Свойства главных нумераций

Теорема $\exists\ \mathcal{U}(n, x)$ — главная универсальная ф-я.
$\exists\ \xi(x)$ — нигде не определённая ф-я.
Тогда мн-во $Z = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{U}_n = \xi\}$ — неразрешимо (не конечно)
($\xi(x)$ - вычислима, но алг. никогда не ост.)

Док-во: ▶

$\exists\ K \subset \mathbb{N}$ — перечислимо, но неразрешимо
(док-ли, что такие мн-ва $\exists$)

Определим ф-ю $V(n, x) \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & , n \in K \\ \text{не опр-на} & , n \notin K \end{cases}$

V — вычислима ▷ запустим алгоритм, ком. опр-т принадлежит ли n K:
K — неразрешимо, но перечислимо $\Rightarrow \exists$ полуразр. алг.
ост. $\to$ $n \in K$ $\to 0$
не ост. $\to$ $n \notin K$ $\to$ не ост. всё ок.
◁

по опр главной унив. ф.: $\forall\ V$-вычисл. $\exists\ s$-том. выч.:

$$V(n, x) = \mathcal{U}(s(n), x) \quad \forall\ n, x \in \mathbb{N}$$

$\exists$ имеем $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

V_n сеч. совпадает с $\mathcal{U}_{s(n)}$ сечением
если $n \in K$, то $V_n \equiv 0$
если $n \notin K$, то V_n — нигде не опр. ф-я $\exists\ V_n$ и есть ξ
тогда $\mathcal{U}_{s(n)} = \xi$ при $n \in K$

Теперь докажем саму теорему от противного:
т.е. $Z = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{U}_n = \xi\}$ — разрешимо

если $n \in Z$ то выход 1
если $n \notin Z$ то выход 0

Применим этот алгоритм к числу $s(n)$:
$\llcorner$ том. вычисл

$$n \to s(n) \to\ ?\ s(n) \in Z \quad \begin{array}{l} \to s(n) \in Z \Rightarrow n \notin K \\ \to s(n) \notin Z \Rightarrow n \in K \end{array}$$

т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$ за кон. число шагов мы смогли опр. $\in$ ли n K.
но это невозможно, т.к. K — неразрешимо $\Rightarrow$ Z — неразрешимо ◀

Замечание мн-во Z также неперечислимо

Док-во : ▶ перечислимо его дополнение $(\overline{Z})$:

, где $\overline{n} \in \overline{Z}$ — номера других ф-й (не нигде не опр. ф-й)

▷ по th Поста : Z - неразр. $\Rightarrow$ если $\overline{Z}$ — перечисл $\Rightarrow Z$ неперечисл. ◁

$\overline{Z}$ — мн-во таких n : U_n опр-но хотя бы для одного x

Переберём все пары n и x. И для каждой пары будем пытаться вычисл. $U(n,x)$ (она вычисл.)

Будем перебирать все тройки $U(n,x,k)$: $U^{(k)}(n,x)$ — первые k шагов.

Если ровно на k шаге ост. $\Rightarrow$ выводим n

если нет $\Rightarrow$ ничего не выводим и переходим к сл. тройке.

Таким образом напеч. все n из $\overline{Z}$

$\Rightarrow U(n,x)$ ост. за какое-то кол-во шагов

если $n \notin \overline{Z} \Rightarrow n \in Z \Rightarrow U_n$ нигде не опр. $\Rightarrow$ не ост. ◀

(построили перечисл. алг. для $\overline{Z}$).

Пример неглавной нумерации

$\exists\ \beta$ - перечисл. алгоритм для $\overline{Z}$

$\exists\ b$ - тот. выч. ф-я, которая перечисл. все $\overline{Z}$:

$b(i)$ — число, которое β напечатает i-м по счёту

Тогда $V(n,x) \overset{def}{=} \begin{cases} U(b(n),x) & n>0 \\ \text{не опр} & n=0 \end{cases}$ - унив. выч. ф-я, но не глав.

(не глав. по th.)

Теорема Успенского — Райса

$\exists\ \cap$ — мн-во всех вычисл. ф-й одного арг.

$\exists\ S$ — класс вычисл. ф-й : $S \subsetneq \cap$ (не все вычисл. ф-ии)

$S \neq \varnothing$

$\exists\ U$ — главная унив. ф-я

Тогда $T = \{ n \in N \mid U_n \in S \}$ — неразрешимо

Док-во: ▶ $\exists\ K \subset N$ — перечисл., но неразр.

$\exists\ \zeta$ — нигде не опр. ф-я

$\exists\ \xi$ — вычисл. ф-я : $\xi \subset \cap$

если $\zeta \in S$, то $\xi \notin S$ и наоборот

т.е. ζ и ξ лежат в разных классах

По усл. S и $\overline{S}$ — не пусты $\Rightarrow \xi$ всегда можно выбрать

$\divideontimes\ V(n,x) \overset{def}{=} \begin{cases} \xi(x) & n \in K \\ \text{не опр.} & n \notin K \end{cases}$ — вычисл.

▷ берём n и зап. полуразр. алг. для $n \in K$: выводим $\xi(x)$ ◁

ост не ост

$\Rightarrow \exists\ s$ - тот. и вычисл. $s: N \to N$:

$\forall n,x \in N\ [V(n,x) = U(s(n),x)]$

$V_n = U_{s(n)}$

$\xi \quad \zeta$

1) $U_{s(n)} = \xi$ при $n \in K$

2) $U_{s(n)} = \zeta$ при $n \notin K$

То есть из разрешимости T следует разрешимость K ◀

Замечания

- (переформулировка) th. Успенского-Райса говорит о том, что ни для какого нетривиального свойства выч. ф-й (∃ ф-и этим св-м облад., но не все выч. ф-ии облад.) не ∃ алгоритма, который по номеру ф-ии f в главной нум. определил бы удовлетворяет ли данному свойству f.

- Из теоремы У-Р следует, что в главной нумерации ∀ вычисл. ф-ии соотв. бесконечное мн-во номеров.
(т.к. ∀ конечное мн-во разрешимо => ∃S состоит из одной выч. ф-ии, то мн-во номеров этой ф-ии неразрешимо)

Лемма к теореме о неподв. точке
∃ $\sim$ - отнош. экв-ти на $\mathbb{N}$.
Тогда может быть вып-но не более чем одно из сл. утв:

1° $\forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ия может экв. продолжить до тот. $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
$\forall x \in Dom(f)\ (g(x) \sim f(x))$ ($\neq$)

2° ∃ такая тот вычисл. ф-я $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что
$\forall x \in \mathbb{N}\ (h(x) \not\sim x)$ (ф-я h не имеет неподвиж. (.) отн. отнош. экв-ти)

Док-во: ▶