

Свойства интеграла

1° Интеграл от непрерывной сл. ф-ии существует

2° Св-во линейности

Интеграл от сл. ф-ии является линейной операцией.

$$\int_a^b [\alpha(t) X(t) + \beta(t) Y(t)] dt = \int_a^b \alpha(t) X(t) dt + \int_a^b \beta(t) Y(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \alpha(t) &= \alpha = \text{const}(t) \\ \beta(t) &= \beta = \text{const}(t) \end{aligned}$$

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dt = \alpha \int_a^b X(t) dt + \beta \int_a^b Y(t) dt$$

3° Интегрирование по частям

$$\int_a^b \psi(t) \dot{\chi}(t) dt = \psi(t) \chi(t) \Big|_a^b - \int_a^b \dot{\psi}(t) \chi(t) dt$$

ψ - детерминированная дифф. ф-я.

χ - дифф. случайная ф-я.

4° Интеграл с переменным верхним пределом

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau \quad \dot{Y}(t) = X(t)$$

Вычисление корреляционной ф-ии интеграла от стационарной слух. ф-ии.

] $X(t)$ - стационарная случайная ф-я

\bar{x} - мат. ожидание

$K_X(\tau)$ - корр. ф-я

Введем $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$

$$\bar{y}(\tau) = \int_0^\tau \bar{x} d\tau = \bar{x} \tau \quad \text{т.к. слух.}$$

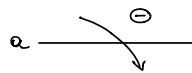
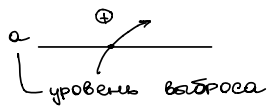
$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_X(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) K_X(\tau) d\tau \\ &+ \int_0^{t_2} (t_2 - \tau) K_X(\tau) d\tau - \int_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - \tau) K_X(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Задачи о выбросах случайных процессов. Теория Рэйса.

- 1) § 33 задачника
- 2) Параграф в книге Свешникова
- 3) Тихонов В.И., Михенко В.И.
"Выброс траекторий случайных процессов."
- 4) Тихонов "Выбросы случайных процессов"

Теория

1° Определение понятия выброса



2° Теория Рэйса (S.O. Rice)

$X(t)$ — стационарный гаусс. процесс

$V(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ — существует

$f(x, v; t)$ — совместный закон распределения $X(t)$ и $V(t)$

Уровень выброса a — постоянный

3° Формулы Рэйса для среднего числа выбросов в интервале $[t_1, t_2]$

$N_a^+(t_1, t_2)$ — число позит. выбросов в интервале $[t_1, t_2]$

$N_a^-(t_1, t_2)$ — число позит. выбросов в интервале $[t_1, t_2]$

$$\bar{N}_a^{\pm}(t_1, t_2) = M[N_a^{\pm}(t_1, t_2)]$$

$$\bar{N}_a^+(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{D}_a^+(t) dt$$

$\mathcal{D}_a^+(t)$ — интенсивность появления положительных выбросов в момент t

$$\bar{N}_a^-(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{D}_a^-(t) dt$$

$\mathcal{D}_a^-(t)$ — интенсивность появления отрицательных выбросов в момент t

$$\mathcal{D}_a^+ = \int_0^{\infty} v f_{xi}(a, v; t) dv$$

$$\mathcal{D}_a^- = \int_{-\infty}^0 v f_{xi}(a, v; t) dv$$

$$\mathcal{D}_a^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\text{sign}(v) \pm 1}{2} f_{xi}(a, v; t) dv$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

4° Среднее число пересечений

$$N_a(t_1, t_2) = N_a^+(t_1, t_2) + N_a^-(t_1, t_2)$$

$$\bar{n}_a(t_1, t_2) = \bar{n}_a^+(t_1, t_2) + \bar{n}_a^-(t_1, t_2)$$

$\mu_a(t)$ — интенсивность пересечений

$$\mu_a(t) = \mathcal{D}_a^+(t) + \mathcal{D}_a^-(t)$$

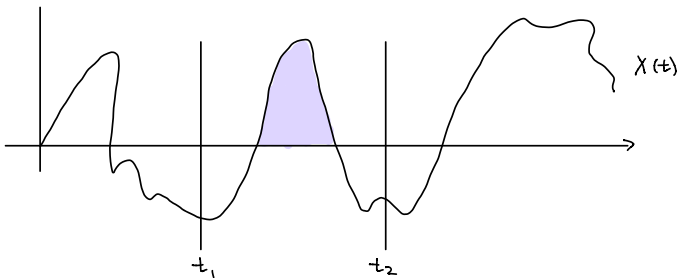
$$\mu_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| f_{xi}(a, v; t) dv$$

5° Средняя длительность выбросов в интервале

$$T_a^{\pm}(t_1, t_2)$$

$$\bar{T}_a^+(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} [1 - F_x(a; t)] dt$$

$$\bar{T}_a^-(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F_x(a; t) dt$$



6° Средняя длительность одного выброса

$$\bar{T}_a^{\pm}(t_1, t_2) = \frac{\bar{T}_a^{\pm}(t_1, t_2)}{\bar{n}_a^{\pm}(t_1, t_2)}$$

7° Среднее число максимумов

$$\bar{n}_{max}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{D}_{max}(t) dt$$

$$\sigma_{\max}(t) = - \int_0^{\infty} x_2 f_{x_2 x_2}(0, x_2; t) dx_2$$

8° Среднее число минимумов

$$\sigma_{\min}(t) = \int_0^{\infty} x_2 f_{x_2 x_2}(0, x_2; t) dx_2$$

9° Среднее число экстремумов

$$\sigma_{\text{extre}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| f_{x_2 x_2}(0, x_2; t) dx_2$$

Пример N1

Определить среднее число нулей нормального стационарного центрированного процесса в корр. ф-ции: $K_x(t) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|t|}(1 + \alpha|t|)$

Решение

$$K_{xx}(\tau) = - \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = \sigma_x^2 \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$$

(X, \dot{X}) - корр. станд.; корр.; независ.

$$D(X) = \sigma_x^2 \alpha^2$$

$$D(\dot{X}) = \sigma_x^2 \alpha^2$$

$$K_{x\dot{x}} = 0$$

$$f(x, \dot{x}; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sigma_a^+ + \sigma_a^- = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| f(0, \dot{x}; t) d\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| \frac{e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}}} d\dot{x} = \\ &= \frac{1}{\pi \sigma_x^2 \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_x^2 \alpha^2}} \dot{x} d\dot{x} = \frac{1}{\pi \sigma_x^2 \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_x^2 \alpha^2}} d\left(\frac{\dot{x}^2}{2\alpha^2}\right) = \frac{\alpha}{\pi} \end{aligned}$$

$$\overline{m}_0 = \frac{\alpha t}{\pi}$$

Пример N2

Найти со. плотность одного выброса из примера N1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\right) \right]$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \bar{x} = 0$$

$$F(x) = \frac{1}{2} [1 + \Phi(\frac{x}{\sigma_x})]$$

$$\omega_0^+ - \omega_0^- = \frac{\nu}{2\pi}$$

$$\bar{v}_0 = \frac{1 - F(0)}{v_0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\nu}{2\pi}} = \frac{\pi}{\nu}$$