Metody numeryczne

Sprawozdanie 6

Poszukiwanie pierwiastków równania nieliniowego metodą siecznych i Newtona.

Kateryna Andrusiak

16 kwietnia 2020

1. Wstęp teoretyczny

Metoda siecznych – metoda numeryczna, służąca do rozwiązywania równania nieliniowego z jedną niewiadomą**.** Ta metoda pozwala stosunkowo szybko znaleźć pierwiastek dowolnej funkcji w zadanym przedziale poszukiwań [a, b]. Aby można było zastosować metodę, funkcja musi spełniać kilka warunków początkowych:

- Funkcja musi być określona w przedziale [a, b];
- Funkcja musi być ciągła w przedziale [a, b];
- Na krańcach przedziału [a,b] funkcja ma różne znaki;

Metoda siecznych jest modyfikacją metody Regula Falsi. Prostą przeprowadza się przez dwa ostatnie przybliżenia $x_k\ i\ x_{k-1}$ (metoda dwupunktowa).

Kolejne przybliżenia w metodzie siecznych wyznacza się według relacji rekurencyjnej:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{1}$$

Rząd metody numerycznej – liczba, która charakteryzuje szybkość, z jaką podana metoda znajduje rozwiązanie.

Zbieżność metody jest większa niż w metodzie RF. Rząd metody siecznych : $p \approx 1.618$.

Należy dodatkowo przyjąć, że $|f(x_k)|$ mają tworzyć ciąg wartości malejących. Jeśli w kolejnej iteracji $|f(x_k)|$zaczyna rosnąć, należy przerwać obliczenia i ponownie wyznaczyć punkty startowe zawężając przedział izolacji.

Metoda Newtona polega na kolejnych przybliżeniach pierwiastka funkcji przez wyznaczanie przecięć stycznej do wykresu funkcji z osią OX. Z tego powodu, podobnie jak w metodzie siecznych, warunki początkowe są następujące:

- Funkcja musi być określona w przedziale [a, b];
- Funkcja musi być ciągła w przedziale [a, b];
- Na krańcach przedziału [a,b] funkcja ma różne znaki;

Kolejne przybliżenie pierwiastka x_{k+1} jest wyznaczane, jako punkt przecięcia stycznej do x_k z osią OX.

Równanie stycznej w k-tym przybliżeniu:

$$y - f(x_k) = f^{'}(x_k)(x - x_k) \tag{2}$$

Wzór iteracyjny na położenie k-tego przybliżenia pierwiastka równania nieliniowego w metodzie Newtona:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 1,2, \dots) \tag{3}$$

Metoda Newtona jest więc metodą jednopunktową. Rząd zbieżności metody wynosi $p = 2$. Wadą metody Newtona jest konieczność wyliczania pierwszej pochodnej w każdym obiegu aproksymacji pierwiastka.

2. Problem

Naszym zadaniem było znalezienie punktów, w których funkcja $g_1(x) = \sin(x)$ przecina się z $g_2(x) = x^2/8$. Ponieważ w tych punktach obie funkcje mają identyczne wartości, więc problem ten możemy zapisać w postaci pojedynczego równania

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x^2}{8} = 0 \tag{4}$$

Powyższe równanie z pewnością jest nieliniowe a jego rozwiązanie (przybliżone) można znaleźć numerycznie.

Pseudokod dla metody siecznych:

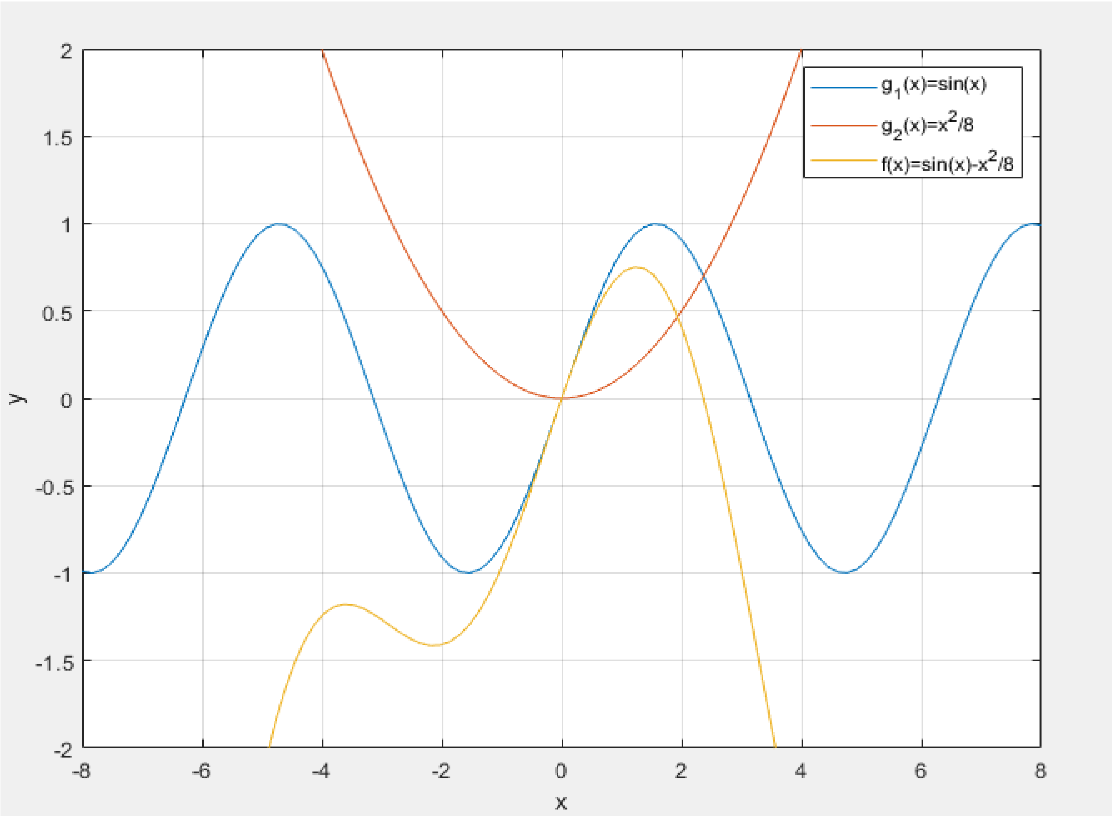
```
inicjalizacja – 2 punkty startowe: x_0, x_1
for(k = 1; k <= IT_MAX; k++){
    x_2 = x_1 - f(x_1)·(x_1 - x_0) / (f(x_1) - f(x_0))   <- nowe przybliżenie
    x_0 = x_1   <- zachowujemy dwa ostatnie przybliże
    x_1 = x_2
}
```

Pseudokod dla metody Newtona:

```
inicjalizacja – punkt startowy: x
for(k = 1; k <= IT_MAX; k++){
    x = x - f(x)/f'(x)   <- nowe przybliżenie
}
```

3. Wyniki

Rysunek 1. Wykres trzech funkcji: $g_1(x) = \sin\,(x)$, $g_2(x) = x^2/8$, $(x) = \sin(x) - x^2/8$



Łatwo zauważyć, że punktem przecięcia z lewej strony jest p. (0,0), z prawej jest blisko p.(2.4,0.7)

Tab. 1. Kolejne 10 przybliżeń miejsca zerowego funkcji metodą Newtona startując od $\boldsymbol{x = -8}$.

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{f(x_k)}$	$\boldsymbol{f'(x_k)}$
1	-3.152678	-1.231337	-0.211769
2	-8.967207	-10.493121	1.344673
3	-1.163736	-1.087574	0.686846
4	0.419697	0.385465	0.808288
5	-0.057194	-0.057572	1.012663
6	-0.000342	-0.000342	1.000085
7	**-0.000000**	**-0.000000**	**1.000000**
8	-0.000000	-0.000000	1.000000
9	0.000000	0.000000	1.000000
10	0.000000	0.000000	1.000000

Tab. 2. Kolejne 10 przybliżeń miejsca zerowego funkcji <u>metodą Newtona</u> startując od $\boldsymbol{x = 8}$.

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{f(x_k)}$	$\boldsymbol{f'(x_k)}$
1	4.732397	-3.799248	-1.163092
2	1.465892	0.725898	-0.261760
3	4.239030	-3.136213	-1.515636
4	2.169791	0.237404	-1.106260
5	2.384391	-0.023775	-1.322859
6	2.366419	-0.000152	-1.305904
7	**2.366302**	**-0.000000**	**-1.305794**
8	2.366302	-0.000000	-1.305794
9	2.366302	-0.000000	-1.305794
10	2.366302	-0.000000	-1.305794

Tab. 3. Kolejne 15 przybliżeń miejsca zerowego funkcji <u>metodą siecznych</u>, dwa punkty startowe: $\boldsymbol{x_0 = -8}$ i $\boldsymbol{x_1 = -8.1}$.

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_{k+1}}$	$\boldsymbol{f(x_k)}$	$\boldsymbol{f(x_{k-1})}$
1	-3.054857	-9.171140	-8.989358
2	-2.256385	-1.253146	-9.171140
3	-9.415569	-1.410456	-1.253146
4	-1.213272	-11.090826	-1.410456
5	-0.291223	-1.120770	-11.090826
6	0.042316	-0.297725	-1.120770
7	0.001012	0.042079	-0.297725
8	-0.000006	0.001012	0.042079
9	0.000000	-0.000006	0.001012
10	**0.000000**	**0.000000**	**-0.000006**
11	-0.000000	0.000000	0.000000
12	0.000000	-0.000000	0.000000
13	0.000000	0.000000	-0.000000
14	**-nan**	0.000000	0.000000
15	-nan	-nan	0.000000

Jak widać wynik otrzymujemy już po 10 iteracji. Po 14 iteracji widzimy „-nan", co jest spowodowane dzieleniem przez zero, żeby tego uniknąć, musimy przyjąć warunek STOP-u:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$

Lub gdy wartość funkcji w wyznaczonym punkcie $\boldsymbol{x_k}$ jest dostatecznie bliska zeru.

Tab. 4. Kolejne 15 przybliżeń miejsca zerowego funkcji metodą siecznych, dwa punkty startowe: $\boldsymbol{x_0}$**= 8** i $\boldsymbol{x_1}$ **= 8.1.**

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{x_{k+1}}$	$\boldsymbol{f(x_k)}$	$\boldsymbol{f(x_{k-1})}$
1	4.823717	-7.231360	-7.010642
2	0.983196	-3.902340	-7.231360
3	1.575400	0.711439	-3.902340
4	20.411886	0.689754	0.711439
5	1.826364	-51.080672	0.689754
6	2.024551	0.550569	-51.080672
7	2.491247	0.386457	0.550569
8	2.348479	-0.170328	0.386457
9	2.365543	0.023123	-0.170328
10	2.366307	0.000991	0.023123
11	2.366302	-0.000006	0.000991
12	**2.366302**	**0.000000**	**-0.000006**
13	2.366302	0.000000	0.000000
14	2.366302	-0.000000	0.000000
15	-nan	-0.000000	-0.000000

4. Wnioski

Za pomocą metody siecznych oraz metody Newtona udało się nam rozwiązać problem i znaleźć pierwiastki równania nieliniowego (4).

Metoda siecznych jest zwykle szybko zbieżna do pierwiastka funkcji. Jednak po wybraniu złych punktów początkowych może się zdarzyć, iż nie będzie ona zbieżna. Dlatego należy zastosować licznik kolejnych przybliżeń, a po przekroczeniu zadanej ich liczby algorytm powinien zatrzymać się z błędem.

1. Funkcja ma wartość dostatecznie bliską 0 w wyznaczonym punkcie x_k: $|\, f\,(x_k\,)\,| < \varepsilon_y$.
2. Odległość dwóch kolejnych aproksymacji pierwiastka spadnie poniżej założonej dokładności obliczeń: $|\, x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_x$.

Metoda Newtona jest zwykle szybko zbieżna. Odległość pomiędzy kolejnymi dwoma punktami x_{k+1} i x_k maleje. Kolejne punkty x_k leżą coraz bliżej pierwiastka funkcji. Gdy spadnie poniżej dokładności wyznaczania pierwiastka, obliczenia można przerwać. Wynika z tego, iż w metodzie Newtona obliczenia kończymy w trzech przypadkach:

1. Funkcja ma wartość dostatecznie bliską 0 w wyznaczonym punkcie x_k: $|\, f\,(x_k\,)\,| < \varepsilon_y$.

2. Odległość dwóch kolejnych aproksymacji pierwiastka spadnie poniżej założonej dokładności obliczeń: $|\, x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_x$.
3. Przekroczono zadaną liczbę aproksymacji bez osiągnięcia wyniku. Jest to sytuacja błędna, która może powstać przy nieprawidłowym doborze punktu startowego.

Tak jak rząd zbieżności Newtona jest większy od rządu metody siecznych, oczekiwaliśmy, że metoda Newtona będzie szybsza. Patrząc na wyniki (Tab. 1,2,3,4) widzimy, że metoda Newtona jest szybsza, w naszym przypadku wynik otrzymujemy po 7 iteracji, w metodzie siecznych natomiast wynik otrzymujemy dopiero po 10 oraz 12 iteracji.