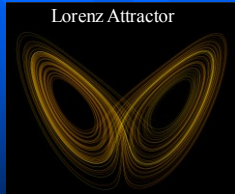


初识混沌 (Chaos)



巴西原始森林里的一只蝴蝶扇动翅膀，也有可能几个月之后在美国的德克萨斯州引起一场风暴。
Edward Lorenz

提纲

- I 混沌概述
- II 通向混沌的道路
- III 混沌的图形描述方法
- IV 混沌运动的基本特征
- V 混沌研究的应用

I 混沌概述

二十世纪物理学最重大的三个理论是：

相对论、量子论和混沌论！

- 相对论否定了时间、空间的绝对性，解决了高速运动问题；
- 量子论否定了粒子与波的绝对性，解决了微观运动的问题；
- 混沌论则否定了因果关系的绝对性，解决了**非线性系统的动力学**问题。

物理学从决定论占统治地位走向决定论、随机论、混沌论三分天下的局面，这是人类对自然规律认识的又一个重大飞跃。

I 混沌概述

经典力学中的机械决定论及其成就：

按牛顿定律列出体系所遵从的运动微分方程，求出解析函数表示的运动学方程，从给定的初始运动状态就能唯一的确定体系在其它任一时刻的运动状态。

单摆的小角度摆动、利用牛顿定律可以精确预言何时发生日蚀，慧星何时来临，太空飞船如何飞行等等，并发现海王星。

拉普拉斯【法】：**给定宇宙的初始条件我就能预言未来！**

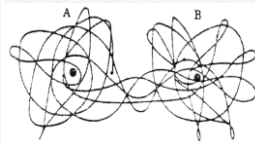
I 混沌概述

第一个怀疑机械决定论的人是法国的彭加勒：

19世纪，瑞典国王悬赏奖金：第一个能一劳永逸证明太阳系在整体上是完全稳定的人。

“三体问题”：

- 具有无法描写的复杂性（内在随机性）；
- 具有初值敏感性。



小行星的运动轨道

我们相信下面这句话比机械因果决定论更接近真理：

“世界上有一件事是确定的，那就是世界是不确定性的”。

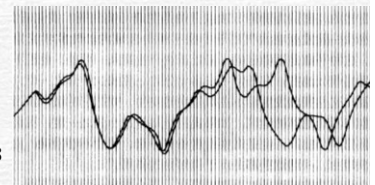
II 通向混沌的道路 几个混沌的实例

1. 气象模型与混沌

1961年，美国气象学家洛伦兹 (E. N. Lorenz) 建立气象方程，并用计算机模拟预报天气

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x - \sigma y \\ \dot{y} = \gamma x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \rho z \end{cases}$$

$$\rho = 8/3; \sigma = 3; \gamma = 28$$



显示了初值敏感性（初值分别为0.506, 0.506127）

II 通向混沌的道路 几个混沌的实例

2. 虫口模型与混沌

某类群体虫子每年繁殖一次,考虑到自然界存在着虫子天敌和有限的食物等因素,第 $n+1$ 年和第 n 年的虫子数满足迭代方程——逻辑斯蒂映射 (Logistic map):

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

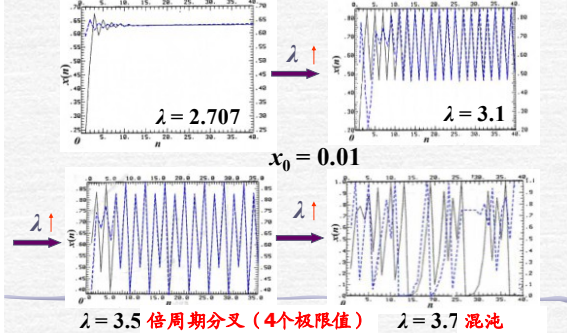
虫子的相对数目 $0 < x_n \leq 1$

虫子的增长率 $1 < \lambda \leq 4$

② 已知第一年的虫子数量,以后的情况将会怎样?

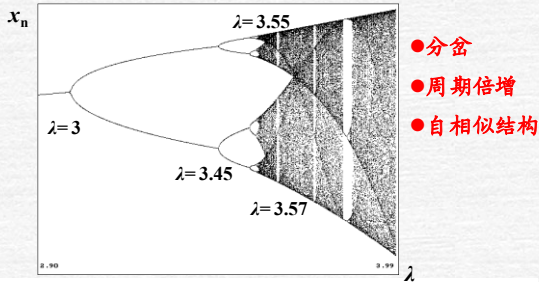
II 通向混沌的道路 几个混沌的实例

2. 虫口模型与混沌 周期倍增与分岔 (2个极限值)



II 通向混沌的道路 几个混沌的实例

2. 虫口模型与混沌



结论: 体系按照非线性方程演化时, 当其参量取某些值时, 可产生混沌。

II 通向混沌的道路 几个混沌的实例

3. 从单摆走向混沌

有阻尼有驱动的大角度单摆

$$ml\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + mg\sin\theta = F\cos\omega_D t$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} \quad \ddot{\theta} + \frac{\gamma}{m}\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = \frac{F}{ml}\cos\omega_D t$$

$$\text{无量纲化} \quad \ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = f\cos\omega_D t$$

非线性方程

III 混沌的图形描述方法

1. 相图方法

通常把 $(\theta, \dot{\theta})$ 平面称为相平面, 单摆的一个运动状态, 对应相平面上的一个点, 当单摆振动时, 相点就在相平面上运动。

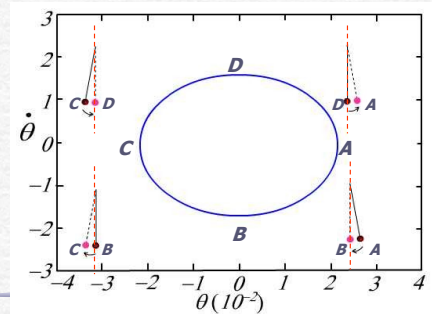
(1) 无阻尼无驱动的单摆 (小角度单摆, 线性方程)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \xrightarrow{\text{积分}} \quad \omega_0^2 \theta^2 + \dot{\theta}^2 = C$$

相图为椭圆方程

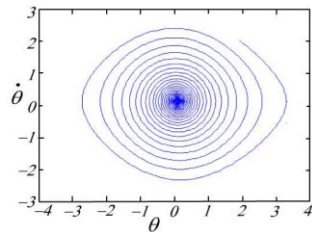
III 混沌的图形描述方法

小角度单摆的相图



III 混沌的图形描述方法

(2) 有阻尼无驱动的单摆 $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$



相迹不断收缩
至点 $(0, 0)$
吸引子

单摆运动表现为：摆幅从起始位置开始不断减小，最后停留在竖直平衡位置处。

III 混沌的图形描述方法

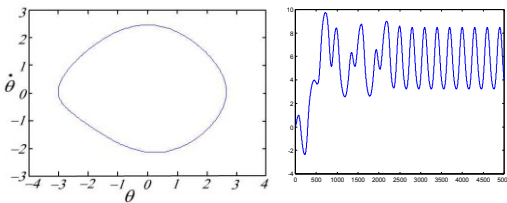
(3) 有阻尼有驱动的单摆

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = f \cos \omega_D t$$

利用RK4法对上述方程进行数值计算，画出相图，利用此相图研究单摆的非线性运动的特征及混沌现象的产生。

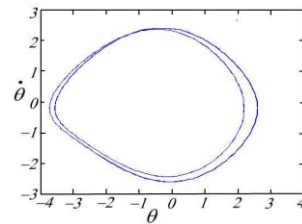
参量值： $\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f$ 则由小到大取一系列数值

$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.047$



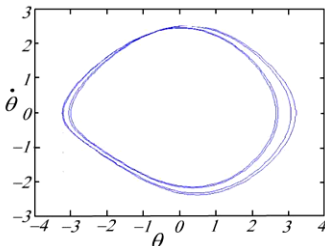
相图是闭环，单摆周期摆动
运动周期与驱动力的周期相同

$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.07$



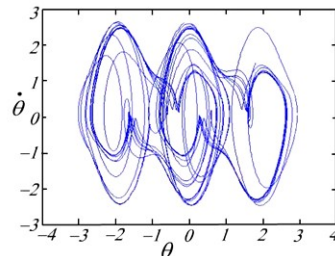
单摆的摆动在两个驱动力周期内才恢复原状态，其频率为驱动频率的一半，称为**二分频**。

$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.081$



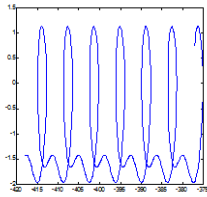
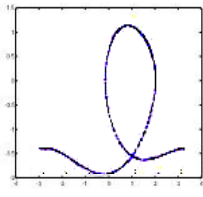
随着 f 的增加，单摆运动又出现**四分频**、**八分频**...

$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.15$



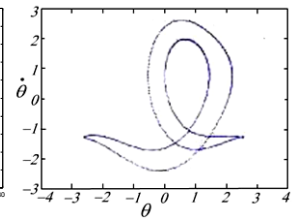
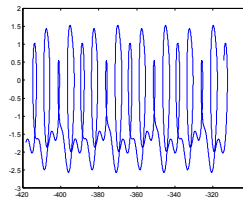
相图变得无序，相点随机地在某一位置出现，此时单摆已进入混沌状态

$$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.35$$


 $\dot{\theta}-\theta$ 图
一个周期内的 $\dot{\theta}-\theta$ 图

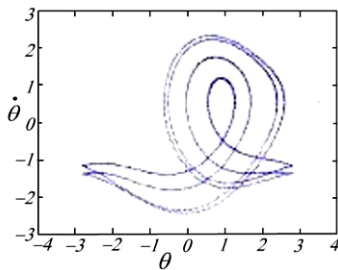
单摆不再是往复摆动，而是单向的旋转

$$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.45$$



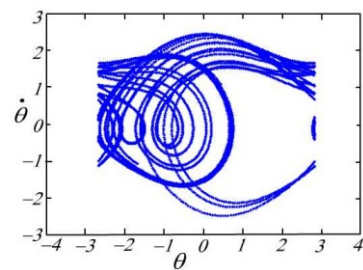
单摆做二倍周期旋转

$$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.47$$



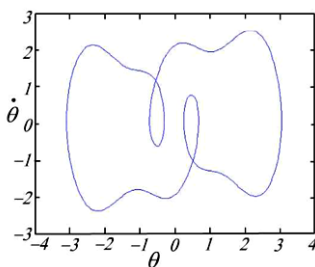
单摆做四倍周期旋转

$$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.50$$



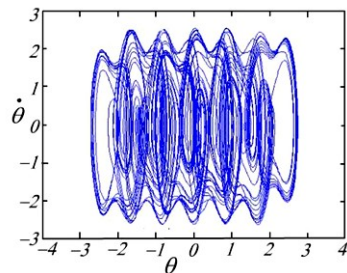
相图又变得复杂无序，又出现混沌。

$$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.60$$



相图有序，单摆做周期运动

$$\beta = 1/4, \omega_D = 2/3, f = 1.70$$



相图无序又出现混沌

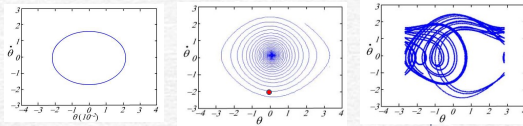
III 混沌的图形描述方法

2. 吸引子: 表示动力学系统当 $t \rightarrow \infty$ 时的渐近行为

小角度摆

阻尼摆

混沌



极限环吸引子

不动点吸引子

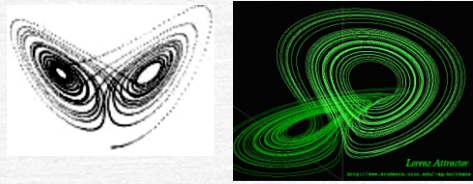
奇怪吸引子

平庸吸引子

奇怪吸引子虽然复杂但有明确的边界, 这个明确的边界保证体系在整体上存在稳定性, 但在吸引子范围内相点出现的位置却完全随机。

洛伦兹吸引子——奇怪吸引子

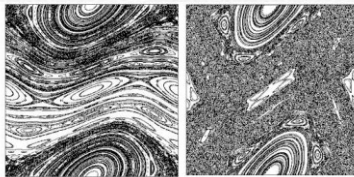
图1 耗散系统（能量不守恒的有摩擦的系统）中的混沌



1963年美国气象学家洛伦兹在《大气科学杂志》上发表“确定性非周期流”一文, 给出第一个耗散混沌的实例。左为洛伦兹方程组数值解在XOZ平面上的投影。在计算机屏幕上演示数值解, 只要不人为干预, 轨道会永远运动下去

洛伦兹吸引子——奇怪吸引子

图2 保守系统（能量守恒的无摩擦系统）中的混沌



相空间中有多个椭圆点和双曲点, 在椭圆点附近有周期小岛, 小岛中又有复杂结构, 层层嵌套。左上图为参数取0.8时, 右上图为参数取1.5时情况。随着参数的增加（相当对非线性增强）, 混沌区越来越大。在这里, 混沌区与规则区交织在一起, 相互渗透。

洛伦兹吸引子——奇怪吸引子

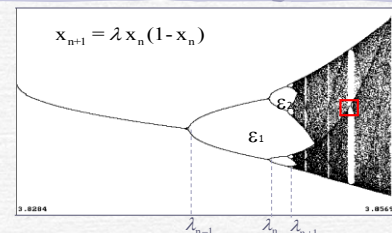
其物理性质:

- (1) 在整体上是稳定的, 又具有局部的不稳定性;
- (2) 对初始条件十分敏感. 任意两个初始值靠的很近的轨道, 都将很快地随时间分离。
- (3) 具有无穷嵌套的自相似结构。

IV 混沌运动的基本特征

- 1、非线性系统中的特有现象;
- 2、对参量的依赖性;
一个非线性系统并非在任何条件下都出现混沌运动, 只有当某个参量到达某个阈值时系统才进入混沌状态, 在此之前系统的运动可能出现周期性分岔, 且相继分岔的参数值间隔越来越小, 满足Feigenbaum常数;
- 3、对初值的极端敏感性;
- 4、确定性系统中的内在随机性;
- 5、混沌运动的相空间为奇异吸引子;
- 6、混沌运动遵守“有序——混沌——有序”的循环过程, 是有序无序的对立统一; 混沌中也具有“有序”的内部结构。

菲根鲍姆常数



$$\text{横坐标} \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 4.669, 201, 609, \dots$$

$$\text{纵坐标} \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n+1}} = 2.502907875, \dots$$

V 混沌研究的应用

混沌学被誉为20世纪物理学继相对论、量子论之后的第三次革命，对人类整个知识体系的又一次巨大冲击，其覆盖面广，涉及自然科学与社会科学几乎各个领域，它不仅改变了天文学家看待太阳系的方式，而且开始改变企业保险决策的方式，改变分析紧张局势导致武装冲突的方式……等等。混沌学已打破了各门学科的界限，它的应用前景无限宽广，还有待于人们不断地研究、探索 and 开发。

V 混沌研究的应用

混沌现象的理论和实验研究在物理学、化学、生物学、天体物理、气象学以及神经生理学等广泛领域获得重要进展，但在经济学中还存在困难。

混沌涉及的领域

- 气象变化与预报 — Lorentz's butterfly effect
- 机械振动 — 单摆受扰运动
- 生态学 — Logistic mapping
- 天文学 — 三体问题
- 流体力学 — 湍流
- 化学
- 生命现象 · 保密通讯



1. 混沌与生命

通过对生命现象进行的考察，发现各种各样的生物节律既非完全周期，又不可能属于纯粹随机，它们既有与自然界周期（季节，昼夜等）协调的一面，又有着内在的复杂性质。

利用混沌过程预测和控制癫痫，心律不齐等病症。

- 20世纪20年代后期已经有人用非线性电路模拟过心脏搏动，近几年更发现了心律不齐等病症与混沌运动的联系。
- 癫痫患者发病时的脑电波呈明显的周期性，而正常人的脑电波近乎随机讯号。进一步测量表明它们不是随机的，而是接近于混沌系统。

2. 混沌与气象学研究

混沌动力学的发展排除了长期预报的可能性。

但是另一方面我们现在对于预报问题有了更符合实际的态度。其实对短期预报和长期预报的要求从来不同。

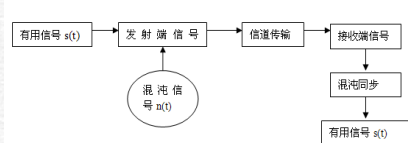
只有对于短期预报，我们才关心变化的细节。对于长期预报，人们更注意各种平均量的发展趋势，例如今后20年内华北年降水量的多少。

混沌动力学的进步，恰恰在这方面提高了人类的预报本领。

3. 混沌与保密通信

基于混沌理论的保密通信、信息加密和信息隐藏技术的研究已成为国际热门前沿课题之一，也是高科技研究的一个新领域。

基于混沌同步的保密通信



•1990年，NRL的Pecora和Carol发现：同一信号驱动的两个混沌系统可达到同步状态。

•混沌同步控制应用：激光技术、控制技术、通讯保密技术等。

问题：

1. 混沌运动的基本特征有哪些？
2. 试由一维谐振子描述极限环吸引子和不动点吸引子，并在相图上表示之，什么是奇怪吸引子？
3. 菲根鲍姆的常数是怎么定义的？其意义何在？
4. 什么是相图？用相图研究系统运动的优点是什么？
5. 试述倍周期分岔走向混沌的过程