Будем р. ур-е Фредгольма (пределы заданы)

I рода $\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$ — правая часть ур-е (заданная) (свободный член), $a \le x \le b$

заданная ф-я; иск. ф-я

II рода $\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$ $\quad a \le x \le b$ (неоднородное)

искомая ф-я

Ур-е Вольтерра (частный случай: $\int_a^x + \int_x^b$)

I рода $\int_a^x K(x,y)\,\varphi(y) = f(x)$ $\quad x \ge a$ $\quad$ можно $x' = x - a$, $y' = y - a$, тогда $\int_0^{x'}$

II рода $\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$ $\quad x \ge a$

$K(x,y)$ – ядро интегрального ур-я

Перед интегралом 2 рода может быть λ: $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \dots$ (имеем семейство интегральных ур-й)

Решить ур-е = найти $\varphi(x)$, которая при подстановке дает верное рав-во

Ур-е Вольтерра с ядром, зависящим от разности (ур-е типа свёртки)

$$K(x-y)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-y)\,\varphi(y)\,dy$$

Применим преобр. Лапласа

$$\varphi(x) \div \overline{\varphi}, \quad K(x) \div \overline{K}, \quad f(x) \div \overline{f}$$

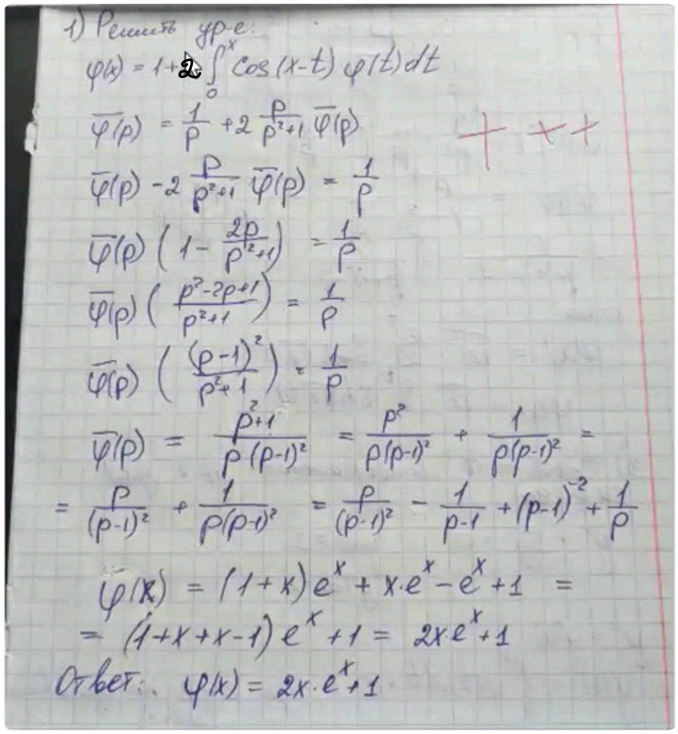
$$\overline{\varphi} - \lambda \overline{K}\,\overline{\varphi} = \overline{f} \Rightarrow \overline{\varphi} = \frac{\overline{f}}{1 - \lambda \overline{K}}$$

Применим обратное преобразование: (ф-ла Римана-Меллина)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{f}}{1 - \lambda \overline{K}}\, e^{px}\, dp$$

Иногда получается простой $\overline{\varphi}(x)$, то можно по изображ восстановить оригинал

Пример



1) Решить ур-е:

$$\varphi(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\overline{\varphi}(p) = \frac{1}{p} + 2\frac{p}{p^2+1}\overline{\varphi}(p)$$

$$\overline{\varphi}(p) - 2\frac{p}{p^2+1}\overline{\varphi}(p) = \frac{1}{p}$$

$$\overline{\varphi}(p)\left(1 - \frac{2p}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p}$$

$$\overline{\varphi}(p)\left(\frac{p^2-2p+1}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p}$$

$$\overline{\varphi}(p)\left(\frac{(p-1)^2}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p}$$

$$\overline{\varphi}(p) = \frac{p^2+1}{p(p-1)^2} = \frac{p^2}{p(p-1)^2} + \frac{1}{p(p-1)^2} =$$

$$= \frac{p}{(p-1)^2} + \frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + (p-1)^{-2} + \frac{1}{p}$$

$$\varphi(x) = (1+x)e^x + x\cdot e^x - e^x + 1 =$$

$$= (1+x+x-1)e^x + 1 = 2xe^x + 1$$

Ответ: $\varphi(x) = 2x\cdot e^x + 1$

$K = 2\cos(x-t)$

Можно решать способом дифф-я.

Интегральные ур-я Вольтерры 2-го рода с ядром, незавесящим от основной переменной

$$\varphi(x) + \int_0^x K(t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

дифф. по x

$$\varphi'(x) + \underbrace{K(x)\varphi(x)}_{\text{как дифф.}} = f'(x) \text{ — обыкн. дифф. ур.}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x K(x,t)\,y(t)\,dt = K(x,x)\,y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\,y(t)\,dt}$$!

Пример

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(y)\,dy = \sin(e^x)$$

$$\varphi' + \varphi(x) = e^x\cos(e^x)$$

Реш. одн. ур-я: $\varphi'(x) + \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi_0(x) = C_0 e^{-x}$

Реш. неод. ур-я: метод вариации произвольных постоянных

$$\varphi(x) = C(x)e^{-x} \Rightarrow \varphi' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = e^x\cos e^x$$

$$C'(x) = e^{2x}\cos e^{x} \quad \Big| \int dx$$

$$c(x) = \int e^{2x}\cos e^{x}\,dx = \int y\cos y\,dy = y\sin y - \int \sin y\,dy = y\sin y +$$

$$+ \cos y + A$$

$$c(x) = A + \cos e^{x} + e^{x}\sin e^{x}$$

$$\varphi(x) = e^{-x}\left[e^{x}\sin e^{x} + \cos e^{x} + A\right] \qquad \varphi(0) = 1[1\sin 1 + \cos 1 + A]$$

Для нахождения A (константы интегрирования) положим $x=0$

$$\varphi(0) + \int_0^0 \dots = \sin 1$$

$$\sin 1 = \sin 1 + \cos 1 + A \Rightarrow A = -\cos 1$$

$$\varphi(x) = \sin e^{x} + e^{-x}\cos e^{x} - e^{-x}\cos 1$$

Пример $\quad y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt$

Продифф. два раза

$$y'(x) = \cos(x) + \int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt$$

$$y''(x) = -\sin x + y(x) + \int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt$$

Получаем задачу Коши: $\quad y''(x) = 0$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Имеем решение $\quad y(x) = x$