

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра методов оптимального управления

КУНИНА Екатерина Сергеевна

**МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ
МОДЕЛИ ДЛЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ МАГИСТРАЛЕЙ
В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ**

Магистерская диссертация

специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель
Наталия Михайловна Дмитрук
канд. физ.-мат. наук, доцент

Допущена к защите

«_____» _____ 2019 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ	3
ВВЕДЕНИЕ.	6
ГЛАВА 1 ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ	8
1.1 Постановка задачи.	8
1.2 Принцип максимума и условия трансверсальности на бесконечности	11
ГЛАВА 2 СХЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮ- ЩЕЙ МОДЕЛИ	15
2.1 Оптимизация в реальном времени (RTO)	15
2.2 Управление по прогнозирующей модели	18
ГЛАВА 3 АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬ- НОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ	23
3.1 Задача оптимизации неоклассической модели экономического роста	23
3.2 Задача оптимизации открытой экономики	28
ГЛАВА 4 ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ	32
4.1 Неоклассическая модель роста: результаты	32
4.2 Модель открытой экономики: результаты	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	43

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Магистерская диссертация, 45 с., 10 рис., 15 источников.

УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ, ОПТИМИЗАЦИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ, ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ, РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ, МАГИСТРАЛЬ

Объектом исследования являются задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени, обладающие магистральными свойствами.

Цель работы — применить методы управления по прогнозирующей модели для отслеживания магистралей в рассматриваемых задачах оптимального управления.

Методы исследования — методы управления по прогнозирующей модели, методы оптимального управления, методы оптимизации.

Результатом работы является построение магистралей для задач оптимального управления, используя оптимизацию в реальном времени и метод управления по прогнозирующей модели. При решении задач управления с прогнозирующей моделью учитываются ограничения, накладываемые на состояние объекта и управление.

Областью применения являются аналитические исследования и практическая оптимизация процессов в режиме реального времени при ограничениях на управляющие и управляемые переменные.

АГУЛЬНАЯ ХАРАКТЕРЫСТИКА РАБОТЫ

Магістарская дысертацыя, 45 с., 10 рыс., 15 крыніц.

КІРАВАННЕ ПА ПРАГНАЗУЮЧАЙ МАДЭЛІ, АПТЫМІЗАЦЫЯ У РЭАЛЬНЫМ ЧАСЕ, ЗАДАЧЫ АПТЫМАЛЬНАГА КІРАВАННЯ НА БЯСКОНЦЫМ ІНТЭРВАЛЕ ЧАСУ, РАУНАВАГА СІСТЭМЫ, МАГІСТРАЛЬ

Аб’ект даследавання з’яўляюцца задачы аптымальнага кіравання на бясконцым полуінтэрвале часу, якія валодаюць магістральнымі ўласцівасцямі.

Мэта працы — прымяніць метады кіравання па прагназуючай мадэлі для адсочвання магістраляў у разгледжаных задачах аптымальнага кіравання.

Метады даследавання — метады кіравання па прагназуючай мадэлі, метады аптымальнага кіравання, метады аптымізацыі.

Вынікам працы з’яўляецца пабудова магістраляў для задач аптымальнага кіравання, выкарыстоўваючы аптымізацыю ў рэальным часе і метады ўпраўлення па прагназуючай мадэлі. Пры вырашэнні задач кіравання з дапамогай прагназуючай мадэлі ўлічваюцца абмежаванні, што накладваюцца на стан аб’екта і кіраванне.

Вобласцю ўжывання з’яўляюцца аналітычныя даследаванні і практычная аптымізацыя працэсаў у рэжыме рэальнага часу пры абмежаваннях на кіраўнікі і кіраваныя зменныя.

GENERAL CHARACTERISTICS OF THE WORK

Master thesis, 45 c., 10 pic., 15 sources.

MODEL PREDICTIVE CONTROL, REAL TIME OPTIMIZATION,
PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL ON THE INFINITE TIME, SYSTEM
EQUILIBRIUM, HIGHWAY

The object of learning are optimal control problems on an infinite time, possessing main properties.

The purpose of work to apply control methods according to the predictive model to track highways in the considered problems of optimal control.

Methods of researches — control methods for the predictive model, optimal control methods, optimization methods.

The result of the work is the construction of highways for optimal control problems, using real-time optimization and control method for the predictive model. When solving a control problem with a predictive model, constraints imposed on the state of the object and control are taken into account.

Perspective applications are analytical studies and practical optimization of processes in real time with limited control and controlled variables.

ВВЕДЕНИЕ

Теория управления по прогнозирующей модели оказала значительное влияние на инженерные системы управления. Этот метод применяется практически во всех отраслях промышленности, таких как нефтехимические, биотехнические, электрические и механические процессы с 1980-х годов [5]. Управление по прогнозирующей модели является одним из наиболее применимых алгоритмов управления, которые относятся к классу алгоритмов управления, в которых динамическая модель процесса используется для прогнозирования и оптимизации производительности процесса. Этот алгоритм пользуется большим спросом в прикладных областях потому, что он может справляться с многопараметрическими системами управления, с ограничениями неравенствами как на входах, так и на выходах процесса [7].

Кроме того, управление по прогнозирующей модели позволяет учитывать различные типы динамики, от линейной до нелинейной, дискретной и непрерывной, а также адаптацию моделей и параметров в режиме онлайн.

Основным преимуществом управления по прогнозирующей модели является тот факт, что он позволяет оптимизировать текущий временной интервал, учитывая при этом будущие временные интервалы. Это достигается за счет оптимизации конечного временного горизонта, но только реализации текущего временного интервала и последующей повторной оптимизации, что отличается от линейно-квадратичного регулятора. Кроме того, метод имеет возможность предвидеть будущие события и может принимать соответствующие меры управления.

Главная цель работы — применить методы управления по прогнозирующей модели для отслеживания магистралей в рассматриваемых задачах оптимального управления. Структура магистерской диссертации такова. Глава 1 посвящена обзору задач оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени. Следует отметить, что с математической точки зрения задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени интересны прежде всего трудностями, вызываемыми неограниченностью времени управления. Неограниченность времени управления вносит в задачу особенность, что является источником специальных эффектов в соотношениях принципа максимума Понтрягина. Именно для задач с бесконечным временем необходимые условия оптимальности, вообще говоря, допускают различные “патологии” асимптотического поведения сопряженной переменной на бесконечности (с точки зрения выполнения стандартных условий трансверсально-

сти), что существенно затрудняет использование общего варианта принципа максимума Понтрягина и приводит к необходимости разработки его специализированных версий, учитывающих эффекты такого рода.

В главе 2 представлена схема управления по прогнозирующей модели. На первом этапе, который называется оптимизация в реальном времени, выбирается экономическая целевая функция и формулируется задача оптимизации при ограничениях. На втором этапе применяются методы управления по прогнозирующим моделям.

В главе 3 приводятся примеры, иллюстрирующие возможные патологии поведения сопряженных переменных. Также описывается алгоритм решения задач оптимального управления, используя метод описанный в главе 2.

В заключительной главе 4 строятся магистрали для описанных выше задач (глава 3) с использованием пакета CasADi в Matlab.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Данный раздел посвящен обзору теории оптимального управления для класса задач на бесконечном полуинтервале времени, возникающих в экономике при исследовании динамических моделей оптимального распределения ресурсов [10]. Задачи данного класса характеризуются отсутствием ограничений на поведение допустимых траекторий на бесконечности, фиксированным начальным состоянием, специальным видом интегрального функционала, задаваемого несобственным интегралом с параметром дисконтирования ρ . Для решения задач оптимального управления со свободным временем формулируется в разделе 1.2 принцип максимума Понтрягина [10]. Приведены условия, гарантирующие нормальность задачи и выполнение “стандартных” условий трансверсальности на бесконечности.

1.1 Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу оптимального управления (P)

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (1.3)$$

Здесь $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ – значения в момент времени $t \geq 0$ фазового вектора управляемой системы (1.2) и ее вектора управления соответственно; U – непустой компакт в \mathbb{R}^m ; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданное начальное состояние системы; $\rho \geq 0$ – параметр дисконтирования. Предполагается, что $x_0 \in G$, где G – заданное открытое множество в \mathbb{R}^n .

Далее предполагается, что векторная функция $f : G \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, скалярная функция $g : G \times U \rightarrow \mathbb{R}$, матричная функция $\frac{\partial f}{\partial x}$ и градиент $\frac{\partial g}{\partial x}$

непрерывны на декартовом произведении $G \times U$.

Класс допустимых управлений системы (1.1) состоит из всех измеримых векторных функций $u : [0, \infty) \rightarrow U$. Допустимая траектория системы (1.2), соответствующая допустимому управлению u , понимается как определенное на $[0, \infty]$ решение системы (1.2), удовлетворяющее начальному условию (1.3). В дальнейшем считаем, что для любого допустимого управления существует соответствующая ему траектория, причем для любого $t \geq 0$ ее значения $x(t)$ лежат в G . В силу непрерывной дифференцируемости векторной функции f по первой переменной x такая траектория единственная.

Определение 1.1 Пара (x, u) , где u — допустимое управление и x — соответствующая ему траектория, называется допустимой парой.

Предполагается, что для любой допустимой пары (x, u) интеграл в (1.1) сходится абсолютно.

Определение 1.2 Допустимая пара (x^0, u^0) называется оптимальной, если функционал полезности (1.1) принимает на ней наибольшее возможное значение.

В этом случае u^0 — оптимальное допустимое управление, а x^0 — оптимальная траектория.

В дальнейшем будем считать выполненными следующие условия.

(A1) Существует такое $C_0 \geq 0$, что

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq C_0(1 + \|x\|^2) \quad \forall x \in G, u \in U.$$

(A2) Для всякого $x \in G$ выпуклое множество

$$Q(x) = \{(z^0, z) \in R^{n+1} : z^0 \leq g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}.$$

(A3) Существуют такие положительные функции μ и w на $[0, +\infty)$, что $\mu(t) \rightarrow +0, w(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow +\infty$ и, какова бы ни была допустимая пара (x, u) , выполняются неравенства

$$e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(x(t), u)| \leq \mu(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (1.4)$$

$$\int_T^\infty e^{-\rho t} |g(x(t), u(t))| dt \leq w(T) \quad \forall T \geq 0. \quad (1.5)$$

Как уже отмечалось выше, основная трудность исследования задачи (1.1)–(1.3) состоит в том, что процесс управления системой (1.2) рассматривается на бесконечном полуинтервале времени. Эта трудность связана с тем обстоятельством, что наличие бесконечного полуинтервала вносит в задачу особенность.

Для иллюстрации этого эффекта в случае $\rho > 0$ сделаем в задаче замену времени

$$\tau(t) = 1 - e^{-\rho t}, \quad t \in [0, +\infty]. \quad (1.6)$$

Непрерывно дифференцируемая функция $\tau : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ монотонно возрастает. Следовательно, замена (1.6) приводит к следующей задаче оптимального управления на конечном полуинтервале времени $[0, 1)$:

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_0^1 g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \rightarrow \max, \\ \frac{d}{d\tau} x(\tau) &= \frac{1}{\rho(1-\tau)} f(x(\tau), u(\tau)), \quad u(\tau) \in U, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь класс допустимых управлений состоит из всех измеримых функций $u: [0, 1) \rightarrow U$.

В задаче (1.7) имеется особенность в конечный момент $\tau_1 = 1$. В силу этой особенности правая часть управляемой системы (1.7) может стремиться к бесконечности при $\tau \rightarrow 1$.

В моделях экономики координаты фазового вектора $x(t)$ часто трактуются как величины различных производственных факторов, участвующих в процессе производства в текущий момент времени $t \geq 0$, таких, как капитал (основные производственные фонды) $K(t)$, материалы $M(t)$, трудовые ресурсы $L(t)$ и т.д. При этом вектор $u(t)$ управления обычно характеризует текущие размеры инвестиций в производственные факторы. Значения подинтегральной функции $g(x(t), u(t))$, определяющие после интегрирования с дисконтированием итоговую величину показателя полезности $J(x, u)$, обычно характеризуют текущую мгновенную полезность допустимой пары (x, u) .

Задачи оптимального управления в экономике могут формулироваться как на микроуровне (фирма или предприятие), так и на макроуровне (отрасль, государство или вся мировая экономика). Для моделей предприятия в качестве мгновенной полезности $g(x(t), u(t))$ часто рассматривают прибыль,

получаемую предприятием в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$ (текущую прибыль). В макроэкономических моделях оптимизации экономического роста мгновенная полезность может определяться величиной потребления на душу населения в единицу времени, величиной прироста потребления на душу населения в единицу времени и др. В микроэкономических моделях дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$ в интеграле (1.1) иногда связывают с величиной инфляции — удельной скоростью обесценивания “реальной” стоимости используемой денежной единицы.

1.2 Принцип максимума и условия трансверсальности на бесконечности

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H} : G \times [0, \infty] \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^v$ и гамильтониан $H : G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^v$ для задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = \langle f(x, u), \psi \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x, u),$$

$$H(s, t, \psi, \psi^0) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0).$$

Формулировка принципа максимума Понтрягина включает в себя допустимую пару (x^0, u^0) и пару (ψ, ψ^0) сопряженных переменных (или множителей Лагранжа), соответствующую допустимой паре (x^0, u^0) . Сопряженная переменная ψ определяется как (локально) абсолютно непрерывная векторная функция на $[0, \infty)$ со значениями в \mathbb{R}^n , являющаяся решением на $[0, \infty)$ следующей линейной системы дифференциальных уравнений (сопряженной системы):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= - \frac{\partial \mathcal{H}(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t), \psi^0)}{\partial x} = \\ &= - \left[\frac{\partial f(x^0(t), u^0(t))}{\partial x} \right]^0 \psi(t) - \psi^0 e^{-\rho t} \frac{\partial g(x^0(t), u^0(t))}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Сопряженная переменная ψ^0 есть неотрицательное действительное число. Пара (ψ, ψ^0) сопряженных переменных называется нетривиальной, если

$$\|\psi(0)\| + \psi^0 > 0. \quad (1.9)$$

Будем говорить, что допустимая пара (x^0, u^0) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (для задачи (1.1)–(1.3)) вместе с соответствующей ей парой (ψ, ψ^0) сопряженных переменных, если пара (ψ, ψ^0) является нетривиальной и на $[0, \infty)$ выполняется следующее условие максимума:

$$\mathcal{H}(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t), \psi^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0). \quad (1.10)$$

Принцип максимума Понтрягина наиболее информативен в случае, когда задача (1.1)–(1.3) является нормальной, т.е. когда множитель Лагранжа ψ^0 , фигурирующий в соотношениях (1.8)–(1.10), отличен от нуля. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi^0 = 1$.

Определим функцию Гамильтона–Понтрягина в нормальной форме $\mathcal{H} : G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^v$ и нормальную форму гамильтониана $H : G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^v$ следующим образом:

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi) = \mathcal{H}(x, t, u, \psi, 1) = \langle f(x, u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(x, u),$$

$$H(x, t, \psi) = H(x, t, \psi, 1) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi).$$

Соответственно для всякой допустимой пары (x^0, u^0) введем нормальную форму сопряженной системы как систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= - \frac{\partial H(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t))}{\partial x} = \\ &= - \left[\frac{\partial f(x^0(t), u^0(t))}{\partial x} \right]^0 \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x^0(t), u^0(t))}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Определение 1.3 Любое определенное на $[0, +\infty)$ решение ψ системы (1.11) будем называть сопряженной переменной (множителем Лагранжа), соответствующей допустимой паре (x^0, u^0) .

Будем говорить, что допустимая пара (x^0, u^0) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме вместе с соответствующей ей сопряженной переменной ψ , если на полуинтервале $[0, \infty)$ выполняется следующее условие максимума в нормальной форме:

$$\mathcal{H}(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x^0(t), t, \psi(t)). \quad (1.12)$$

Заметим, что в этом случае условие (1.9) нетривиальности выполняется автоматически, поскольку $\psi^0 = 1$.

Теорема 1 (Принцип максимума) Пусть выполняются условия (A1)–(A3) и допустимая пара (x^0, u^0) оптимальна в задаче (P). Тогда пара (x^0, u^0) удовлетворяет основным соотношениям (1.8)–(1.10) принципа максимума Понтрягина вместе с некоторой соответствующей ей парой (ψ, ψ^0) сопряженных переменных.

Заметим, что формулировка теоремы 1 слабее формулировки соответствующего классического результата, известного для задачи оптимального управления на конечном интервале времени со свободным правым концом.

В качестве условий трансверсальности на бесконечности обычно предлагается использовать:

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad (1.13)$$

или

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^0(t), \psi(t) \rangle = 0. \quad (1.14)$$

Заметим, что использование условий (1.14) в качестве необходимых условий оптимальности иногда мотивируется тем, что эти условия фигурируют в известных (основанных на соотношениях принципа максимума) достаточных условиях оптимальности для задачи (1.1) – (1.3) [10].

В общем случае для оптимальной допустимой пары (x^0, u^0) в задаче (1.1) – (1.3) и соответствующей ей пары сопряженных переменных (ψ, ψ^0) естественные условия трансверсальности (1.13) или (1.14) не выполняются. Более того, могут нарушаться оба условия как в соотношениях (1.13), так и в (1.14), причем в различных комбинациях [10].

Важной особенностью задачи (1.1)–(1.3) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени является тот факт, что основные соотношения (1.8)–(1.10) принципа максимума всегда можно дополнить следующим условием *асимптотической стационарности* гамильтониана на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0) = 0. \quad (1.15)$$

Условие (1.15) асимптотической стационарности аналогично условию трансверсальности по времени, входящему в набор соотношений принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления со свободным(конечным) временем. Легко видеть, что в рамках задачи (1.1)–(1.3) условие (1.15) эквивалентно следующему условию стационарности гамильтониана:

$$H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0) = \rho \psi^0 \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x^0(s), u^0(s)) ds \quad (1.16)$$

$$\forall t \geq 0.$$

Действительно, в силу условия (3.4) равенство (1.15) вытекает из (1.16). С другой стороны, при выполнении условия (1.5) условие (1.16) следует из равенства (1.15) и соотношения

$$\frac{d}{dt} H(x^0(t), t, \psi(t), \psi^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}(x^0(t), t, u^0(t), \psi(t), \psi^0),$$

выполнение которого на полуинтервале $[0, +\infty)$ в свою очередь вытекает из уравнений сопряженной системы (1.8) и условия максимума (1.10). Таким образом, в рамках задачи (1.1)–(1.3) условия (1.15) и (1.16) эквивалентны.

Заметим, что так как факт эквивалентности условий (1.15) и (1.16) не связан со свойством оптимальности допустимой пары (x^0, u^0) , а вытекает из выполнения для этой пары соотношений принципа максимума Понтрягина, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 2 Пусть $\rho > 0$ и (x^0, u^0) — допустимая пара системы (1.2), удовлетворяющая соотношениям (1.11), (1.12) принципа максимума Понтрягина в нормальной форме с соответствующей ей сопряженной переменной ψ . Пусть, кроме того, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\rho s} g(x^0(s), u^0(s)) ds$$

сходится абсолютно (в задаче (P) это всегда так) и выполняется условие стационарности (1.15) (при $\psi^0 = 1$). Тогда имеем

$$\int_t^\infty e^{-\rho s} g(x^0(s), u^0(s)) ds = \frac{1}{\rho} H(x^0(t), t, \psi(t)) \quad \forall t \geq 0. \quad (1.17)$$

Равенство (1.17) позволяет производить прямое сравнение значений функционала полезности (1.1) на различных допустимых парах системы (1.2), удовлетворяющих условиям леммы 2.

ГЛАВА 2

СХЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

Идея настоящей работы основана на подходах традиционно используемых при управлении химическими процессами [6]. В химической промышленности управление процессом должно учитывать целый ряд целей: доходность производства, его эффективность, безопасность, устойчивость и другое. В результате постоянно варьирующихся условий, цели управления часто изменяются, соответственно, должны корректироваться стратегии управления процессом производства.

В силу вышесказанного при управлении химическими процессами принято разделять экономические цели и процесс управления на 2 этапа. На первом этапе, который называется оптимизация в реальном времени выбирается экономическая целевая функция и формулируется задача оптимизации при ограничениях, задающихся существенными условиями (ценами на рынке, объемами запасов и так далее). Результатом этапа оптимизации в реальном времени является положение равновесия системы (steady-state). На втором этапе применяются методы теории управления, в частности, в последние годы большую популярность приобретают методы управления по прогнозирующей модели (MPC), для стабилизации и слежения за полученными равновесиями траектории.

В настоящей главе приводятся основные сведения, относящиеся к этапам оптимизация в реальном времени и управление по прогнозирующей модели [3].

2.1 Оптимизация в реальном времени (RTO)

Рассматривается класс технологических систем, обычно встречающихся в химической промышленности. Из-за сложных механизмов реакции и термодинамических отношений, которые управляют динамикой химических процессов, большинство технологических систем по своей природе нелинейны. Математически установлено, что класс непрерывных не зависящих от времени нелинейных систем описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)) \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{X}$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{U}$ — входной вектор, $w \in \mathbb{W}$ — вектор возмущения.

Помимо нелинейных систем с непрерывным временем были рассмотрены и другие модели для проектирования экономических систем с управлением по прогнозирующей модели. В частности, многие схемы экономических управлений по прогнозирующей модели были разработаны для систем, описываемых нелинейной моделью с дискретным временем, возможно, полученной в результате дискретизации нелинейной модели с непрерывным временем в форме уравнения (2.1). Система с дискретным временем задается следующим уравнением:

$$x(k+1) = f_d(x(k), u(k), w(k)) \quad (2.2)$$

где k используется для обозначения текущего временного шага, $f_d(\cdot)$ используется, чтобы различать дискретное время нелинейного отображения перехода состояния и нелинейное векторное поле непрерывного времени, обозначаемое $f(\cdot)$. В других случаях рассматриваются линейные системы.

Прогнозирующие регуляторы, описанные ниже, воспользуются преимуществом (программного) решения модели ($w(t) \equiv 0$) уравнения (2.1) или (2.2) для заданной кусочно-постоянной входной траектории $u(t)$. Это состояние траектории или решение начальной задачи уравнения (2.1) с $w(t) \equiv 0$ для заданного начального условия, и входная траектория определяется как траектория предсказанного состояния без обратной связи, которая обозначается как $x(t)$ и может быть получена путем рекурсивного решения уравнения (2.1). Если векторное поле $f(\cdot)$ является непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов, существование и единственность этой траектории гарантируется для всех $t \geq 0$, при условии, что эта траектория остается в компактном множестве.

Для рассматриваемых процессов непрерывная функция вида $l_e : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow R$ используется в качестве меры мгновенных эксплуатационных затрат (или прибыли) процесса. Поскольку функция $l_e(x, u)$ является прямым или косвенным отражением (мгновенной) экономики процесса, ее обычно называют функцией экономических затрат, функционалом экономических затрат или стоимостью экономической стадии (далее $l_e(\cdot)$ будет упоминаться как функция экономических затрат).

Оптимальное устойчивое состояние определяется как решение следующей задачи оптимизации:

$$l_e(x, u) \rightarrow \min, \quad (2.3)$$

$$f(x, u, 0) = 0, \quad (2.4)$$

$$g(x, u) \leq 0, \quad (2.5)$$

$$g_e(x, u) \leq 0, \quad (2.6)$$

где $g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$ обозначает технологические ограничения, которые могут включать в себя ограничения на управления, а также смешанные ограничения, а $g_e : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_e}$ обозначает экономические ограничения, такие как ограничения для достижения желаемых скоростей производства для удовлетворения потребительского спроса, технические характеристики и качество продукции, а также наличие сырья.

Оптимальное решение уравнения (2.3)-(2.6) обозначается x^0, u^0 . Без потери общности, оптимальное стационарное состояние считается единственным, то есть из (2.1) $f(x^0, u^0, 0) = f(0, 0, 0) = 0$ и, аналогично, $f_d(x^0, u^0, 0) = f_d(0, 0, 0) = 0$ для системы (2.2).

Рассмотрим более подробно оптимизацию в реальном времени. Как правило, РТО выполняется с гораздо большими периодами времени и может вычисляться раз в час или даже в день, в отличие от управления по прогнозирующей модели. РТО, как следует из его названия, отвечает за оптимизацию процесса. Эти обязанности могут быть обобщены в четырехшаговом алгоритме:

1. РТО систематически анализирует данные процесса, чтобы определить, достигла ли система устойчивого состояния;
2. когда устойчивое состояние найдено, завершается проверка и согласование данных;
3. оценка параметров и обновление модели с использованием различных методов;
4. решается, применять ли новые условия (то есть отправлять вычисленное состояние на уровень, который переводит операцию процесса во вновь вычисленное установившееся состояние).

РТО стала важной информационной системой в промышленности, но оптимизация в реальном времени имеет три основных недостатка. Во-первых, он использует более сложные нелинейные стационарные модели. Во-вторых, оптимизация (или повторная оптимизация) завершается после обнаружения

устойчивого состояния процесса. Поскольку процесс по своей природе динамичен и, возможно, находится под воздействием изменяющихся во времени помех, ожидание того, что процесс достигнет устойчивого состояния, может задержать вычисление новых оптимальных условий. Таким образом, повторная оптимизация может проводиться нечасто, что отрицательно влияет на производительность процесса. Одним из решений этой проблемы является частое решение проблемы оптимизации, но это может привести к проблемам устойчивости замкнутой системы. В-третьих, не используется управление типа обратной связи.

Динамическое РТО имеет структуру, аналогичную МРС, в том смысле, что обе проблемы оптимизации, которые характеризуют эти системы, как правило, являются задачами динамической оптимизации, которые работают для минимизации экономической цели в зависимости от модели динамического процесса.

2.2 Управление по прогнозирующей модели

Чтобы управлять компромиссом между скоростью отклика замкнутой системы и количеством энергии управления, необходимой для генерации отклика, МРС обычно формулируется с квадратичной целевой функцией, которая штрафует отклонения состояния и входные данные от их соответствующих оптимальных установившихся значений в течение горизонта прогнозирования. Управление по прогнозирующей модели задается следующей задачей динамической оптимизации:

$$\int_0^{\tau_N} (|x(t)|_Q^2 + |u(t)|_R^2) dt \rightarrow \min \quad (2.7)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.8)$$

$$x(0) = x_{\tau_k} \quad (2.9)$$

$$g(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, \tau_N) \quad (2.10)$$

где положительно определенные матрицы $Q > 0$ и $R > 0$ являются параметрами настройки, которые управляют компромиссом между скоростью отклика и качеством управления; $x(t)$ — траектория состояния, которая является предсказанной эволюцией состояния.

Начальные условия динамической модели приведены в формуле (2.9), которые полагаются в каждый период времени равными измерениями теку-

щего состояния. Ограничения уравнения (2.10) — это ограничения процесса, наложенные на входные данные и состояния, которые обычно являются точечными ограничениями. (2.10) обычно записываются как:

$$g(x_{\tau_j}, u_{\tau_j}) \leq 0, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Когда горизонт прогнозирования N конечен, хорошо известно, что схема MPC для задачи (2.7)-(2.10) может не быть стабилизирующей. При конечных N обеспечить асимптотическую устойчивость можно, если добавить терминальные ограничения и терминальную стоимость в критерий качества.

Чтобы устранить недостатки двухуровневой иерархической структуры управления РТО и MPC, может быть введен промежуточный уровень, называемый целевым (стационарным). Целевой уровень преобразует оптимальное стационарное состояние, вычисленное на уровне РТО, в достижимую точку для уровня управления с обратной связью (MPC).

В частности, задача квадратичного или линейного программирования используется для преобразования недостижимого желаемого устойчивого состояния в достижимую цель, а затем MPC в задаче (2.7)-(2.10) приводит замкнутый контур к достижимой цели. Целевая оптимизация или первый этап двухэтапного MPC также позволяет проводить более частую оптимизацию, поскольку она обычно выполняется с той же скоростью, что и MPC.

Ранние исследования по этой теме были сосредоточены на объединении стационарной экономической оптимизации и линейного MPC в одну задачу оптимизации. В частности, схемы MPC, которые интегрируют стационарную оптимизацию, используют функцию стоимости в виде:

$$J_{MPC/RTO}(x(t), u(t)) = \int_0^{\tau_N} (|x(t)|_Q^2 + |u(t)|_R^2) dt + l_e(x_{\tau_N}, u_s)$$

которая имеет как квадратичный (отслеживающий) компонент, так и функцию затрат. Эта схема MPC имеет следующую общую формулировку:

$$J_{MPC/RTO}(x(t), u(t)) \rightarrow \min, \quad (2.11)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (2.12)$$

$$x(0) = x_{\tau_k}, \quad (2.13)$$

$$f(x_{\tau_N}, u_s) = 0, \quad u_s \in U, \quad (2.14)$$

$$g(x(t), u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, \tau_N), \quad (2.15)$$

где переменные задачи оптимизации включают в себя как входную траекторию по прогнозирующему горизонту, так и установившийся входной сигнал. Ограничение уравнения (2.14) обеспечивает, что траектория предсказанного состояния $x(t)$ сходится к допустимому промежуточному состоянию. Остальные ограничения и обозначения аналогичны задаче (2.7)-(2.10).

Подход МРС составляет следующая схема управления динамическими объектами типа обратной связи:

1. Рассматривается некоторая математическая модель. Начальными условиями служит его текущее состояние. При заданном управлении выполняется интегрирование уравнений математической модели, что дает прогноз движения объекта на некотором конечном отрезке времени.
2. Выполняется оптимизация управления. Цель — приближение регулируемых переменных прогнозирующей модели к соответствующим задающим сигналам на отрезке времени. Оптимизация осуществляется с учётом всех ограничений, наложенных на регулируемые и управляющие переменные.
3. На фиксированном небольшом отрезке времени, реализуется найденное оптимальное управление и осуществляется восстановление по измеренным переменным фактического состояния объекта на конечном шаге.
4. Отрезок времени (или горизонт прогноза) сдвигается на шаг вперед, и повторяются пункты 1-3.

Заметим, что в силу отличия динамики реального объекта и прогнозирующей модели их движения на рассмотренном отрезке будут отличаться, а совпадение гарантируется только в начальной точке.

Если положить $\tau_N \rightarrow \infty$ и осуществлять прогноз от точки $t = 0$ на бесконечном интервале времени $t \in [0, \infty)$, можно найти управление и реализовать его в виде $u(t) = u^*(t)$ для модели (2.7)-(2.10). Считаем, что целью управления является выполнение равенств:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - r_x(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - r_u(t)\| = 0,$$

где $r_x(t)$ и $r_u(t)$ — векторные функции, которые заданы и определяют желаемое движение объекта. Такое управление будет решением задачи оптимизации для реального объекта по отношению к функционалу

$$J_0(x(t), u(t)) = \int_0^\infty F(x(t, x(0), u(t)), u(t), r_x(t), r_u(t)) dt. \quad (2.16)$$

Нахождение управления на базе однократного прогноза приводит к значительным отклонениям от оптимального. Для улучшения ситуации, выполняется многократный прогноз с периодам δ . Однако такой подход обладает как минимум двумя недостатками. Во-первых, на каждом отрезке управление осуществляется по разомкнутой схеме, то есть, без обратной связи, что в ряде случаев недопустимо. Во-вторых, ввиду отличия реальной динамики от прогнозируемой, движение под воздействием принятого управления может существенно отличаться от оптимального.

Принято говорить, что такой способ оптимизации управления по прогнозирующей модели использует прогноз с подвижным горизонтом.

Общая схема управления с предсказанием описывается следующим образом:

1. Оценивание или измерение вектора состояния реального объекта.
2. Решение задачи (2.7)-(2.10).
3. Использование найденной оптимальной функции u^* в качестве программного управления на отрезке $\tau \in [t, t + \delta]$.
4. Замена момента времени t на момент $t + \delta$ и повторение операций в пунктах 1-3.

Приведенная схема реализуется в системе управления с обратной связью.

Подводя итог можно выделить некоторые особенности схемы управления по прогнозирующей модели:

1. Можно использовать нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве прогнозирующей модели.
2. Управление по прогнозирующей модели позволяет учитывать ограничения, которые наложены на управляющие переменные, и на вектора состояния.
3. Подход предусматривает минимизацию функционала, который характеризует качество управления, в режиме реального времени.
4. Предсказанное поведение динамического объекта, отличается от его реального движения.

5. Управлению по прогнозирующей модели необходимо, чтобы текущее состояние объекта измерялось или оценивалось.

ГЛАВА 3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

В настоящей главе предлагается использовать методы управления по прогнозирующей модели для отслеживания магистралей в задачах экономической динамики. Рассматривается две экономических задачи: неоклассическая модель экономического роста, аналитическое решение которой построено в работе [10] и задача экономического роста открытой экономики, решение которой было получено в дипломной работе [11].

3.1 Задача оптимизации неоклассической модели экономического роста

Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (\equiv капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.1)$$

Функция F обычно называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = (K, L) \in R^2 : K > 0, L > 0,$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим “неоклассическим” условиям для всех $K > 0, L > 0$:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0 \quad (3.3)$$

$$\lim_{K \rightarrow +0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = 0 \quad (3.4)$$

$$\lim_{L \rightarrow +0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0 \quad (3.5)$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{для любых } \lambda > 0, K > 0, L > 0. \quad (3.6)$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся в эту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба–Дугласа вида

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

где $A > 0$.

Заметим, что в силу равенства (3.6) не все условия в (3.2)–(3.5) независимы. В частности, второе условие в (3.3) следует из второго условия в (3.2) и (3.5).

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t \geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\varepsilon Y(t) > 0$, где $0 < \varepsilon < 1$ — некоторая постоянная, а доля продукта $(1 - \varepsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t \geq 0$ часть

$$I(t) = u(t)Y(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1 - \varepsilon, \quad (3.7)$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t) = (1 - u(t))Y(t) \quad (3.8)$$

потребляется.

В дальнейшем величина $u(t) \in [0, 1 - \varepsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t .

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (3.7) динамика изменения капитала при $t \geq 0$ может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t) = I(t) = u(t)Y(t). \quad (3.9)$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$. Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \quad (3.10)$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования и в каждый момент времени $t \geq 0$ мгновенная полезность $g(K(t), L(t), u(t))$ текущего процесса управления есть логарифм полного потребления $C(t)$, т.е. (см. (3.1), (3.8))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t) = \ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления (P_ε) , $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{aligned} J(K, L, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))] dt \rightarrow \max, \\ \dot{K}(t) &= u(t)F(K(t), L(t)), \quad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \\ \dot{L}(t) &= \mu L(t), \\ K(0) &= K_0, \quad L(0) = L_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Задача (P_ε) удовлетворяет условиям (A1)–(A3) и является частным случаем задачи (P) .

При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (3.6), понижают размерность системы и переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1)$, $x > 0$. В этом случае

в силу условий (3.1) и (3.6) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (3.2) для всех $x > 0$

$$\frac{d}{dx} f(x) > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) < 0 \quad (3.12)$$

и вследствие (3.2) - (3.6)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{d}{dx} f(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ в силу равенств (3.9) и (3.10) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t) \frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)} \dot{L}(t) = u(t) \frac{Y(t)}{L(t)} - \mu \frac{K(t)}{L(t)},$$

откуда в силу определения переменной x и условий (3.1) и (3.6) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t).$$

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть $c(t) = C(t)/L(t)$. Согласно (3.1) и (3.8) получаем

$$c(t) = (1 - u(t)) \frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t)) f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (3.10) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (3.11) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln c(t) dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на

единицу рабочей силы.

Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления (P_ε) , $0 < \varepsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи (\tilde{P}_ε) :

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))] dt \rightarrow \max, \\ \dot{x}(t) &= u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = (0, \infty)$.

Решением задачи является оптимальный процесс x^*, u^* , при котором качество потребления и инвестиций принимает наибольшее значение.

Построим гамильтониан:

$$H(x, \lambda, u) = \ln(1-u) + \ln(f(x)) + \lambda(uf(x)) - \mu x$$

где λ — сопряженная переменная.

Запишем дифференциальное уравнение для сопряженной переменной:

$$\dot{\lambda} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \lambda f'(x) - \mu.$$

Перепишем эту систему вместе с исходными дифференциальными уравнениями в виде системы:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{dt} &= uf(x) - \mu x, \\ \frac{\dot{\lambda}}{dt} &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \lambda f'(x) - \mu. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Помним, что выполняются условия (3.13).

У системы (3.14) существует стационарное решение $x(t) \equiv x^* - \text{const}$, $u(t) \equiv u^* - \text{const}$ (для него $\frac{dx^*}{dt} = \frac{du^*}{dt} \equiv 0$). Оно находится приравнованием нулю правых частей этих уравнений:

$$\begin{aligned} f'(x^*) &= \rho + \mu, \\ u^* &= \frac{\mu x^*}{f(x^*)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Найденным значениям констант x^*, u^* соответствует единственная так называемая траектория сбалансированного роста (стационарный режим).

Так как устойчивое состояние найдено, можно составить прогнозирующую ЗОУ (см. подразд. 2.2) для управления по прогнозирующей модели:

$$J(x, u) = \int_0^{\tau_N} (|x(t) - x^*|_2^2 + |u(t) - u^*|_2^2) dt \rightarrow \min, \quad (3.16)$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad x(0) = x_{\tau_p} \quad (3.17)$$

$$u_s f(x_{\tau_N}) - \mu x_{\tau_N} = 0, \quad (3.18)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 - \varepsilon, \quad t \in [0, \tau_N). \quad (3.19)$$

Для дискретизации задачи (3.34)-(3.40) использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка [13].

Построение и анализ магистралей для конкретного набора параметров описан в главе 4.

3.2 Задача оптимизации открытой экономики

Рассмотрим модель открытой экономики, которая имеет возможность использовать внешний кредит. В такой экономике капитал $K(t)$, участвующий в производстве, складывается из собственного капитала (активов) $A(t)$ и величины внешнего кредита $B(t)$:

$$K(t) = A(t) + B(t), \quad t \in T. \quad (3.20)$$

Предполагается, что экономика может только брать кредит, но сама не является кредитором, т.о. размер кредита не может быть отрицательным. Кроме того, она не может превышать определенного подушевого лимита b^* . Таким образом, ограничения на величину $B(t)$ имеют вид:

$$0 \leq B(t) \leq b^* L(t), \quad t \in T. \quad (3.21)$$

В каждый момент времени t величина $\dot{B}(t)$ характеризует скорость получения дополнительных средств (если $\dot{B}(t) > 0$), или выплаты долга (если $\dot{B}(t) < 0$). Поэтому $Y(t) + \dot{B}(t)$ есть объем средств, которыми экономика может распоряжаться в момент времени t . Эти средства полностью распределяются между:

- выплатой процентов (по ставке r) по кредиту, в объеме $rB(t)$;
- потреблением $C(t)$;

- инвестициями $I(t)$,

что влечет следующее балансовое тождество:

$$Y(t) + \dot{B}(t) = rB(t) + C(t) + I(t), t \in T.$$

Изменение капитала описывается стандартным уравнением

$$\dot{K} = I - \delta K, \quad (3.22)$$

где δ — норма амортизации капитала.

Численность рабочих меняется согласно

$$\dot{L} = nL,$$

где n — темп роста.

В рассматриваемой модели удобно с помощью балансового тождества (3.20) перейти от уравнения (3.22) к дифференциальному уравнению для собственного капитала:

$$\dot{A} = \dot{K} - \dot{B} = \delta K + I + Y - rB - C - I = \quad (3.23)$$

$$= rA + F(K, L) - (\delta + r)K - C. \quad (3.24)$$

В интенсивных переменных $a = \frac{A}{L}$, k , c , i модель экономического роста с использованием кредита примет вид:

$$\dot{a} = (r - n)a + f(k) - (\delta + r)k - c, \dot{k} = -(\delta + n)k + i. \quad (3.25)$$

Система уравнений (3.25) называется моделью экономического роста с использованием внешнего кредита. Считается, что начальные значения собственного и общего капиталов для (3.25) заданы: $a(0) = a_0, k(0) = k_0$.

Переменные a, k будем трактовать как фазовые, переменные c, i — как управления.

Из физического смысла переменной a и неравенств (3.21) следуют ограничения на фазовые переменные (фазовые ограничения):

$$0 \leq a(t) \leq k(t) \leq a(t) + b^*, t \in T. \quad (3.26)$$

Качество программы потребления и инвестиций оценим с помощью функционала

$$J(c, i) = e^{-\rho z} a(z) + \int_0^z e^{-\rho t} c(t) dt,$$

где ρ – норма дисконтирования. Считаем, что $\rho \neq r - n$.

Таким образом, задача оптимального экономического роста с использованием кредита свелась к следующей задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$J(c, i) = e^{-\rho z} a(z) + \int_0^z e^{-\rho t} c(t) dt \rightarrow \max, \quad (3.27)$$

$$\dot{a} = (r - n)a + f(k) - (\delta + r)k - c, a(0) = a_0, \quad (3.28)$$

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + i, k(0) = k_0, \quad (3.29)$$

$$c(t) \geq 0, i(t) \geq 0, \quad (3.30)$$

$$0 \leq a(t) \leq k(t) \leq a(t) + b^*, t \in T. \quad (3.31)$$

Решением задачи является оптимальный процесс k^*, a^*, c_*, i_* , при котором качество потребления и инвестиций принимает наибольшее значение.

Построим гамильтониан:

$$H(a, k, \lambda, c, i) = \lambda_1((r - n)a + f(k) - (\delta + r)k - c) + \lambda_2(-(\delta + n)k + i) + c + \nu_0 a + \nu_1(k - a) + \nu_2(a + b^* - k),$$

где λ_1, λ_2 – сопряженные переменные, ν_0, ν_1, ν_2 – функциональные множители Лагранжа, соответствующие фазовым ограничениям.

Запишем сопряженную систему состоящую из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= (\rho + n - r)\lambda_1 - \nu_0 + \nu_1 - \nu_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= (\rho + \delta + n)\lambda_2 - \lambda_1(f'(k) - \delta - r) - \nu_1 + \nu_2, \end{aligned}$$

Перепишем эту систему вместе с исходными дифференциальными уравнениями в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= (\rho + n - r)\lambda_1 - \nu_0 + \nu_1 - \nu_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= (\rho + \delta + n)\lambda_2 - \lambda_1(f'(k) - \delta - r) - \nu_1 + \nu_2, \\ \dot{a} &= (r - n)a + f(k) - (\delta + r)k - c, \\ \dot{k} &= -(\delta + n)k + i. \end{aligned} \quad (3.32)$$

У системы (3.32) существует стационарное решение $a(t) \equiv a^* - const, k(t) \equiv k^* - const, c(t) \equiv c_* - const, i(t) \equiv i_* - const$ (для него $\frac{da^*}{dt} = \frac{dk^*}{dt} = \frac{dc_*}{dt} = \frac{di_*}{dt} \equiv 0$). Оно находится приравниванием нулю правых

частей этих уравнений:

$$\begin{aligned} f'(k^*) &= \rho + \delta + n, \\ c_* &= f(k^*) - (r + \delta)k^*, \\ i_* &= (\delta + n)k^*, \end{aligned} \tag{3.33}$$

Найденным значениям констант c_* , i_* , k^* , a^* соответствует единственная так называемая траектория сбалансированного роста (стационарный режим).

Эта траектория с экономической точки зрения является очень привлекательной. Она отвечает ситуации, когда осуществляется воспроизводство, позволяющее при постоянном потреблении и инвестировании поддерживать капитал на стационарном уровне $k = k^*$.

Так как устойчивое состояние найдено, можно составить прогнозирующую ЗОУ (см. подразд. 3.2) для управления по прогнозирующей модели:

$$J(c, i) = \int_0^{\tau_N} (|a(t) - a^*|_2^2 + |k(t) - k^*|_2^2 + |c(t) - c_*|_2^2 + |i(t) - i_*|_2^2) dt \rightarrow \min, \tag{3.34}$$

$$\dot{a} = (r - n)a + f(k) - (\delta + r)k - c, \quad a(0) = a_{\tau_p}, \tag{3.35}$$

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + i, \quad k(0) = k_{\tau_p}, \tag{3.36}$$

$$(r - n)a_{\tau_N} + f(k_{\tau_N}) - (\delta + r)k_{\tau_N} - c_s = 0, \tag{3.37}$$

$$-(\delta + n)k_{\tau_N} + i_s = 0, \tag{3.38}$$

$$c(t) \geq 0, i(t) \geq 0, \tag{3.39}$$

$$0 \leq a(t) \leq k(t) \leq a(t) + b^*, t \in [0, \tau_N]. \tag{3.40}$$

Для дискретизации задачи (3.34)-(3.40) использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка [13].

Построение и анализ магистралей для конкретных наборов параметров описан в главе 4.

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В настоящей главе для двух экономических задач главы 3 проводятся численные эксперименты: методы управления с прогнозирующей моделью применяются для отслеживания магистралей этих задач при различных значениях параметров. Сравниваются управления и траектории замкнутых систем при различном выборе горизонта управления прогнозирующих задач, а также исследуется влияние весового коэффициента в критерии качества, штрафующего большие отклонения состояний по сравнению с отклонениями управлений от устойчивого положения (магистрали).

4.1 Неоклассическая модель роста: результаты

Для моделей, обладающих магистральным свойством, на интервале времени движения имеются два момента изменения характера движения: выход на магистраль и сход с магистрали.

Рассмотрим неоклассическую модель оптимального экономического роста из главы 3:

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt \rightarrow \max, \quad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad (4.2)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 - \varepsilon, \quad (4.3)$$

$$x(0) = x_0. \quad (4.4)$$

Магистрали (траектории сбалансированного роста) соответствуют значениям x^*, u^* . Им соответствует единственная так называемая траектория сбалансированного роста (стационарный режим). Для нахождения стационарного состояния используем формулы (3.15).

Параметрам задачи присвоим значения:

$$f(x) = x^\alpha, \quad t_f = 2, \quad x_0 = 1, \quad \mu = 0.05, \quad \rho = 0.02, \quad \alpha = 0.4.$$

Стационарное состояние в Matlab получим следующим образом:


```
x_s = fsolve(@(x) alpha*x^(alpha-1) - (mu+rho), 12, optoff);
u_s = mu*x_s/(x_s^alpha);
```

Для выбранных значений параметров получаем следующее решение:

$$x^* = 18.2643, \quad u^* = 0.2857.$$

Схема управления по прогнозирующей модели формулируется с помощью следующей прогнозирующей задачи:

$$J(x, u) = \int_0^{\tau_N} w|x(t) - x^*|_2^2 + |u(t) - u^*|_2^2 dt \rightarrow \min, \quad (4.5)$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad x(0) = x_{\tau_p}, \quad (4.6)$$

$$u_s f(x_{\tau_N}) - \mu x_{\tau_N} = 0, \quad (4.7)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 - \varepsilon, \quad t \in [0, \tau_N]. \quad (4.8)$$

$$(4.9)$$

где w — весовой коэффициент. Ограничение уравнения (4.7) обеспечивает, что траектория предсказанного состояния $x(t)$ сходится к допустимому промежуточному состоянию. Остальные ограничения и обозначения аналогичны задаче (4.1)-(4.4).

Реализация метода MPC в Matlab с использованием CasADi и встроенного в нем класса Opti:

```
opti.minimize(obj);

% Начальные приближения для солвера
opti.set_initial(X, 1);
opti.set_initial(U, umin);

opti.solver('ipopt');
opti.set_value(xtau, x0);

for tau = 0:Nmpc
    tic
    % Решаем задачу нелинейного программирования
        sol = opti.solve();
    t_Elapsed = toc;

    % Восстанавливаем значения переменных
```

```

u_opt = opti.value(U);
x_opt = opti.value(X);
J_opt = opti.value(obj);
% Переходим к следующему состоянию
opti.set_value(xtau, x_opt(1:n,2));
end

```

Переменные и параметры модели задаются следующим образом:

```

Nmpc = 75;
X      = opti.variable(2,N+1);
U      = opti.variable(1,N);
xtau = opti.parameter(1);
obj = X(2,end);

```

Перед реализацией метода МРС, необходимо учитывать ограничения (4.6)-(4.8). В Matlab это записывается так:

```

% Собираем ограничения для динамики системы
opti.subject_to(X(1:n,1) == xtau);
opti.subject_to(X(n+1,1) == 0);

% Собираем "динамические" ограничения
for k=1:N
    x_next = RK4((k-1)*h,X(:,k),U(k));
    opti.subject_to(X(:,k+1) == x_next);
end

% Собираем ограничения на управление
opti.subject_to(umin <= U(:) <= umax);

```

Так как применяемый метод МРС разработан для моделей с дискретным временем, то для решения задачи (4.5)-(4.8) необходимо произвести дискретизацию. В данном случае использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка [13].

Везде на рисунках штриховые линии — прогнозируемые управления и траектории из прогнозирующей задачи (4.1)-(4.4), сплошные — реализации обратной связи и соответствующей траектории системе, замкнутой МРС-регулятором. Построенные с помощью схемы МРС реализации обратной связи (оптимальное управление) и соответствующие траектории при различных значениях параметров представлены на рис. 4.1-4.5.

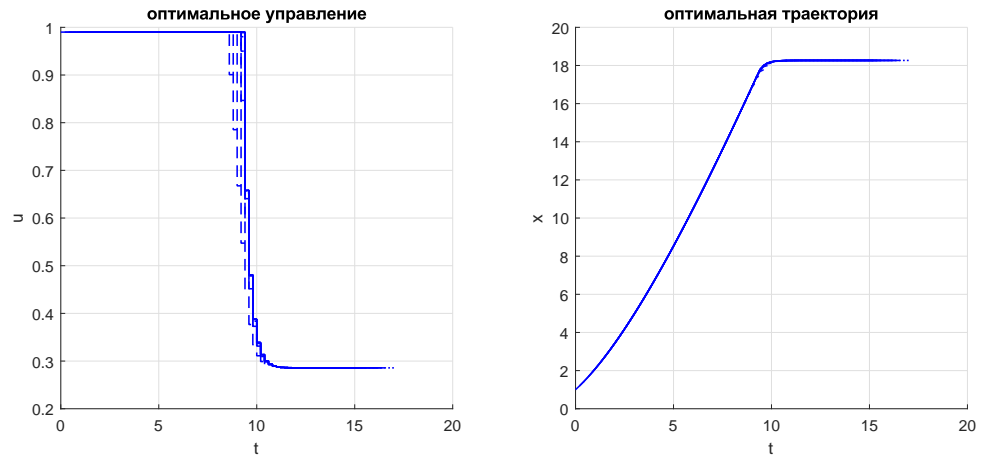


Рисунок 4.1 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2$, $x_0 = 1$, $w = 1$, $\mu = 0.05$, $\rho = 0.02$, $\alpha = 0.4$

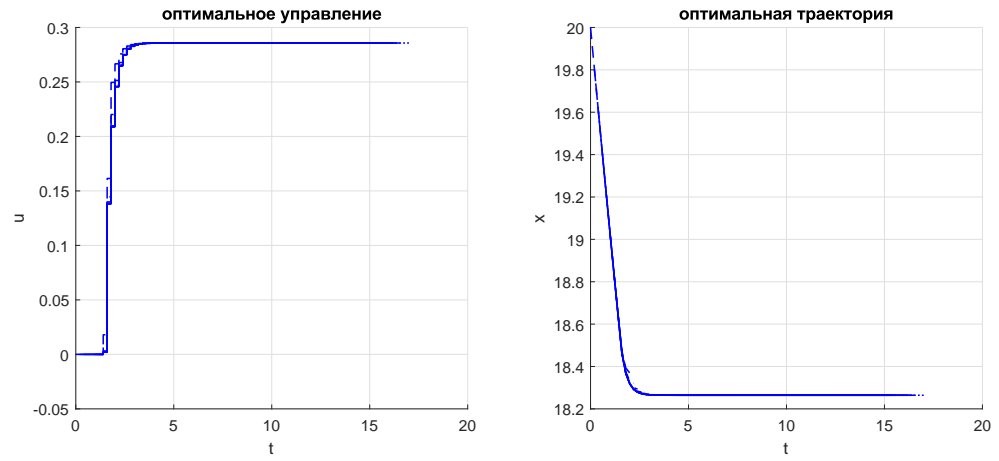


Рисунок 4.2 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2$, $x_0 = 10$, $w = 1$, $\mu = 0.05$, $\rho = 0.02$, $\alpha = 0.4$

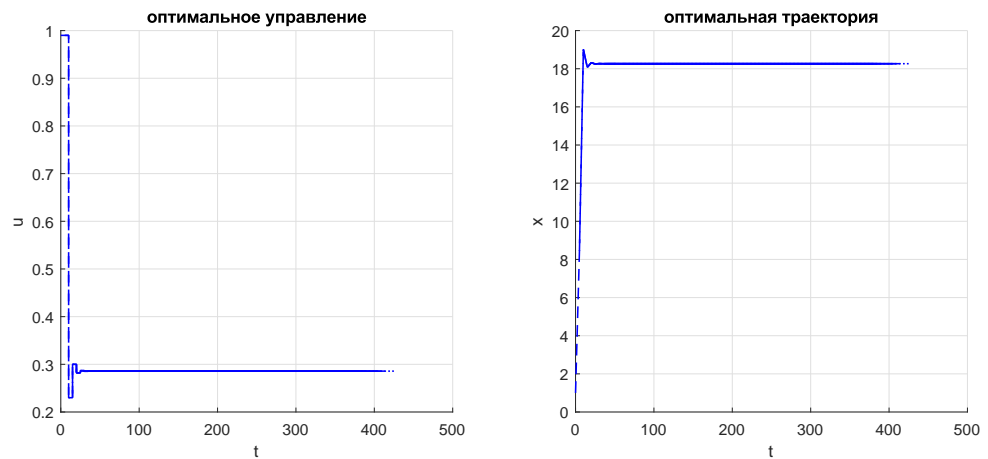


Рисунок 4.3 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 50$, $x_0 = 1$, $w = 1$, $\mu = 0.05$, $\rho = 0.02$, $\alpha = 0.4$

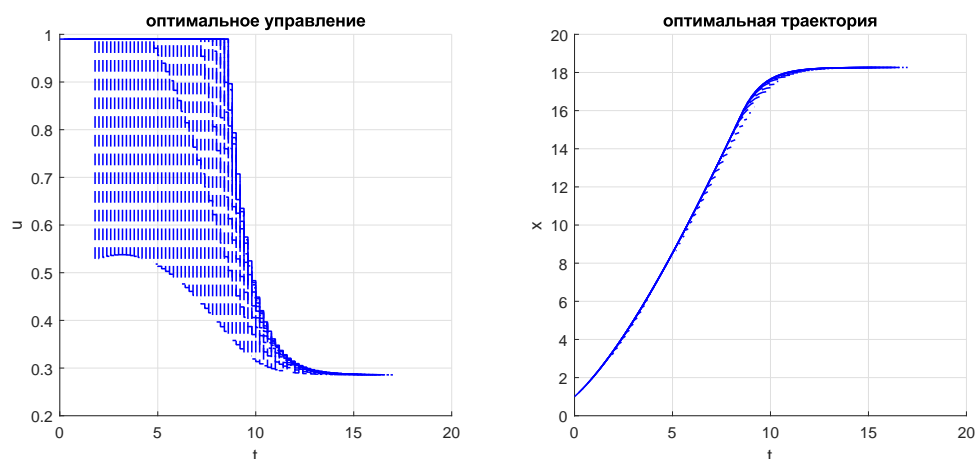


Рисунок 4.4 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2$, $x_0 = 1$, $w = 0.1$, $\mu = 0.05$, $\rho = 0.02$, $\alpha = 0.4$

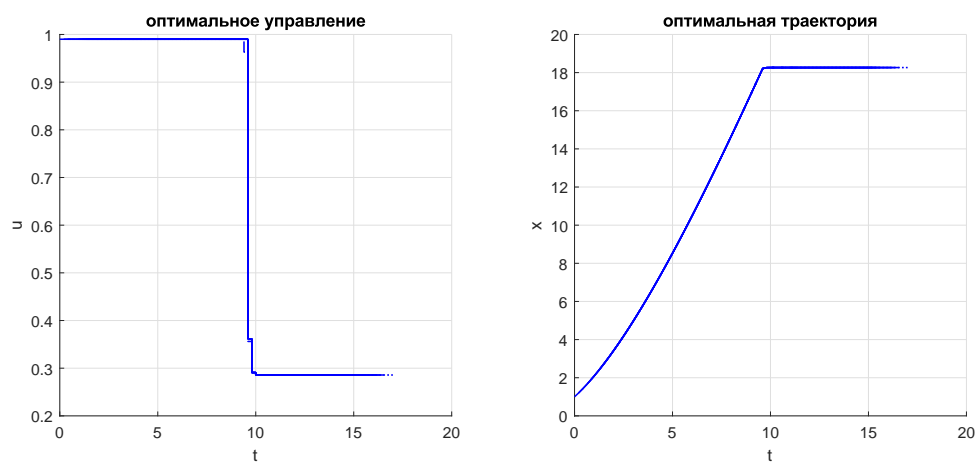


Рисунок 4.5 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2$, $x_0 = 1$, $w = 10$, $\mu = 0.05$, $\rho = 0.02$, $\alpha = 0.4$

Как видно из рисунков, все траектории достигают магистралей, однако происходит это в разные моменты времени. Можно также сделать следующие выводы:

Построение магистралей показано на рис. 4.1-4.5. По графикам можно сделать вывод:

1. Изменение начального состояния x_0 (см. рис. 4.1 и рис. 4.2)
 - (a) $x_0 < x^*$: фирма инвестирует в основные производственные фонды, таким образом величина капитала на единицу рабочей силы уменьшается. Это происходит до тех пор, пока качество потребления и инвестиций не примут наибольшее значение.
 - (b) $x_0 > x^*$: объем производства потребляется до тех пор, пока траектории не выйдут на магистраль. В этом случае объем производства

соответствует потреблению.

2. Изменение длины горизонта t_f (см. рис. 4.1 и рис. 4.3). Чем больше длина горизонта, тем быстрее траектории выходят на магистраль, то есть сложнее анализировать развитие экономики.
3. Изменение весового коэффициента w (см. рис. 4.1, рис. 4.4 и рис. 4.5). На рис. 4.4 изображено поведение замкнутой системы при $w = 0.1$, на рис. 4.1 — при $w = 1$, на рис. 4.5 — при $w = 10$. Заметим, что решение, изображенное на рис. 4.5, сильнее штрафует отклонения состояния от магистрали, чем отклонения управления от магистрального значения. Это решение хорошо приближает оптимальное решение исходной задачи с бесконечным горизонтом [10].

4.2 Модель открытой экономики: результаты

Аналогичным образом строятся магистрали и для задачи оптимизации открытой экономики.

Рассмотрим неоклассическую модель оптимального экономического роста из главы 3:

$$J(c, i) = e^{-\rho t_f} a(t_f) + \int_0^{t_f} e^{-\rho t} c(t) dt \rightarrow \max, \quad (4.10)$$

$$\dot{a} = (r - n)a + f(k) - (\delta + r)k - c, a(0) = a_0, \quad (4.11)$$

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + i, k(0) = k_0, \quad (4.12)$$

$$c(t) \geq 0, i(t) \geq 0, \quad (4.13)$$

$$0 \leq a(t) \leq k(t) \leq a(t) + b^*, t \in [0, t_f]. \quad (4.14)$$

Магистрали (траектории сбалансированного роста) соответствуют значениям $a^* = k^*, c_*, i_*$. Им соответствует траектория сбалансированного роста (стационарный режим).

Параметрам задачи присвоим значения:

$$f(k) = k^\alpha, t_f = 2, a_0 = 1, k_0 = 5, b^* = 4, \delta = 0.05, \rho = 0.02, \alpha = 0.4,$$

$$r = 0.08, n = 0.03.$$

Стационарное состояние в Matlab вычисляется исходя полученным формулам в главе 3 (3.33).

```

f = @(k) k^alpha;
df = @(k) alpha*k^(alpha-1);

k_s = fsolve(@(k) df(k)-(delta+rho+n),1,optoff); %k_s = a_s
i_s = (delta + n) *k_s;
c_s = k_s^alpha) - (delta + n)*k_s;

```

Получаем следующее решение:

$$a^* = k^* = 10.0792, \quad c_* = 1.7135, \quad i_* = 0.8063.$$

Схема управления по прогнозирующей модели формулируется с помощью следующей прогнозирующей задачи:

$$J(c, i) = \int_0^{\tau_N} w(|a - a^*|_2^2 + |k - k^*|_2^2 + |c - c_*|_2^2 + |i - i_*|_2^2) dt \rightarrow \min, \quad (4.15)$$

$$\dot{a} = (r - n)a + f(k) - (\delta + r)k - c, \quad a(0) = a_{\tau_p}, \quad (4.16)$$

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + i, \quad k(0) = k_{\tau_p}, \quad (4.17)$$

$$(r - n)a_{\tau_N} + f(k_{\tau_N}) - (\delta + r)k_{\tau_N} - c_s = 0, \quad (4.18)$$

$$-(\delta + n)k_{\tau_N} + i_s = 0, \quad (4.19)$$

$$c(t) \geq 0, i(t) \geq 0, \quad (4.20)$$

$$0 \leq a(t) \leq k(t) \leq a(t) + b^*, t \in [0, \tau_N). \quad (4.21)$$

где w — весовой коэффициент. Ограничения уравнений (4.18), (4.19) обеспечивают, что траектории $a(t), k(t)$ сходятся к допустимому промежуточному состоянию. Остальные ограничения и обозначения аналогичны задаче (4.10)-(4.14).

Реализация метод MPC в Matlab:

```

opti.minimize(obj);

% Начальные приближения для солвера
opti.set_initial(X, 1);
opti.set_initial(U, umin);

opti.solver('ipopt');
opti.set_value(xtau, x0);

for tau = 0:Nmpc
    tic

```

```

% Решаем задачу нелинейного программирования
    sol = opti.solve();
t_Elapsed = toc;

% Восстанавливаем значения переменных
u_opt = opti.value(U);
x_opt = opti.value(X);
J_opt = opti.value(obj);
% Переходим к следующему состоянию
opti.set_value(xtau, x_opt(1:n,2));
end

```

Переменные и параметры модели задаются следующим образом:

```

Nmpc = 75;
X      = opti.variable(3,N+1);
U      = opti.variable(2,N);
xtau = opti.parameter(2);
obj = X(3,end);

```

Перед реализацией метода MPC, необходимо учитывать ограничения (4.18)-(4.19). В Matlab это записывается так:

```

% Собираем ограничения для динамики системы
opti.subject_to(X(1:n,1) == xtau);
opti.subject_to(X(n+1,1) == 0);

```

```

% Собираем "динамические" ограничения
for k=1:N
    x_next = RK4((k-1)*h,X(:,k),U(:,k));
    opti.subject_to(X(:,k+1) == x_next);
end

```

```

% Собираем ограничения на состояния
for k=2:N+1
    opti.subject_to( 0 <= X(1,k));
    opti.subject_to( X(1,k) <= X(2,k) <= X(1,k) + b);
end

```

```

% Собираем ограничения на управление
opti.subject_to( umin <= U(:));

```

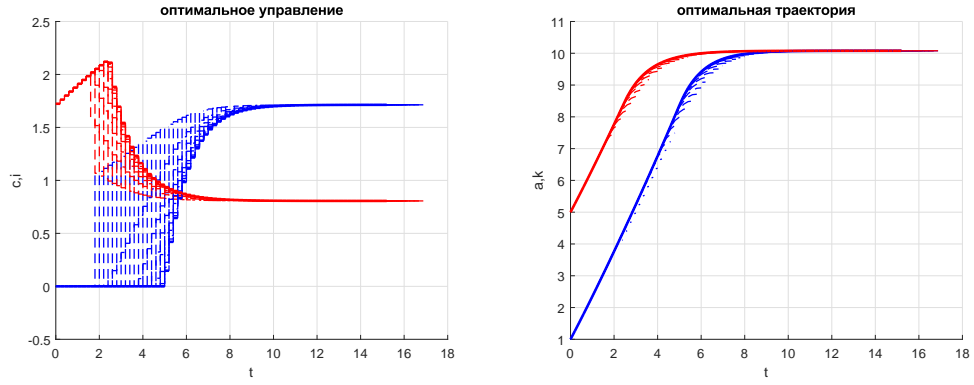


Рисунок 4.6 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2, a = 1, k = 5, w = 1, \delta = 0.05, \rho = 0.02, \alpha = 0.4, r = 0.08, n = 0.03$

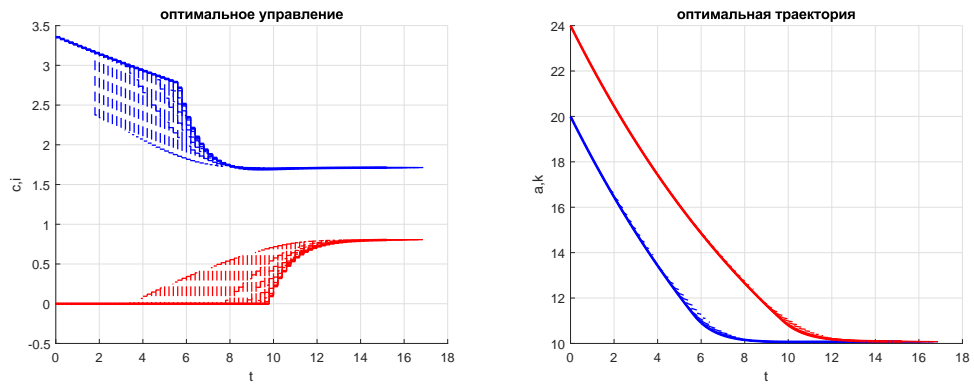


Рисунок 4.7 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2, a = 20, k = 25, w = 1, \delta = 0.05, \rho = 0.02, \alpha = 0.4, r = 0.08, n = 0.03$

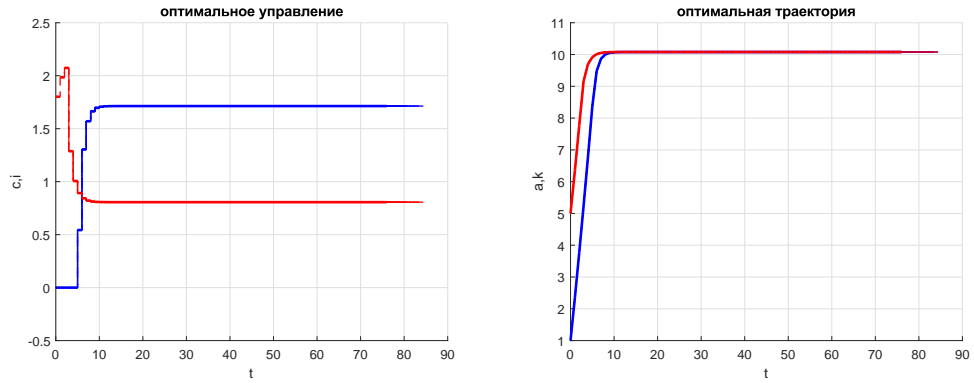


Рисунок 4.8 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 10, a = 1, k = 5, w = 1, \delta = 0.05, \rho = 0.02, \alpha = 0.4, r = 0.08, n = 0.03$

Везде на рисунках штриховые линии — это прогнозируемые управления (c — синяя линия, i — красная линия) из прогнозирующей задачи (4.15)-(4.21). Сплошные — реализация обратной связи (a — синяя линия, k — красная линия).

Построенные с помощью схемы MPC реализации обратной связи (оптимальное управление) и соответствующие траектории при различных значе-

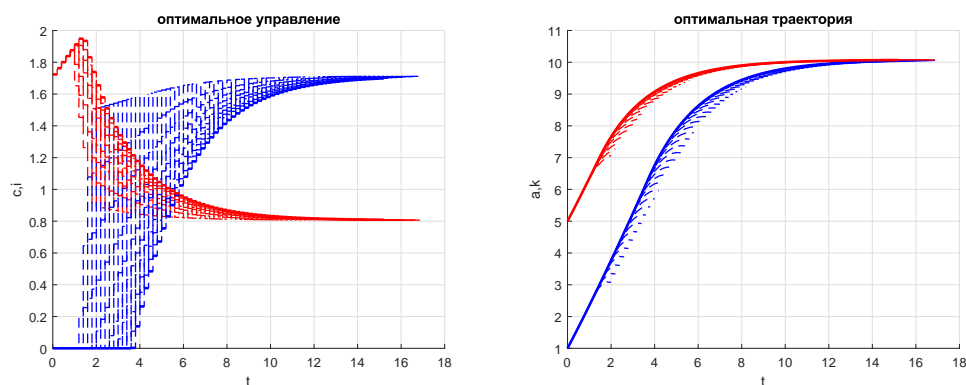


Рисунок 4.9 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2, a = 1, k = 5, w = 0.3, \delta = 0.05, \rho = 0.02, \alpha = 0.4, r = 0.08, n = 0.03$

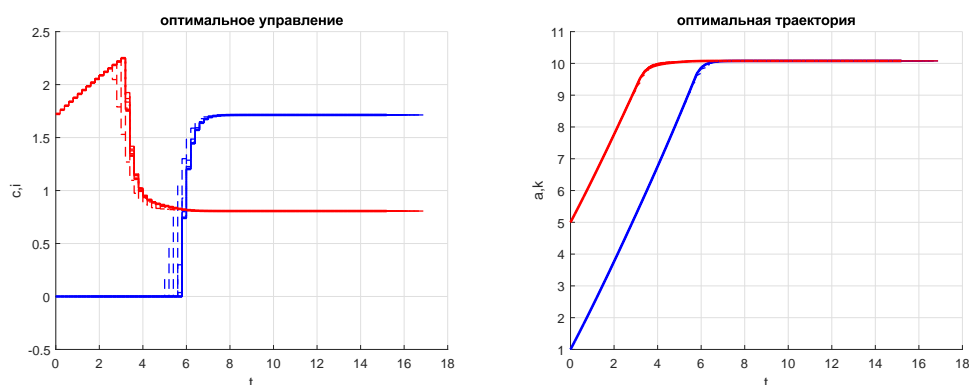


Рисунок 4.10 — Отслеживание магистралей при параметрах задачи:
 $t_f = 2, a = 1, k = 5, w = 10, \delta = 0.05, \rho = 0.02, \alpha = 0.4, r = 0.08, n = 0.03$

ниях параметров представлены на рис. 4.6-4.10.

Как видно из рисунков, все траектории достигают магистралей, однако происходит это в разные моменты времени. Можно также сделать следующие выводы:

1. Изменение начального состояния (см. рис. 4.6 и рис. 4.7)
 - (а) $a_0 < a^*, k_0 < k^*$: активы, собственный капитал увеличиваются, фирма инвестирует в производственные фонды, но потребление находится в равновесии. Спустя некоторое время фирма уменьшает количество вкладываемых денег в инвестирование, а именно начинает выплачивать кредит. Потребление начинает увеличиваться и вскоре траектории выходят на магистраль, то есть экономика начинает развиваться только за счет средств собственного капитала, а заемные средства полностью выплачены.
 - (б) $a_0 > a^*, k_0 > k^*$: активы фирмы падают, следовательно падает потребление. В это время инвестирование стабильное (в связи

с использованием кредита). Когда потребление выходит на магистраль, фирма начинает вкладывать инвестиции в производство до тех пор, пока качество потребления и инвестиций не примут наибольшее значение.

2. Изменение длины горизонта t_f (см. рис. 4.6 и рис. 4.8). Видно, что выбор малых значений t_f горизонта прогноза не обеспечивает хорошие качественные показатели. Исходя из требований к качеству, имеет смысл принять $t_f = 2$, поскольку дальнейшее увеличение горизонта прогноза не влечет никаких изменений на траектории управления.
3. Изменение весового коэффициента w (см. рис. 4.6, рис. 4.9 и рис. 4.10). Заметим, что решение, изображенное на рис. 4.10, сильнее штрафует отклонения состояния от магистрали, чем отклонения управления от магистрального значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации исследована проблема слежения за траекториями устойчивого роста (магистральями) в экономических задачах. Используются методы управления по прогнозирующей модели, сформулированы соответствующие прогнозирующие задачи оптимального управления с конечным горизонтом.

В численных экспериментах результаты продемонстрированы на двух примерах из теории экономического роста. Проведен анализ влияния длины горизонта прогнозирования и весовых коэффициентов в критерии качества, который представляет собой взвешенную сумму квадратов отклонения траекторий и управлений от магистральных значений. Такой критерий гарантирует выход системы на магистраль (или в ее окрестность), скорость перехода к магистральным значениям зависит от длины горизонта.

Поскольку на длинных горизонтах отклонение от магистрали приводит к большим значениям критерия качества, который должен минимизироваться, логично предположить, что эта ситуация будет приводить к более короткому промежутку выхода на магистраль. Данное предположение действительно подтверждается численными экспериментами.

Кроме того, подбор весового коэффициента, всегда присутствующая при настройке схем МРС в практических приложениях, позволяет получать переходные процессы близкие к оптимальным в исходной задаче оптимального управления с экономическим критерием с бесконечным горизонтом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.
- 2 Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // *Econometrica*. 1974. V. 42. P. 267–272.
- 3 A. Helbig, O. Abel, W. Marquardt, Structural concepts for optimization based control of transient processes, in: F. Allgower, A. Zheng (Eds.), *Nonlinear Model Predictive Control*, volume 26 of *Progress in Systems and Control Theory*, Birkhauser, Basel, 2000, pp. 295–311.
- 4 B. Houska, H. Ferreau, and M. Diehl, An Auto-Generated Real-Time Iteration Algorithm for Nonlinear MPC in the Microsecond Range, *Automatica*, vol. 47, no. 10, pp. 2279–2285, 2011.
- 5 Keerthi S. S., Gilbert E. G. Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: Stability and moving-horizon approximations // *Journal of optimization theory and applications*. – 1988. – Т. 57. – №. 2. – С. 265-293.
- 6 T.E. Marlin, A.N. Hrymak, Real-time operations optimization of continuous processes, in: *Proceedings of the Fifth International Conference on Chemical Process Control*, Tahoe City, CA, 1996, P. 156–164.
- 7 Quin S.J., Badgwell T.A., Survey of industrial model predictive control technology, *Science Direct // Control Engineering Practice*, Elsevier Science., Austin, TX, USA. – 2002.
- 8 Ramsey F.P. A mathematical theory of saving // *Econ. J.* 1928. V. 38. P. 543–559
- 9 Shell K. Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // *Mathematical systems theory and economics 1*. Berlin: Springer, 1969. P. 241–292.
- 10 Асеев С. М., Кряжковский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // *Труды Математического института имени В.А. Стеклова*. – 2007. – Т. 257, №. 10. – С. 3-271.

- 11 Вдовенко Е.С. Оптимизация модели открытой экономики с ограничением на международное заимствование / Е.С Вдовенко // Диплом Белорусского государственного университета, Минск, 2017
- 12 Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- 13 Мышенков В.И., Мышенков Е.В. Численные методы. Ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Наука, 2005.
- 14 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
- 15 Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. 1959. №2. С. 25–32.