1) I краевая задача (задача Дирихле)

на границе области задано значение самой неизвестной функции

(есть стационарная задача теплопроводности (нет τ) и на границе задана температура)

2) II краевая з. (задача Неймана)

на границе задана нормальная произв. неизв. ф-ии

(на границе задан тепловой поток)

3) III краевая задача

на границе задана комбинация лин. самой ф-ии и её производной

(на границе излучение тепла по закону Ньютона)

У I и III решение единств.

II: • надо проверить корректность постановки задачи (соотношение между правой частью ур-я и условий — условие разрешимости Неймана)

• решение с точностью до аддитивной постоянной

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

1) $T\Big|_{\tau=0} = 0$

2) $\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ 3) $\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=a} = \dfrac{q_0 e^{-\alpha\tau}}{k}$

Вспомогат.:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X = 0 \qquad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \qquad X_n = \cos\frac{n\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0 \qquad \lambda_0 = 0 \qquad X_0 = 1$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\tau) X_n(x) \qquad C_n = \frac{(T, X_n)}{\|x_n\|^2} \qquad \|x_n\|^2 = \int_0^a X_n^2\, dx = \frac{a}{2}$$

$$(T, X_n) = \tilde{T}_n$$

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau}\right) X_n\, dx = 0$$

$$\int_0^a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} X_n\, dx - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} X_n\Big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial T}{\partial x} X_n'\, dx - \frac{\partial \tilde{T}_n}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} X_n\Big|_0^a - T X_n'\Big|_0^a + \int_0^a T X_n''\, dx - \frac{\partial \tilde{T}_n}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} X_n\Big|_0^a - T \cancelto{0}{X_n'}\Big|_0^a - \lambda_n \tilde{T}_n - \frac{\partial \tilde{T}_n}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{q_0 e^{-\alpha\tau}}{k} \cos(n\pi) - \lambda_n \tilde{T}_n - \frac{\partial \tilde{T}_n}{\partial \tau} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_0(-1)^n}{k(\lambda_n-\alpha)a} e^{-\alpha\tau} \cdot \cos\frac{n\pi x}{a} = \frac{2q_0 e^{-\alpha\tau}}{k\ a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{n^2\pi^2}{a^2}-\alpha} \cos\frac{n\pi x}{a} =$$

$$= \frac{2q_0 e^{-\alpha\tau}}{k\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ a^2}{n^2\pi^2-\alpha a} \cos\frac{n\pi x}{a} =$$

$$= \frac{2q_0 e^{-\alpha\tau} a}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2-\alpha a} = \overbrace{\frac{2q_0 e^{-\alpha\tau} a}{\pi^2\ k}}^{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(n^2-\frac{a\alpha}{\pi^2}+\frac{a\alpha}{\pi^2}\right)}{\left(n^2-\frac{\alpha a}{\pi^2}\right)n^2} \cos\frac{n\pi x}{a} =$$

$$= B\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi x}{a}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{a\alpha}{\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{a}}{\left(n^2-\frac{a\alpha}{\pi^2}\right)n^2}\right)$$

$$\pi^2\left(\frac{1}{12} - \frac{x^3}{4a^2}\right)$$

$$\tilde{T}_n = \frac{q_0}{k(\lambda_n-\alpha)}(-1)^n\left(e^{-\alpha\tau}-e^{-\lambda_n\tau}\right)$$

$$\tilde{T}_0 = \frac{q_0}{k\ \alpha}\left(1-e^{-\alpha\tau}\right)$$

$$\frac{(-1)^n \left(\frac{a^2\alpha}{\pi^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}}{\left(n^2-\frac{a^2\alpha}{\pi^2}\right)\left(n^2\right)} \cdot \frac{2q_0\, a e^{-\alpha\tau}}{k\ \pi^2} \to$$

$$\frac{2q_0(-1)^n}{k(\lambda_n-\alpha)a} e^{-\lambda_n\tau}$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$\frac{a^{\alpha}\ 2q_0(-1)^n}{k\left(n^2\pi^2-\frac{a^2\alpha}{\pi^2}\right)\alpha\pi^2}$$

$$\frac{2q_0\ a}{k\left(n^2-\frac{a^2\alpha}{\pi^2}\right)\pi^2} \qquad J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$