Metody numeryczne

Sprawozdanie 12

Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Kateryna Andrusiak

23 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne to metoda polegająca na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych.

Kwadratury Newtona-Cotesa:

Przybliżamy funkcję podcałkową wielomianem Lagrange'a stopnia conajwyżej N

$$f(x_i) = L_N(x_i), \;\; i = 0,1,2,\dots,N \tag{1}$$

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\,\Phi_k(x) \qquad\qquad \Phi_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{2}$$

Błąd przybliżenia (interpolacji)

$$R_{N+1}(x) = f(x) - L_N(x) = \frac{1}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\xi) \qquad \xi \in (a,b) \tag{3}$$

Wprowadzamy nową zmienną t: $x = a + ht$

$$\Phi_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{t-j}{k-j} \tag{4}$$

Przyjmujemy oznaczenia

$$h = \frac{b-a}{N} \tag{5}$$

$$f_k = f(a + kh) \tag{6}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{N} f_k \int_a^b \Phi_k(x)dx = \sum_{k=0}^{N} f_k h \int_0^N \Phi_k(t)dt = \sum_{k=0}^{N} f_k A_k \tag{7}$$

skąd otrzymujemy:

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N} f_k A_k \tag{8}$$

współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$A_k = h\frac{(-1)^{N-k}}{k!\,(N-k)!}\int_0^N \frac{t(t-1)\dots(t-N)}{(t-k)} \tag{9}$$

W metodzie Simpsona stosujemy jako przybliżenie parabolę - będziemy obliczali sumy wycinków obszarów pod parabolą.

$$S(f) = \sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{h}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) \tag{10}$$

Błąd

$$E(f) = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{11}$$

2. Problem

Celem projektu jest obliczenie numeryczne całki typu:

$$I = \int_0^{\pi} x^m \sin(kx)\, dx \tag{12}$$

metodą Simpsona. W celu sprawdzenia poprawności metody musimy dysponować wartościami dokładnymi, które można dość łatwo obliczyć korzystając z rozwinięcia funkcji sin(x) w szereg:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{13}$$

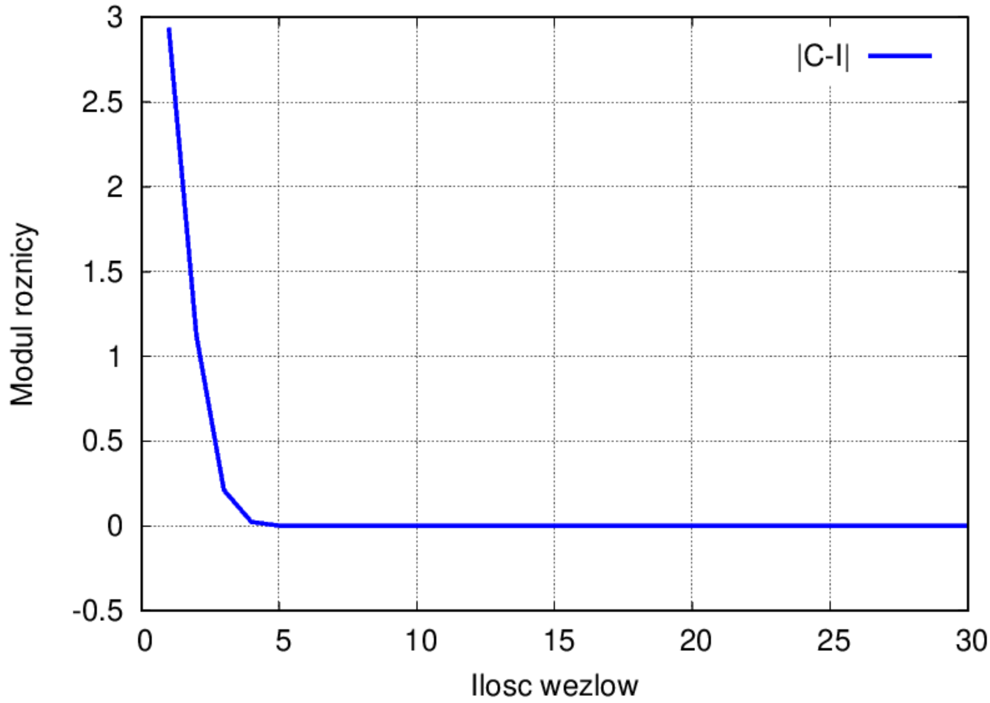
Wstawiając powyższe rozwinięcie pod całkę i wykonując całkowanie każdego elementu szeregu dostajemy:

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!\,(2i+m+2)}\Bigg|_a^b \tag{14}$$

3. Wyniki

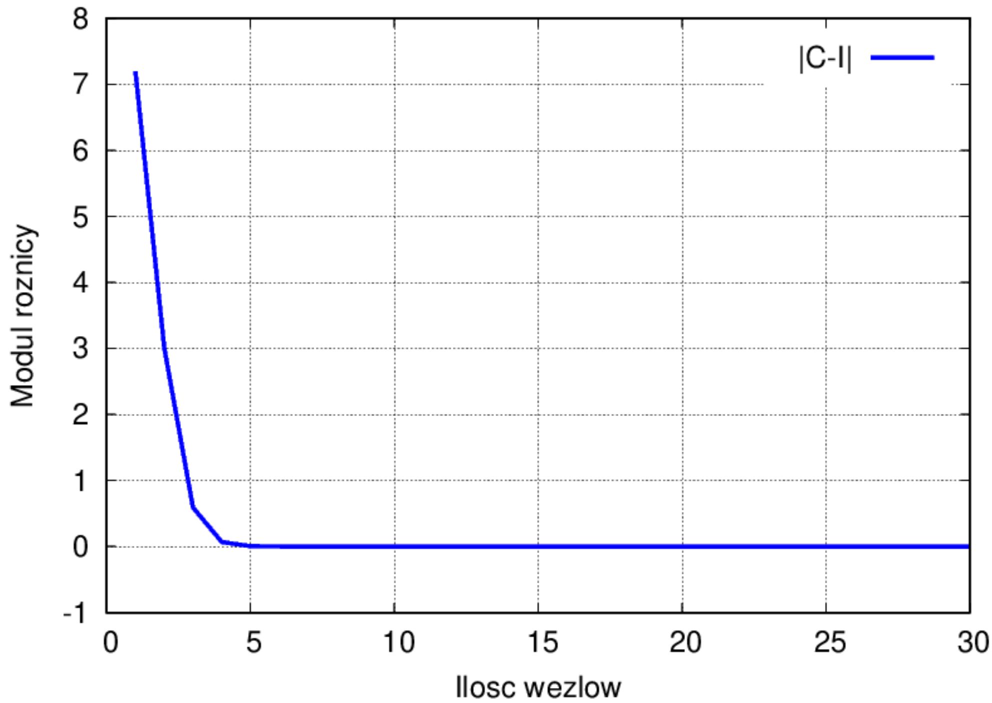
1) Obliczono wartość całki typu (12) metodą **<u>rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg</u>** (14):

a) Dla $\boldsymbol{m = 0,\ k = 1\ (I = 2)}$



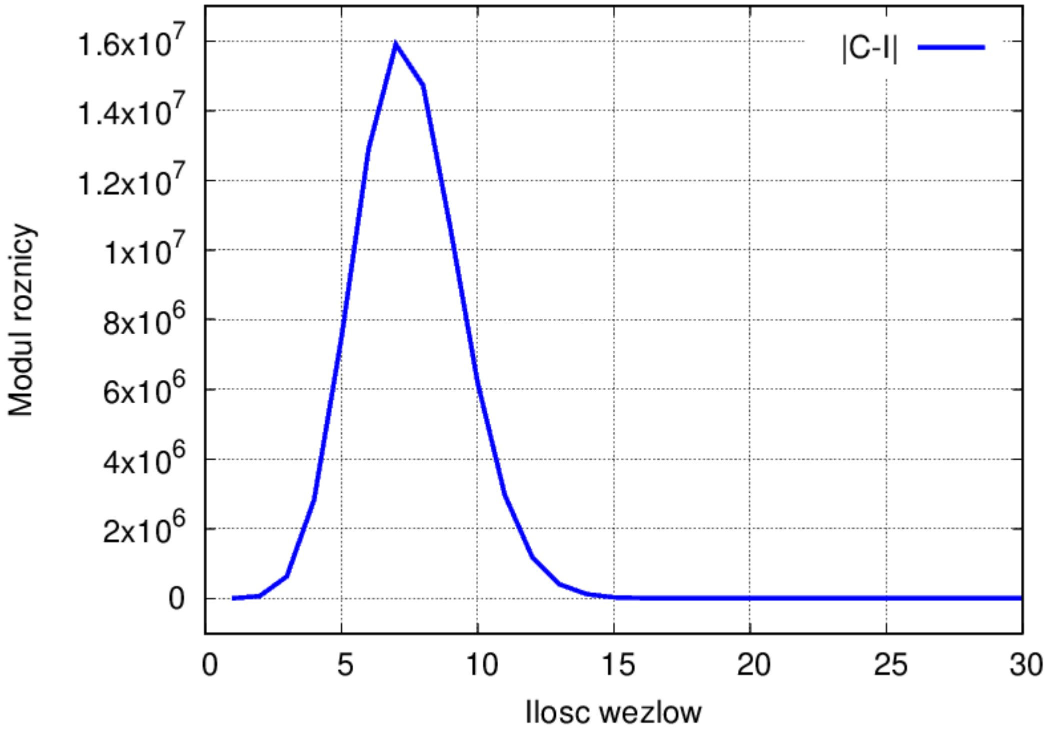
Rysunek 1. Zależność $|C-I|$ od ilości węzłów $\boldsymbol{m = 0,\ k = 1\ (I = 2)}$**.**

b) Dla $\boldsymbol{m = 1, k = 1\ (I = \pi)}$



Rysunek 2. Zależność $|C-I|$ od ilości węzłów $\boldsymbol{m = 1, k = 1\ (I = \pi)}$

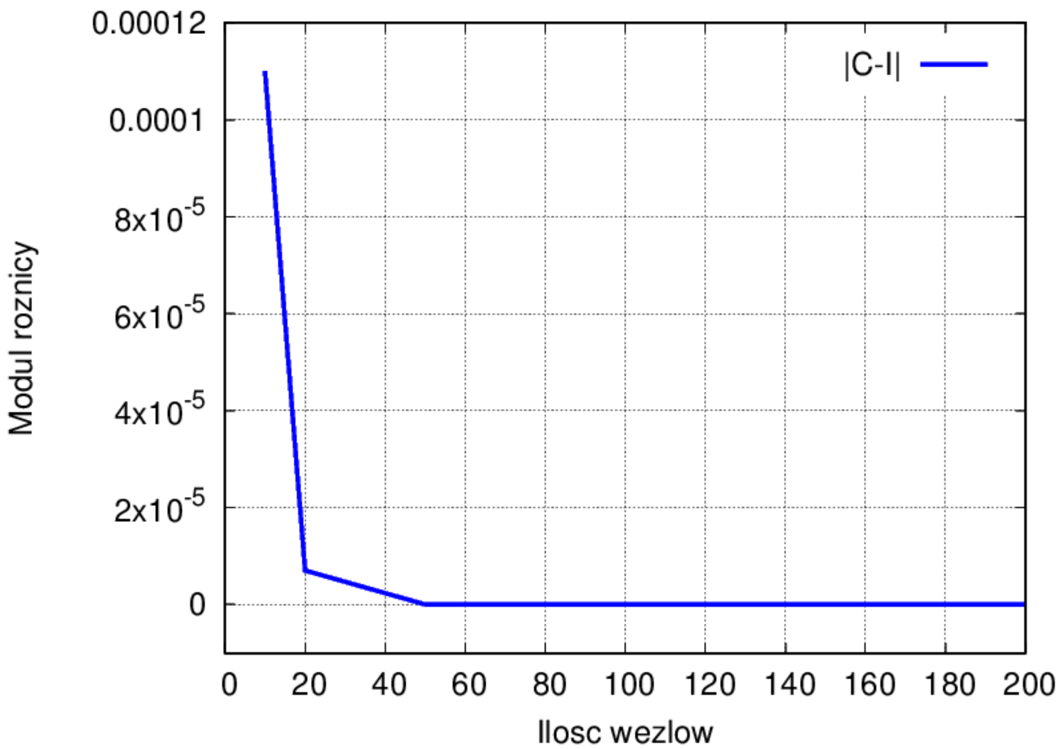
c) Dla $\boldsymbol{m = 5, \ k = 5}$ $(\boldsymbol{I = 56.363569})$



Rysunek 3. Zależność $|C-I|$ *od ilości węzłów* $\boldsymbol{m = 5, \ k = 5}$ $(\boldsymbol{I = 56.363569})$**.**

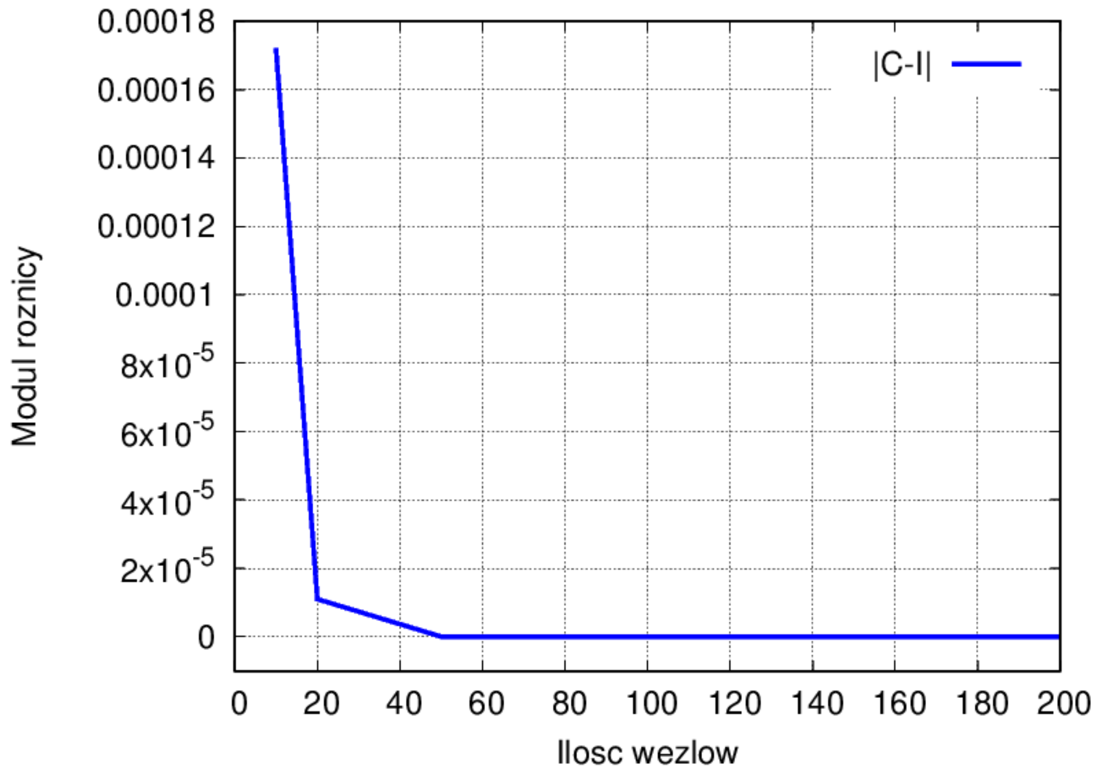
2) Obliczono wartość całki typu (12) **metodą Simpsona** dla następującej liczby węzłów $\boldsymbol{n = 2p + 1 = 11, 21, 51, 101, 201}$.

a) Dla $\boldsymbol{m = 0, \ k = 1}$



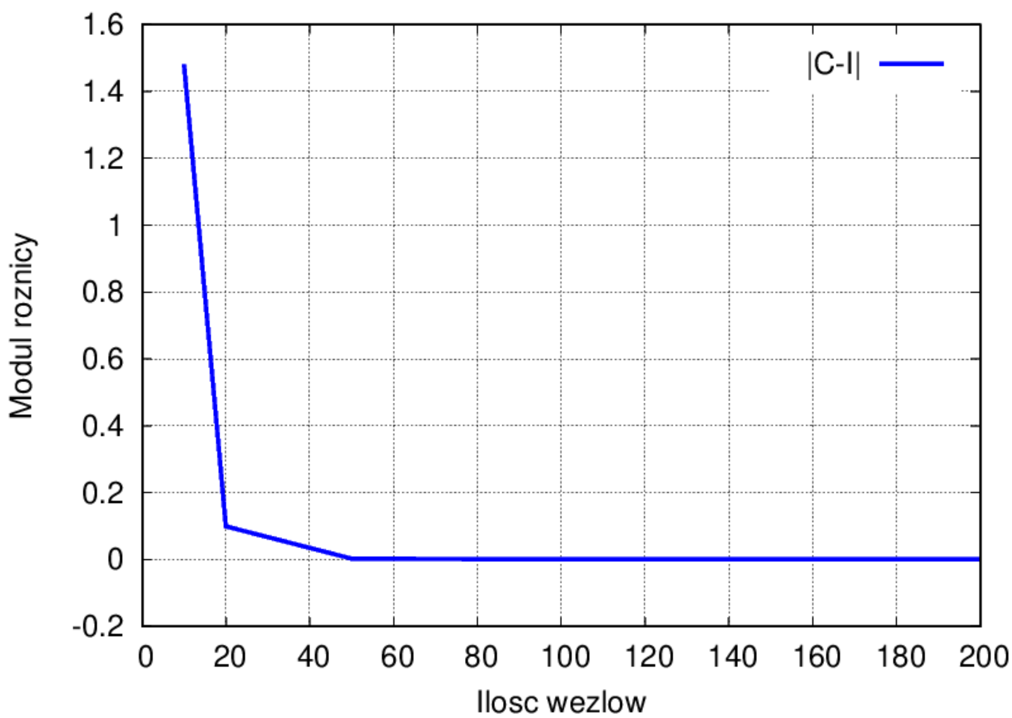
Rysunek 4. Zależność $|C-I|$ *od ilości węzłów* $\boldsymbol{m = 0, \ k = 1}$**.**

b) Dla $\boldsymbol{m = 1, k = 1}$



Rysunek 5. Zależność $|C-I|$ od ilości węzłów $\boldsymbol{m = 1,\ k = 1.}$

c) Dla $\boldsymbol{m = 5, k = 5}$



Rysunek 6. Zależność $|C-I|$ od ilości węzłów $\boldsymbol{m = 5,\ k = 5.}$

4. Wnioski

Udało się nam obliczyć całkę oznaczoną (12) za pomocą metod rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg oraz Simpsona. Obie metody prowadzą do dokładnych wyników.

Dokładność metody rozwinięcia funkcji podcałkowej zależy od ilości sumowanych wyrazów, im więcej ich, tym bardziej dokładne wyniki otrzymujemy.

Dokładność metody Simpsona zależy od ilości węzłów, in więcej węzłów tym barziej dokładne wyniki otrzymujemy.