

Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Algoritmy pro problém obchodního cestujícího



2023

Vedoucí práce:
Mgr. Petr Osička, Ph.D.

Kateřina Sáňková

Studijní program: Informatika,
Specializace: Programování a vývoj
software

Bibliografické údaje

Autor: Kateřina Sáňková
Název práce: Algoritmy pro problém obchodního cestujícího
Typ práce: bakalářská práce
Pracoviště: Katedra informatiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Rok obhajoby: 2023
Studijní program: Informatika, Specializace: Programování a vývoj software
Vedoucí práce: Mgr. Petr Osička, Ph.D.
Počet stran: 20
Přílohy: 1 CD/DVD
Jazyk práce: český

Bibliographic info

Author: Kateřina Sáňková
Title: Algorithms for the travelling salesman problem
Thesis type: bachelor thesis
Department: Department of Computer Science, Faculty of Science, Palacký University Olomouc
Year of defense: 2023
Study program: Computer Science, Specialization: Programming and Software Development
Supervisor: Mgr. Petr Osička, Ph.D.
Page count: 20
Supplements: 1 CD/DVD
Thesis language: Czech

Anotace

Anotace - jeden odstavec

Synopsis

Anotace anglicky

Klíčová slova: problém obchodního cestujícího;

Keywords: travelling salesman problem;

Děkuji, děkuji, děkuji.

Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci včetně příloh vypracoval/a samostatně a za použití pouze zdrojů citovaných v textu práce a uvedených v seznamu literatury.

datum odevzdání práce

podpis autora

Obsah

1	Teorie	7
1.1	Graf	7
1.1.1	Stupeň vrcholu	7
1.1.2	Hranové ohodnocení	7
1.1.3	Úplný graf	7
1.1.4	Kostra grafu	8
1.2	Cestování v grafech	8
2	Problém obchodního cestujícího	10
2.1	Složitost	10
2.2	Metrický problém obchodního cestujícího	11
2.3	Euklidovský problém obchodního cestujícího	11
3	Algoritmy	12
3.1	Nearest addition	12
3.1.1	Aproximační faktor	12
3.2	Double-tree	14
3.2.1	Aproximační faktor	15
3.3	Christofides'	15
3.3.1	Aproximační faktor	16
3.4	Keringhan - Lin	17
	Závěr	18
	Conclusions	19
	Seznam zkratek	20

Seznam tabulek

1 Teorie

Problém obchodního cestujícího je úzce spjatý s *teorií grafů* a proto je potřeba si na úvod zavést některé z jejich základních pojmů.

1.1 Graf

Graf je jedna ze základních reprezentací prvků množiny objektů a jejich vzájemných propojení. Takovým objektům budeme říkat *vrcholy* (někdy také *uzly*) a propojením *hrany*. Uvažujeme-li orientaci hran, pak říkáme, že je graf *orientovaný*, jinak *neorientovaný*.

Definice 1 (Neorientovaný graf)

Neorientovaný graf je dvojice $\langle V, E \rangle$, kde V je neprázdňá množina vrcholů a $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ je množina (*neorientovaných*) hran.

Definice 2 (Orientovaný graf)

Orientovaný graf je dvojice $\langle V, E \rangle$, kde V je neprázdňá množina vrcholů a $E \subseteq \{\langle u, v \rangle \mid u, v \in V\}$ je množina (*orientovaných*) hran.

u, v nazýváme *koncové uzly* hrany.

1.1.1 Stupeň vrcholu

V některých situacích nás bude zajímat počet hran, kterým je jistý uzel koncovým. Tomuto číslu budeme říkat *stupeň vrcholu* u a budeme ho značit $\deg(u)$. Důležité bude také následující tvrzení.

Věta 3

V každém grafu $G = \langle V, E \rangle$ platí, že $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

1.1.2 Hranové ohodnocení

U problému obchodního cestujícího chceme, aby hrany vstupních grafů měly nějakou váhu. Tu jim přiřazuje tzv. *hranové ohodnocení* definované následovně:

$$w : E \rightarrow D$$

kde w je *hranové ohodnocení*, E je množina hran příslušného grafu a D je nějaká množina hodnot.

1.1.3 Úplný graf

V problému se také bude počítat s tím, že na vstupu bude *úplný* graf.

Definice 4

Neorientovaný graf nazýváme *úplný*, pokud platí, že každé dva jeho vrcholy jsou spojeny hranou.

1.1.4 Kostra grafu

Některé z algoritmů v knihovně jsou založené na hledání tzv. *minimální kostry grafu*. Před zavedením tohoto pojmu je ještě nutné si definovat, co je to *souvislý graf* a *podgraf* grafu.

Definice 5 (Souvislý graf)

Neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$ nazýváme *souvislý*, pokud $\forall u, v \in V$ existuje sled (viz později) z u do v .

Definice 6 (Podgraf)

Graf $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ nazýváme *podgraf* grafu $G = \langle V, E \rangle$, právě když $V_2 \subseteq V$ a $E_2 \subseteq E$.

Definice 7 (Kostra grafu)

Kostra neorientovaného grafu je jeho souvislý podgraf, který obsahuje všechny jeho vrcholy a nevyskytují se v něm žádné kružnice (viz později).

Pokud mají hrany původního grafu přiřazené váhy příslušným hranovým ohodnocením w , potom můžeme uvažovat o *minimální kostře grafu*. Tou budeme rozumět právě takovou kostru $MSP = \langle V, E' \rangle$, která bude mít mezi ostatními minimální součet $\sum_{e \in E'} w(e)$.

1.2 Cestování v grafech

Důležitou oblastí práce s grafy je cestování v nich. Vychází se z toho, že se z jednoho uzlu můžeme přemístit k druhé, právě když mezi nimi existuje hrana (v případě orientovaných grafů musí mít ještě hrana správný směr). Jednou z úloh o cestování je právě problém obchodního cestujícího.

Základním pojmem, od kterého budeme odvozovat další, je *sled*.

Definice 8

Sledem v grafu $G = \langle V, E \rangle$ rozumíme posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$, kde $\forall i \in \{0, \dots, n\} v_i \in V$ a $\forall j \in \{1, \dots, n\} e_j \in E$.

Sled nazýváme

- *uzavřený*, pokud $v_0 = v_n$
- *tah*, pokud $\forall k, l \in \{1, \dots, n\}$, kde $k \neq l$, $e_k \neq e_l$ (neopakují se hrany)
- *cesta*, pokud $\forall k, l \in \{0, \dots, n\}$, kde $k \neq l$, $v_k \neq v_l$ (neopakují se vrcholy)

- *kružnice*, pokud je *cestou*, ale $v_0 = v_n$

Speciální druh tahu je tzv. *eulerovský tah*. Pro něj platí, že vede přes všechny vrcholy a každá hrana se v něm vyskytuje právě jednou.

Věta 9

Pokud je neorientovaný graf souvislý a všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň, pak v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Pro TSP je ještě klíčový termín *hamiltonovská kružnice*. Tou rozumíme takovou kružnici v grafu, která vede přes všechny jeho vrcholy.

2 Problém obchodního cestujícího

Problém obchodního cestujícího (TSP - *Travelling Salesman Problem*) je jedním z nejstudovanějších kombinatorických úloh. Podstatou je mezi zadanými městy nalézt cestu, která začíná i končí ve stejném místě a zbytek měst navštíví právě jedenkrát. Jelikož seznam měst můžeme brát jako množinu vrcholů grafu, můžeme o TSP uvažovat jako o úloze o cestování v grafu. Cestou, kterou hledáme je pak *hamiltonovská kružnice*.

Formálně bychom mohli TSP definovat následně:

Definice 10 (Problém obchodního cestujícího)

NÁZEV: TSP

VSTUP: Úplný neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$,

hranové ohodnocení $c : E \leftarrow R^+$

VÝSTUP: Hamiltonovská kružnice v G minimální délky

Ceny hran budeme nazývat také *délky* a pro jednoduchost budeme místo $c(\{u, v\})$ psát $c_{u,v}$.

TSP patří do skupiny tzv. *optimalizačních problémů*. U těchto problémů existuje pro každý vstup několik přípustných řešení a máme zadanou funkci f přiřazující každému z těchto řešení číselnou hodnotu. Úlohou je pak najít pro vstup I některé z řešení, jehož hodnota $f(I)$ je mezi všemi minimální, případně maximální. Zde bude funkce přiřazovat každé nalezené cestě součet délek jejich hran daných ohodnocením c .

2.1 Složitost

Jedním z důvodů, proč je TSP tak zkoumaným problémem, je jeho složitost. Abychom našli správné (optimální) řešení, museli bychom projít všechna přípustná řešení a porovnat je mezi sebou. Takových řešení je ale vůči počtu měst exponenciálně. Pokud bychom ale měli k dispozici nedeterministický stroj, pak bychom se mohli spolehnout na to, že vždy najde nejkratší cestu hned. Samotné nalezení cesty je pak zvládnutelné v polynomiálním čase a můžeme o TSP říct, že je to nedeterministický polynomiální problém (*NP - problém*). Tohle platí i pro jeho *rozhodovací verzi*.

Rozhodovací problémy se vyznačují tím, že jako výstupem je pouze *Ano* nebo *Ne*. TSP můžeme upravit následovně.

Definice 11 (Rozhodovací verze TSP)

NÁZEV: TSP

VSTUP: Úplný neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$,

hranové ohodnocení $c : E \leftarrow R^+$,
číslo k

OTÁZKA: Existuje v G hamiltonovská kružnice délky nejvýš k ?

Tato verze navíc tu vlastnost, že libovolný rozhodovací NP problém je na něj polynomiálně redukovatelný. Čili pro každý vstup problému můžeme v polynomiálním čase najít vstup pro TSP, který bude vracet stejnou odpověď, jakou by vrátil původní problém na původní vstup. Problémům s touto vlastností se říká *NP-těžké*. Pokud jsou navíc NP, říká se jim *NP-úplné*. Tyto problémy jsou důležité, protože kdyby se podařilo najít algoritmus řešící kterýkoli z nich v polynomiálním čase (takové problémy považujeme za prakticky zvládnutelné), pak bychom jistě zvládli vyřešit i všechny NP problémy v polynomiálním čase.

2.2 Metrický problém obchodního cestujícího

TSP může být žádané také omezit jiným způsobem. Pokud přidáme na hranové ohodnocení podmínku, že musí platit trojúhelníková nerovnost, tedy $\forall u, v, w \in V$ platí

$$c_{u,v} + c_{v,w} \geq c_{w,u}$$

pak dostaneme *metrický TSP*.

2.3 Euklidovský problém obchodního cestujícího

Přísnější podmínkou pak může být definice délky jako euklidovské vzdálenosti. Ta je pro vrcholy $u, v \in V$ se souřadnicemi $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ definována

$$c_{u,v} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}$$

3 Algoritmy

Jak bylo již zmíněno, TSP je řešitelný v polynomiálním čase pouze nedeterministickými stroji. U deterministických (klasických) strojů je složitost exponenciální. Z toho ale vyplývá, že bychom se pro větší vstupy nemuseli v reálném čase dočkat odpovědi. Z tohoto důvodu se pro hledání řešení používají tzv. *heuristiky*. Při jejich použití se nemůžeme spolehnout, že najdeme optimální řešení. Jsme ale schopni nalézt přibližné řešení v reálném čase.

U některých heuristik se navíc můžeme bavit o *aproximačním faktoru*. Mějme libovolný vstup problému I , pro který je cena optimálního řešení OPT a heuristiku s aproximačním faktorem α . Potom se můžeme spolehnout, že cena řešení, které dostaneme použitím dané heuristiky na I bude při nejhorším $\alpha * OPT$.

3.1 Nearest addition

Tento algoritmus spadá do skupiny hladových algoritmů a je poměrně intuitivní. Vychází z myšlenky, že k vytvářené cestě vždy přidáme nejbližší nenavštívené město. Nejprve najdeme taková dvě města i, j , která jsou si v grafu nejbližší a vytvoříme cestu $path$, která povede z i do j a zpět. Následuje cyklus, ve kterém budeme hledat takovou hranu (k, l) , že $k \in path$, $l \notin path$ a c_{kl} je všemi takovými hranami minimální. Předpokládejme, že město m je aktuálně v $path$ za k . Vložíme l do $path$ mezi k a m a následuje další iterace. Cyklus skončí v momentu, kdy jsme navštívili všechny města.

Algorithm 1: Nearest addition algorithm

```
vytvoř seznam  $path$ ;  
vytvoř seznam  $unvisitedCities$ ;  
 $unvisitedCities \leftarrow nodes$ ;  
 $(i, j) \leftarrow$  nejkratší hrana v grafu;  
 $path.Add(i, j, i)$ ;  
 $unvisitedCities.Remove(i, j)$ ;  
while  $unvisitedCities.Count > 0$  do  
     $(k, l) \leftarrow$  nejkratší hrana v grafu, kde  $k \in path$  a  $l \in unvisitedCities$ ;  
     $path.AddAfter(k, l)$ ;  
     $unvisitedCities.Remove(l)$ ;  
return  $path$ 
```

3.1.1 Aproximační faktor

Věta 12

Nearest addition je 2-aproximační algoritmus.

Abychom si tvrzení dokázali, musíme si nejdříve ukázat vztah k Primově algoritmu, který hledá minimální kostru grafu.

Algorithm 2: Primův algoritmus

```
vytvoř seznam spanningTree;  
vytvoř seznam unvisitedCities;  
unvisitedCities  $\leftarrow$  nodes;  
(i, j)  $\leftarrow$  nejkratší hrana v grafu;  
spanningTree.Add((i, j));  
unvisitedCities.Remove(i, j);  
while unvisitedCities.Count > 0 do  
    (k, l)  $\leftarrow$  nejkratší hrana v grafu, kde k  $\notin$  unvisitedCities a  
        l  $\in$  unvisitedCities;  
    spanningTree.Add((k, l));  
    unvisitedCities.Remove(l);  
return spanningTree
```

Z pseudokódu je jasné, že hrany nalezené Primovým algoritmem i Nearest addition algoritmem budou totožné.

Lemma 13

Pro libovolný vstup TSP je cena jeho optimální cesty alespoň tak vysoká, jako je cena minimální kostry pro tentýž vstup.

Důkaz

Vezmeme optimální cestu pro libovolný vstup s více než jedním vrcholem a odstraníme některou z hran. Takto vzniklý graf jistě nebude mít vyšší cenu než optimální cesta. Navíc bude také kostrou původního vstupu. To si můžeme snadno ověřit. Graf stále obsahuje všechny vrcholy, jeho souvislost jsme nijak neporušili a jedinou kružnici kterou obsahoval jsme otevřeli odstraněním jedné z hran.

To, že tato kostra nemůže mít nižší cenu než minimální kostra, je triviální a lemma jsme dokázali. \square

Věta 14

Nearest addition algoritmus pro metrický problém obchodního cestujícího je 2-aproximační algoritmus.

Důkaz

****to se musí prepsat*** Mějme podmnožiny V S_2, S_3, \dots, S_n , kde S_2 je množina vrcholů určených první iterací, S_3 druhou atd. Jistě platí, že $|S_l| = l$ – začínáme s dvěma městy a poté přidáváme v každé iteraci jedno další. Dále řekněme, že $F = \{(i_2, j_2), (i_3, j_3), \dots, (i_n, j_n)\}$ je množina nejkratších hran určených každým průchodem cyklu. Pro hranu (i_l, j_l) platí, že $i_l \in S_{l-1}$, pro $l \in 3, \dots, n$. Již bylo zmíněno, že graf $\langle V, F \rangle$ je minimální kostra vstupu a optimální cena cesty, označme OPT , nemůže stát méně, tedy $OPT \geq \sum_{l=2}^n c_{i_l j_l}$.

Uvědomme si, že cena cesty pro první dva uzly i_2 a j_2 je přesně $2c_{i_2j_2}$, protože tuto hranu vkládáme na začátku do cesty dvakrát.

Když vkládáme nově určené město j do cesty mezi i a k , tak vlastně hrany (i, j) a (j, k) přidáváme a (i, k) odstraňujeme. Tedy celková cesta se může nejvíce prodloužit o $c_{ij} + c_{jk} - c_{ik}$. Z trojúhelníkové nerovnosti snadno odvodíme, že $c_{jk} - c_{ik} \leq c_{ij}$. Rozdíl cen hran c_{jk} a c_{ik} je tedy shora ohraničený cenou c_{ij} . Dosadíme-li tuto hodnotu do předchozí rovnice, zjistíme, že celková cesta se může v nejhorším případě prodloužit o $2c_{jk}$. Celková cesta nalezená Nearest addition algoritmem bude tedy maximálně $2 \sum_{l=2}^n c_{i_lj_l}$.

Upravíme-li poslední nerovnost, dostaneme $\sum_{l=2}^n c_{i_lj_l} \leq 2OPT$.

To znamená, že naše nalezená cesta bude v nejhorším případě stát dvakrát tolik, co optimální cesta pro stejný vstup, což je přesně to, co jsme chtěli dokázat. \square

PŘÍKLAD 15

3.2 Double-tree

Jádrem algoritmu je zdvojení hran minimální kostry vstupního grafu a následné nalezení uzavřeného eulerovského tahu. To, že se v takovémto grafu takový tah nachází je snadné dokázat. Z Věty xxx víme, že stačí, aby byl graf spojitý a všechny jeho uzly měly sudý stupeň. Zdvojíme-li každou hranu, vycházející z libovolného uzlu, pak bude mít jistě uzel sudý stupeň. Jelikož vycházíme z kostry grafu, spojitost je zřejmá.

K vytvoření cesty už potřebujeme pouze zaručit, že nenavštívíme žádný uzel vícekrát. Toho dosáhneme pomocí zkracování. Máme-li eulerovský průchod $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_0)$, pak vezmeme posloupnost i_0, i_1, \dots, i_k a ponecháme pro každý uzel pouze jeho první výskyt. Nakonec ještě vraťme i_0 na konec cesty.

Algorithm 3: Double-tree algoritmus

Input: G

$doubleTree \leftarrow FindMinimalSpanningTree(G);$

foreach $edge \in doubleTree$ **do**

$doubleTree.Add(edge);$

$eulerCircuit \leftarrow FindEulerCircuit(doubleTree);$

vytvoř seznam $path$;

foreach $node \in eulerCircuit$ **do**

if $node \notin path$ **then**

$path.Add(node);$

return $path$

3.2.1 Aproximační faktor

Věta 16

DoubleTree je 2-aproximační algoritmus.

Z Lemma 13 víme, že optimální cesta stojí alespoň tolik, co minimální kostra. Jelikož každou její hranu máme dvakrát, pak tato cena bude dvojnásobek její ceny.

Při hledání eulerovského průchodu pouze hrany seřazujeme.

Zbývá pouze zkracování. Zde opět vycházíme z trojúhelníkové nerovnosti. Uvažujeme, že i, j, k jsou po sobě jdoucí města a j jsme již navštívili, tedy bychom je měli přeskočit. Je zřejmé, že $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$, což dokazuje, cena tohoto úseku zůstane při nejhorším stejná.

PŘÍKLAD 17

3.3 Christofides'

Christofidesův algoritmus je velice podobný Double-tree algoritmu. Opět začneme s minimální kostrou vstupního grafu. Existenci eulerovského průchodu ale zajistíme chytřeji. Připomeňme si, že eulerovský průchod se v grafu nachází právě tehdy, když mají všechny jeho stupně sudý stupeň. V Double-tree algoritmu jsme tuto podmínku splnili tak, že jsme zdvojili každou hranu kostry, to je ovšem redundantní. Postačí, když spárujeme uzly, které v ní mají lichý stupeň.

Mějme úplný graf, jehož množinou vrcholů budou právě ty vrcholy minimální kostry s lichým stupněm, označme ji O . Z množiny jeho hran se budeme snažit vybrat takovou podmnožinu, ve které bude $\forall v \in O$ právě jedna hrana, pro kterou je v koncový uzel. Taková množina se nazývá *perfektní párování*. Takových množin může být více, přirozeně budeme hledat takovou z nich, která budeme mít minimální součet délek všech svých hran.

Uvědomme si ale, že aby takové párování pro O existovalo, tak musí být $|O|$ sudé. Víme, že součet stupňů všech uzlů v neorientovaném grafu je sudé číslo (viz Věta 3). Označme si množinu všech vrcholů grafu V a množinu vrcholů se sudým stupněm E . Pak $\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in E} \deg(v) + \sum_{v \in O} \deg(v)$. $\sum_{v \in V} \deg(v)$ je ale sudé a to samé jistě platí pro $\sum_{v \in E}$, tedy $\sum_{v \in O} \deg(v)$ musí být sudý. Vzhledem k tomu, že každý vrchol přispívá do součtu lichým číslem, pak jejich počet musí být sudý.

Přidáním minimálního perfektního párování k minimální kostře zvýšíme stupeň každého vrcholu s lichým stupněm právě o jedna, tudíž zajistíme, že všechny uzly budou mít sudý stupeň a tudíž v grafu existuje uzavřený eulerovský tah. Po jeho nalezení už jen zkracujeme cestu stejně jako u Double-tree algoritmu.

Algorithm 4: Christofidesův algoritmus

Input: G

```
spanningTree  $\leftarrow$  FindMinimalSpanningTree( $G$ );  
oddDegreeNodes  $\leftarrow$  FindNodesWithOddDegrees(spanningTree);  
perfectMatching  $\leftarrow$  FindPerfectMatching(oddDegreeNodes);  
eulerCircuit  $\leftarrow$  FindEulerCircuit(doubleTree + perfectMatching);  
vytvoř seznam  $path$ ;  
foreach  $node \in eulerCircuit$  do  
    if  $node \notin path$  then  
         $path.Add(node)$ ;  
return  $path$ 
```

3.3.1 Aproximační faktor

Věta 18

Christofidesův algoritmus je $3/2$ -aproximační algoritmus.

nějaké obrázky

Nejdřív si musíme rozmyslet, co vlastně potřebujeme dokázat. Potřebujeme, aby eulerovský průchod měl při nejhorším délku $\frac{3}{2}OPT$. Z lemmatu 13 víme, že minimální kostra, která je v něm obsažená, má v nejhorším případě cenu OPT . Stačí tedy dokázat, že perfektní párování má maximálně cenu $\frac{1}{2}OPT$.

Pracujeme s množinou lichých uzlů v MST O . Budeme v ní teď hledat cestu. Vydeme-li z nejkratší cesty nad všemi vrcholy vstupu, pak je zřejmé, že její délka bude OPT . Tuto cestu teď budeme pouze zkracovat. Uvažujeme-li dvě města i a j , pro která platí, že na cestě mezi nimi jsou pouze města nenáležící do O , pak je jisté můžeme vynechat a z trojúhelníkové nerovnosti víme, že v nejhorším případě bude hrana (i, j) stejně dlouhá jako původní cesta. V nejhorším případě tedy po tomto zkracování zůstane délka cesty rovna OPT .

Nyní začneme střídavě obarvovat hrany nalezené cesty, řekněme modrou a červenou. Množina červených i množina modrých hran je perfektním párováním na O , platí totiž, že pokrývají všechny vrcholy a žádné dvě hrany nesdílí vrchol. Víme, že dohromady množiny dávají OPT , pak jistě jedna z množin bude mít délku menší nebo rovnu $\frac{1}{2}OPT$, což jsme chtěli dokázat.

Z analýz aproximačních faktorů Christofidesova a Double-tree algoritmu ještě vyplývá následující tvrzení.

Lemma 19

Sestrojíme-li pro vstup eulerovský podgraf délky $\alpha \cdot OPT$, pak můžeme odvodit α -aproximační algoritmus.

PŘÍKLAD 20

3.4 Keringhan - Lin

Závěr

Závěr práce v „českém“ jazyce.

Conclusions

Thesis conclusions in “English”.

