda I) \neq X$. Тогда $\lambda \in \sigma_r(A)$ — остаточный спектр A.
   Если $\lambda \in \sigma_r(A)$ и $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то $\exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathrm{B}(X)$, но $\mathcal{D}((A - \lambda I)^{-1}) \neq X$.

Замечание. $\sigma_c(A) \cap \sigma_r(A) = \varnothing$, но может быть $\sigma_c(A) \cap \sigma_p(A) \neq \varnothing$ и $\sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) \neq \varnothing$.

Утверждение.
Пусть X — б.п., $A \in \mathrm{B}(X)$, $|\lambda| > \|A\|$. Тогда $\lambda \in \rho(A)$.

Определение. Спектральный радиус оператора A — это число

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Из предыдущего утверждения следует, что $r(A) \leqslant \|A\|$.

Утверждение.
Пусть X — б.п., $A \in \mathrm{B}(X)$. Тогда $\rho(A)$ открытое.

Замечание. Из двух предыдущих утверждение следует, что $\sigma(A)$ — компакт в $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Можно также доказать, что $\sigma(A) \neq \varnothing$.

2.8 Линейные функционалы. Теорема Хана–Банаха

X — н.п. над $\mathbb{C}(\mathbb{R})$,
$X^* = \{f \in \mathrm{B}(X, \mathbb{C}(\mathbb{R})) \mid \mathcal{D}(f) = X\}$ — сопряжённое множество.

$$X^* \text{ банахово относительно } \|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

Теорема (Хана–Банаха)**.**
Пусть X — н.п. над $\mathbb{R}$, L — линейное многообразие в X,
$f \in \mathrm{B}(X, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}(f) = L$.
Тогда $\exists F \in X^* : F$ — продолжение f, $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{B(X,\mathbb{R})}$.

Замечание. Тут единственность не обязательна

Следствие. Пусть X — н.п., $x \in X$, $x \neq 0$.
Тогда $\exists f \in X^* : \|f\|_{X^*} = 1, f(x) = \|x\|$.

Следствие. Пусть $x \in X$ и $\forall f \in X^*$ $f(x) = 0$. Тогда $x = 0$.

Следствие. Пусть L — линейное многообразие в X, пусть $x \in X$: $\operatorname{dist}(x, L) = d > 0$. Тогда $\exists f \in X^*$:
$f(x) = 1$,
$\|f\|_{X^*} = \frac{1}{d}$,
$\forall y \in L$ $f(y) = 0$.

2.9 Общий вид линейных ограниченных функционалов в различных пр-вах

Теорема (Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в г.п.)**.**
Пусть H — г.п.

1. Пусть $u \in H$, $f(v) = (v, u)$ $\forall v \in H$. Тогда $f \in H^*$ и $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$
2. Пусть $f \in H^*$. Тогда $\exists! u \in H : f(v) = (v, u) \, \forall v \in H$ и $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$

Теорема (Рисса для пространств ℓ^p, $1 < p < \infty$)**.**
Пусть $q = \frac{p}{p-1}, 1 < p < \infty$,

$$\text{Пусть } \xi \in \ell^q, \forall x \in \ell^p \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k. \text{Тогда } f \in (\ell^p)^*\ ,\ \|f\|_{(\ell^p)^*} = \|\xi\|_{\ell^q}\,.$$

Пусть $f \in (\ell^p)^*$. Тогда

$$\exists! \xi \in \ell^q : \forall x \in \ell^p \ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k, \ \|f\|_{(\ell^p)^*} = \|\xi\|_{\ell^q}.$$

Между $(\ell^p)^*$ и ℓ^q установлен изометрический изоморфизм.

Теорема (Лебега об общем виде линейного ограниченного функционала (Рисса) l в $L^p(E)$, $1 < p < \infty$)**.**
$q = \frac{p}{p-1}, 1 < p < \infty$,

$$\text{Пусть } g \in L^q(E), l(f) = \int_E f(x)g(x)dx \quad \forall f \in L^p(E).$$

Тогда $l \in (L^p(E))^*$, $\|l\|_{(L^p(E))^*} = \|g\|_{L^q(E)}$.

$$\text{Пусть } l \in (L^p(E))^* \text{.Тогда } \exists! g \in L^q(E):$$
$$l(f) = \int_E f(x)g(x)dx \quad \forall f \in L^p(E), \qquad \|l\|_{(L^p(E))^*} = \|g\|_{L^q(E)}.$$

$(L^p(E))^* \sim L^q(E)$ — изометрический изоморфизм.

2.10 Слабая сходимость

X — н.п.

Определение. Говорят, что x_n слабо сходится к x в X и пишут $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$ или $x_n \rightharpoonup x$, если $\forall f \in X^* \ f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Утверждение.
Пусть $x_n \rightharpoonup x$, $x_n \rightharpoonup y$ в X. Тогда $x = y$.

Утверждение.
Пусть $x_n \to x$ в X. Тогда $x_n \rightharpoonup x$ в X.

Пример. $X = \ell^2$
$\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - о.н.б в ℓ^2
$e_i = (0,...,1,0,...), (e_i)_k = 0$,если $k \neq i$,$(e_i)_k = 1$,если $k = i$.
$f \in (\ell^2)^*$ $f(e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k (e_i)_k = u_i \to_{i\to\infty} 0$ Пусть $u \in \ell^2$ $u = (u_1,...,u_k,..)$
$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$
$f(e_i) \to 0 = f(0), \forall f \in (\ell^2)^*$
$e_i \to_{i\to\infty} 0$ в ℓ^2

Утверждение.
Пусть X — н.п., $\dim X = n$. Тогда если $x_k \rightharpoonup x$ в X, то $x_k \to x$ в X.
В конечномерном н.п. сильная и слабая сходимости эквивалентны.

Утверждение.
Пусть X, Y — н.п., $A \in \mathrm{B}(X, Y)$, $\mathcal{D}(A) = X$, $x_n \rightharpoonup x$ в X.
Тогда $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в Y.

Утверждение (Слабая полунепрерывность нормы)**.**
Пусть X— н.п.. Если $x_n \rightharpoonup x$ в X, то $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. (норма является полунепрерывной снизу относительно слабой сходимости)

2.11 Введение в теорию двойственности

X — б.п.
X^{**} — второе сопряжение.
X изометрически изоморфно некоторому подмножеству X^{**}: $X \sim R \subset X^{**}$.
R — б.п., R — подпространство в X^{**}.

Определение. Пространство X называется рефлексивным, если $R = X^{**}$.

$$R = X^{**} \Leftrightarrow \forall g \in X^{**}\ \exists! x \in X : \forall f \in X^*\ g(f) = f(x).$$

Примеры.
H — г.п., ℓ^p, $L^p(E)$ при $1 < p < \infty$ — рефлексивные пространства.

Теорема.
X — б.п., $x_n \rightharpoonup x$ в X.
Тогда $\exists M \geqslant 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \ \|x_n\| \leqslant M$.

Определение. L — подпространство в б.п. X, $F \in X^*$. Сужением F на L называется $F|_L\colon L \to \mathbb{R}$ такой, что $F|_L(y) = F(y)\ \forall y \in L$.

Утверждение.
Пусть $F \in X^*$. Тогда $F|_L \in L^*$ и $\|F|_L\|_{L^*} \leqslant \|F\|_{X^*}$.

Теорема.
Пусть X — рефлексивное б.п., L — подпространство в X (тоже б.п.). Тогда L — рефлексивное.

2.12 Слабая сходимость в гильбертовых пространствах

H — г.п.
В силу теоремы Рисса $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow (x_n, y) \to (x, y)\ \forall y \in H$.

Утверждение.

$$x_n \to x \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\| \to \|x\| \end{cases}$$

Утверждение (Принцип выбора)**.**
В г.п. работает принцип выбора, т.е. из любой ограниченной последовательности можно извлечь слабо сходящуюся.
Пусть H - г.п., $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H : \exists M \geqslant 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \ \|x_n\| \leq M$,
то $\exists \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_{n_k} \rightharpoonup x$ в H.

Теорема (Банаха–Сакса).
Пусть H - г.п., пусть $u_n \rightharpoonup u$ в H.
Тогда $\exists \{u_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : v_k = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} u_{n_i} \to u$ в H , при $k \to \infty$.

Определение. Пусть X – н.п., $A \subset X$, тогда выпуклой оболочкой назовем множество $Conv(A) = \{x \in X | \exists \lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0, \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1, \exists a_1, ..., a_k \in A : x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k\}$

Определение. Пусть $F\colon H \to \mathbb{R}$.
Если $F(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k) \leqslant \lambda_1 F(u_1) + \ldots + \lambda_k F(u_k)$,
$\forall \lambda_i \geqslant 0, i = \overline{1,k}, \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, то F — выпуклый функционал.

Теорема (О слабой полунепрерывности выпуклых функционалов).
Пусть H - г.п., пусть $F\colon H \to \mathbb{R}$ — непрерывный выпуклый функционал. Тогда F слабо полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости.
$\left(F(x) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} F(x_n)\ \forall x_n \subset H :\ x_n \rightharpoonup x\right)$.

Теорема (Штольца).
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} \forall k \in \mathbb{N}\ y_k > y_{k-1} \\ y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \exists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} \end{array}$$

2.13 Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве

Определение. A — самосопряжённый, если $A = A^*$. $A \in B(H)$, H - г.п. над $\mathbb{C}(\mathbb{R})$

Утверждение.
A — самосопряжённый. Тогда $\forall u \in H\ (Au,u) \in \mathbb{R}$.

Утверждение.
A — самосопряжённый. Тогда пусть $\lambda \in \sigma_p(A) => \lambda \in \mathbb{R}$.

Утверждение.
A — самосопряжённый.
$\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(A),\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.
$u_1, u_2 \in H,\ u_1, u_2 \neq 0 : Au_1 = \lambda_1 u_1, Au_2 = \lambda_2 u_2$.
Тогда $(u_1, u_2) = 0$.

Теорема.
(о вычисление максимального с.ч) A — самосопряжённый, $A \in \mathrm{B}(H)$, $A \neq 0$.
$u_0 \in \overline{B(0,1)} :\ |(Au_0, u_0)| = \sup\limits_{\|u\|\leqslant 1} |(Au,u)|\ (\|u_0\| \leqslant 1)$.
Тогда:

1. $\|u_0\| = 1,$
2. u_0 - соб. вектор A,
3. $\lambda_0 = (Au_0, u_0)$ - макс. по модулю с.ч. оператора A: $Au_0 = \lambda_0 u_0,$.

Утверждение.
Пусть $(u_0,v) = 0 => (Au_0,v) = 0$

3 Компактные операторы

3.1 Определения и основные свойства

Пусть X, Y — н.п., $A \in \mathrm{B}(X, Y)$.

Определение. A называется компактным (вполне непрерывным) оператором, если он переводит ограниченные в X множества в предкомпактные в Y.
$\forall B \subset X \quad B$ ограничено $\Rightarrow A(B)$ — предкомпакт.

Примеры. 1. $dim\ X < \infty$
$dim\ Y < \infty A \in B(X,Y)$- комп.

2. Пусть H - г.п., L - п/п в H, $dim\ L < \infty$ P_L - оператор проектирования на L. P_L - комп..
3. Пусть X,Y = C([0,1]) , пусть $(Ax)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$
$k \in C([0,1]^2)$ A- комп.
4. Антипример

   X- н.п., $dim\ X < \infty$ Пусть $A = I : Ax = x\ \forall x \in X$
   A - не компакт.(Переводит любой шар сам в себя , шар не компакт.)

Лемма.
X — н.п., $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — предкомпакт в X, $x_n \rightharpoonup x$ в X.
Тогда $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в X.

Теорема.
X,Y — н.п., $A \in \mathrm{B}(X, Y)$, A — компактный, $x_n \rightharpoonup x$ в X.
Тогда $Ax_n \to Ax$ в Y.

Теорема.
X, Y — н.п., в X работает принцип выбора (из любой ограниченной последовательности можно извлечь слабосходящуюся).
$A \in \mathrm{B}(X, Y)$, $\forall x_n \rightharpoonup x\ Ax_n \to Ax$ в Y.
Тогда A — компактный оператор.

Утверждение.
X — н.п., $A, B \in \mathrm{B}(X)$, A — компактный.
Тогда AB, BA — компактные.

Следствие. $A \in \mathrm{B}(X)$ — компактный, $\dim X = \infty$.
Тогда $\nexists A^{-1} \in \mathrm{B}(X)$.

3.2 Компактные операторы в гильбертовых пространствах

Лемма.
$x_n \rightharpoonup x$, $y_n \to y$ в H. Тогда $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Теорема.
Пусть$A \in B(H)$ - комп., H -г.п.,тогда A^* - комп..

Лемма.
Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, H — г.п., $A \in \mathrm{B}(H)$ — компактный.
Тогда $\mathrm{R}(A - \lambda I)$ замкнут в H.

Лемма.
Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, H — г.п., $A \in \mathrm{B}(H)$ — компактный.
Тогда $H = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \oplus \mathrm{R}(A^* - \overline{\lambda} I)$ или $H = \mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I) \oplus \mathrm{R}(A - \lambda I)$.

Утверждение.
Пусть $H_k = \mathrm{R}((A - \lambda I)^k), k \in \mathbb{N}, \lambda \neq 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$ H_k — подпространство H, $H_{k+1} \subset H_k \subset \ldots \subset H_1$.

Лемма.
$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0$ $H_k = H_{k_0}$.

Лемма.
A — компактный оператор,$A \in B(H)$
$\lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ $\lambda \neq 0$.

1. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{R}(A - \lambda I) = H$;

2. $\mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{R}(A^* - \overline{\lambda} I) = H$.

Следствие (Критерий принадлежности λ к $\rho(A)$ — резольвентному множеству)**.**
H — г.п., $A \in \mathrm{B}(H)$ — компактный оператор.
$\lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ $\lambda \neq 0$,
$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$.
Тогда $\lambda \in \rho(A)$

Теорема (Альтернатива Фредгольма)**.**
Пусть H — г.п., $A \in \mathrm{B}(H)$ — компактный, $\lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ $\lambda \neq 0$.Тогда:

1. Если $(A - \lambda I)x = 0$ имеет только нулевые решения то $\forall f \in H$ $\exists! x \in H \in H$: $(A - \lambda I)x = f$.

2. Если $\exists x \neq 0 : (A - \lambda I)x = 0$, то $\exists x \in H : (A - \lambda I)x = f$ только если $f \in \mathrm{Ker}\left(A^* - \overline{\lambda} I\right)^{\perp}$.

Определение. Если для оператора выполнена альтернатива Фредгольма, то он называется фредгольмовым. Компактный оператор — фредгольмов.

Определение. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$. Кратность λ — число линейно независимых с.в., соответствующих этому с.ч., $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I))$.

Лемма.
X — л.п., $A \in \mathrm{L}(X)$.
$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \sigma_p(A)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, каждое собственное число может встречаться в поледовательности не больше раз, чем его кратность.
Тогда $\exists\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X : Ay_k = \lambda_k y_k, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — линейно независимы, т.е. линейно независимо любое конечное их подсемейство.

Определение. Пусть X-н.п.,точка x называется точкой сгущения множества A, если в любой окрестности x найдётся бесконечное число элементов A.
$(U_x \cap A$ - бесконечно мн-во)

Пример. 0 — точка сгущения $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема (О спектре компактного оператора)**.**
H — г.п., $A \in \mathrm{B}(H)$ — компактный оператор.
Тогда $\sigma(A)$ не более чем счётно; не имеет точек сгущения, за исключением, быть может, 0; каждое ненулевое с.ч. имеет конечную кратность. (Спектр компактного оператора явл. не более чем счетным, не имеет точек сгущения за исключением нуля и каждое с.ч. имеет конечную кратность)

Замечание. С.ч. можно перенумеровать по невозрастанию модуля.

Замечание. Эта теорема справедлива и в банаховом пространстве.

Утверждение.
H — г.п., $A \in \mathrm{B}(H)$ — компактный оператор.
$\lambda \neq 0 \lambda \in \sigma_p(A)$
Тогда $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ той же кратности
$\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A^* - \overline{\lambda} I\right)\right)$

3.3 Самосопряжённые компактные операторы в гильбертовом пространстве

Теорема (О существовании собственного вектора)**.**
H — г.п., $A \in \mathrm{B}(H)$ - комп. самосопряженный, $A \neq 0$.
Тогда $\exists \lambda_0 \neq 0, x_0 \neq 0 : Ax_0 = \lambda x_0$.

Теорема (Гильберта–Шмидта)**.**
H — сепарабельное г.п.,
$A \in \mathrm{B}(H)$ — компактный, самосопряжённый оператор.
Тогда в H $\exists\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис, такой что
$\forall i \in \mathbb{N}$ $Ax_i = \lambda_i x_i$.