

矩陣相乘的前世今生

B1029068 梁有辰

數學史大約已經認定英國數學家凱萊(Arthur Cayley)是開創矩陣理論的人。1857 年，凱萊發表一篇被後世公認為近代矩陣理論和線性代數基石的論文〈矩陣理論備忘錄〉(*A Memoir on the Theory of Matrices*)，研究了矩陣的運算律、矩陣的逆以及轉置和特徵多項式方程。他將矩陣從行列式抽離出來，視之為另一個數學物件，並且定義完備的矩陣代數運算。這段歷史顯示矩陣乘法——矩陣理論中最重要的一個代數運算——絕對不是如數學課本所述那般理所當然。

正如現在大家所知，矩陣是以矩形排列的一組數。雖說是「矩」陣，但早期的數學家其實僅討論「正方形」矩陣，也就是 $n \times n$ 矩陣或 n 階方陣，簡稱方陣。兩個矩陣的乘法為，僅當第一個矩陣 A 的列數和另一個矩陣 B 的行數相等時才能定義。如 A 是 $m \times n$ 矩陣和 B 是 $n \times p$ 矩陣，它們的乘積 C 是一個 $m \times p$ 矩陣。

凱萊曾經指出他研究方陣的動機並非來自於四元數，而是為了簡化「線性變換」的描述和書寫，在方陣乘法方面來自於兩次線性變換的合成。

除此之外，還有一位數學家，柯西早在 1812 年就考慮過行列式乘積相等的算法，用方陣符號來說，就是 $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ，其中 AB 就是方陣的乘積。那是為了擴展行列式性質而做的純數學研究。然而，雖然柯西的工作較早，但是因為缺乏應用的動機而不宜當作引介方陣的教材。

經過研究後，我才發現原來矩陣相乘也有這麼一段艱難坎坷的路，也更了解有關於矩陣的歷史，以前都只知道怎麼計算，卻不知道背後有如此淵博的理論及數學家們的智慧和心血。如今，這個觀念已應用在多個領域及技術上(例如應用數學、物理學、工程學等)，讓我們的生活變得更便利，雖然我要學習的東西變多了，但還是感謝他們。

參考資料：

(<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=32410>)

(<https://ccjou.wordpress.com/2010/06/18/%E7%B7%9A%E6%80%A7%E4%BB%A3%E6%95%B8%E7%9A%84%E7%AC%AC%E4%B8%80%E5%A0%82%E8%AA%B2-%E7%9F%A9%E9%99%A3%E4%B9%98%E6%B3%95%E7%9A%84%E5%AE%9A%E7%BE%A9/>)