Metody numeryczne

Sprawozdanie 1

Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej - wersja 2

Kateryna Andrusiak

19 marca 2020

1. Wstęp teoretyczny

Metoda najszybszego spadku polega na przybliżaniu w każdym kroku wektora rozwiązań $\vec{x}$, jednocześnie zmniejszając wartości w wektorze reszt r, dążąc do ich wyzerowania, działa w przypadku, gdy macierz $\boldsymbol{A}$ jest symetryczna i dodatnio określona.

Przybliżone rozwiązanie w $\boldsymbol{i+1}$ iteracji ma postać:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \alpha_i \vec{v}_i \tag{1}$$

Jako $\vec{v}_i$wybieramy kierunek gradientu Q

$$\nabla Q = A\vec{x}_i - \vec{b} = -\vec{r}_i \tag{2}$$

$$\vec{v}_i = -\vec{r}_i \tag{3}$$

W celu znalezienia współczynnika $\alpha_i$obliczamy $Q(x_{i+1})$

$$Q(\vec{x}_i - \alpha_i\vec{r}_i) = -\frac{1}{2}\vec{x}_i^T\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{x}_i^T\vec{b} - \frac{1}{2}\alpha_i^2\vec{r}_i^T A\vec{r}_i + \alpha_i\vec{r}_i^T\vec{r}_i \tag{4}$$

i różniczkujemy je po parametrze wariacyjnym w celu znalezienia minimum

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = \vec{r}_i^T\,\vec{r}_i - \alpha_i\,\vec{r}_i^T A\,\vec{r}_i \tag{5}$$

$$\alpha_i = \frac{\vec{r}_i^T\vec{r}_i}{\vec{r}_i^T A\,\vec{r}_i} \tag{6}$$

Kolejne przybliżenie w metodzie największego spadku opisuje wyrażenie:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \frac{\vec{r}_i^T\vec{r}_i}{\vec{r}_i^T A\,\vec{r}_i}\vec{r}_i \tag{7}$$

dla którego zachodzi warunek:

$$Q(x_{i+1}) < Q(x_i) \tag{8}$$

2. Problem

Zadanie polegało na rozwiązaniu układu równań liniowych $\boldsymbol{A\vec{x}} = \boldsymbol{\vec{b}}$ metodą największego spadku.

Najpierw utworzyłam macierz układu $A_{n\times n}$, gdzie n = 1000 i wypełniłam jej elementy zgodnie z poniższą formułą ($m = 10$):

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{1}{1.0+|i-j|}, \quad gdy\ |i-j| \leqslant m, \quad i,j = 0,\ldots,n-1 \\ A_{i,j} &= 0, \quad gdy\ |i-j| > m \end{aligned} \tag{9}$$

Następnie utworzyłam wektor wyrazów wolnych $\vec{b}$. Jego elementy wypełniłam następująco:

$$b_i = i, \quad i = 0,\ldots,n-1 \tag{10}$$

Do rozwiązania układu równań liniowych:

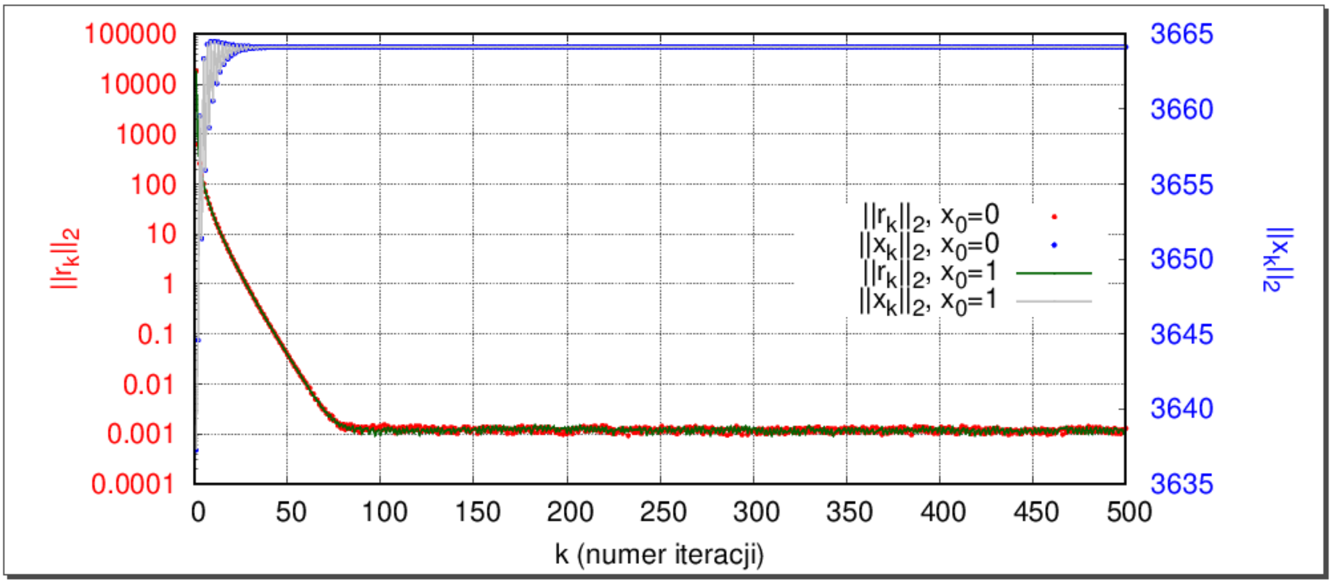
$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{11}$$

gdzie $\vec{x}$ to wektor rozwiązań, zastosowano metodę największego spadku.

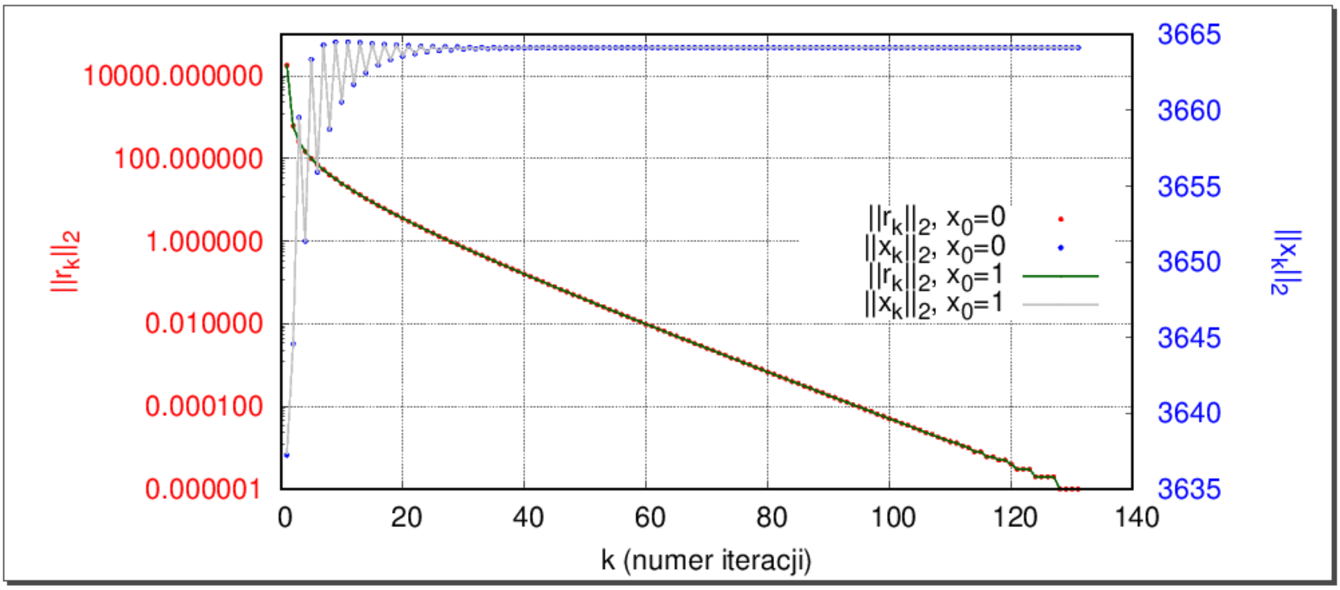
Najpierw rozwiązuję dla $\vec{x} = 0$, następnie dla $\vec{x} = 1$.

W każdej iteracji zapisuję do pliku: aktualny numer iteracji (k), wartość normy euklidesowej wektora reszt ($\|\vec{r}\|_2 = \sqrt{\vec{r}^T\vec{r}}$), wartość α_k, wartość normy euklidesowej wektora rozwiązań ($\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}^T\vec{x}}$). Jako warunek zakończenia iteracji przyjęłam $\sqrt{\vec{r}^T\vec{r}} < 10^{-6}$.

3. Wyniki



Wykres 1. Norma wektora reszt i rozwiązania. <u>Pojedyncza</u> precyzja.



Wykres 2. Norma wektora reszt i rozwiązania. Podwójna precyzja.

4. Wnioski

Korzystając z metody największego spadku, udało się rozwiązać układ równań liniowych $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$**.** Jak widać z wykresów 1 i 2 postać wektora startowego nie wpływa na liczbę iteracji, w obu przypadkach i dla $\vec{x} = 0$ i dla $\vec{x} = 1$ ilość iteracji jest jednakowa. Ta metoda jest wygodna dla rozwiązywania dużych macierzy i działa dosyć szybko.