Metody numeryczne

Sprawozdanie 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Kateryna Andrusiak

25 kwietnia 2020

1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja funkcjami sklejanymi – metoda numeryczna polegająca na przybliżaniu nieznanej funkcji wielomianami niskiego stopnia. W przedziale [a, b] mamy $n+1$ punktów, takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Funkcję $s(x)$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji $f(x)$, jeżeli

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \;\; i = 0,1,\ldots,n; \quad n \geq 2$$

Punkty x_i nazywane są węzłami interpolacji. Punkty te określają podział przedziału [a, b] na n podprzedziałów tj. $[x_i\, , x_{i+1}]$. W każdym takim podprzedziale interpoluje się funkcję wielomianem interpolacyjnym. „Połączenie" tych wielomianów ma utworzyć funkcję sklejaną.

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach. Oznaczmy $m_j = s^2(x_j),\; j = 0,1,2\ldots,n$. Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji $s(x)$ jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}\, , x_i]$., więc możemy całkować nasze wyrażenie dwukrotnie. W wyniku dostajemy następujące wyrażenie:

$$s_{i-1} = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{1}$$

gdzie: i- numer podprzedziału, w którym leży argument wartości wyznaczanej.

Stałe A_i i B_i wyznaczamy korzystając z warunku interpolacji:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}) \tag{2}$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \tag{3}$$

Teraz problem sprowadza się do znalezienie m_i i m_{i-1}. Aby go rozwiązać, należy rozwiązać układ równań liniowych:

$$\boldsymbol{A}\vec{m} = \vec{d} \tag{4}$$

którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \qquad i = 1,2, \dots , n \tag{5}$$

Przy czym m_i, to szukane wartości drugich pochodnych w węzłach.

Pozostałe oznaczenia to:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i \tag{6}$$

elementy wektora wyrazów wolnych

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \tag{7}$$

oraz położenia węzłów:$x_1, x_2, \dots , x_n$ i odległości międzywęzłowe

$$h_i = x_i - x_{i-1} \tag{8}$$

Należy określić jeszcze warunki brzegowe:

$$m_0 = \alpha, \quad m_n = \beta \tag{9}$$

Po wprowadzeniu powyższych warunków układ (4) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix} \tag{10}$$

Po rozwiązaniu układu równań - znalezieniu współczynników m_i – wyznaczamy funkcję sklejaną wg wzoru (1).

2. Problem

Na laboratorium trzeba było wykonać interpolacje funkcjami sklejanymi dla funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{11}$$

Oraz

$$f_2(x) = \cos(2x) \tag{12}$$

Wykonaliśmy interpolację dla liczby węzłów: $\boldsymbol{n} = 5, 8, 21$ w przedziale $\boldsymbol{x} \in [-5, 5]$.

Odległość pomiędzy węzłami liczyliśmy za pomocą poniższego wzoru: $h = (x_{max} - x_{min})/n$.

Trzeba było zaimplementować dwie funkcji. Pierwsza (wynacz_M) zwracała wartości drugich pochodnych w węzłach, druga (wyznacz_Sx) wyznaczała wartości funkcji w położeniach międzywęzłowych.

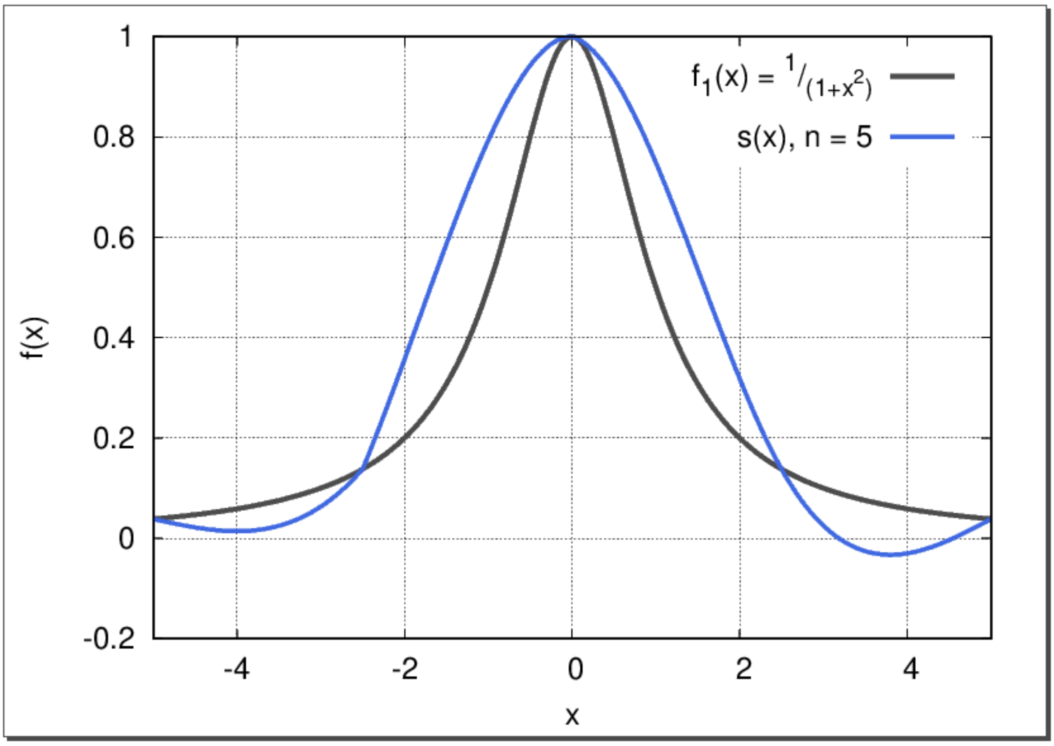
Na końcu dla funkcji (11) oraz dla **n** = 10 węzłów w przedziale $x \in [-5, 5]$, wyznaczyliśmy wartości drugich pochodnych za pomocą funkcji wynacz_M oraz za pomocą wzoru:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{f(x - \delta x) - 2f(x) + f(x + \delta x)}{\delta x}, \quad \delta x = 0.01 \tag{13}$$

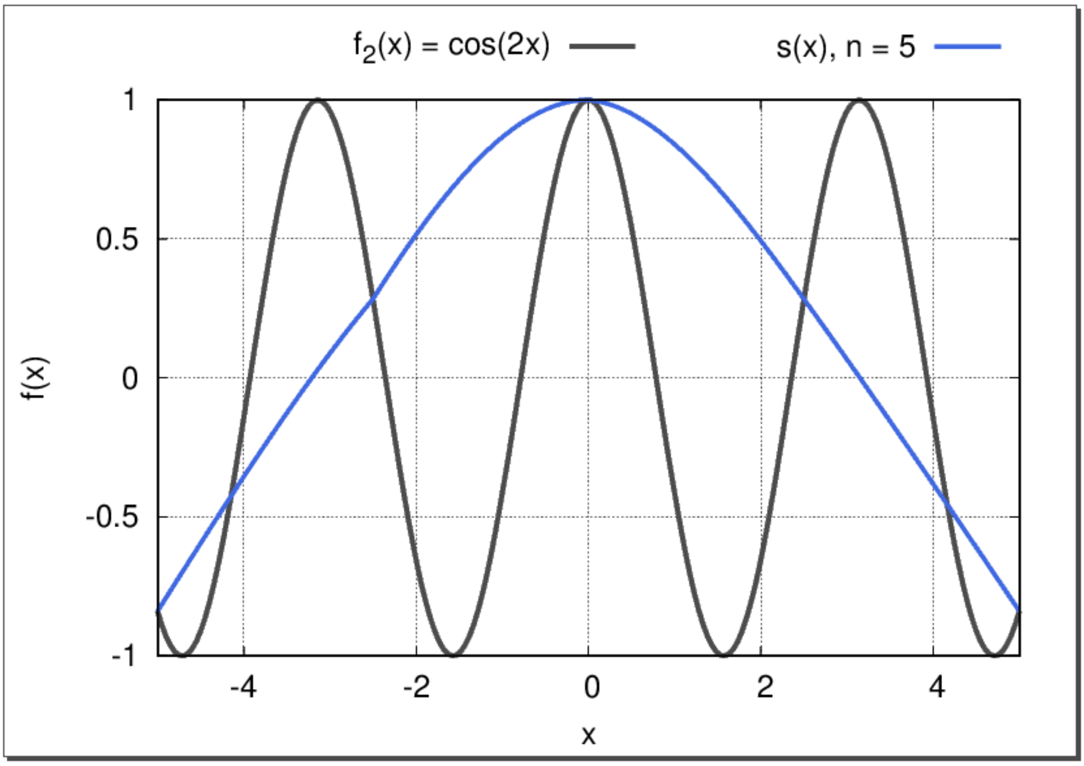
3. Wyniki

Wyniki działania programu zapisaliśmy do pliku, na podstawie którego wygenerowaliśmy wykresy.

1) Dla $n = 5$:

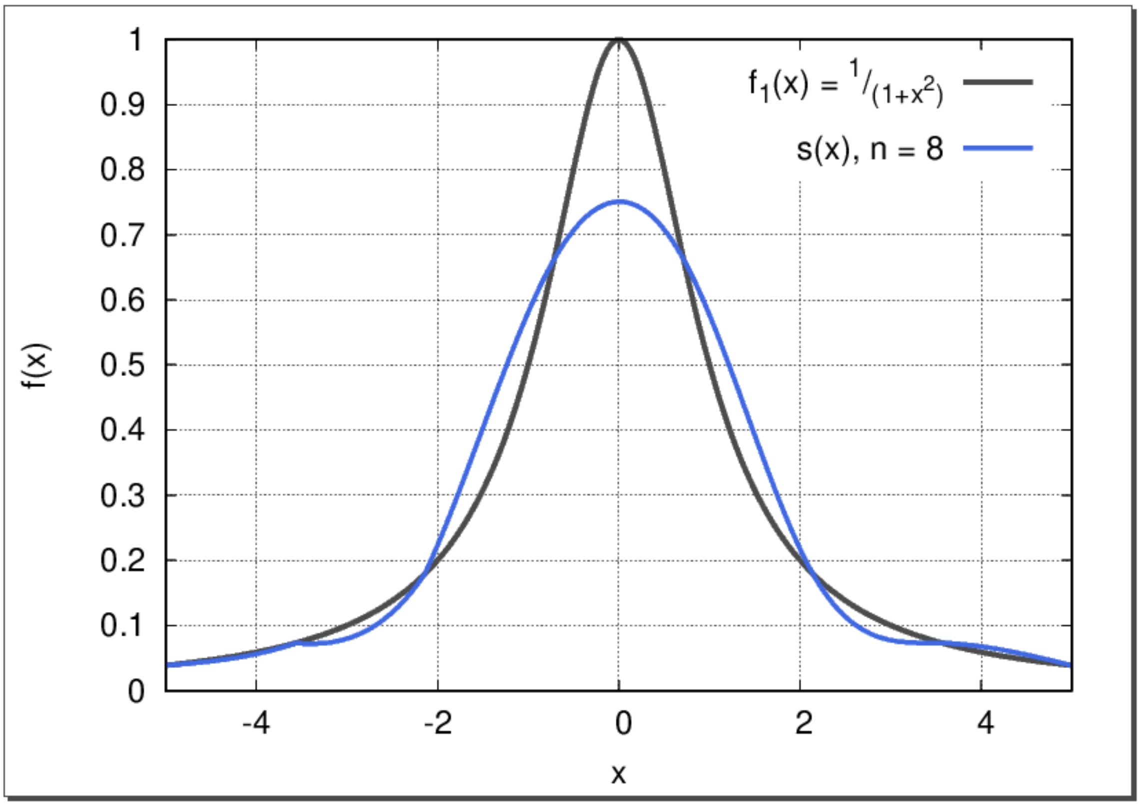


Rysunek 1. Wykres funkcji $f1$ (11) oraz jej interpolacji dla n = 5.

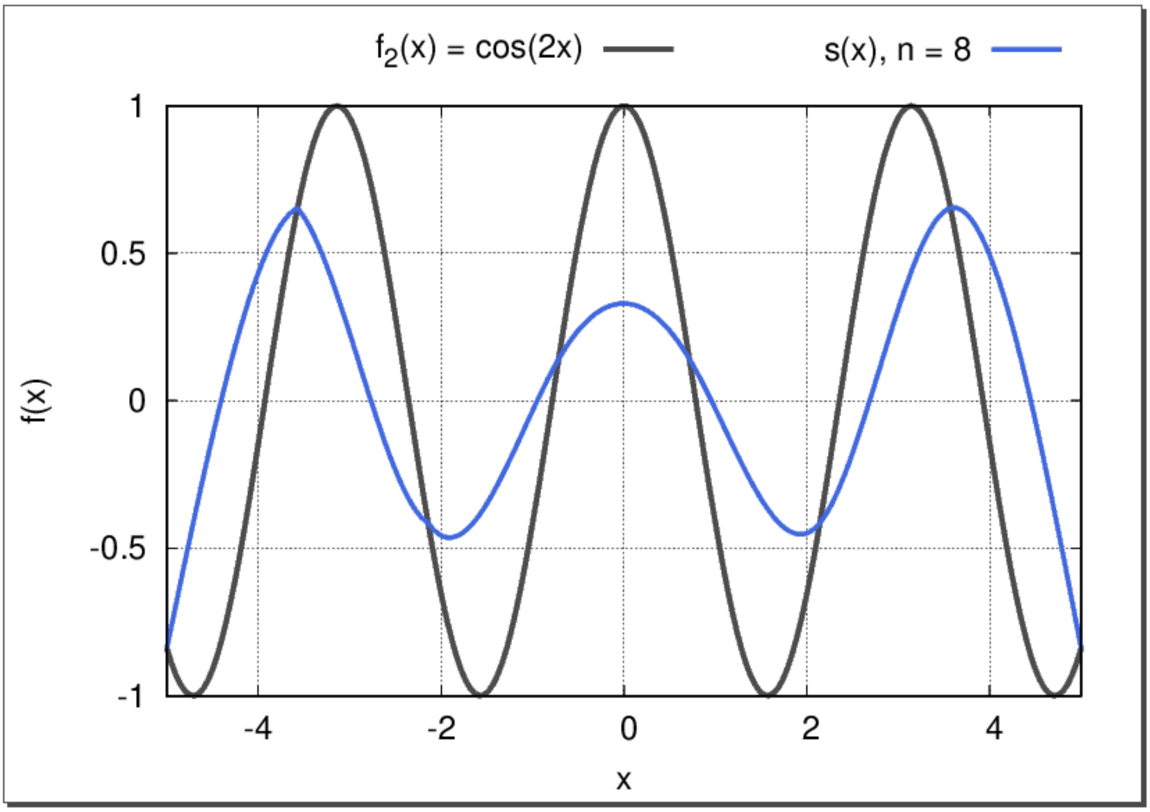


Rysunek 2. Wykres funkcji $f2$ (12) oraz jej interpolacji dla n = 5.

2) Dla $n = 8$:

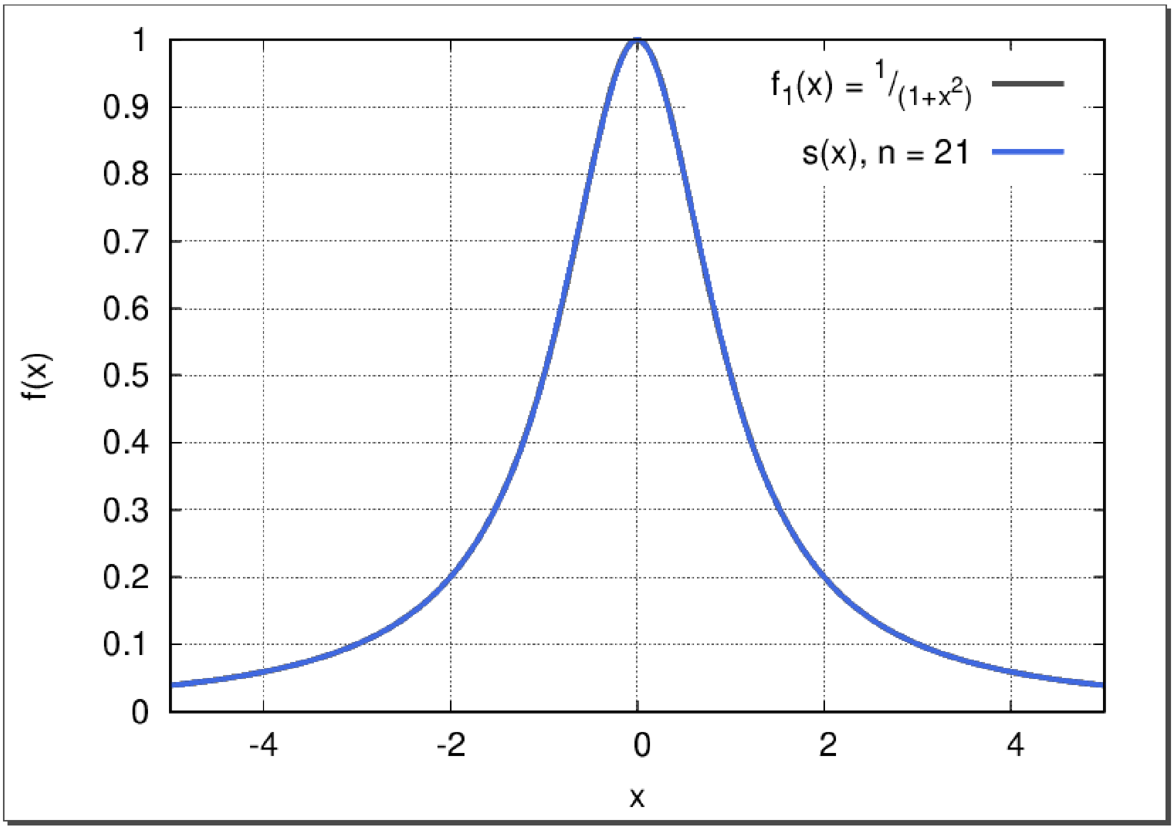


Rysunek 3. Wykres funkcji $f1$ (11) oraz jej interpolacji dla $n = 8$.

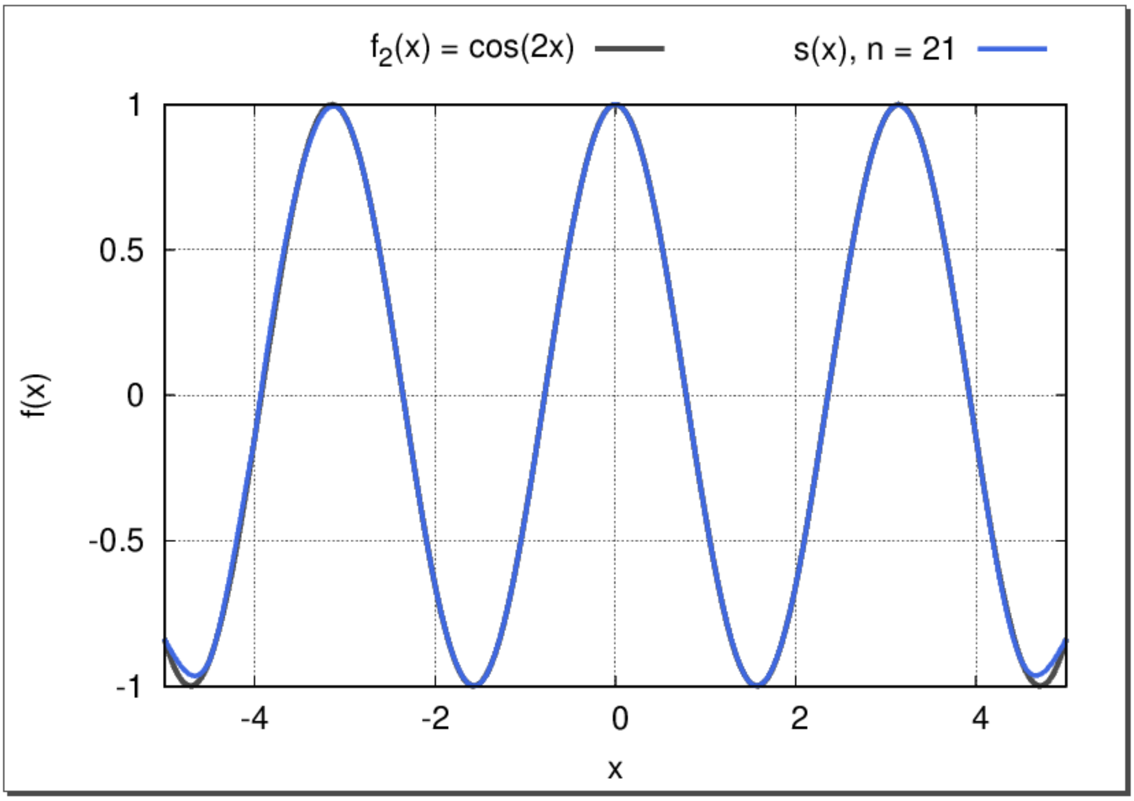


Rysunek 4. Wykres funkcji $f2$ (12) oraz jej interpolacji dla $n = 8$.

3) Dla $n = 21$:

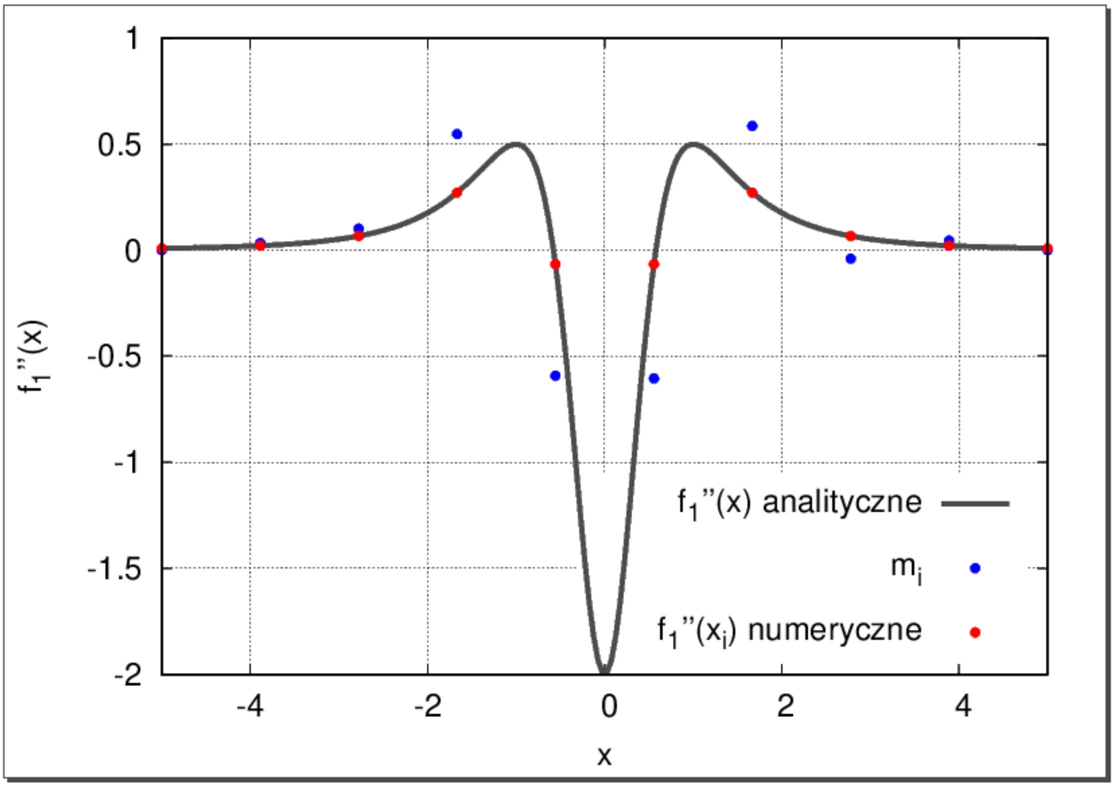


Rysunek 5. Wykres funkcji $f1$ (11) oraz jej interpolacji dla $n = 21$.



Rysunek 6. Wykres funkcji $f2$ (12) oraz jej interpolacji dla $n = 21$.

4)



Rysunek 7. Wartości drugich pochodnych wyznaczone analityczne oraz numeryczne($n = 10$).

4. Wnioski

Przeprowadziliśmy interpolację funkcjami sklejanymi dla funkcji (11) i (12).

Jak widać z rysunków 1,2 liczby węzłów n=5 jest za mało dla uzyskania żądanego efektu, gdyż dla n=8 (rysunki 3,4) sytuacja staje się lepsza. Dla n=21 osiągnęliśmy prawie idealne wyniki (rysunki 5,6), tylko na krańcach funkcji (12) (rysunek 6) widzimy, że nie udało się osiągnąć idealnego dopasowania. Możemy wywnioskować, że zwiększając liczbę węzłów otrzymujemy bardziej dokładne wyniki.

Jeśli porównywać z interpolacją węzłową Lagrange'a, to widzimy, że interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach jest trochę lepsza, na krańcach nie występuję żadnych oscylacji, dla otrzymania dokładniejszych wyników zwiększamy liczbę węzłów.