Sprawozdanie 13

Szacowanie całek przy użyciu kwadratur Gaussa

Kateryna Andrusiak

30 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

Numeryczne liczenie wartości całki polega na jej oszacowaniu przy użyciu kwadratury

$$C = \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot f(x_k) \tag{1}$$

gdzie: A_k to współczynniki kwadratury, a x_k to położenia węzłów kwadratury.

$$A_k = \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx \tag{2}$$

Ustalamy funkcję wagową $p(x)$ oraz liczbę węzłów $(N+1)$.
Szukamy:
a) położenia węzłów
b) współczynników A_k
tak aby rząd kwadratury był jak najwyższy.
Kwadratura tego typu nosi nazwę **kwadratury Gaussa**.
Do wyznaczenia kwadratur Gaussa używa się **wielomianów ortogonalnych**.

Funkcja wagowa $p(x)$ determinuje sposób wyznaczania węzłów i wartości współczynników kwadratury.

- Kwadratura Gaussa-Legendre'a:

  $p(x) = 1, \qquad x \in [a, b]$

- Kwadratura Gaussa-Laguerra:

  $p(x) = e^{-x}, \qquad x \in [0, \infty)$

- Kwadratura Gaussa-Hermite'a:

  $p(x) = e^{-x^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$

2. Problem

Naszym zadaniem było wyznaczenie wartości całek za pomocą kwadratur Gaussa-Legandre'a, Gaussa-Laguerra oraz Gaussa-Hermite'a.

1. Wyznaczyliśmy wartość całki niewłaściwej kwadraturą Gaussa-Legendre'a

$$C_1 = \int_0^a \ln(x)\,dx = aln(a) - a, \qquad a > 0 \tag{3}$$

dla $a = 10$ oraz liczby węzłów $n = 5, 6, 7, \ldots, 70.$

2. Wyznaczyliśmy wartość całki

$$C_2 = \int_0^\infty (x-10)^2 \sin(4x)\, e^{-x} dx = 22.95461022 \tag{4}$$

przy użyciu:

a) kwadratury Gaussa-Laguerre'a: $x \in [0, \infty)$, $f(x) = (x-10)^2 \sin(4x)$, $p(x) = e^{-x}$
b) kwadratury Gaussa-Legendre'a: $x \in [0, 10]$ - zmieniamy górną granicę całkowania, $f(x) = (x-10)^2 \sin(4x)\, e^{-x}$, $p(x) = 1$

dla liczby węzłów $n = 5, 6, 7, \ldots, 70.$

3. Wyznaczyliśmy wartość całki

$$C_3 = \int_{-\infty}^\infty x^7 2^{(-x^2+x+4)} \cdot e^{-x^2} dx = 14.83995751 \tag{5}$$

przy użyciu:

a) kwadratury Gaussa-Hermite'a: $x \in [0, \infty)$, $f(x) = x^7 2^{(-x^2+x+4)}$, $p(x) = e^{-x^2}$
b) kwadratury Gaussa-Legendre'a: $x \in [-10, 15]$, $f(x) = x^7 2^{(-x^2+x+4)} \cdot e^{-x^2}$, $p(x) = 1$

dla liczby węzłów $n = 5, 6, 7, \ldots, 70.$

W projekcie wykorzystaliśmy procedury z biblioteki Numerical Recipes (NR). Interesujące nas procedury przyjmują następujące argumenty:

• metoda Gaussa-Legendre'a

```
void gauleg(float x1, float x2, float x[], float w[], int n)
```

gdzie: **x1**- lewy kraniec przedziału całkowania, **x2** - prawy kraniec przedziału całkowania, **n** - liczba węzłów, **x[]** - tablica z położeniami węzłów kwadratury, **w[]** - tablica z wartościami współczynników kwadratury

• metoda Gaussa-Laguerre'a

```
void gaulag(float x[], float w[], int n, float alf)
```

gdzie: **n** - liczba węzłów, **x[]** - tablica z położeniami węzłów kwadratury, **w[]** - tablica z wartościami współczynników kwadratury, **alf = 0** - parametr określający typ wielomianów Laguerre'a (alf =0 - zwykłe)

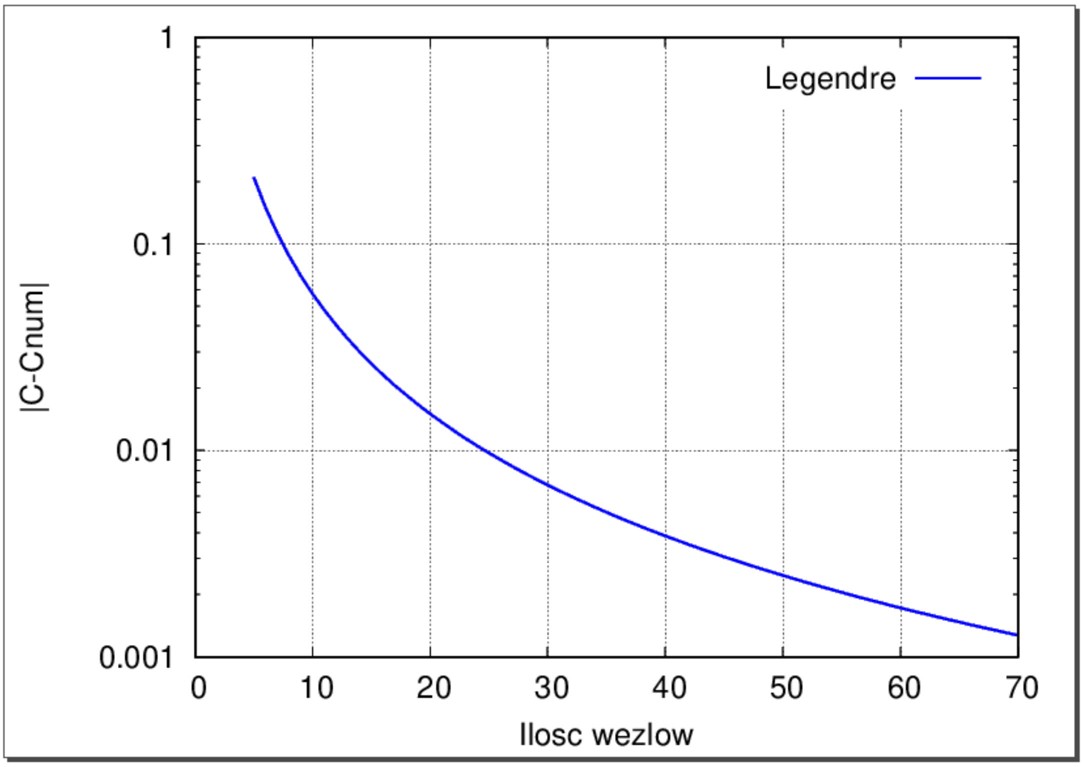
• metoda Gaussa-Hermite'a

```
void gauher(float x[], float w[], int n)
```

gdzie: **n** - liczba węzłów, **x[]** - tablica z położeniami węzłów kwadratury, **w[]** - tablica z wartościami współczynników kwadratury.

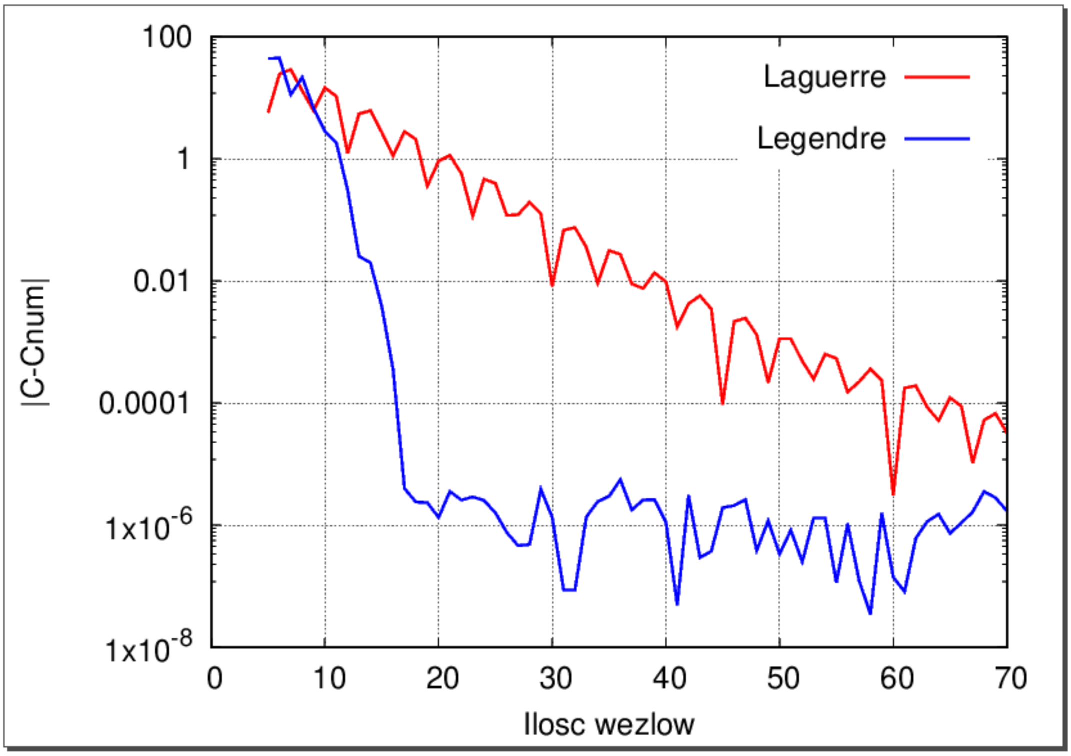
3. Wyniki

1. Wyznaczyliśmy wartość całki niewłaściwej C_1 (3).



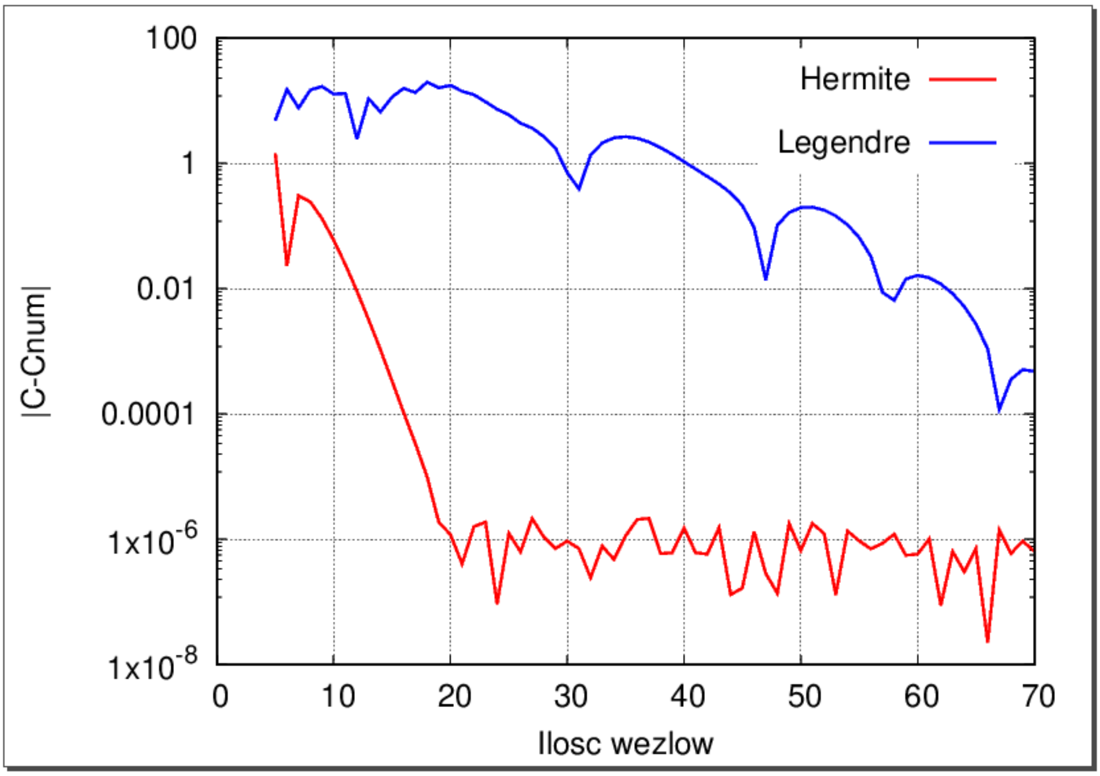
Rys 1. Wykres modułu różnicy wartości dokładnej i numerycznej |Cdok − Cnum| (skala pionowa logarytmiczna) dla C_1(3).

2. Wyznaczyliśmy wartość całki C_2 (4) przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a oraz kwadratury Gaussa-Legendre'a

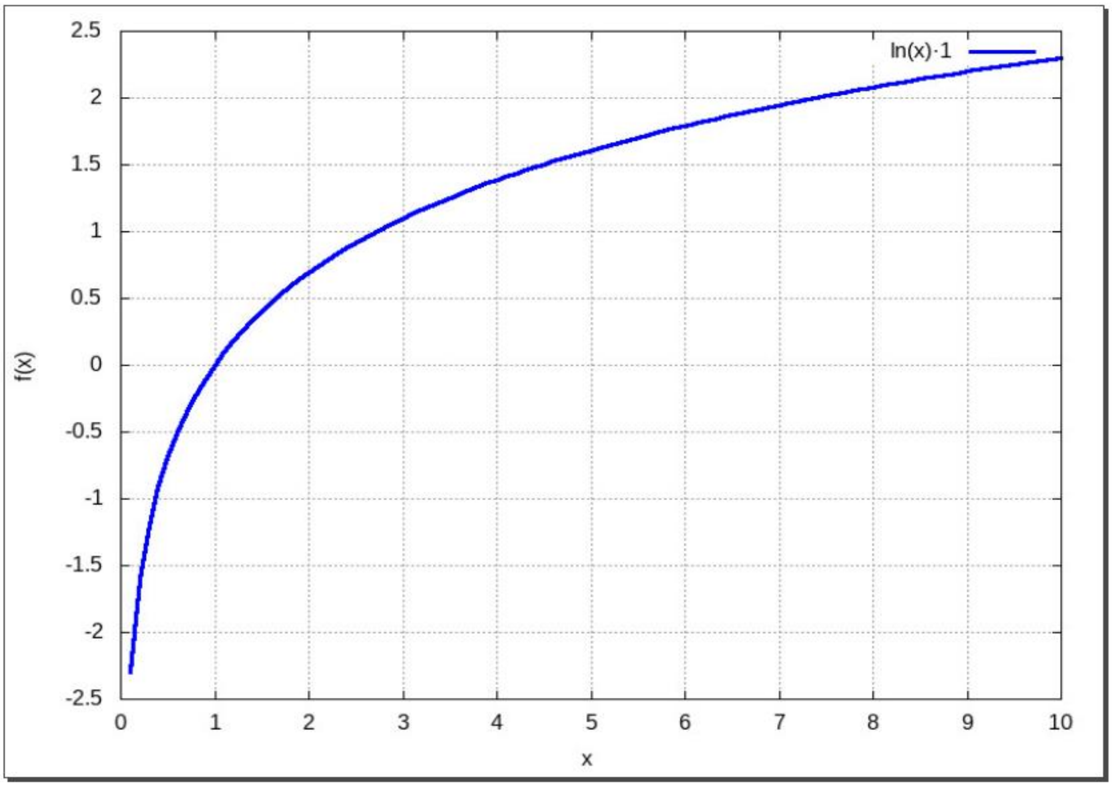


Rys 2. Wykres modułu różnicy wartości dokładnej i numerycznej |Cdok − Cnum| (skala pionowa logarytmiczna) dla C_2 (4).

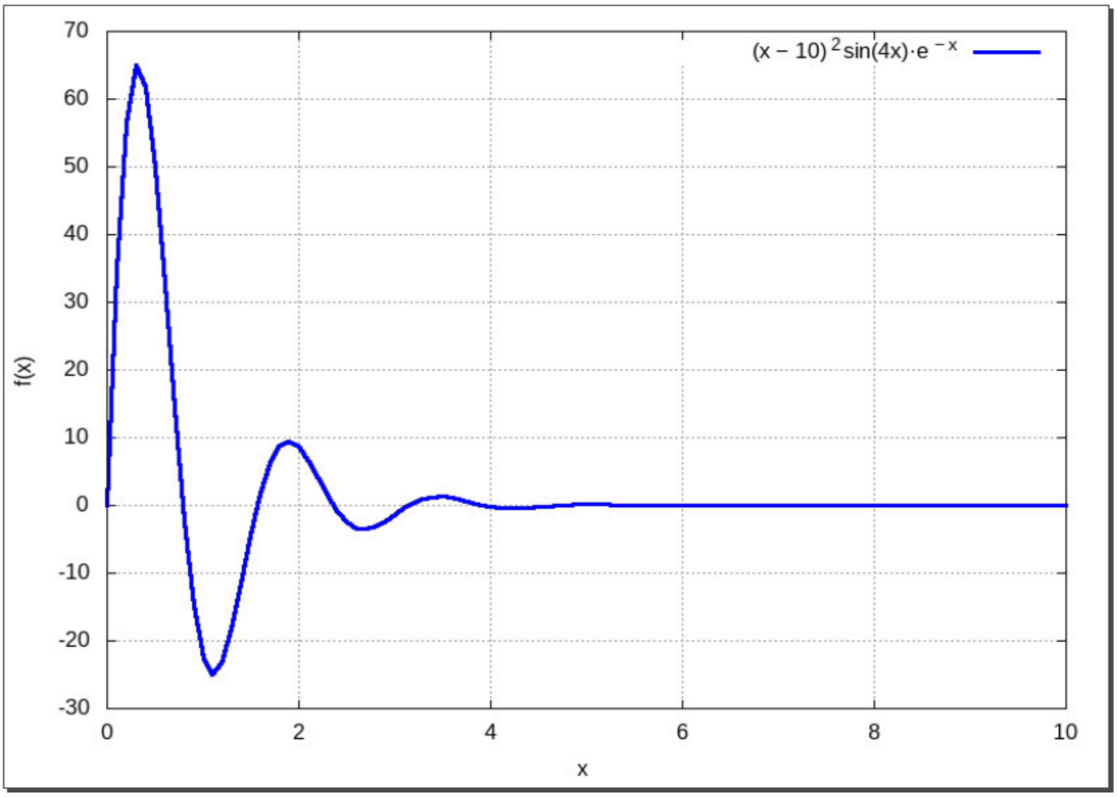
3. Wyznaczyliśmy wartość całki C_3 (5) przy użyciu kwadratury Gaussa- Hermite'a oraz kwadratury Gaussa-Legendre'a



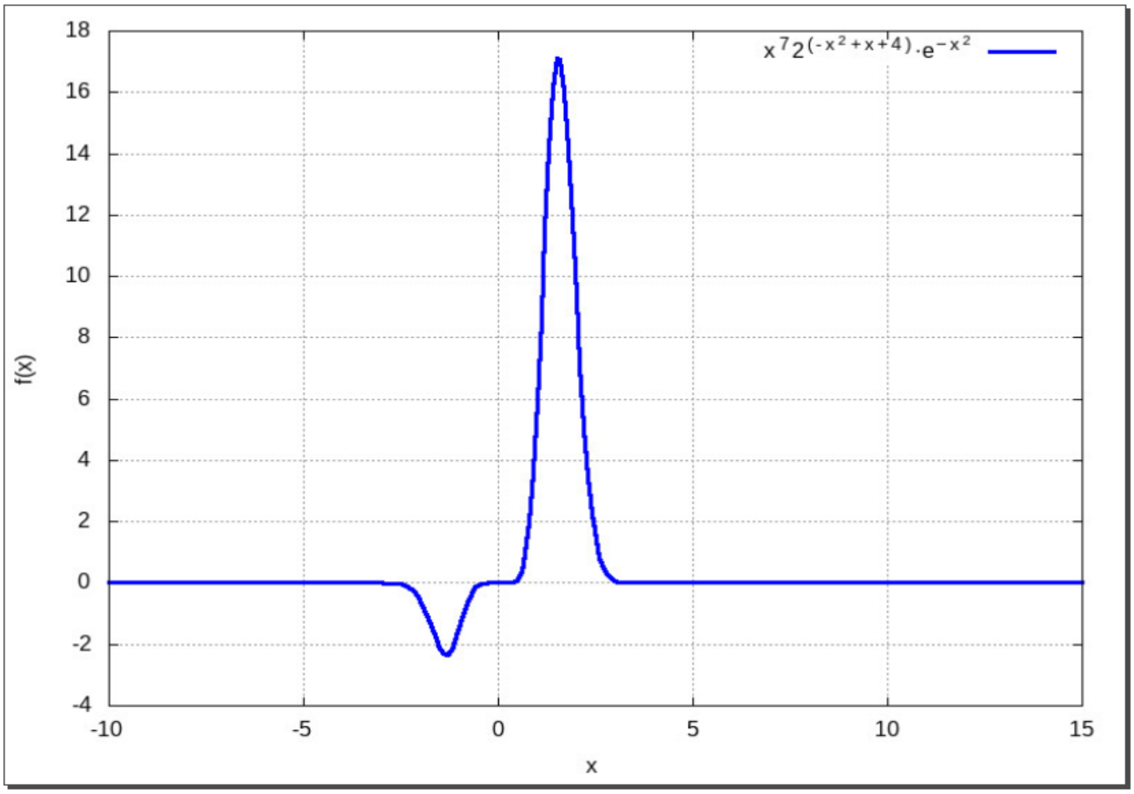
Rys 3. Wykres modułu różnicy wartości dokładnej i numerycznej |Cdok − Cnum| (skala pionowa logarytmiczna) dla C_3 (5).



Rys 4. Wykres funkcji iloczynu funkcji podcałkowej i funkcji wagowych $f(x) \cdot p(x)$ C_1*(3).*



Rys 5. Wykres funkcji iloczynu funkcji podcałkowej i funkcji wagowych $f(x) \cdot p(x)$ C_2*(4).*



Rys 6. Wykres funkcji iloczynu funkcji podcałkowej i funkcji wagowych $f(x) \cdot p(x)$ C_3(5).

4. Wnioski

Udało się nam wyznaczyć wartości całek C_1, C_2, C_3 za pomocą kwadratur Gaussa.
Z rysunków 1-3 widzimy, że im większa ilość węzłów, tym dokładniejsze wyniki otrzymujemy.
Patrząc na rysunki 2,3 można wywnioskować ze metoda Gaussa-Legendre'a osiąga dokładne wyniki szybciej niż metody Gaussa-Laguerre'a oraz Gaussa- Hermite'a.
W niektórych przypadkach możliwe jest zastąpienie kwadratur Laguerre'a i Hermite'a kwadraturą Legendre'a, dlatego że wielomiany ortogonalne kwadratur Laguerre'a i Hermite'a z każdym krokiem co raz bardziej 'oscylują'.