Лекция 21.09

Потоки Пальма (продолжение)

На предыдущей лекции мы ввели понятие потока Пальма. Так называют поток, у которого все интервалы между требованиями, во-первых, независимы, а, во-вторых, распределены по одному и тому же закону $a(\tau)$. Несколько раньше мы ввели ряд общих универсальных свойств случайных потоков, таких, как стационарность, ординарность, отсутствие последействия. Вполне естественно возникает вопрос, будут ли эти свойства выполняться для потоков Пальма. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Ординарность

Ординарность обозначает ситуацию, когда требования приходят на вход СМО по одному, а не группами. Если на вход СМО одновременно приходит целая группа требований, то это означает, что несколько последовательных интервалов между требованиями τ_k оказались равными нулю. Следовательно, вопрос об ординарности потока Пальма сводится к анализу вероятности

$$\alpha = \mathcal{P}\{\tau_k = 0\}. \tag{1}$$

Отметим, что в потоке Пальма вероятность (1) не зависит от индекса k, так как все τ_k распределены по одному и тому же закону $a(\tau)$.

Если $\alpha = 0$, то тогда поток Пальма будет ординарен, в противном случае при $\alpha \neq 0$ этот поток поток будет неординарным. Дело в том, что в определении потока Пальма на закон распределения интервалов между требованиями не накладывается никаких ограниченной, плотность вероятности $a(\tau)$ может быть произвольной.

Рассмотрим, например, закон $a(\tau)$ вида

$$a(\tau) = \alpha\delta(\tau) + (1-\alpha)a_0(\tau), \quad (0<\alpha<1), \quad (2)$$

где $\delta(\tau)$ обозначает дельта-функцию, а $a_0(\tau)$ — некоторую плотность вероятности непрерывного типа. Закон распределения указанного вида означает, что τ_k с вероятностью α принимает значение равное нулю, а с вероятностью $(1-\alpha)$ совпадает с непрерывной случайной величиной, распределенной по закону $a_0(\tau)$. Иначе говоря, τ_k в модели (2) является случайной величиной смешанного дискретно-непрерывного типа.

В такой модели с вероятностью $1-\alpha$ мы получим новое одиночное требование, с вероятностью $(1-\alpha)\alpha$ — группу из двух требований, с вероятностью $(1-\alpha)\alpha^2$ — группу из трех требований и, вообще с вероятностью $(1-\alpha)\alpha^{i-1}$ $(i=\overline{1,\infty})$ будем иметь группу из i требований. Следовательно, данная модель дает групповой поток, в котором поток групп является ординарным, причем момент прихода новой группы распределен по закону $a_0(\tau)$, а численность группы распределена по геометрическому закону с параметром α.

Этот пример показывает, что, вообще говоря, поток Пальма не ординарен, а ординарность его имеет место только при соблюдении условия $\alpha = 0$.

Стационарность

Напомним, что согласно определению стационарности для стационарного потока все его свойства и все его вероятностные характеристики должны оставаться неизменными при произвольном изменении начала отсчета времени. Рассмотрим поток Пальма, стартующий в момент $t=0$ (см. рис. 1) и характеризуемый законом распределения интервала между требованиями $a(\tau)$.

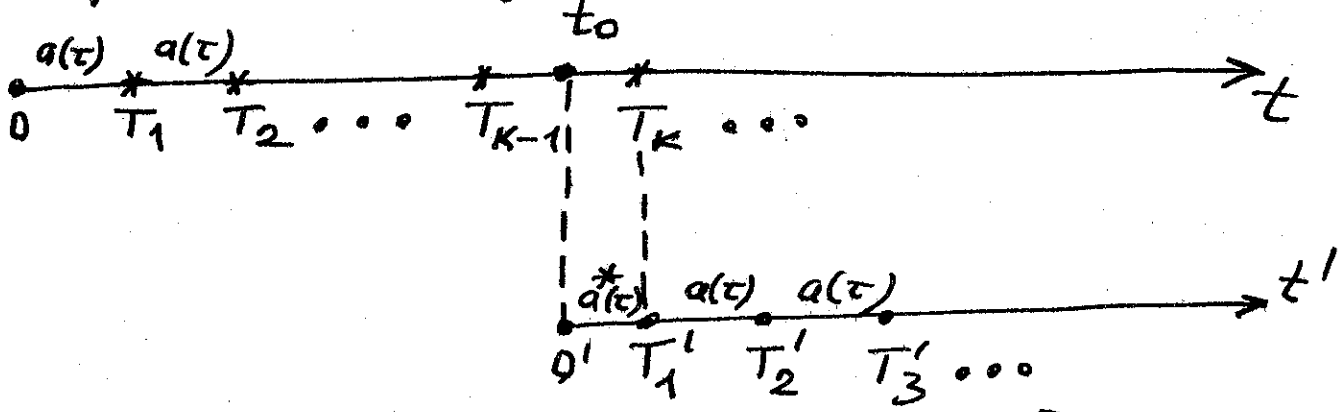

Рис. 1. К стационарности потока Пальма

Сдвинем начало отсчета времени на некоторую величину t_0. Тогда в новом потоке все интервалы, начиная со второго, по-прежнему будут распределены по закону $a(t)$ и независимы. Первый интервал в новом потоке будет совпадать с той частью k-го интервала в старом потоке, которая лежит правее точки $t=t_0$. Если t_0 не равняется одному из T_j ($j=\overline{1,\infty}$), то тогда закон распределения первого интервала в новом потоке, вообще говоря, не будет совпадать с $a(\tau)$. Этот закон $a^*(\tau)$ будет равняться условному закону распределения разности $T_k - t_0$ при условии, что $T_k > t_0$. Следовательно, результирующий поток после сдвига даже не будет являться потоком Пальма.

В дальнейшем будет показано, что существует только один случай, когда $a^*(\tau) = a(\tau)$ и он соответствует так называемому простейшему потоку, когда τ_k распределены по показательному закону $a(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$. Во всех остальных случаях поток Пальма нестационарен.

Отсутствие последействия

Свойство отсутствия последействия (или отсутствия памяти потока) проявляется в том, что требования, которые поступят после произвольного момента $t=t_0$, появляются независимо от того, как эти требования поступали при $t<t_0$. Обратимся к рис. 1. Все требования в новом потоке, начиная со второго, будут поступать независимо от того, что происходило при $t<t_0$, но момент поступления первого требования T_1'' будет зависеть от того, где располагалась точка T_{k-1} в старом потоке. Иначе говоря, в потоке Пальма имеет место некоторое последействие, но оно является ограниченным только до того момента T_0, который непосредственно предшествует моменту наблюдения $t=t_0$.

Теперь рассмотрим процесс $N(t)$, описывающий общее число требований, поступивших к моменту t

$$N(t)=X(0,t). \tag{2}$$

Очевидно, процесс $N(t)$ для потока Пальма уже не будет марковским, так как задание $N(t)$ в момент t уже, вообще говоря, не будет определять полностью поведение процесса после момента t. Вместе с тем, если рассматривать только моменты $t=T_j$ $(j=\overline{1,\infty})$, то в эти моменты процесс $N(t)$ будет по-прежнему обладать марковским свойством отсутствия памяти. Такие процессы называются полумарковскими. Следовательно, для потока Пальма число полученных требований $N(t)$ представляет всего лишь полумарковский процесс, а не марковский, как в потоках без последействия. Это является следствием ограниченного последействия потока Пальма. Далее обратимся к конкретным моделям наиболее важных примеров потоков Пальма.

Простейший поток требований

Простейшим называется поток Пальма, в котором интервал между требованиями распределен по показательному закону

$$a(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \quad (\lambda > 0). \tag{3}$$

Вначале вычислим средний интервал между требованиями

$$\bar{\tau} = M[\tau_k] = \int_0^\infty \tau\, a(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \tau \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau. \tag{4}$$

Проделывая в интеграле (4) подстановку $s = \lambda\tau$, получаем

$$\tau = \frac{1}{\lambda} s, \quad d\tau = \frac{1}{\lambda} ds,$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-s} s\, ds. \tag{5}$$

Интеграл (5) можно было бы вычислить интегрированием по частям, однако удобнее выразить его через гамма-функцию

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (x > 0), \tag{6}$$

что дает

$$\bar{\tau} = \frac{\Gamma(2)}{\lambda}. \tag{7}$$

Хорошо известно, что при целых значениях аргумента $x = n$, $(n = \overline{1,\infty})$ гамма функция выражается через факториал по формуле

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (n=\overline{1,\infty}), \tag{8}$$

поэтому

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda}. \tag{9}$$

Дисперсию интервала между требованиями находим по общим правилам

$$\sigma_\tau^2 = M[\tau_k^2] - \bar{\tau}^2. \tag{10}$$

Здесь

$$M[\tau_k^2] = \int_0^\infty \tau^2 a(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty \tau^2 \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau. \tag{11}$$

Используя ту же подстановку, что при вычислении интеграла (4), находим

$$M[\tau_k^2] = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-s}s^2\,ds = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^2}, \tag{12}$$

что с учетом (8) дает

$$M[\tau_k^2] = \frac{2}{\lambda^2}. \tag{13}$$

Отсюда по формуле (10) находим

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{14}$$

то есть

$$\sigma_\tau = \frac{1}{\lambda}, \tag{15}$$

а тогда коэффициент вариации длины интервала между требованиями

$$\gamma_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\bar{\tau}} = 1 \tag{16}$$

Как уже отмечалось выше, потоки Пальма, вообще говоря не являются стационарными и имеют некоторое ограниченное последействие. Необходимо проверить, как обстоит с этим дело для простейшего потока, характеризуемого показательным законом распределения интервала (3). Изучим этот вопрос подробнее. Для этого установим одно важное свойство показательного закона.

Свойство отсутствия последействия у показательного закона распределения

Обратимся к рисунку 1 и допустим, что рассматривается простейший поток, то есть $a(\tau)$ определяется согласно (3). Рассмотрим формирование k-го случайного интервала τ_k. Допустим, что уже прошло время τ_0 после предыдущего требования, но k-е требование пока еще не поступило. Рассмотрим остаточное время

$$\tau_k^* = \tau_k - \tau_0 \tag{17}$$

и попытаемся найти закон распределения τ_k^*, который, как и на рисунке 1, обозначим через $a^*(\tau)$.

Если τ_k^* принимает некоторое значение τ, то согласно (17) полный интервал τ_k будет равняться $\tau+\tau_0$, поэтому

$$a^*(\tau) = \frac{a(\tau+\tau_0)}{\int_{\tau_0}^{\infty} a(s)\,ds}. \tag{18}$$

Выражение в знаменателе (18) представляет собой вероятность условия $\tau_k > \tau_0$. Подставляя в (18) выражение $a(\tau)$ из (1) и учитывая, что

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda\tau_0}, \tag{19}$$

будем иметь

$$a^*(\tau) = \frac{\lambda e^{-\lambda(\tau+\tau_0)}}{e^{-\lambda\tau_0}} = \lambda e^{-\lambda\tau} = a(\tau). \tag{20}$$

Равенство

$$a^*(\tau) = a(\tau) \tag{21}$$

выражает так называемое "свойство

„отсутствия последействия“ у показательного закона. Оно означает, что <u>остаточное</u> время распределено по тому же самому закону, что и <u>полное</u> время. Необходимо подчеркнуть, что речь не идет о равенстве самих этих времен. Совпадают лишь их <u>законы распределения</u>. Что касается самих времен $\tau_к$ и $\tau_к^*$, то, конечно, с вероятностью единица всегда $\tau_к > \tau_к^*$.

Свойство (21) можно проиллюстрировать геометрически (см. рис. 2).

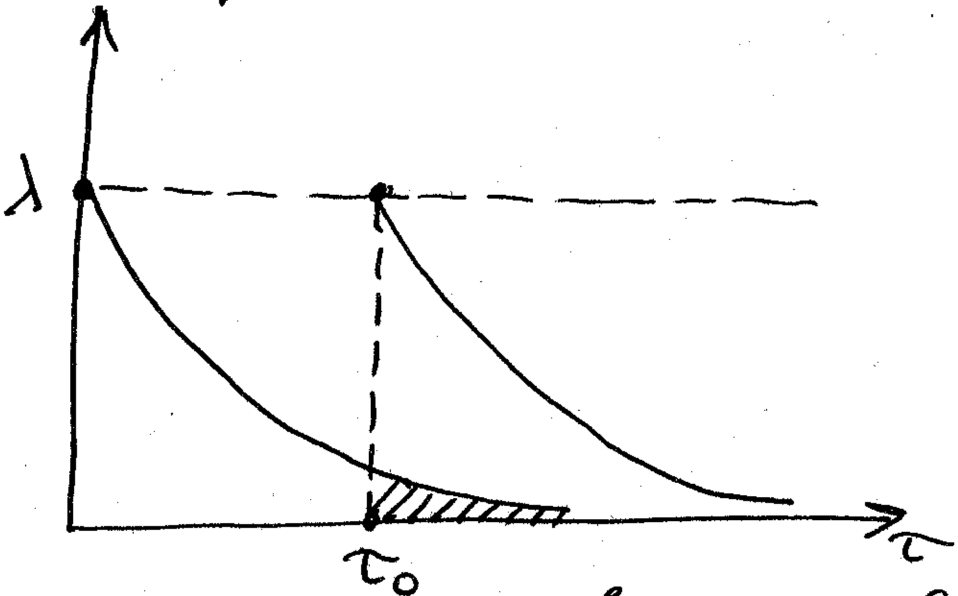

Рис. 2. К свойству отсутствия последействия

На рис. 2 заштрихована площадь под кривой $a(\tau)$ после момента τ_0, то есть вероятность, стоящая в знаменателе (18). В формуле (18) для получения $a^*(\tau)$ берется значение $a(\tau+\tau_0)$, после чего все делится на вероятность условия $\tau_к > \tau_0$, что соответствует растяжению „хвоста“ распределения $a(\tau)$. Для показательного распределения форма „хвоста“ оказывается точно такой же, как форма исходного распределения, благодаря чему имеет место равенство (21).

На свойство отсутствия последействия у показательного распределения впервые обратил внимание американский математик В. Феллер. Феллер показал, что показательный закон - это единственный непрерывный закон распределения для которого выполняется равенство (21).

Свойство (21) позволяет сделать важные качественные выводы о свойствах простейшего потока.

Стационарность и отсутствие последействия в простейшем потоке

Обратимся вновь к рисунку 1. Как отмечалось выше, после сдвига начала отсчета времени в потоке Пальма на произвольную величину t_0 первый интервал в новом потоке будет распределен по закону $a^*(\tau)$, который, вообще говоря, не совпадает с $a(\tau)$, что и обусловливает нестационарность общего потока Пальма. Но по только что доказанному в случае показательного закона выполняется равенство (21), то есть первый интервал при любом t_0 будет распределен точно также как в исходном потоке. Следовательно, в случае потока Пальма с законом (3) стационарность имеет место. По доказанному Феллером свойству показательного закона простейший поток будет единственным из потоков Пальма, который обладает стационарностью.

Простейший поток будет также лишен последействия. Действительно, рассмотрим произвольный момент времени t и будем наблюдать поступление новых требований после момента t. Согласно свойству отсутствия последействия (21) остаток полученного интервала до поступления ближайшего очередного требования будет по-прежнему распределен по показательному закону (3), как и у всех требований в потоке. Значит, требования продолжат поступать независимо от того, как они поступали до момента t, то есть в потоке отсутствует память, или последействие.

Итак, простейший поток является <u>ординарным</u> (так как для него вероятность α, определяемая (1), обращается в нуль), <u>стационарным</u> (в силу равенства (21)) и <u>не имеет последействия</u> (по той же причине). Недостатком простейшего потока является строго фиксированное, и притом достаточно большое значение коэффициента вариации длины интервала (16) $\delta_\tau = 1$. Поэтому, несмотря на теоретическую оптимальность в силу указанных свойств простейшего потока, его не всегда можно использовать для моделирования реальных потоков, так как на практике встречаются потоки с самыми различными δ_τ, которые могут отличаться от единицы.