Mathematical Analysis Vol.1

@Souez3

22.11.2024

1 Билет 1

1.1 Последовательность

$f(n)$ - последовательность задана на множестве N Когда каждому $n \in N$ поставлено в соответствие некоторого закона $a(n) \in R$, тогда говорят, что задана числовая последовательность ${a_n}^{\inf}$

Примеры: n-ный член арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + \alpha(n-1)$ геометрическая прогрессия: $b_n = b_1 * q^(n-1)$

1.2 Предел числовой последовательности

Определение: Число A называют пределом числовой последовательности X_n, если $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon)$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon$

Определение: Сходящаяся последовательность - последовательность, которая имеет конечный предел

Определение: Расходящаяся последовательность - последовательность, которая имеет бесконечный предел либо предела не существует.

Последовательнoть ограничена, если $\exists M > 0 : \forall n \in N$ выполняется $a_n <= M$ (существует такое число M, что для любого номера последовательности все члены последовательности не превосходят это число по модулю.

2 Билет 2

2.1 Теорема о единственности предела последовательности

Теорема: Если у последовательности есть предел, то он единственный

Доказательство: Докажем от противного. Допустим существует 2 предела.

$\sqsupset \lim_{x\to\infty} X_n = A \sqsupset \lim_{x\to\infty} X_n = B$, при этом $B! = A$ (1)

Тогда возьмем $\epsilon = (B-A)/3 > 0$, $(\epsilon_A \bigcap \epsilon_B! = 0)$

Следовательно

n $>=$ N $\exists N_1 : \forall n > N$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon$ (2)

$\exists N_2 \forall_n >= N_2$ и тоже выполняется, что $|X_n - B| < \epsilon$ (3)

Тогда $|a-b| = |a - X_n + X_n - b| <= |X_n - A| + X_n - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \frac{2*|A-B|}{3}$, тогда получим $|A-B| <= \frac{2}{3} * |B-A|$ Получим противорчие

3 Билет 3

Определение: Последовательность ограничена, если $\exists M > 0 : \forall b \in N$ выполняется $|a_n| <= M$

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности: Всякая сходящаяся последовательность ограничена!

Доказательство: $\sqsupset A = \lim_{n\to\infty} X_n \in R$, тогда и только тогда, когда $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in mathdsN$ такое что $\forall n \in mathdsN : n > N(\epsilon)$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon \forall n > N(\epsilon) X_n \in (A-\epsilon; A+\epsilon)$ содержит конечное число x$_1, x_2, ...x_k \sqsupset m = minX^-; A - \epsilon M = maxA - \epsilon; x^+$ Тогда на отрезке [m;M] находятся x$_1, x_2, ...x_k (A-\epsilon; A+\epsilon)[m; M]x_n, \forall n \in mathdsN x_n <= m x_n >= M$

Примеры:

1)

$1\frac{}{n^2 = 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}...}$ $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ - ограничена сверху 2) $\frac{n^2}{n+1} = \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; ...$ $\lim \frac{n^2}{n+1} >= \frac{1}{2}$ - ограничена снизу (4)

4 Билет 4

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

$\sqsupset X_n; Y_n$ - две сходящиеся последовательности. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} X_n = A; \lim_{n\to\infty} Y_n = B$

Свойства 1) $X_n += Y_n; X_n * Y_n; \frac{X_n}{Y_n}$ - тоже сходящиеся последовательности. 2) $\lim_{n\to\infty}(X_n + Y_n) = A + B$ 3) $\lim_{n\to\infty}(X_n - Y_n) = A - B$ 4) $\lim_{n\to\infty}(X_n * Y_n) = A * B$ 5) $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{Y_n} = \frac{A}{B}$

Доказательство: 1) $\forall N > 0_0 : \forall n > N_0$ выполняется $|X_n - A| < \frac{\epsilon}{2}() \ \exists N_1 : \forall n > N_1$ выполняется $|Y_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$ Пусть N = max(N$_2; N_1), n > N \forall n > N |(X_n + Y_n) - (A + B)| = |X_n - A + Y_n - B| <= |X_n - A| + |Y_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

5 Билет 5

5.1 Понятие функции через последовательность

Если каждому $x \in X$ по некоторому закону поставлен в соответствии единственный y, то говорят что на множестве X задана функция f

$\forall x \in X \exists! y \in R : f(x) = y$ (5)

5.2 Предел функции в точке

Определение по Гейне: $\sqsupset f(x)$ - определена в некоторой проколотой окрестности точки x

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ если $\forall x_n \exists \mathring{U}_{x0} > 0$

$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) > 0 => f(x) - g(x) > 0$ по теореме если f(x) имеет предел A и в окрестности (a) принимает значения больше нуля, то A $>= 0$ (6)

5.3 Теорема о единственности предела

Если функция имеет предел в точке, то он единственнй.

Доказательство от противного: $\sqsupset \exists X_n = \lim_{n \to \infty} X_n = A$ и $\lim_{n \to \infty} X_n = B$, $A! = B; A, B \in R$ Возьмем $\epsilon_n \bigcap \epsilon_b! =$, тогда $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}; |f(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$ $|A - B| = |A - B + f(x) - f(x)| = |A - f(x) + f(x) - B| <= |A - f(x)| + |B - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ То есть получили $\forall \epsilon > 0 - > |A - B| < \epsilon$