Модель Солоу

Хар-ки: 1) непрерывная
2) односекторная

Агрегированные макроэкономические показатели:

X - валовой общественный продукт (универсальный: можно потребить/инвестировать)

L - общее число занятых в экономике (labour – труд)

K - фонды/капитал (оборудование, материалы, финансы)

C - фонд непроизв. потребления

I - инвестиционный фонд

ν – темп прироста занятых

μ – доля выбывших за год фондов

α – коэф. сложности (промежут. продукта)

ρ – норма накоплений (доля инвестиций)

$-1<\nu<1$ $\quad 0<\alpha<1$

$0<\mu<1$ $\quad 0<\rho<1$

Производственная функция

F должна быть линейна и однородна: $F(\lambda K, \lambda L)=\lambda F(K, L)$

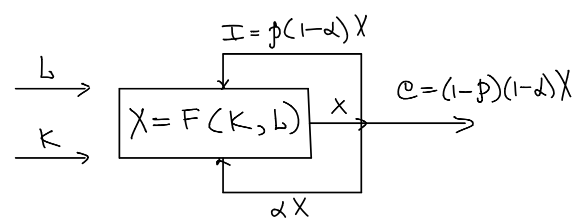
$L = L_0 e^{\nu t}$ $\qquad \dfrac{dL}{dt} = \nu L$

Пусть за год произошёл прирост ΔK (из-за инвестиций)

$\Delta K = I\Delta t - \mu K \Delta t$ $\qquad K(0)=K_0$

$$\frac{dK}{dt} = I - \mu K$$

$I = \rho(1-\alpha)X$ $\qquad C = (1-\rho)(1-\alpha)X$



Имеем систему:

$$\begin{cases} L = L_0 e^{\nu t} \\ \dot{K} = \mu K + \rho(1-\alpha)X \\ X = F(K, L) \\ I = \rho(1-\alpha)X \\ C = (1-\alpha)(1-\rho)X \end{cases}$$

Перейдём к удельным величинам

$k = \dfrac{K}{L}$ - фондов на одного рабочего

$x = \dfrac{X}{L}$ - единиц продукции на 1 рабочего

$i = \dfrac{I}{L}$ – удельные инвестиции

$c = \dfrac{C}{L}$ – среднее потребление

Условие Инада

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L} = +\infty$$ — эффект нулевого старта

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L} < 0$$

$$\lim_{K\to \infty}\frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L\to \infty}\frac{\partial F}{\partial L} = 0$$ — из-за конечности системы

$$x = \frac{X}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k)$$

(тут k-макс.)

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(kL)}{dt} = k\dot{L} + L\frac{dk}{dt} = \nu kL + \frac{dk}{dt} = L\left(\frac{dk}{dt} + \nu k\right)$$

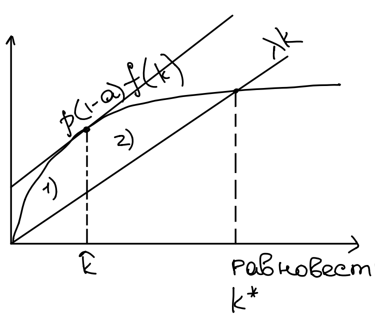
$K = kL$

$$\begin{cases} \dot{k} = -\mu k - \nu k + \rho(1-a)x = -\underset{\nu+\mu}{\underset{\parallel}{\lambda}} k + \rho(1-a)f(k) \\ k(0) = \dfrac{K_0}{L_0} = k_0, \quad i = \rho(1-a)f(k), \quad C = (1-\rho)(1-a)f(k) \end{cases}$$

условие стационарны $\Rightarrow$ $\dfrac{dk}{dt} = 0 \Rightarrow -\lambda k + \rho(1-a)f(k) = 0$

$$\lambda k^* = \rho(1-a)f(k^*)$$

↳ лин. ф-я



1) ускорение экономики
2) замедление экономики

Пример: производная ф-я Коба-Дугласа: $F = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ (A — какой-то коэф (>0)), $0<\alpha<1$

$$f(k) = Ak^\alpha$$

$$\lambda = \rho(1-a)f'(\hat{k}) = \rho(1-a)\alpha A\hat{k}^{\alpha-1}$$

$$\hat{k} = \left(\frac{\alpha\rho(1-a)A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\lambda k^* = \rho(1-a)A{k^*}^\alpha$$

$$k^* = \left(\frac{p(1-\alpha)A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\begin{cases} \dot{k} = -\lambda k + p(1-\alpha)Ak^{\alpha} \\ k(0) = k_0 \end{cases}$$

$$k = e^{-\lambda t}u \quad \Rightarrow \quad u = e^{\lambda t}k \qquad u(0) = k_0$$

$$\dot{k} = -\lambda e^{-\lambda t}u + e^{-\lambda t}\dot{u}$$

$$\dot{u}e^{-\lambda t} = p(1-\alpha)Ae^{-\lambda t\alpha}u^{\alpha}$$

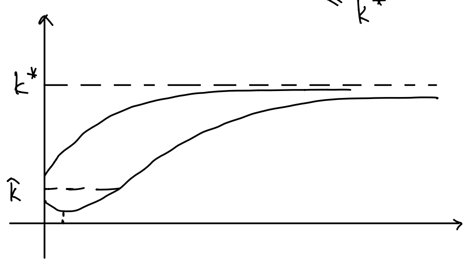
$$\frac{du}{u^{\alpha}} = p(1-\alpha)Ae^{(1-\alpha)\lambda t}$$

$$u = \left(\frac{p(1-\alpha)}{\lambda}Ae^{(1-\alpha)\lambda t} + C\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$C = k_0^{1-\alpha} - \underbrace{\left(\frac{p(1-\alpha)A}{\lambda}\right)}_{=k^{*1-\alpha}}$$

$$u = \left(k^{*1-\alpha}e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{1-\alpha} - k^{*1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$k(t) = \left[(k^*)^{1-\alpha} + \left[k_0^{1-\alpha} - (k^*)^{1-\alpha}\right]e^{-(1-\alpha)\lambda t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

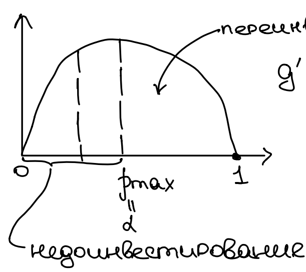


$$C = (1-p)(1-\alpha)f(k) \to \max$$

Задача найти наилучший p — золотой пар-р инвестиций

$$C^*(p) = (1-p)(1-\alpha)A(k^*)^{\alpha} = (1-p)(1-\alpha)A\left(\frac{p(1-\alpha)A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = B\left[g(p)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$B = \left(\frac{(1-\alpha)A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad g(p) = p^{\alpha}(1-p)^{1-\alpha}$$



$$g'(p) = \alpha p^{\alpha-1}(1-p)^{1-\alpha} - (1-\alpha)p^{\alpha}(1-p)^{-\alpha} = \frac{p^{\alpha}}{(1-p)^{\alpha}}\left(\alpha\frac{1-p}{p} - (1-\alpha)\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\alpha}}_{>0}\left(\frac{\alpha - p}{p}\right)$$

$p = \alpha$ — золотое правило инвестирования