Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Algoritmy pro problém obchodního cestujícího

2024

Kateřina Sáňková

Vedoucí práce:
Mgr. Petr Osička, Ph.D.

Studijní program: Informatika,
Specializace: Programování a vývoj software

Bibliografické údaje

Autor:	Kateřina Sáňková
Název práce:	Algoritmy pro problém obchodního cestujícího
Typ práce:	bakalářská práce
Pracoviště:	Katedra informatiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Rok obhajoby:	2024
Studijní program:	Informatika, Specializace: Programování a vývoj software
Vedoucí práce:	Mgr. Petr Osička, Ph.D.
Počet stran:	39
Přílohy:	1 CD/DVD
Jazyk práce:	český

Bibliographic info

Author:	Kateřina Sáňková
Title:	Algorithms for the travelling salesman problem
Thesis type:	bachelor thesis
Department:	Department of Computer Science, Faculty of Science, Palacký University Olomouc
Year of defense:	2024
Study program:	Computer Science, Specialization: Programming and Software Development
Supervisor:	Mgr. Petr Osička, Ph.D.
Page count:	39
Supplements:	1 CD/DVD
Thesis language:	Czech

Anotace

Anotace - jeden odstavec

Synopsis

Anotace anglicky

Klíčová slova: problém obchodního cestujícího;

Keywords: travelling salesman problem;

Děkuji, děkuji, děkuji.

Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci včetně příloh vypracoval/a samostatně a za použití pouze zdrojů citovaných v textu práce a uvedených v seznamu literatury.

datum odevzdání práce podpis autora

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1 Teorie

Problém obchodního cestujícího je úzce spjatý s *teorií grafů* a proto je potřeba si na úvod zavést některé z jejich základních pojmů.

1.1 Graf

Graf je jedna ze základních reprezentací prvků množiny objektů a jejich vzájemných propojení. Takovým objektům budeme říkat *vrcholy* (někdy také *uzly*) a propojením *hrany*. Uvažujeme-li orientaci hran, pak říkáme, že je graf *orientovaný*, jinak *neorientovaný*.

Definice 1 (Neorientovaný graf)
Neorientovaný graf je dvojice $\langle V, E\rangle$, kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$ je množina (*neorientovaných*) hran.
u, v nazýváme *koncové uzly* hrany u, v.

V některých situacích nás bude zajímat počet hran, kterým je jistý uzel koncovým. Tomuto číslu budeme říkat *stupeň vrcholu* u a budeme ho značit $deg(u)$. Důležité bude také následující tvrzení.

Věta 2
V každém grafu $G = \langle V, E\rangle$ *platí, že* $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$.

U problému obchodního cestujícího také chceme, aby hrany vstupních grafů měly nějakou váhu. Tu jim přiřazuje tzv. *hranové ohodnocení*, funkce

$$w : E \to D$$

kde D je množina hodnot, kterými hrany ohodnocujeme. V případě problému obchodního cestujícího se jedná o množinu reálných (nebo racionálních) čísel.

Dále je vstupem tzv. *úplný* graf. V takovém grafu platí, že každé dva jeho vrcholy jsou spojeny hranou.

1.1.1 Cestování v grafech

Důležitou oblastí práce s grafy je cestování v nich. Vychází se z toho, že se z jednoho uzlu můžeme přemístit k druhému, právě když mezi nimi existuje hrana (v případě orientovaných grafů musí mít ještě hrana správný směr). Jednou z úloh o cestování je právě problém obchodního cestujícího.
Základním pojmem, od kterého budeme odvozovat další, je *sled*.

Definice 3
Sledem v grafu $G = \langle V, E\rangle$ rozumíme posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_n, v_n$,

kde pro každé $i \in \{0, \cdots, n\}$ máme $v_i \in V$ a pro každé $j \in \{1, \cdots, n\}$ máme $e_j \in E$.

Sled nazýváme

- *uzavřený*, pokud $v_0 = v_n$
- *tah*, pokud pro každé $k, l \in \{1, \cdots, n\}$, kde $k \neq l$, platí $e_k \neq e_l$ (neopakují se hrany)
- *cesta*, pokud pro každé $k, l \in \{0, \cdots, n\}$, kde $k \neq l$, platí $v_k \neq v_l$ (neopakují se vrcholy)
- *kružnice*, pokud v definici cesty požadujeme $v_0 = v_n$

Speciální druh tahu je tzv. *eulerovský tah*. Pro něj platí, že vede přes všechny vrcholy a každá hrana se v něm vyskytuje právě jednou.

Věta 4
Pokud je neorientovaný graf souvislý a všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň, pak v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Pro TSP je ještě klíčový termín *hamiltonovská kružnice*. Tou rozumíme takovou kružnici v grafu, která vede přes všechny jeho vrcholy.

Některé z algoritmů v knihovně jsou založené na hledání tzv. *minimální kostry grafu* . Před zavedením tohoto pojmu je ještě nutné si definovat, co je to *souvislý graf* a *podgraf* grafu.

Definice 5 (Souvislý graf)
Neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$ nazýváme *souvislý*, pokud pro každé $u, v \in V$ existuje sled z u do v.

Definice 6 (Podgraf)
Graf $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ nazýváme *podgraf* grafu $G = \langle V, E \rangle$, právě když $V_2 \subseteq V$ a $E_2 \subseteq E$.

Definice 7 (Kostra grafu)
Kostra neorientovaného grafu je jeho souvislý podgraf, který obsahuje všechny jeho vrcholy a nevyskytují se v něm žádné kružnice.

Pokud mají hrany původního grafu přiřazené váhy příslušným hranovým ohodnocením w, potom můžeme uvažovat o *minimální kostře grafu*. Tou budeme rozumět právě takovou kostru $MSP = \langle V, E' \rangle$, která bude mít mezi ostatními minimální součet $\sum_{e \in E'} w(e)$.

1.2 Algoritmické problémy

Obecně lze problémy, u kterých je rozumné chtít pro řešení použít počítač, definovat pomocí množiny vstupů In, množiny možných výstupů Out a funkce $p : In \to Out$, která každému vstupu přiřazuje odpovídající výstup. Tedy $P = \langle In, Out, p \rangle$.

Optimalizační problémy jsou takové problémy, kde pro vstup existuje víc možných řešení a jejich úlohou je mezi nimi najít to, které má mezi ostatními minimální nebo maximální hodnotu předem definované funkce.

Tyto problémy se dají charakterizovat

- množinou vstupů In
- funkcí $sol : In \to 2^{Out}$, která každému vstupu přiřadí množinu *přípustných řešení*
- funkcí $cost : In \times Out \to \mathbb{Q}$, která vstupu a jeho přípustnému řešení přiřazuje *cenu* toho řešení
- *goal*, které je buď min nebo max

Podle hodnoty *goal* se problému říká *minimalizační* nebo *maximalizační*. *Optimálním řešením* pro vstup $x \in In$ pak označujeme takové řešení $y \in sol(x)$, pro které platí, že $cost(x, y) = goal\{cost(x, y') \mid y' \in sol(x)\}$. Cenu takového řešení značíme $OPT(x)$.

Při hledání algoritmu, které řeší takový problém zvažujeme jeho *správnost* a *optimalitu*. Řekneme, že algoritmus A pro problém P je *správný*, pokud pro každé $x \in In$ platí, $A(x) \in sol(x)$. *Optimální* je navíc pokud pro každé $x \in In$ je $A(x)$ optimální řešení.

Některé optimální algoritmy bývají ale časově náročné, často se proto hledají algoritmy, které nevydají pokaždé optimální řešení, ale pouze přibližné. Těmto algoritmům se říká *aproximační*.

Mějme takový algoritmus A. Pro každý vstup $x \in In$ můžeme definovat *aproximační faktor* jako

$$R_A(x) = \max\{\frac{cost(x, A(x))}{OPT(x)}, \frac{OPT(x)}{cost(x, A(x)}\}$$

Pro samotný algoritmus můžeme také definovat jeho aproximační faktor, vzhledem k nějaké funkci F mapující vstupy na přirozená čísla (typicky velikost vstupu, případně jiná jeho významná vlastnost), a to následovně

$$R_A(n) \;=\; \max\{R_A(x) \mid x \in In, F(x) = n\}$$

A můžeme označit za $f(n)$–aproximační algoritmus, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $R_A(n) \leq f(n)$. Jinými slovy, pokud u algoritmu známe jeho aproximační faktor, pak se můžeme spolehnout, že pro každý vstup velikosti n dostaneme v

nejhorším případě $f(n)$–krát horší výsledek vůči optimu.

Další významnou množinou problémů jsou *rozhodovací problémy*. Ty se vyznačují tím, že množina výstupů je omezena jen na Ano a Ne.

Každý optimalizační problém má svoji *rozhodovací verzi*. Místo, aby na vstupu byla pouze instance problému $x \in In$, přidá se navíc ještě číslo $k \in \mathbb{Q}$. Pokud je $k \geq OPT(x)$, u minimalizačního problému, nebo $k \leq OPT(x)$, u maximalizačního, pak je výsledkem Ano, jinak Ne.

1.2.1 Složitost

Na začátku je třeba si zavést třídy **P** a **NP**. Rozhodovací problémy, které spadají do třídy **P** jsou řešitelné deterministickými stroji v polynomiálním čase a bereme je za praktický zvládnutelné. **NP** problémy jsou také řešitelné v polynomiálním čase, ale nedeterministickými stroji. U těchto strojů předpokládáme, že z možných kroků provede vždy ten žádaný a dostane se tak ke správnému výsledku bez nutnosti zkoušet všechny možnosti. Jistě platí $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$, jelikož deterministické stroje jsou speciálním případem nedeterministických, které pouze nemají možnost nedeterministického výběru.

Některé rozhodovací problémy mají navíc tu vlastnost, že jsou na ně polynomiálně redukovatelné všechny rozhodovací problémy v **NP**. To znamená, že pro každý vstup libovolného problému P_1 můžeme v polynomiálním čase najít vstup pro P_2, který pro které je správná stejná odpověď. Problémům s touto vlastností se říká ***NP**–těžké*. Pokud navíc **NP**-těžký problém patří do NP, říkáme mu ***NP**-úplný*.

NP-těžké problémy jsou důležité, protože kdyby se podařilo najít algoritmus řešící kterýkoli z nich v polynomiálním čase, pak bychom jistě zvládli vyřešit i všechny **NP** problémy v polynomiálním čase, tedy $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}$ a z toho $\mathbf{NP} = \mathbf{P}$. Naopak, pokud bychom zjistili, že $\mathbf{NP} \neq \mathbf{P}$, pak pro žádný **NP**–úplný problém jistě nemůže existovat polynomiální algoritmus, který ho řeší.

Z $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ jde vyvodit ještě jedno důležité tvrzení. Nechť P_O je optimalizační problém a P_D je jeho rozhodovací verze. Pokud dokážeme, že P_D je **NP**–těžký, pak pro P_O neexistuje optimální polynomický algoritmus. Kdyby totiž takový algoritmus existoval, využili bychom ho k nalezení optimálního řešení instance x problému P_O. Pak bychom cenu tohoto řešení porovnaly s číslem k, a rozhodli o tom, jestli odpověď pro instanci (x, k) problému P_D Ano nebo Ne. Tímto bychom tedy získali polynomiální algoritmus řešící také P_D. Jenže protože P_D je **NP**–těžký, tak všechny **NP** problémy jsou na něj polynomiálně redukovatelné a zvládli bychom je tedy i v polynomiálním čase řešit a tedy $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, což je spor.

2 Problém obchodního cestujícího

Problém obchodního cestujícího (TSP - *Travelling Salesman Problem*) je jedním z nejstudovanějších optimalizačních problémů. Podstatou je mezi zadanými městy nalézt cestu, která začíná i končí ve stejném místě a zbytek měst navštíví právě jedenkrát. Jelikož seznam měst můžeme brát jako množinu vrcholů grafu, můžeme o TSP uvažovat jako o úloze o cestování v grafu. Cestou, kterou hledáme je pak *hamiltonovská kružnice*.

TSP definujeme následně:

Definice 8 (Problém obchodního cestujícího)

NÁZEV: TSP

VSTUP: Úplný neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$,

hranové ohodnocení $c : E \to R^+$

VÝSTUP: Hamiltonovská kružnice v G minimální délky

Ceny hran budeme nazývat také *délky* a pro jednoduchost budeme místo $c(\{u, v\})$ psát $c_{u,v}$.

2.1 Složitost

Zavedeme si nyní rozhodovací verzi k TSP.

Definice 9 (Rozhodovací verze TSP)

NÁZEV: TSP

VSTUP: Úplný neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$,

hranové ohodnocení $c : E \leftarrow R^+$,
číslo k

OTÁZKA Existuje v G hamiltonovská kružnice délky nejvýš k?

Jedním z důvodů, proč je TSP tak zkoumaným problémem, je jeho složitost. Rozhodovací verze TSP je jistě v **NP**. Nedeterministický stroj, který by měl za úkol najít řešení pro (x, k), by prostě nedeterministicky vybral množinu $|V|$ hran z E a potom by ověřil, že vybraná množina hran je hamiltonovská kružnice a že má cenu větší než k. Tohle by samozřejmě zvládnul provést v polynomiálním čase.

Ví se, že rozhodovací verze TSP je **NP**–úplná. Tedy platí, že pokud nalezneme polynomiální algoritmus řešící TSP, pak dokážeme $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Nyní si dokážeme ještě zajímavější tvrzení.

Věta 10
Pokud by existoval 2^n–aproximační polynomiální algoritmus pro TSP, pak $\boldsymbol{P = NP}$.

Něž začneme s důkazem, musíme ji ještě zavést rozhodovací problém nalezení hamiltonovské kružnice (*HC - Hamiltonian Cycle*) v grafu.

Definice 11 (HC)

NÁZEV: HC

VSTUP: Neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$

OTÁZKA Existuje v G hamiltonovská kružnice?

O tomto problému je známo, že je také **NP**–úplný. Navíc se dá snadno převést na TSP.

Jak jsme již zmínili, TSP má ve své klasické podobě na vstupu graf a jeho příslušné hranové ohodnocení. Vstupní graf $x = \langle V, E \rangle$ pro HC bychom mohli redukovat na vstup $r(x)$ pro TSP tak, že bychom vytvořili úplný graf mezi uzly z původní instance a ohodnotili bychom jeho hrany následovně:

$$c_e = \begin{cases} 1 & \text{pro } e \in E \\ |V| \cdot 2^{|V|} + 1 & \text{pro } e \notin E \end{cases}$$

Snadno můžeme dojít k tomu, že

$$OPT_{TSP}(r(x)) = \begin{cases} = |V| & \text{pro } x \in HC \\ > |V| \cdot 2^{|V|} & \text{pro } x \notin HC \end{cases}$$

Uvědomme si, že hrany s cenou $|V| \cdot 2^{|V|}$ budou obsaženy v optimálním řešení pouze v případě, kdy nelze sestavit hamiltonovskou kružnici z hran původního grafu. Pokud musela být vybrána pouze jedna taková hrana, pak bude cena nalezené cesty

$$(|V| - 1) + (|V| \cdot 2^{|V|} + 1) > |V| \cdot 2^{|V|}$$

Díky takovému ohodnocení existuje tedy exponenciálně velká mezera mezi pozitivními a negativními instancemi HC. Pokud bychom měli 2^n–aproximační polynomiální algoritmus A pro TSP, pak pro pozitivní instance HC by našel cestu délky nejhůře $|V| \cdot 2^{|V|}$, pro negativní instance zase nejlépe délky $(2^{|V|} + 1) \cdot |V|$.

HC bychom mohli vyřešit tak, že bychom spustili A na $r(x)$ a pokud by délka vrácené cesty byla menší nebo rovna $|V| \cdot 2^{|V|}$, pak bychom vrátili ANO, v opačném případě NE. Vzhledem k tomu, že převod na $r(x)$, A i porovnání na konci běží v polynomiálním čase, pak bychom celý HC mohli rozhodnout v polynomiálním čase. Protože HC je NP-úplný, znamenalo by to, jak jsme diskutovaly v kapitole 1.2.1, že P=NP.

2.2 Podproblémy TSP

Z předchozí podkapitoly je vidět, že TSP je v obecném případě těžké v polynomickém čase i aproximovat. Přidáním jistých omezení na problém můžeme tuto obtížnost výrazně snížit a často nám takové typy problémů pro reálné použití dostačují.

2.2.1 Metrický problém obchodního cestujícího

Prvním takovým omezením je, že pro délky hran musí platit trojúhelníková nerovnost. Tedy pro každé $u, v, w \in V$ platí

$$c_{u,v} + c_{v,w} \geq c_{w,u}$$

Takovému problému se říká *metrický TSP*.

2.2.2 Euklidovský problém obchodního cestujícího

Přísnější podmínkou pak může být definice délky jako euklidovské vzdálenosti. Ta je pro vrcholy $u, v \in V$ se souřadnicemi $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ definována

$$c_{u,v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}$$

Jelikož při takovém ohodnocení bude jistě platiti i trojúhelníková nerovnost, pak je euklidovský TSP podproblémem metrického TSP.

3 Algoritmy

Pro TSP není známý žádný optimální polynomický algoritmus a platí-li $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, pak ani takový algoritmus existovat nemůže. Z tohoto důvodu se pro hledání řešení používají tzv. *heuristiky*. Při jejich použití se sice nemůžeme spolehnout, že najdeme optimální řešení, ale jsme schopni nalézt přibližné řešení v reálném čase.

U některých heuristik se navíc můžeme bavit o *aproximačním faktoru*. Připomeňme, že pro libovolný vstup problému I, pro který je cena optimálního řešení OPT a heuristiku s aproximačním faktorem α platí, že se můžeme spolehnout, že cena řešení, které dostaneme použitím dané heuristiky na I bude při nejhorším $\alpha * OPT$.

3.1 Nearest-addition algoritmus

Tento algoritmus spadá do skupiny hladových algoritmů a je poměrně intuitivní. Vychází z myšlenky, že k vytvářené cestě vždy přidáme nejbližší nenavštívené město. Nejprve najdeme taková dvě města i, j, která jsou si v grafu nejblíže a vytvoříme cestu *path*, která povede z i do j a zpět. Následuje cyklus, ve kterém budeme hledat takovou hranu (k, l), že $k \in path$, $l \notin path$ a c_{kl} je všemi takovými hranami minimální. Předpokládejme, že město m je aktuálně v *path* za k. Vložíme l do *path* mezi k a m a následuje další iterace. Cyklus skončí v momentu, kdy jsme navštívili všechny města.

Algorithm 1: Nearest-addition algoritmus

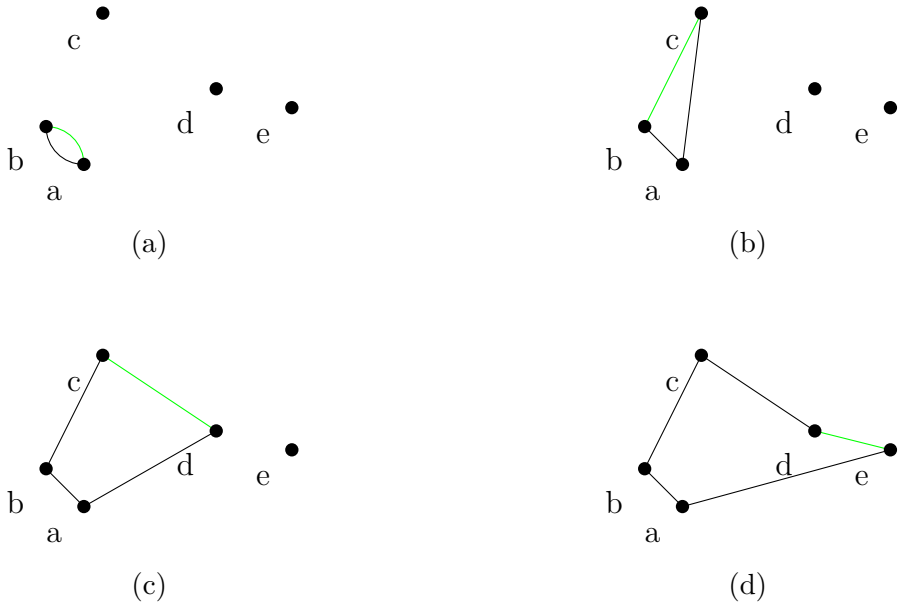
```
new list path;
new list unvisited;
unvisited ← nodes;
(i, j) ← shortest edge in graph;
path.Add(i, j, i);
unvisited.Remove(i, j);
while unvisited.Count > 0 do
    (k, l) ← shortest edge in graph, where k ∈ path and l ∈ unvisited;
    path.AddAfter(k, l);
    unvisited.Remove(l);
return path
```

Procedury *Add*, *AddAfter* a *Remove* použité v kódu pracují se seznamy a to tak, že *list.Add(a, b, ...)* přidá na konec seznamu*list* všechny předané argumenty v pořadí od prvního k poslednímu, *list.AddAfter(a, b)* najde, kde se v *list* nachází prvek *a* a vloží za něj *b* a *list.Remove(a) list* první výskyt *a*.

Ukažme si jednoduchý příklad chodu algoritmu. Na obrázku níže jsou rozbrazeny vrcholy vstupního grafu. Za délky hran mezi nimi uvažujme euklidovskou

vzdálenost. Dále je na každém obrázku ukázaná aktuální cesta *path* a zelená hrana reprezentuje poslední nalezenou nejkratší hranu.

Příklad 12



Obrázek 1: Příklad nearest-addition algoritmu

3.1.1 Aproximační faktor

Věta 13
Nearest-addition je 2-aproximační algoritmus.

Abychom si tvrzení dokázali, musíme si nejdříve ukázat vztah k Primově algoritmu, který hledá minimální kostru grafu.

Algorithm 2: Primův algoritmus

new list $spanningTree$;
new list $unvisited$;
$unvisited \leftarrow nodes$;
$(i, j) \leftarrow$ shortest edge in graph;
$spanningTree.Add((i, j))$;
$unvisited.Remove(i, j)$;
while $unvisited.Count > 0$ **do**
    $(k, l) \leftarrow$ shortest edge in graph, where $k \notin unvisited$ and $l \in unvisited$;
    $spanningTree.Add((k, l))$;
    $unvisited.Remove(l)$;
return $spanningTree$

Z pseudokódu je jasné, že hrany nalezené Primovým algoritmem i nearest addition algoritmem budou totožné.

Zůstaňme ještě chvíli u kostry grafy a jejím vztahu k cestě nalezené TSP algoritmy.

Lemma 14

Pro libovolný vstup TSP je cena jeho optimální cesty alespoň tak vysoká, jako je cena minimální kostry pro tentýž vstup.

Důkaz

Vezměme optimální cestu pro libovolný vstup s více než jedním vrcholem a odstraňme některou z hran. Takto vzniklý graf jistě nebude mít vyšší cenu než optimální cesta. Navíc bude také kostrou původního vstupu. To si můžeme snadno ověřit. Graf stále obsahuje všechny vrcholy, jeho souvislost jsme nijak neporušili a jedinou kružnici kterou obsahoval jsme otevřeli odstraněním jedné z hran.

Obrázek 2: Vztah okružní cesty v grafu a jeho kostry

To, že tato kostra nemůže mít nižší cenu než minimální kostra, je triviální a lemma jsme dokázali. □

Věta 15

Nearest-addition algoritmus pro metrický problém obchodního cestujícího je 2-aproximační algoritmus.

Důkaz

Uvažujme podmnožiny $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ hran grafu, kde S_i je množina hran identifikovaných i-tou iterací. Vrátíme-li se k příkladu chodu algoritmu, pak ve stavu na obrázku 1a bude $S_1 = \{(a, b)\}$, pro stav na 1b bude $S_2 = \{(a, b), (b, c)\}$, atd. Dále mějme množinu $F = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_{n-1}, j_{n-1})\}$ reprezentující nejkratší hrany určené každým průchodem cyklu (na obrázku zvýrazněné zeleně). Jak bylo zmíněno výše, tato množina bude jistě množinou hran nejkratší kostry vstupního grafu. Tedy z lemma 14 plyne

$$OPT \geq \sum_{l=1}^{n-1} c_{i_l j_l}$$

Po najití první nejkratší hrany máme výslednou délku $c_1 = 2c_{i_1,j_1}$, jelikož ji vkládáme do cesty dvakrát. Dále, když přidáváme nové město j mezi i a k, tak rušíme hranu (i, k) a přidáváme hrany (i, j) a (j, k). Cesta se tedy prodlužuje o $c_{ij} + c_{jk} - c_{ik}$. Z trojúhelníkové nerovnosti snadno odvodíme, že $c_{jk} - c_{ik} \leq c_{ij}$. Rozdíl cen hran c_{jk} a c_{ik} je tedy shora ohraničený cenou c_{ij}.

Dosadíme-li tuto hodnotu do předchozí rovnice, zjistíme, že celková cesta se může v nejhorším případě prodloužit o $2c_{ij}$. Celková cesta nalezená narest-addition algoritmem bude tedy maximálně

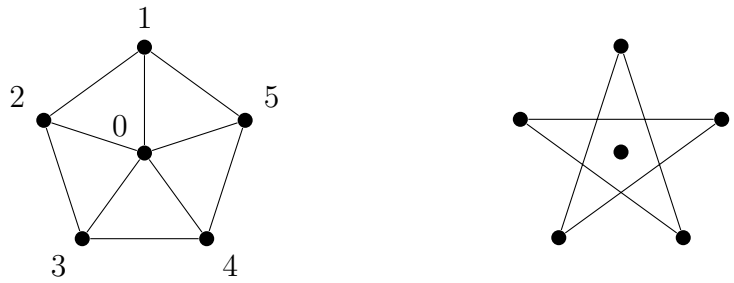
$$2 \sum_{l=1}^{n-1} c_{i_l j_l}$$

Upravíme li poslední nerovnost, dostaneme $\sum_{l=2}^{n} c_{i_l j_l} \leq 2OPT$.

3.1.2 Těsný příklad

Můžeme si ukázat jeho tzv. *těsný příklad* (tight example), což je pro algoritmus s aproximačním faktorem α příklad, u kterého nalezne řešení s cenou $\alpha * OPT$ (můžeme povolit určitou konstantní odchylku). Tedy budeme chtít najít vstup pro metrický TSP, pro který nám tento algoritmus vrátí cestu s délkou skoro $2 * OPT$.

Vezměme si jako vstup $(n - 1)$-cípou hvězdu s jedním vrcholem ve svém středu. Hrany busou ohodnoceny následovně: hrany vlevo na obrázku budou mít cenu jedna a hrany vpravo dva.

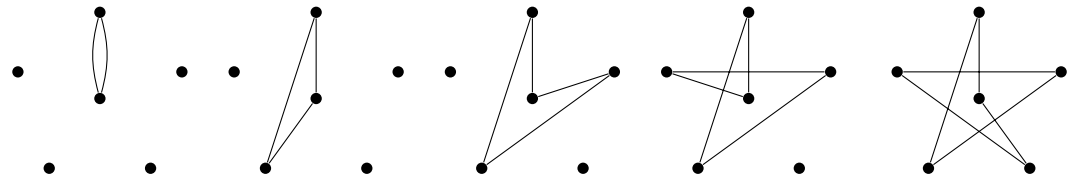


Obrázek 3: Těsný příklad nearest-addition algoritmu

Cena hran napravo je shora omezená právě dva, protože musí platit trojúhelníková nerovnost.

Obrázek 4: Těsný příklad nearest-addition algoritmu - cesty

Je snadno vidět, že optimální cesta (na obrázku výše vlevo) bude mít celkovou cenu n. Algoritmem ale může být nalezena i cesta jako na obrázku nahoře vpravo (příklad chodu algoritmu je zobrazen níže). Taková cesta obsahuje $n-2$ hran s vahou dva a dvě hrany s vahou jedna, tedy $2(n-2)+2 = 2n-2 = 2*OPT-O(1)$.



0, **1**, 0 0, **3**, 1, 0 0, **5**, 3, 1, 0 0, **2**, 5, 3, 1, 0 0, **4**, 2, 5, 3, 1, 0

Obrázek 5: Těsný příklad nearest-addition algoritmu - chod algoritmu

3.2 Algoritmus double-tree

Jádrem algoritmu je zdvojení hran minimální kostry vstupního grafu a následné nalezení uzavřeného eulerovského tahu. To, že se v takovémto grafu takový tah nachází je snadné dokázat. Z Věty 4 víme, že stačí, aby byl graf spojitý a všechny jeho uzly měly sudý stupeň. Zdvojíme-li každou hranu, vycházející z libovolného uzlu, pak bude mít jistě uzel sudý stupeň. Jelikož vycházíme z kostry grafu, spojitost je zřejmá.

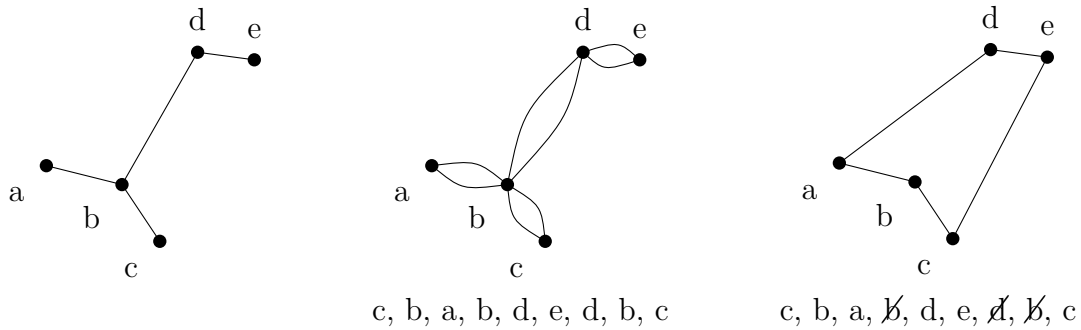
K vytvoření cesty už potřebujeme pouze zaručit, že nenavštívíme žádný uzel vícekrát. Toho dosáhneme pomocí zkracování. Máme-li eulerovský průchod (i_0, i_1), (i_1, i_2), $\cdots$ (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_0), pak vezměme posloupnost $i_0, i_1, ...i_k$ a ponechejme pro každý uzel pouze jeho první výskyt. Nakonec ještě vraťme i_0 na konec cesty.

Algorithm 3: Double-tree algoritmus

```
Input: G
doubleTree ← FindMinimalSpanningTree(G);
foreach edge ∈ doubleTree do
    doubleTree.Add(edge);
eulerCircuit ← FindEulerCircuit(doubleTree);
vytvoř seznam path;
foreach node ∈ eulerCircuit do
    if node ∉ path then
        path.Add(node);
return path
```

Na následujícím obrázku je vidět jednoduchý chod algoritmu. Vlevo je nalezená minimální kostra, uprostřed pak graf se zdvojenými hranami a jeho eulerovským průchodem, vpravo pak nakonec výsledná cesta vzniklá zkracováním.

Příklad 16



Obrázek 6: Příklad algoritmu double-tree

3.2.1 Aproximační faktor

Věta 17
Double-tree je 2-aproximační algoritmus.

Z Lemma 14 víme, že optimální cesta stojí alespoň tolik, co minimální kostra. Jelikož každou její hranu zdvojujeme, získáme dvakrát tak delší cestu.

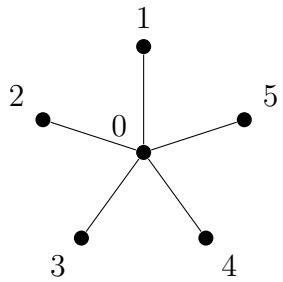
Při hledání eulerovského průchodu pouze hrany seřazujeme.

Zbývá pouze zkracování. Zde opět vycházíme z trojúhelníkové nerovnosti. Uvažujme, že i, j, k jsou po sobě jdoucí města a j jsme již navštívili, tedy bychom je měli přeskočit. Je zřejmé, že $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$, což dokazuje, cena tohoto úseku zůstane při nejhorším stejná a horní ohraničení se tedy nemění.

3.2.2 Těsný příklad

Jako příklad vstupu, pro který double-tree algortimus najde cestu délky $2OPT$ můžeme vzít vstup z kapitoly 3.1.2 o nearest-addition algoritmu. Jelikož mají oba algoritmy stejný aproximační faktor, pak stačí ukázat, že se můžeme double-tree algoritmem dostat ke stejné cestě jako v již zmíněné předchozí kapitole.

U takového vstupu může být nalezena následná minimální kostra.



Obrázek 7: Těsný příklad algoritmu double-tree - minimální kostra

V grafu se zdvojenými hranami, pak můžeme uvažovat eulerovský průchod 0, 4, 0, 2, 0, 5, 0, 3, 0, 1, 0, ze kterého zkrácením dostaneme cestu 0, 4, 2, 5, 3, 1, 0, což je stejná cesta jakou jsme nalezli algoritmem nearest-addition.

3.3 Christofidesův algoritmus

Christofidesův algoritmus je velice podobný double-tree algoritmu. Opět začneme s minimální kostrou vstupního grafu. Existenci eulerovského průchodu ale zajistíme o něco chytřeji. Připomeňme si, že eulerovský průchod se v grafu nachází právě tehdy, když mají všechny jeho uzly sudý stupeň. V double-tree algoritmu jsme tuto podmínku splnili tak, že jsme zdvojili každou hranu kostry. To je ovšem redundantní. Postačí, když spárujeme takové její uzly, které mají lichý stupeň.

Mějme úplný graf, jehož množinou vrcholů budou právě ty vrcholy jeho minimální kostry s lichým stupněm, označme ji O. Z množiny jeho hran se budeme snažit vybrat takovou podmnožinu, ve které bude pro každé $v \in O$ právě jedna hrana, pro kterou je v koncový uzel. Taková množina se nazývá *perfektní párování*. V grafu jich samozřejmě může být více. Pro naše účely bude jistě nejlepší hledat takové z nich, které bude mít minimální součet délek všech svých hran, tedy *minimální perfektní párování*. K jeho nalezení se v programu používá C++ knihovna Vladimira Kolmogorova, která implementuje *Blossom V* algoritmus.

Uvědomme si ale, že aby takové párování pro O existovalo, tak musí být $|O|$ sudé. Víme, že součet stupňů všech uzlů v neorientovaném grafu je sudé číslo (viz Věta 2). Označme si množinu všech vrcholů grafu V a množinu vrcholů se sudým stupněm E. Jistě platí

$$\sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in E} deg(v) + \sum_{v \in O} deg(v)$$

$\sum_{v \in V} deg(v)$ je ale určitě sudé a to samé platí pro $\sum_{v \in E} deg(v)$, tedy $\sum_{v \in O} deg(v)$ musí být také sudý. Vzhledem k tomu, že každý vrchol přispívá do součtu lichým číslem, pak musí být sudý jejich počet.

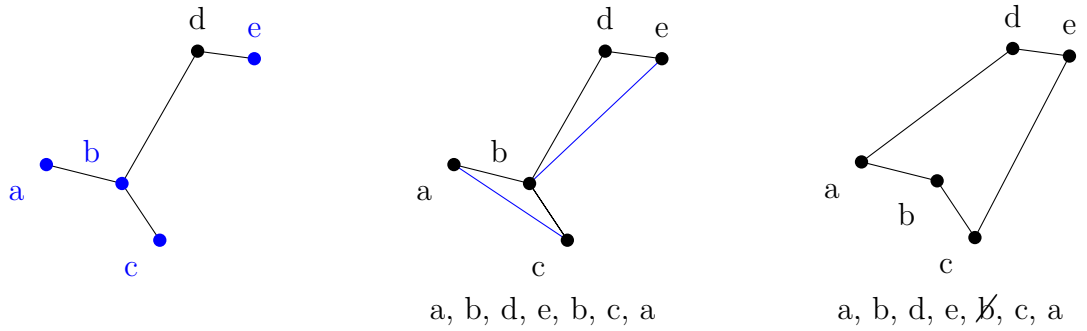
Přidáním minimálního perfektního párování k minimální kostře zvýšíme stupeň každého vrcholu s lichým stupněm právě o jedna, tudíž zajistíme, že všechny uzly budou mít sudý stupeň. V takovém grafu pak existuje uzavřený eulerovský tah. Po jeho nalezení už jen zkracujeme cestu stejným způsobem jako u double-tree algoritmu.

Algorithm 4: Christofidesův algoritmus

```
Input: G
spanningTree ← FindMinimalSpanningTree(G);
oddDegreeNodes ← FindNodesWithOddDegrees(spanningTree);
perfectMathing ← FindPerfectMatching(oddDegreeNodes);
eulerCircuit ← FindEulerCircuit(doubleTree + perfectMathing);
vytvoř seznam path;
foreach node ∈ eulerCircuit do
    if node ∉ path then
        path.Add(node);
return path
```

Podobně jako u algoritmu double-tree si ukážeme jednoduchý příklad. Vlevo je opět vidět minimální kostra, kde jsou modrou barvou zobrazeny vrcholy s lichým stupněm. Na dalším obrázku je k hranám přidáno minimální párování modrých vrcholů s eulerovským průchodem takového grafu. Nakonec pak opět výsledná zkrácená cesta.

Příklad 18



Obrázek 8: Příklad Christofidesova algoritmu

3.3.1 Aproximační faktor

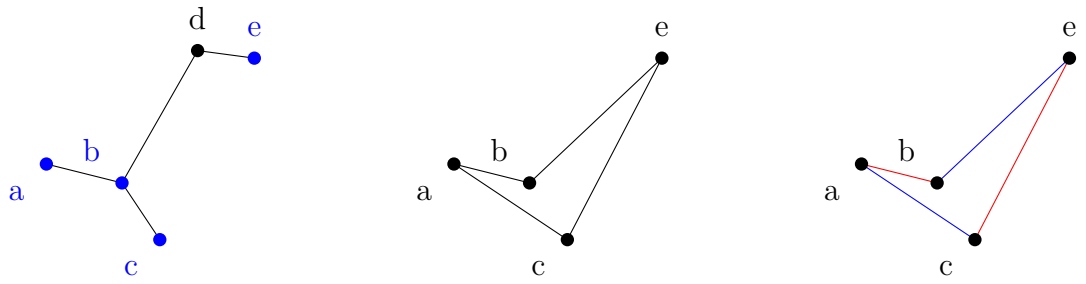
Věta 19

Christofidesův algoritmus je 3/2-aproximační algoritmus.

Nejdřív si musíme rozmyslet, co vlastně potřebujeme dokázat. Potřebujeme, aby eulerovský průchod měl při nejhorším délku $\frac{3}{2}OPT$. Z lemmatu 14 víme, že minimální kostra, která je v něm obsažená, má v nejhorším případě cenu OPT. Stačí tedy dokázat, že perfektní párování má maximálně cenu $\frac{1}{2}OPT$.

Pracujeme s množinou lichých uzlů v MST O. Budeme v ní teď hledat cestu. Vyjdeme-li z nejkratší hamiltonovské kružnice nad všemi vrcholy vstupu, pak je zřejmé, že její délka bude nejvýše OPT. Tuto kružnici teď budeme pouze zkracovat. Uvažujeme-li dva vrcholy i a j, pro která platí, že na cestě mezi nimi jsou pouze vrcholy nenáležící do O, pak je jistě můžeme vynechat a z trojúhelníkové nerovnosti víme, že v nejhorším případě bude hrana (i, j) stejně dlouhá jako původní cesta. V nejhorším případě tedy po tomto zkracování zůstane délka kružnice rovna OPT.

Nyní začněme střídavě obarvovat hrany nalezené cesty, řekněme modrou a červenou. Množina červených i množina modrých hran je perfektním párováním na O, platí totiž, že pokrývají všechny vrcholy a žádné dvě hrany nesdílí vrchol. Víme, že dohromady množiny dávají OPT, pak jistě jedna z množin bude mít délka menší nebo rovnu $\frac{1}{2}OPT$, což jsme chtěli dokázat.



Obrázek 9: Perfektní párování

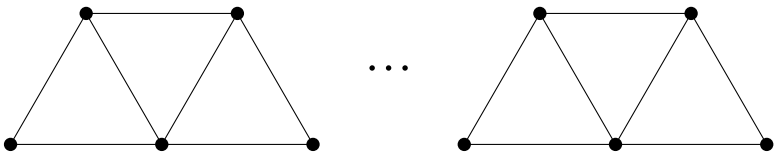
Z analýz aproximačních faktorů Christofidesova a double-tree algoritmů ještě vyplývá následující tvrzení.

Lemma 20

Sestrojíme-li pro vstup metrického TSP eulerovský podgraf délky $\alpha * OPT$, pak můžeme odvodit jeho α-aproximační algoritmus.

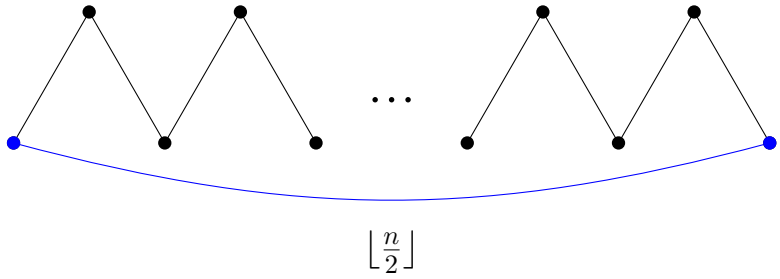
3.3.2 Tight example

Vezměme si následující vstup, kde mají vyznačené hrany délku 1. U ostatních hran uvažujme jejich délku vyšší 1.



Obrázek 10: Těsný říklad Christofidesova algoritmu

Bude-li nalezena minimální kostra grafu zobrazená černými hranami na obrázku níže, pak jediné uzly s lichým stupněm budou krajní zobrazené modře. Jejich spojením pak dostaneme cestu (zkracování zde jistě nepovede k žádnému zlepšení).



Obrázek 11: Těsný říklad Christofidesova algoritmu - cesta

Podívejme se na délku takto nalezené cesty. Kostra bude mít jistě délku $n-1$ a poslední přidaná hrana $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Je také snadno vidět, že optimální cesta bude délky n. Pak už snadno

$$(n-1) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n - O(1) = OPT - O(1)$$

3.4 Keringhan - Lin algoritmus

Tento heuristický algoritmus není specifický pro TSP, ale je možné jím řešit obecně problémy, kde máme nějakou podmínku C, kterou musejí splňovat jejich řešení, a funkci f, která takovým řešením přiřazuje určitou hodnotu. Zadanou pak máme množinu S, ve které hledáme podmnožinu T, která bude nejen splňovat podmínku C, ale její hodnota f bude mezi všemi vyhovujícími podmnožinami minimální. Takové problémy mívají často exponenciální složitost, proto se zpravidla spokojíme s hledáním takových podmnožin, které splňují C a jejich hodnota f je dostatečně malá. Jedním z takových problémů, kde se Kernighan - Lin využívá je například *dělení grafů*.

Základní myšlenkou je postupné zlepšování úvodního řešení. Hledá se vždy lokální optimum, které se, pokud přinese nějaký zisk (zmenšení hodnoty f), použije pro další iteraci.

Na začátku se zvolí pseudonáhodné přípustné řešení $T \subseteq S$ a následně začne cyklus, kde se snažíme T transformovat na jiné platné řešení T'. Pokud by platilo $f(T') < f(T)$, pak se T' použije pro další iteraci. V momentě, kdy už nenacházíme řešení, které by přinášely nějaký zisk, tak bylo nalezeno lokálně optimální řešení. V tuto chvíli se buď může skončit nebo se vygeneruje nové počáteční řešení a proces provést znovu.

Samotná transformace probíhá tak, že se hledají takové dvě množiny $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in T$ a $\{y_1, y_2, ..., y_k\} \in S - T$, pro které platí, že když nahradíme prvky první množiny v T prvky druhé množiny, pak dostaneme platné řešení T'. O tom, jak přijdeme k číslu k bude ještě řeč později.

Idea algoritmu tedy spočívá v tom, že pro pseudonáhodné počáteční řešení najdeme budeme nacházet lokální optima a mezi nimi by se snad mělo objevit

i optimum globální (nebo alespoň řešení se schůdnou hodnotou pro f). Přirozeně budeme považovat algoritmus za tím kvalitnější, čím menší počet různých lokálních optim dostaneme a čím větší počet náhodných počátečních řešení nás dovede k dostatečně dobrému výsledku.

Obecná podoba heuristiky by se dala zapsat následovně:

Algorithm 5: Keringhan - Lin algoritmus - obecně

```
1  T ← pseudorandom solution;
2  T' ← T;
3  while T' do
4      T' ← transformation of T such that f(T') < f(T);
5  return T' or start over if desired;
```

Vraťme se ještě ke zmíněnému koeficientu k. Jednou z možností, jak nad k uvažovat je jako na předem zvolené číslo. Toho pro řešení TSP využil A. Croes s $k = 2$ a později S. Lin s $k = 3$. Tento přístup s sebou nese jistá úskalí a to hlavně správnou volbu k. S narůstající hodnotou se výrazně zvyšuje i výpočetní čas, ale přirozeně dostáváme lepší řešení. Zjistit pak, jaké číslo nám zajistí dostatečně dobré výsledky ve schůdném čase, je náročné.

Tomuto problému se můžeme vyhnout tím, že k nebude mít žádnou pevně danou hodnotu. Takového způsobu se bude využívat v naší podobě algoritmu. Jelikož k nebude známé, nemůžeme již jednoduše uvažovat všechny podmnožiny T o velikosti k, jako u předchozí varianty. Na místo toho budeme iterativně hledat vždy nejvýhodnější x_i a y_i pro výměnu, budeme si zaznamenávat, pro jaké i byl zisk nejvyšší a až když žádné zlepšení nebude moct být nalezeno, vyměníme příslušné množiny.

Algorithm 6: Keringhan - Lin algoritmus - variabilní k

```
1  T ← pseudorandom solution;
2  do
3      i ← 0;
4      T ← T';
5      while improvement can be found do
6          i ← i + 1;
7          (x_i, y_i) ← best pair for exchange;
8          G_i ← total gain for {x_1, x_2, ..., x_k} and {y_1, y_2, ..., y_k};
9      k ← i, where G_i is max \\definition of G_i is below;
10     T' ← (T − {x_1, x_2, ..., x_k}) ∪ {y_1, y_2, ..., y_k};
11 while f(T') > f(T);
12 return T';
```

Pro takový přístup vyvstává pár pravidel a otázek, které si budeme muset zodpovědět.

Prvním pravidlem je *pravidlo disjunkce*. Budeme požadovat, aby množiny $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ a $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ nesdílely žádné prvky a zbytečně jsme opakovaně neprozkoumávali záměny, které nevedou ke zlepšení.

Druhé pravidlo vyplývá z variability k. Jelikož nevíme, pro jaké i budeme chtít výměnu provést, musíme vědět, že po každé výměně $\{x_1, x_2, ..., x_i\}$ za $\{y_1, y_2, ..., y_i\}$ dostaneme platné řešení. Podmínce, která musí být splněna, aby pravidlo platilo budeme říkat *podmínka proveditelnosti*.

Z pseudokódu uvedeného výše není zřejmé ještě pár věcí. Nejzřejmější je, jak identifikovat pár s největším ziskem. Potřebujeme najít takové *pravidlo výběru*, které bude rychlé a zároveň co nejefektivnější.

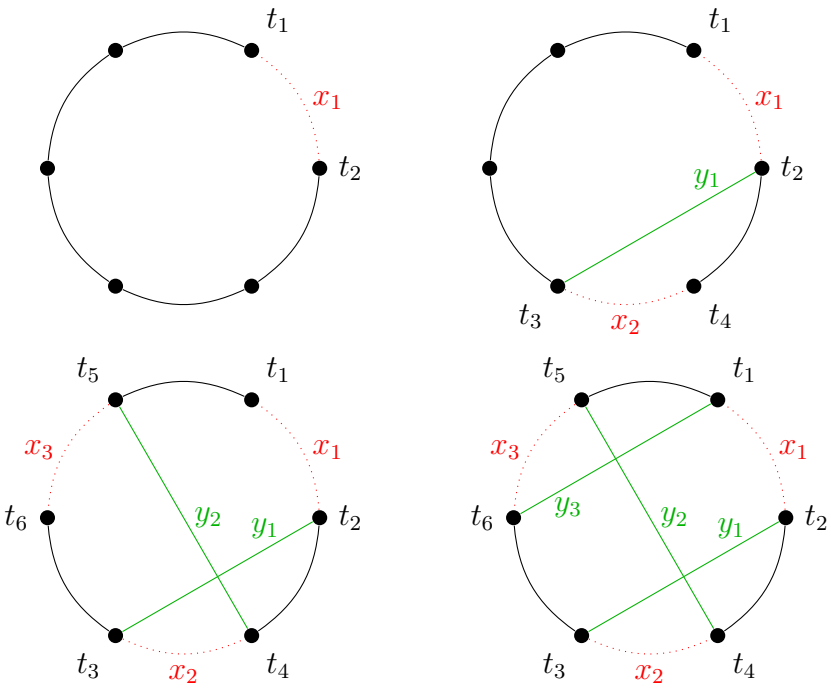
Další neznámou je funkce G_i. Tato funkce udává celkový zisk pro aktuálně nalezené prvky. Určíme-li g_i jako zisk pro (x_i, y_i), pak nejsnazším řešením je za G_i uvažovat $g_1 + g_2 + ... + g_i$. Tímto se také vyhneme tomu, že bychom přestali hledat v momentu, kdy bychom nalezly pár se zápornou hodnotou g_i. U této funkce budeme požadovat, aby dávala vždy kladné hodnoty, čili-že abychom se nevydávali po cestách, které nám nedávají žádný zisk. Tomuto požadavku budeme říkat *pravidlo zisku*.

Nakonec ještě musíme nalézt odpovídající *ukončovací podmínku*, která bude udávat, zda-li má smysl pokračovat v hledání nebo jsme již došli do bodu, kdy k dalšímu zlepšení nedojdeme. Nejtěžší úkol je pak najít dobrou rovnováhu mezi schůdným výpočetním časem a prozkoumáváním dostatku možností.

3.4.1 Keringhan - Lin pro TSP

Nejprve si uvědomme že skutečně lze tuto heuristiku využít pro řešení TSP. Za množinu S můžeme brát všechny hrany úplného grafu nad vstupními městy. Podmínka C kladená na $T \subseteq S$, aby T byla řešením problému, jistě bude, že hrany, které obsahuje, musí tvořit hamiltonovskou kružnici mezi vstupními vrcholy. Funkce f pak bude přiřazovat takovým cestám jejich délku.

Nyní už se podíváme na to, jak konkrétně bude takový algoritmus vypadat pro TSP. Jeho jádrem je sekvenční hledání párů hran, kde první v původním řešení zrušíme a druhou do nového přidáme. Co je myšleno sekvenčním hledání si nejprve ilustrujeme následujícím obrázkem.



Obrázek 12: Sekvenční hledání hran

Sekvenčnost tedy znamená, že zrušíme-li hranu $x_i = (t_i, t_{i+1})$, pak přidaná hrana s ní bude druhý bod sdílet, tedy $y_i = (t_{i+1}, t_{i+2})$, a následně zrušená hrana bude mít zase tvar $x_{i+1} = (t_{i+2}, t_{i+3})$. Poslední přidaná hrana potom bude $y_k = (t_{2i}, t_1)$.

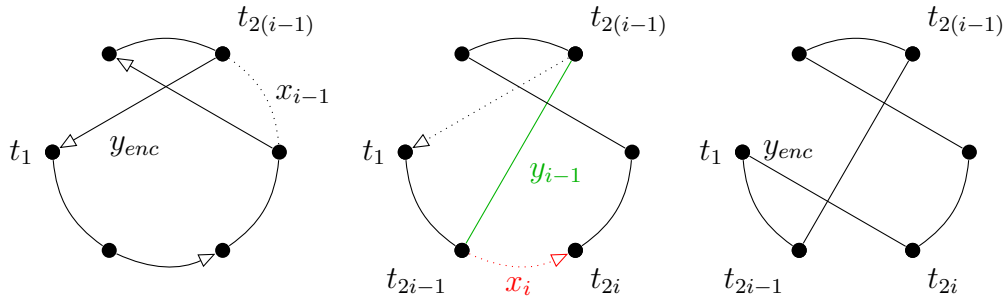
Další podmínky kladené na vybírané hrany jsou již zmíněné *pravidlo disjunkce*, kde $\{x_1, x_2, ...x_k\} \cap \{y_1, y_2, ...y_k\} = \emptyset$, *podmínka proveditelnosti* a námi určené *pravidlo výběru*.

Abychom mohli kdykoli s hledáním skončit, musíme pro každý pár ověřit, že po přidání hrany $y_k = (t_{2i}, t_1)$ nám vznikne znovu cesta. V implementaci knihovny je toto řešeno následovně.

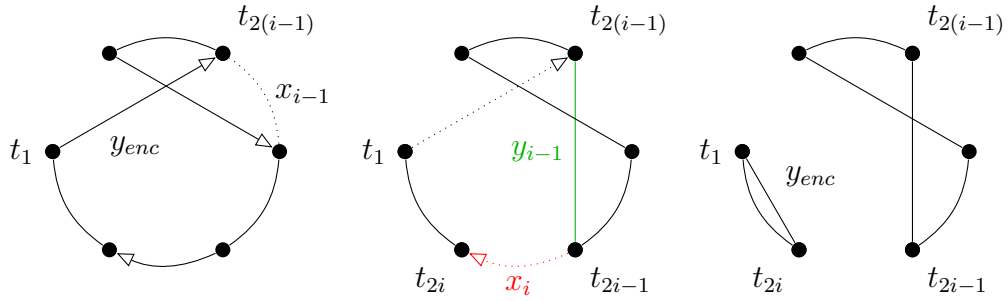
Při každé iteraci je k dispozici cesta, která vznikla záměnou $\{x_1, x_2, ...x_{i-1}\}$ za $\{y_1, y_2, ...y_{enc}\}$. Navíc se ještě udržuje hodnota t_1 (ta se v průběhu nemění) a $t_{2(i-1)}$.

Odstraněním $y_{enc} = (t_1, t_{2(i-1)})$ kružnici otevřeme. Nyní další rušená hrana $x_i = (t_{2i-1}, t_{2i})$ musí mít stejný směr jako hrana $(t_{2(i-1)}, t_1)$. Při obrácené orientaci by došlo k rozdělení grafu na dvě komponenty.

Jelikož klademe podmínku, že hrany jsou hledané sekvenčně, tak přidaná hrana, pak bude mít tvar $y_{i-1} = (t_{2(i-1)}, t_{2i-1})$. Nakonec cestu opět uzavřeme přidáním hrany $y_{enc} = (t_1, t_{2i})$.



Obrázek 13: Pár vyhovující podmínce proveditelnosti



Obrázek 14: Pár nevyhovující podmínce proveditelnosti

Nyní se podíváme na to, jak identifikovat aktuálně nejvýhodnější pár k výměně. Přirozeně se naskýtá možnost vybrat takové hrany x_i, y_i, pro které je $|x_i| - |y_i|$ mezi ostatními páry maximální. Právě tohoto *pravidla výběru* se využívá.

Problémem ale může být to, že v momentě, kdy vybereme takový pár, tak nebere v úvahu délku x_{i+1}. Tohle není ideální, protože x_{i+1} může být výhodná hrana. Navíc se začneme omezovat na lokání informaci o nejbližším vrcholu k t_{2i}. Dobrou vylepšením algoritmu je tedy neposuzovat páry jen na základě rozdílu jejich délek, ale i délky x_{i+1}.

Zbývá nám ještě definovat ziskovou funkci G_i. Snadno se nabízí následná definice

$$G_i = \sum_{j=1}^{i} g_j = \sum_{j=1}^{i} (|x_j| - |y_j|)$$

Nakonec nám ještě musíme určit, za jakých podmínek již se zkracováním cesty přestaneme. Hledání přirozeně přestane, dojdou-li páry, které by vyhovovaly předešle definovaným podmínkám a pravidlům. Pro naši *ukončovací podmínku* si zavedeme proměnnou G^*, která bude vyjadřovat největší nalezené zlepšení

cesty. Uvědomme si, že $G^* \neq G_k$. Nejedná se totiž o zisk z vyměněných párů, ale o skutečné zkrácení cesty. Tuto hodnotu zjistíme pro i-tou iteraci následovně $G_{i-1} + |y_{enc}|$, kde $y_{enc} = (t_{2i}, t_1)$. Čili-že hrana y_{enc} uzavírá cestu, kde je poslední odstraněnou hranou x_i. Samotná ukončovací podmínka pak bude $G_i \leq G^*$.

Nyní už si můžeme ukázat upravenou verzi Keringhan - Lin pro TSP.

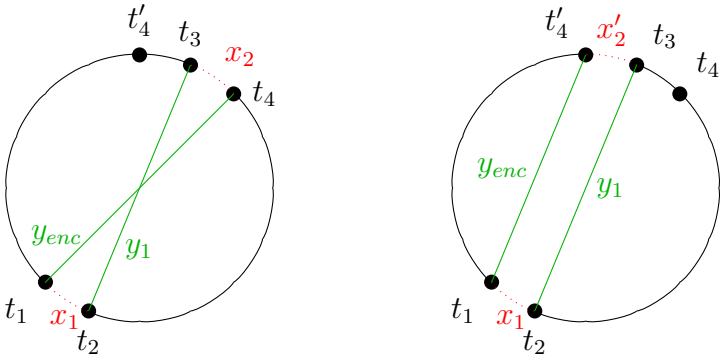
Algorithm 7: Keringhan - Lin algoritmus pro TSP

```
1  T ← pseudorandom solution;
2  T' ← T;
3  k = 0;
4  i = 0;
5  G* = 0 // best improvement;
6  do
7      i ← i + 1;
8      find pair x_i = (t_{2i-1}, t_{2i}), y_i = (t_{2i}, t_{2i+1}) for which:
           a) x_i ∉ {y_1, y_2, ...y_i} and y_i ∉ {x_1, x_2, ...x_i}
           b) T − {x_1, x_2, ...x_i} ∪ {y_1, y_2, ...y_i} is a tour
           c) |x_i| − |y_i| is maximal between such pairs
9      if no x_i, y_i were found then
10         break;
11     if G_{i-1} + c_{t_{2i},t_1} > G* then
12         k ← i;
13         G* = G_{i-1} + c_{t_{2i},t_1};
14     if G_i ≤ G* then
15         break;
16 while G* > 0;
17 T' ← (T − {x_1, x_2, ..., x_k}) ∪ {y_1, y_2, ..., y_k};
18 return T';
```

Co pseudokód neukazuje je omezený backtracking, který se provádí v případě, že $G^* = 0$. V takovém případě se na první a druhé úrovni zkoušejí ostatní možnosti za jednotlivé hrany. Tedy nejdříve budeme zkoušet alternativní y_2 (postupně podle sestupné hodnoty $|x_2| - |y_2|$), ve chvíli, kdy jsou všechny možnosti vyčerpány, se zkusí použít alternativní x_2 (tento případ je složitější). Takto se pokračuje i se všemi y_1, x_1 a t_1. V momentě, kdy nám žádná ze záměn nepřinese zlepšení, algoritmus končí a vrátí upravenou cestu.

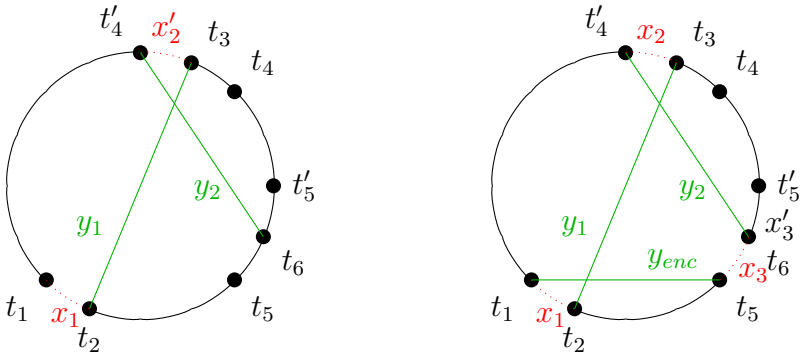
Zřejmě kdybychom prováděli takovýto backtracking na každé úrovni, tak bychom byli schopni nalézt optimální řešení. To by ale trvalo nesmírně dlouho. Najít zlatou střední cestu mezi optimalitou a rychlostí je klíčové. Experimenty ukazují, že nezkoušíme-li všechna y_1, y_2 tak za mírné zhoršení efektivity dostaneme kratší výpočetní čas.

Vraťme se nyní ještě k problému s alternativní volbou x_2. Pro tuto hranu máme jistě dvě volby. Abychom mohli cestu uzavřít musí se t_4 nacházet mezi t_2 a t_3. V případě, že to tak není bychom cestu přidáním y_{enc} místo uzavření rozdělili na dvě komponenty.



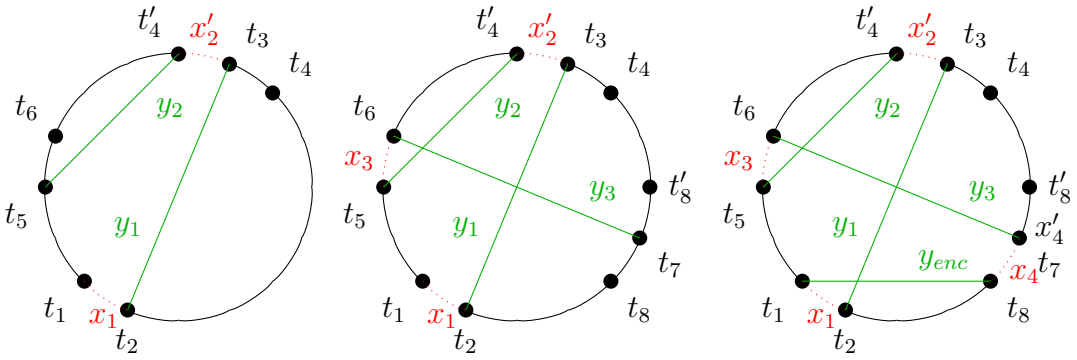
Obrázek 15: Problém alternativního x_2

Abychom i přes to mohli použít druhou volbu x_2 svolíme na chvíli z podmínky proveditelnosti a budeme pokračovat v hledání hran následovně. První možností je vybrat y_2 tak, že t_5 leží mezi t_3 a t_2. t_6 pak může být na libovolné straně od t_5. V tuto chvíli je již možné cestu řádně uzavřít.



Obrázek 16: Alternativní x_2 - první možnost cesty

Druhou možností je zvolit t_5 tak, že leží mezi t'_4 a t_1. t_6 se pak musí nacházet mezi t_6 a t_1. Nakonec t_7 musí být mezi t_3 a t_2 s tím, že volba t_8 závisí, zda-li je delší x_4 nebo x'_4.



Obrázek 17: Alternativní x_2 - druhá možnost cesty

4 Experimenty

Nad probranými algoritmy byly provedené experimenty pro porovnání jejich efektivity. Nejdříve jimi byly zpracovávány náhodně generované euklidovské grafy. Pro množství vrcholů od 5 do 500 bylo testováno 1000 vzorků, výše pak 10 s rozpětím souřadnic (-1000 - 1000). U měření byl zaznamenána vždy průměrná a nejkratší délka cesty, stejně tak průměrný a nejkratší čas.

4.0.1 Testování nearest-addition algoritmu

Počet vrcholů	**Délka**		**Čas**	
	průměrná	**nejkratší**	**průměrný**	**nejkratší**
5	4535,18	1823,87	0.01ms	0.01ms
10	6924,88	3953,35	0.05ms	0.03ms
15	8557,2	4810,07	0.11ms	0.1ms
25	11045,27	7643,03	0.43ms	0.38ms
50	15487,12	12341,39	2.92ms	2.53ms
100	21589,98	18600,28	20.54ms	18.48ms
250	33688,58	30896,78	307.27ms	278.7ms
500				
1000				
2500				
5000				

Tabulka 1: Test náhodně generovaných grafů - nearest-addition algoritmus

sfdsdf

4.0.2 Testování double-tree algoritmu

Počet vrcholů	Délka		Čas	
	průměrná	nejkratší	průměrný	nejkratší
5	4466,56	1823,87	0.04ms	0.02ms
10	6722,22	3953,35	0.14ms	0.08ms
15	8272,35	5144,13	0.2ms	0.16ms
25	10666,78	7051,07	0.58ms	0.46ms
50	14862,38	11762,88	3.21ms	2.71ms
100	20664,7	17151,54	21.14ms	18.87ms
250	32247,16	28819,29	309.17ms	280,73ms
500				
1000				
2500				
5000				

Tabulka 2: Test náhodně generovaných grafů - double-tree algoritmus

4.0.3 Testování Christofidesova algoritmu

Počet vrcholů	Délka		Čas	
	průměrná	nejkratší	průměrný	nejkratší
5	4311,98	1823,87	0.04m	0.03ms
10	6058,89	3953,35	0.16ms	0.08ms
15	7259,48	4726,46	0.29ms	0.18ms
25	9225,93	6860,62	0.96ms	0.66ms
50	12594,04	10650,56	5.89ms	4.54ms
100	17280,01	15277,42	39.56ms	31.9ms
250	26585,91	24564,74	576.95ms	500.34ms
500				
1000				
2500				
5000				

Tabulka 3: Test náhodně generovaných grafů - Christofidesův algoritmus

4.0.4 Testování Kernighan - Lin algoritmu

Počet vrcholů	Délka		Čas	
	průměrná	nejkratší	průměrný	nejkratší
5	4220,89	1816,18	0.08ms	0.02ms
10	5762,91	3768,08	0.56ms	0.11ms
15	6796,69	4417,87	1.03ms	0.36ms
25	8524,89	6338,58	3.36ms	1.36ms
50	11623,58	9971,3	17.69ms	6.83ms
100	16194,06	14228,2	82.59ms	45.14ms
250	24709,99	23283,12	673.13ms	419.97ms
500				
1000				
2500				
5000				

Tabulka 4: Test náhodně generovaných grafů - Kernighan - Lin algoritmus

Počet vrcholů	Délka		Čas	
	průměrná	nejkratší	průměrný	nejkratší
5	4220,76	1816,18	0.07ms	0.02ms
10	5766,36	3768,08	0.46ms	0.11ms
15	6811,56	4417,87	0.76ms	0.3ms
25	8573,7	6447,74	2.34ms	0.92ms
50	11739,94	9998,61	11.86ms	4.89ms
100	16194,06	14336,08	55.18ms	27.6ms
250	25072,9	23064,13	453.65ms	268.31ms
500				
1000				
2500				
5000				

Tabulka 5: Test náhodně generovaných grafů - Kernighan - Lin algoritmus s omezeným backtrackingem

Díky tomu, že je TSP tak řešeným problémem, je k dispozici spousta grafů se známými optimálními cestami. Ty se jistě hodí k zjištění, jak si na tom algoritmy vedou, co se aproximačního faktoru jeho řešení týče.

5 Knihovna

Program umožňuje dostat jako vstup soubor, složku nebo hodnoty pro vygenerování grafu.
Uživatel si může zvolit algoritmy, které chce porovnávat a zda-li chce stopovat délku jejich trvání. U náhodně generovaného vstupu se navíc dá volit rozsah souřadnic vrcholů grafu. Navíc lze zvolit, jestli je žádané dostat výsledky pro každý graf zvlášť nebo pouze nejlepší a průměrné hodnoty.
V případě vstupu ze souboru (případně složky) je možné zvolit i soubor (složku) s optimálním řešením. V tom případě pak bude u výsledků zobrazená i hodnota *ratio* vyjadřující poměr délky cesty nalezené algoritmem a optimální cesty.
Výsledky je možné uložit do zvolené složky v TSPLib formátu. V případě náhodně generovaného grafu se zároveň vytvoří i soubor obsahující graf.

Závěr

Závěr práce v „českém“ jazyce.

Conclusions

Thesis conclusions in “English”.