МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

ВДОВЕНКО Екатерина Сергеевна

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ МАГИСТРАЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Магистерская диссертация

специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель
Наталия Михайловна Дмитрук
канд. физ.-мат. наук, доцент

Минск 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени естественно возникают в экономике при рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов. Часто такие задачи связывают с исследованием процессов экономического роста. Этим обусловлено их название — задачи оптимального экономического роста.

По-видимому, впервые экономическая модель, приводящая к задаче оптимального управления такого вида, была исследована (в рамках классического вариационного исчисления) английским математиком Ф. Рамсеем в 20-х годах прошлого века. Модель Рамсея оказала большое влияние на создание современной концепции устойчивого развития в экономике и послужила прототипом для последующих многочисленных моделей оптимального экономического роста. В 60–70-е годы прошлого века мощный толчок развитию этого направления в экономике дало открытие (в конце 50-х годов) Л.С. Понтрягиным и его сотрудниками знаменитого принципа максимума Понтрягина. Оказалось, что принцип максимума Понтрягина, первоначально созданный для решения задач оптимального управления техническими системами, имеет прозрачную экономическую интерпретацию, а для многих экономических моделей оптимального динамического распределения ресурсов является эффективным (и часто единственным) аналитическим средством их исследования.

С математической точки зрения задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени интересны прежде всего трудностями, вызываемыми неограниченностью времени управления. Неограниченность времени управления вносит в задачу особенность, что является источником специальных эффектов в соотношениях принципа максимума Понтрягина. Именно для задач с бесконечным временем необходимые условия оптимальности, вообще говоря, допускают различные “патологии” асимптотического поведения сопряженной переменной на бесконечности (с точки зрения выполнения стандартных условий трансверсальности), что существенно затрудняет использование общего варианта принципа максимума Понтрягина и приводит к необходимости разработки его специализированных версий, учитывающих эффекты такого рода.

Следует отметить, что выполнение условий трансверсальности, характеризующих поведение сопряженных переменных на бесконечности, важно не только с точки зрения эффективности применения принципа максимума. Условия трансверсальности на бесконечности имеют содержательный экономический смысл и служат важной характеристикой оптимального экономического роста.

Главная цель работы – рассмотреть задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени. В главе 1 формулируется такая ЗОУ, а в главе 2 – принцип максимума Понтрягина для задачи из главы 1 и обсуждаются дополнительные краевые условия для сопряженных переменных и гамильтониана на бесконечности. В главе 3 приводится ряд примеров, иллюстрирующих возможные патологии поведения сопряженных переменных в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи из главы 1.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

В данном разделе формулируется задача на бесконечном полуинтервале времени и приводится пример Данный раздел посвящен развитию теории оптимального управления для класса задач на бесконечном полуинтервале времени, возникающих в экономике при исследовании динамических моделей оптимального распределения ресурсов. Задачи данного класса характеризуются отсутствием ограничений на поведение допустимых траекторий на бесконечности, фиксированным начальным состоянием, специальным видом интегрального функционала, задаваемого несобственным интегралом с параметром дисконтирования ρ. Для решения задач оптимального управления со свободным временем формулируется в разделе 1.2 принцип максимума Понтрягина. Получены условия, гарантирующие нормальность задачи и выполнение “стандартных” условий трансверсальности на бесконечности.

1.1 Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу оптимального управления (P)

$$J(x,u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t),u(t))dt \to \max \tag{1.1}$$

$$\dot{x} = f(x(t),u(t)), \quad u(t) \in U, \tag{1.2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{1.3}$$

Здесь $x(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t),\dots,u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ – значения в момент времени $t \geq 0$ фазового вектора управляемой системы (1.2) и ее вектора управления соответственно; U — непустой компакт в $\mathbb{R}^m$; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданное начальное состояние системы; $\rho \geq 0$ — параметр дисконтирования. Предполагается, что $x_0 \in G$, где G — заданное открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Далее предполагается, что векторная функция $f : G \times U \to \mathbb{R}^n$, скалярная функция $g : G \times U \to \mathbb{R}$, матричная функция $\frac{\partial f}{\partial x}$ и градиент $\frac{\partial g}{\partial x}$ непрерывны на декартовом произведении $G \times U$.

Класс допустимых управлений системы (1.1) состоит из всех измеримых векторных функций $u : [0, \infty) \to U$. Допустимая траектория системы (1.2), соответствующая допустимому управлению u, понимается как определенное на $[0, \infty]$ решение системы (1.2), удовлетворяющее начальному условию (1.3). В дальнейшем считаем, что для любого допустимого управления существует соответствующая ему траектория, причем для любого $t \geq 0$ ее значения $x(t)$ лежат в G. В силу непрерывной дифференцируемости векторной функции f по первой переменной x такая траектория единственная.

Определение 1.1 Пара (x, u), где u — допустимое управление и x — соответствующая ему траектория, называется допустимой парой.

Предполагается, что для любой допустимой пары (x, u) интеграл в (1.1) сходится абсолютно.

Определение 1.2 Допустимая пара (x^0, u^0) называется оптимальной, если функционал полезности (1.1) принимает на ней наибольшее возможное значение.

В этом случае u^0 — оптимальное допустимое управление, а x^0 — оптимальная траектория.

В дальнейшем будем считать выполненными следующие условия.

(A1) Существует такое $C_0 \geq 0$, что

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq C_0(1 + \|x\|^2) \quad \forall x \in G, u \in U.$$

(A2) Для всякого $x \in G$ выпуклое множество

$$Q(x) = \{(z^0, z) \in R^{n+1} : z^0 \leq g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}.$$

(A3) Существуют такие положительные функции μ и w на $[0, +\infty)$, что $\mu(t) \to +0, w(t) \to +0$ при $t \to +\infty$ и, какова быни была допустимая пара (x, u), выполняются неравенства

$$e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(x(t), u)| \leq \mu(t) \quad \forall t \geq 0, \tag{1.4}$$

$$\int_T^\infty e^{-\rho t} |g(x(t), u(t))| dt \leq w(T) \quad \forall T \geq 0. \tag{1.5}$$

Как уже отмечалось выше, основная трудность исследования задачи (1.1)–(1.3) состоит в том, что процесс управления системой (1.2) рассматривается на бесконечном полуинтервале времени. Эта трудность связана с тем обстоятельством, что наличие бесконечного полуинтервала вносит в задачу особенность.

Для иллюстрации этого эффекта в случае $\rho > 0$ сделаем в задаче замену времени

$$\tau(t) = 1 - e^{-\rho t}, \quad t \in [0, +\infty]. \tag{1.6}$$

Непрерывно дифференцируемая функция $\tau : [0, +\infty) \to [0, 1)$ монотонно возрастает. Следовательно, замена (1.6) приводит к следующей задаче оптимального управления на конечном полуинтервале времени [0, 1):

$$\begin{gathered} J(x, u) = \int_0^1 g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \to \max, \\ \frac{d}{d\tau} x(\tau) = \frac{1}{\rho(1 - \tau)} f(x(\tau), u(\tau)), \quad u(\tau) \in U, \\ x(0) = x_0. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь класс допустимых управлений состоит из всех измеримых функций u: $[0, 1) \to U$.

В задаче (1.7) имеется особенность в конечный момент $\tau_1 = 1$. В силу этой особенности правая часть управляемой системы (1.7) может стремиться к бесконечности при $\tau \to 1$.

В моделях экономики координаты фазового вектора $x(t)$ часто трактуются как величины различных производственных факторов, участвующих в процессе производства в текущий момент времени $t \geq 0$, таких, как капитал (основные производственные фонды) $K(t)$, материалы $M(t)$, трудовые ресурсы $L(t)$ и т.д. При этом вектор $u(t)$ управления обычно характеризует текущие размеры инвестиций в производственные факторы. Значения подынтегральной функции $g(x(t), u(t))$, определяющие после интегрирования с дисконтированием итоговую величину показателя полезности $J(x, u)$, обычно характеризуют текущую мгновенную полезность допустимой пары (x, u).

Задачи оптимального управления в экономике могут формулироваться как на микроуровне (фирма или предприятие), так и на макроуровне (отрасль, государство или вся мировая экономика). Для моделей предприятия в качестве мгновенной полезности $g(x(t), u(t))$ часто рассматривают прибыль, получаемую предприятием в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$ (текущую прибыль). В макроэкономических моделях оптимизации экономического роста мгновенная полезность может определяться величиной потребления на душу населения в единицу времени, величиной прироста потребления на душу населения в единицу времени и др. В микроэкономических моделях дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$ в интеграле (1.1) иногда связывают с величиной инфляции — удельной скоростью обесценивания "реальной" стоимости используемой денежной единицы.

В качестве примера экономической модели, приводящей к задаче (1.1)–(1.3), рассмотрим вариант неоклассической модели оптимального экономического роста с логарифмической функцией полезности. Данный класс моделей оптимального экономического роста восходит к первоначальной задаче Ф. Рамсея[6].

Пример 1 Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт ($\equiv$ капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \quad \forall t \geq 0 \tag{1.8}$$

Функция F обычно называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = (K, L) \in R^2 : K > 0, L > 0,$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим "неоклассическим" условиям для всех $K > 0, L > 0$:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \tag{1.10}$$

$$\lim_{K \to +0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0 \tag{1.11}$$

$$\lim_{L \to +0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0 \tag{1.12}$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{для любых} \quad \lambda > 0, K > 0, L > 0. \tag{1.13}$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся в эту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба–Дугласа вида

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

где $A > 0$.

Заметим, что в силу равенства (1.13) не все условия в (1.9)–(1.12) независимы. В частности, второе условие в (1.10) следует из второго условия в (1.9) и (1.12).

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t \geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\varepsilon Y(t) > 0$, где $0 < \varepsilon < 1$ — некоторая постоянная, а доля продукта $(1 - \varepsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t \geq 0$ часть

$$I(t) = u(t)Y(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1 - \varepsilon, \tag{1.14}$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t) = (1 - u(t))Y(t) \tag{1.15}$$

потребляется.

В дальнейшем величина $u(t) \in [0, 1-\varepsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t.

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (1.14) динамика изменения капитала при $t \geq 0$ может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t) = I(t) = u(t)Y(t). \tag{1.16}$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$. Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \tag{1.17}$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования и в каждый момент времени $t \geq 0$ мгновенная полезность $g(K(t), L(t), u(t))$ текущего процесса управления есть логарифм полного потребления $C(t)$, т.е. (см. (1.8), (1.15))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t) = \ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления (P_ε), $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{gathered} J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))]dt \to \max, \\ \dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \quad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \\ \dot{L}(t) = \mu L(t), \\ K(0) = K_0, \quad L(0) = L_0. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Задача (P_ε) удовлетворяет условиям (A1)–(A3) и является частным случаем задачи (P).

При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (1.13), понижают размерность системы переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1), x > 0$. В этом случае в силу условий (1.8) и (1.13) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (1.9) для всех $x > 0$

$$\frac{d}{dx}f(x) > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0 \tag{1.19}$$

и вследствие (1.9) - (1.13)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \\ &\lim_{x\to+0} \frac{d}{dx}f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}f(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ в силу равенств (1.16) и (1.17) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t)\frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}\dot{L}(t) = u(t)\frac{Y(t)}{L(t)} - \mu\frac{K(t)}{L(t)},$$

откуда в силу определения переменной x и условий (1.8) и (1.13) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t).$$

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть $c(t) = C(t)/L(t)$. Согласно (1.8) и (1.15) получаем

$$c(t) = (1 - u(t))\frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t))f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (1.17) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (1.18) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\ln c(t)dt = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на единицу рабочей силы.

Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления $(P_\varepsilon), 0 < \varepsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи $(\tilde{P}_\varepsilon)$:

$$J(x,u)=\int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(1-u(t))+\ln f(x(t))]dt\to\max,$$
$$\dot{x}(t)=u(t)f(x(t))-\mu x(t),\quad u(t)\in U_\varepsilon=[0,1-\varepsilon],$$
$$x(0)=x_0.$$

Здесь $x_0\in\tilde{G}=(0,\infty)$.

1.2 Принцип максимума и условия трансверсальности на бесконечности

В данном разделе формулируется принцип максимума Понтрягина для задачи (P).

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H}:G\times[0,\infty]\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^v\to\mathbb{R}^v$ и гамильтониан $H:G\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^v\to\mathbb{R}^v$ задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(x,t,u,\psi,\psi^0)=\langle f(x,u),\psi\rangle+\psi^0e^{-\rho t}g(x,u),$$

$$H(s,t,\psi,\psi^0)=\sup_{u\in U}\mathcal{H}(x,t,u,\psi,\psi^0).$$

Формулировка принципа максимума Понтрягина включает в себя допустимую пару (x^0,u^0) и пару (ψ,ψ^0) сопряженных переменных (или множителей Лагранжа), соответствующую допустимой паре (x^0,u^0). Сопряженная переменная ψ определяется как (локально) абсолютно непрерывная векторная функция на $[0,\infty)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, являющаяся решением на $[0,\infty)$ следующей линейной системыдифференциальных уравнений (сопряженной системы):

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(x^0(t),t,u^0(t),\psi(t),\psi^0)}{\partial x}=$$
$$=-\left[\frac{\partial f(x^0(t),u^0(t))}{\partial x}\right]^0\psi(t)-\psi^0e^{-\rho t}\frac{\partial g(x^0(t),u^0(t))}{\partial x}.\quad(1.21)$$

Сопряженная переменная ψ^0 есть неотрицательное действительное число. Пара (ψ,ψ^0) сопряженных переменных называется нетривиальной, если

$$\|\psi(0)\| + \psi^0 > 0. \tag{1.22}$$

Будем говорить, что допустимая пара (x^0, u^0) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (для задачи (1.1)–(1.3)) вместе с соответствующей ей парой (ψ, ψ^0) сопряженных переменных, если пара (ψ, ψ^0) является нетривиальной и на $[0, \infty)$ выполняется следующее условие максимума:

$$\mathcal{H}(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t), \psi^0) \overset{\text{п.в.}}{=} H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0). \tag{1.23}$$

Принцип максимума Понтрягина наиболее информативен в случае, когда задача (1.1)–(1.3) является нормальной, т.е. когда множитель Лагранжа ψ^0, фигурирующий в соотношениях (1.21)–(1.23), отличен от нуля. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi^0 = 1$.

Определим функцию Гамильтона–Понтрягина в нормальной форме $\mathcal{H}$: $G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^v$ и нормальную форму гамильтониана $H : G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^v$ следующим образом:

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi) = \mathcal{H}(x, t, u, \psi, 1) = \langle f(x, u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(x, u),$$

$$H(x, t, \psi) = H(x, t, \psi, 1) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi).$$

Соответственно для всякой допустимой пары (x^0, u^0) введем нормальную форму сопряженной системы как систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t))}{\partial x} = \\ = -\left[\frac{\partial f(x^0(t), u^0(t))}{\partial x}\right]^0 \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x^0(t), u^0(t))}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Определение 1.3 Любое определенное на $[0, +\infty)$ решение ψ системы (1.24) будем называть сопряженной переменной (множителем Лагранжа), соответствующей допустимой паре (x^0, u^0).

Будем говорить, что допустимая пара (x^0, u^0) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме вместе с соответствующей ей сопряженной переменной ψ, если на полуинтервале $[0, \infty)$ выполняется следующее условие максимума в нормальной форме:

$$\mathcal{H}(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(x^0(t), t, \psi(t)). \tag{1.25}$$

Заметим, что в этом случае условие (1.22) нетривиальности выполняется автоматически, поскольку $\psi^0 = 1$.

Теорема 1 (Принцип максимума) *Пусть выполняются условия (A1)–(A3) и допустимая пара (x^0, u^0) оптимальна в задаче (P). Тогда пара (x^0, u^0) удовлетворяет основным соотношениям (1.21)–(1.23) принципа максимума Понтрягина вместе с некоторой соответствующей ей парой (ψ, ψ^0) сопряженных переменных.*

Заметим, что формулировка теоремы 1 слабее формулировки соответствующего классического результата, известного для задачи оптимального управления на конечном интервале времени со свободным правым концом.

В качестве условий трансверсальности на бесконечности обычно предлагается использовать:

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0 \tag{1.26}$$

или

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \langle x^0(t), \psi(t)\rangle = 0. \tag{1.27}$$

Заметим, что использование условий (1.27) в качестве необходимых условий оптимальности иногда мотивируется тем, что эти условия фигурируют в известных (основанных на соотношениях принципа максимума) достаточных условиях оптимальности для задачи (1.1) - (1.3)[1].

В общем случае для оптимальной допустимой пары (x^0, u^0) в задаче (1.1) - (1.3) и соответствующей ей пары сопряженных переменных (ψ, ψ^0) естественные условия трансверсальности (1.26) или (1.27) не выполняются. Более того, могут нарушаться оба условия как в соотношениях (1.26), так и в (1.27), причем в различных комбинациях[1].

Важной особенностью задачи (1.1)–(1.3) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени является тот факт, что основные соотношения (1.21)–(1.23) принципа максимума всегда можно дополнить следующим условием *асимптотической стационарности* гамильтониана на бесконечности:

$$\lim_{t\to\infty} H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0) = 0. \tag{1.28}$$

Условие (1.28) асимптотической стационарности аналогично условию трансверсальности по времени, входящему в набор соотношений принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления со свободным(конечным) временем. Легко видеть, что в рамках задачи (1.1)–(1.3) условие (1.28) эквивалентно следующему условию стационарности гамильтониана:

$$H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0) = \rho\psi^0 \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x^0(x), u^0(s))ds \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.29}$$

Действительно, в силу условия (1.11) равенство (1.28) вытекает из (1.29). С другой стороны, при выполнении условия (1.5) условие (1.29) следует из равенства (1.28) и соотношения

$$\frac{d}{dt}H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t), \psi^0),$$

выполнение которого на полуинтервале $[0, +\infty)$ в свою очередь вытекает из уравнений сопряженной системы (1.21) и условия максимума (1.23). Таким образом, в рамках задачи (1.1)-(1.3) условия (1.28) и (1.29) эквивалентны.

Заметим, что так как факт эквивалентности условий (1.28) и (1.29) не связан со свойством оптимальности допустимой пары (x^0, u^0), а вытекает из выполнения для этой пары соотношений принципа максимума Понтрягина, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 2 Пусть $\rho > 0$ и (x^0, u^0) — допустимая пара системы (1.2), удовлетворяющая соотношениям (1.24), (1.25) принципа максимума Понтрягина в нормальной форме с соответствующей ей сопряженной переменной ψ. Пусть, кроме того, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\rho s} g(x^0(s), u^0(s))ds$$

сходится абсолютно (в задаче (P) это всегда так) и выполняется условие стационарности (1.28) (при $\psi^0 = 1$). Тогда имеем

$$\int_t^\infty e^{-\rho s} g(x^0(s), u^0(s))ds = \frac{1}{\rho}H(x^0(t), t, \psi(t)) \quad \forall t \geq 0. \tag{1.30}$$

Равенство (1.30) позволяет производить прямое сравнение значений функционала полезности (1.1) на различных допустимых парах системы (1.2), удовлетворяющих условиям леммы 2.

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Идея настоящей работы основана на подходах традиционно используемых при управлении химическими процессами [9]. В химической промышленности управление процессом должно учитывать целый ряд целей: доходность производства, его эффективность, безопасность, устойчивость и другое. В результате постоянно варьирующихся условий, цели управления часто изменяются, соответственно, должны корректироваться стратегии управления процессом производства.

В силу вышесказанного при управлении химическими процессами принято разделять экономические цели и процесс управления на 2 этапа. На первом этапе, который называется RTO выбирается экономическая целевая функция и формулируется задача оптимизации при ограничениях, задающихся существенными условиями (ценами на рынке, объемами запасов и так далее). Результатом этапа RTO является положение равновесия системы (steady-state). На втором этапе применяются методы теории упрпавления, в частности, в последние годы большую популярность преобретают методы управления про прогнозированию. Модели-MPC, для стабилизации слежения за полученными равновесиями траектории.

В настоящей главе приводятся основные сведения, относящиеся к этапам RTO и MPC.

2.1 Оптимизация в реальном времени

Как правило, RTO выполняется с гораздо большим периодам выборки и может быть вычислено порядка часов-дней, чем управление по прогнозирующей модели. RTO отвечает за оптимизацию процесса как следует из его названия. Эти обязанности могут быть обобщены в четырехшаговом алгоритме:

1. RTO систематически анализирует данные процесса, чтобы определить, достигла ли система устойчивого состояния.

2. когда устойчивое состояние найдено, завершается проверка и согласо-

вание данных.

3. оценка параметров и обновление модели с использованием различных методов.

4. решается, применять ли новые условия(то есть отправлять вычисленное состояние на уровень, который переводит операцию процесса во вновь вычисленное установившееся состояние)

RTO стала важной информационной системой в промышленности, у RTO есть три основных недостатка.Во-первых, использует более сложные нелинейные стационарные модели.Во-вторых, оптимизация (или повторная оптимизация) завершается после обнаружения устойчивого состояния процесса. Поскольку процесс по своей природе динамичен и, возможно, находится под воздействием изменяющихся во времени помех, ожидание того, что процесс достигнет устойчивого состояния, может задержать вычисление новых оптимальных условий. Таким образом, повторная оптимизация может проводиться нечасто, что отрицательно влияет на производительность процесса. Одним из решений этой проблемы является частое решение проблемы оптимизации, но это может привести к проблемам стабильности замкнутой системы. В-третьих, не используется управление типа обратной связи.

Динамическое RTO имеет структуру, аналогичную MPC, в том смысле, что обе проблемы оптимизации, которые характеризуют эти системы, как правило, являются задачами динамической оптимизации, которые работают для минимизации экономической цели в зависимости от модели динамического процесса.

2.2 Управление по прогнозирующей модели

Управление по прогнозирующей модели задается следующей задачей динамической оптимизации:

$$\int_0^{\tau_N} (x^2(t) + u^2(t))dt \to \min \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.2}$$

$$x(0) = x_{\tau_k} \tag{2.3}$$

$$g(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, \tau_N) \tag{2.4}$$

где траектория состояния $x(t)$ является предсказанной эволюцией состояния. Начальные условия на динамической модели приведены в формуле (2.3), которые получаются в каждый период выборки через измерение текущего состояния. Ограничения уравнения (2.4) - это ограничения процесса, наложенные на входные данные и состояния, которые обычно являются точечными ограничениями. (2.4) обычно записываются как:

$$g(x_{\tau_j}, u_{\tau_j}) \leq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Когда горизонт прогнозирования N конечен, хорошо известно, что схема MPC для задачи (2.1)-(2.4) не может быть стабилизирующей. Различные ограничения и изменения в функции стоимости могут быть сделаны, чтобы гарантировать стабильность замкнутой системы, когда N конечно.

Чтобы устранить недостатки двухуровневой иерархической структуры управления RTO и MPC, может быть введен промежуточный уровень, называемый целевым (стационарным). Целевой уровень - преобразует оптимальное стационарное состояние, вычисленное на уровне RTO, в достижимую точку для уровня управления с обратной связью (MPC).

В частности, квадратичная программа или линейная программа используется для преобразования недостижимого желаемого устойчивого состояния в достижимую цель, а затем MPC в задаче (2.1)-(2.4) принуждает замкнутый контур к достижимой цели. Целевая оптимизация или первый этап двухэтапного MPC также позволяет проводить более частую оптимизацию, поскольку она обычно выполняется с той же скоростью, что и MPC.

Ранние исследования по этой теме было сосредоточено на объединении стационарной экономической оптимизации и линейного MPC в одну задачу оптимизации. В частности, схемы MPC, которые интегрируют стационарную оптимизацию, используют функцию стоимости в виде:

$$J_{MPC/RTO}(x(t), u(t)) = \int_0^{\tau_N} (x^2(t) + u^2(t))dt + l_e(x_{\tau_N}, u_s)$$

которая имеет как квадратичный (отслеживающий) компонент, так и функцию затрат. Эта схема MPC имеет следующую общую формулировку:

$$J_{MPC/RTO}(x(t), u(t)) \to \min \tag{2.5}$$
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.6}$$
$$x(0) = x_{\tau_k} \tag{2.7}$$
$$f(x_{\tau_N}, u_s) = 0, \quad u_s \in U \tag{2.8}$$
$$g(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, \tau_N) \tag{2.9}$$

где переменные задачи оптимизации включают в себя как входную траекторию по прогнозирующему горизонту, так и установившийся входной сигнал. Ограничение уравнения (2.8) обеспечивает, что траектория предсказанного состояния x(t) сходится к допустимому промежуточному состоянию. Остальные ограничения и обозначения аналогичны задаче (2.1)-(2.4).

Подход MPC составляет следующая схема управления динамическими объектами типа обратной связи:

1. Рассматривается некоторая математическая модель. Начальными условиями служит его текущее состояние. При заданном управлении выполняется интегрирование уравнений математической модели, что дает прогноз движения объекта на некотором конечном отрезке времени.

2. Выполняется оптимизация управления. Цель-приближение регулируемых переменных прогнозирующей модели к соответствующим задающим сигналам на отрезке времени. Оптимизация осуществляется с учётом всех ограничений, наложенных на регулируемые и управляющие переменные.

3. На фиксированном небольшом отрезке времени, реализуется найденное оптимальное управление и осуществляется восстановление по измеренным переменным фактического состояния объекта на конечном шаге.

4. Отрезок времени (или горизонт прогноза) сдвигается на шаг вперед, и повторяются пункты 1-3.

Заметим, что в силу отличия динамики реального объекта и прогнозирующей модели их движения на рассмотренном отрезке будут отличаться, а совпадение гарантируется только в начальной точке.

Если положить $\tau_N \to \infty$ и осуществлять прогноз от точки $t = 0$ на бесконечном интервале времени $t \in [0, \infty)$, можно найти управление и реализовать его в виде $u(t) = u^*(t)$ для модели (2.1)-(2.4). Считаем, что целью управления является выполнение равенств:

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - r_x(t)\| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \|u(t) - r_u(t)\| = 0$$

где $r_x(t)$ и $r_u(t)$ - векторные функции, которые заданы и определяют желаемое движение объекта. Такое управление будет решением задачи оптимизации для реального объекта по отношению к функционалу

$$J_0(x(t), u(t)) = \int_0^{\infty} F(x(t, x(0), u(t)), u(t), r_x(t), r_u(t))dt. \tag{2.10}$$

Нахождение управления на базе однократного прогноза приводит к значительным отклонениям от оптимального. Для улучшения ситуации, выполняется многократный прогноз с периодам δ. Однако такой подход обладает как минимум двумя недостатками. Во-первых, на каждом отрезке управление осуществляется по разомкнутой схеме, то есть, без обратной связи, что в ряде случаев недопустимо. Во-вторых, ввиду отличия реальной динамики от прогнозируемой, движение под воздействием принятого управления может существенно отличаться от оптимального.

Принято говорить, что такой способ оптимизации управления с предсказанием использует прогноз с подвижным горизонтом.

Общая схема управления с предсказанием описвается следующим образом:

1. Оценивание или измерение вектора состояния реального объекта.

2. Решение задачи (2.1)-(2.4).

3. Использование найденной оптимальной функции u^* в качестве программного управления на отрезке $\tau \in [t, t + \delta]$.

4. Замена момента времени t на момент $t + \delta$ и повторение операций в пунктах 1-3.

Приведенная схема реализуется в системе управления с обратной связью.

Подводя итог можно выделить некоторые особенности схемы управления с предсказанием.

1. Можно использовать нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве прогнозирующей модели.

2. Управление по прогнозирующей модели позволяет учитывать ограничения, которые наложены на управляющие переменные,и на вектора состояния.

3. Подход предусматривает минимизацию функционала,который характеризует качество управления, в режиме реального времени.

4. Предсказанное поведение динамического объекта, отличается от его реального движения.

5. Управлению с предсказанием необходимо, чтобы текущее состояние объекта измерялось или оценивалось.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены примеры ЗОУ на бесконечном полуинтервале времени. Из примеров видно, что условия трансверсальности на бесконечности играют важную роль в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач оптимального экономического роста. Дело в том, что известный общий вариант принципа максимума Понтрягина для таких задач не дает никакой информации о поведении сопряженной переменной на бесконечности. В этом смысле он неполон. Содержательно это выражается в том, что соответствующие соотношения выделяют, вообще говоря, слишком широкое множество экстремалей (траекторий, подозрительных на оптимальность).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.

2 Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

3 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

4 Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42. P. 267–272.

5 Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.

6 Ramsey F.P. A mathematical theory of saving // Econ. J. 1928. V. 38. P. 543–559

7 Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. 1959. №2. С. 25–32.

8 Shell K. Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Mathematical systems theory and economics 1. Berlin: Springer, 1969. P. 241–292. (Lect. Notes Oper. Res. and Math. Econ.; V. 11).

9 T.E. Marlin, A.N. Hrymak, Real-time operations optimization of continuous processes, in: Proceedings of the Fifth International Conference on Chemical Process Control, Tahoe City, CA, 1996, P. 156–164.