Metody numeryczne

Sprawozdanie 1

Rozkład LU macierzy trójdiagonalnej - rozwiązanie równania Poissona w jednym wymiarze

Kateryna Andrusiak

10 marca 2020

1. Wstęp teoretyczny

Macierz trójdiagonalna, to taka macierz kwadratowa, której wszystkie elementy są zerowe poza diagonalą i wstęgą wokół niej:

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Można wykonać rozkład LU macierzy T, macierze te mają postać dwu-diagonalną:

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & l_{n-1} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dla obliczenia tych elementów wykorzystujemy wzory:

$$u_1 = d_1 \quad (3) \qquad l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}} \quad (4)$$

$$u_i = d_i - l_i c_{i-1} \qquad i = 2,3,\dots,n \qquad (5)$$

Rozwiązanie ukladu równań:

$$T \cdot \vec{v} = \vec{b} \qquad (6)$$

sprowadza się do rozwiązania dwóch układów równań z macierzami **L** i **U**:

$$L \cdot \vec{y} = \vec{b} \qquad (7)$$

$$U \cdot \vec{v} = \vec{y} \qquad (8)$$

$$y_1 = b_1 \quad (9) \qquad y_i = b_i - l_i y_{i-1}, \qquad i = 2,3,\dots,n \quad (10)$$

$$v_n = \frac{y_n}{u_n} \quad (11) \qquad v_i = \frac{y_i - c_i v_i}{u_i}, \qquad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (12)$$

2. Problem

Naszym zadaniem na labolatorium było rozwiązanie równanie Poissona:

$$\nabla^2 V(x) = -\rho(x) \qquad (13)$$

w przedziale $x \in [-X_b, X_b]$ z warunkiem brzegowym $V(-X_b) = V(X_b) = 0$ dla rozkladu gęstości:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-X_b, -X_a) \\ +1, & x \in [-X_a, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (0, X_a] \\ 0, & x \in (X_a, X_b] \end{cases} \qquad (14)$$

Do rozwiązania układu stosowaliśmy rozkład LU dla macierzy trójdiagonalnej, korzystając ze wzorów (3)—(12) .
Rozwiązywaliśmy mając take dane:
siatka z węzłami:

$$x_i = -X_b + h \cdot (i-1), \quad i = 1,2,\dots,N \tag{15}$$

gdzie h – odległość między węzłami:

$$h = 2 \cdot \frac{X_b}{N-1} \tag{16}$$

N — ilość wszystkich węzłów.
Przyjmujemy: $X_b = 2$, $X_a = 0.5$ oraz N =50, 500.

Drugą pochodną w równaniu 1 zastępujemy ilorazem różnicowym zdefiniowanym na siatce:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} = -\rho_i \tag{17}$$

Rówanie (17) generuje układ równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_1 \\ -\rho_2 \\ -\rho_3 \\ \vdots \\ -\rho_{n-1} \\ -\rho_n \end{bmatrix} \tag{18}$$

Wartości elementów macierzy otrzymujemy wprost z równania (17):

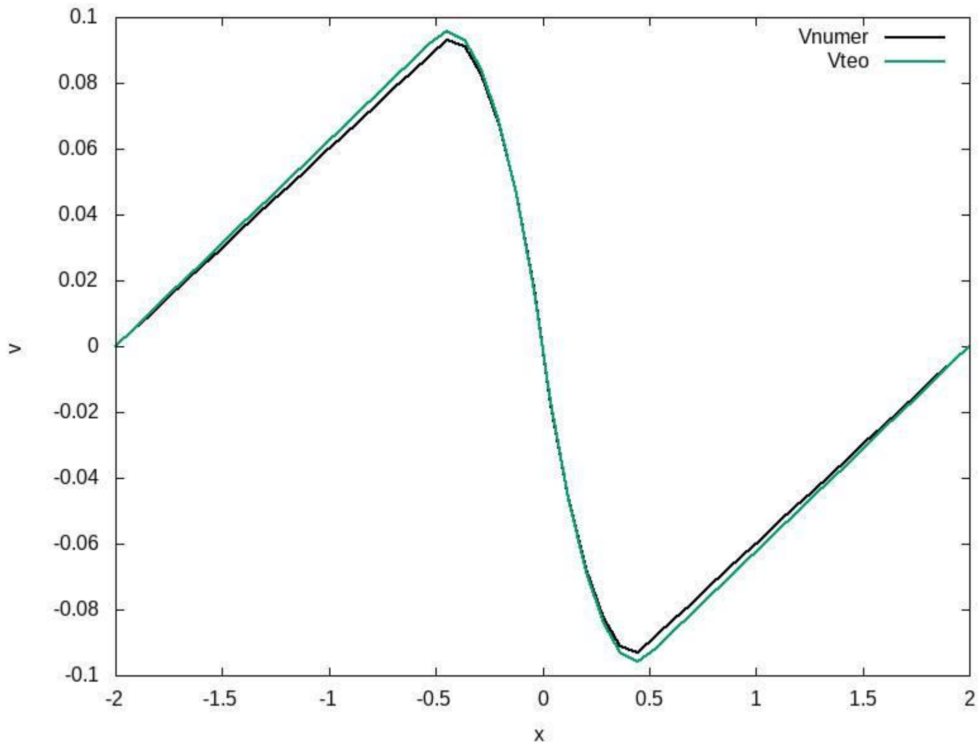
$$d_i = -\frac{2}{h^2}, \quad a_i = c_i = \frac{1}{h^2} \tag{19}$$

<u>Warunki brzegowe</u> wprowadzamy dla pierwszego i ostatniego równania. W pierwszym równaniu kładziemy: d_1 = 1, c_1 = 0, ρ_1 = 0. W ostatnim równaniu kładziemy: d_n= 1, a_n= 0, ρ_n= 0.

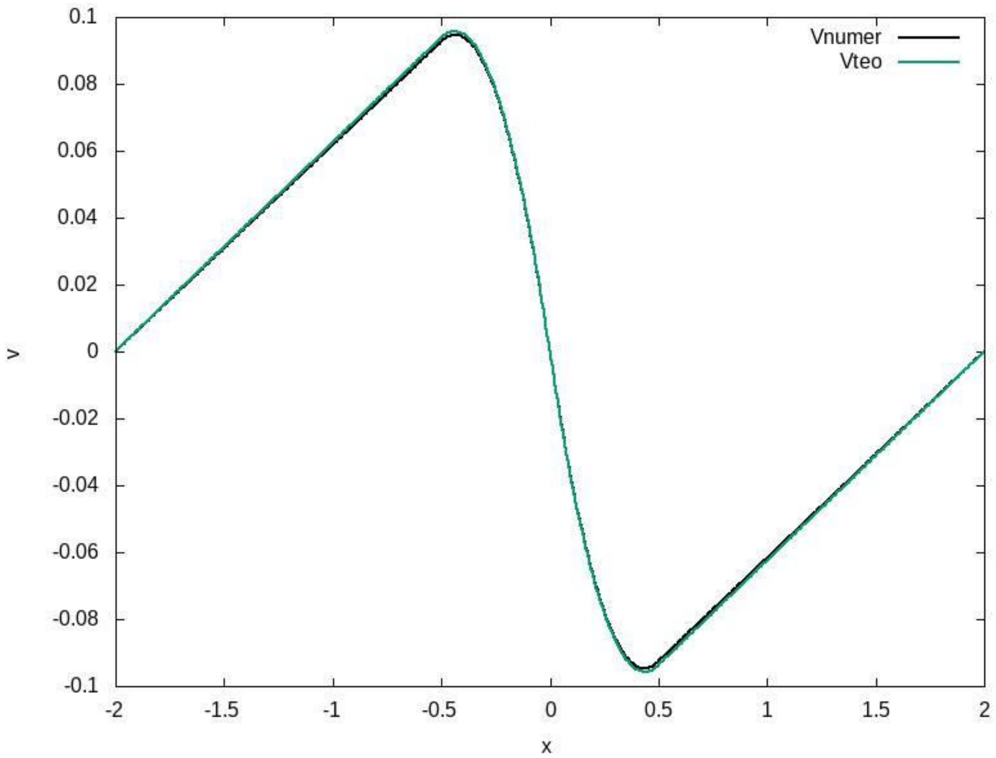
Gdy otrzymaliśmy wyniki dla V numerycznego, porównalismy z wartościami $\underline{V}$ teoretycznego:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} + \frac{1}{8}, & x \in [-X_b, -X_a] \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{7}{16}x, & x \in [-X_a, 0] \\ \frac{x^2}{2} - \frac{7}{16}x, & x \in [0, X_a] \\ \frac{x}{16} - \frac{1}{8}, & x \in [X_a, X_b] \end{cases} \tag{20}$$

3. Wyniki



Rysunek 1. Wykres zależności V numerycznego oraz V teorytycznego od $\boldsymbol{x}$ dla ilości węzłów N=50.



Rysunek 2. Wykres zależności V numerycznego oraz V teorytycznego od $\boldsymbol{x}$ dla ilości węzłów N=500.

4. Wnioski

Za pomocą rozkładu LU udało się nam rozwiązać układ równań Poissona, przy czym otrzymaliśmy wyniki bliskie oczekiwanych. Analizując wykresy podane w wynikach, widzimy że V numeryczne jest przybliżone do V teorytycznego, co świadczy o tym że ta metoda jest dość wygodna dla danego problemu. Też widzimy, że im więcej mamy węzłów tym bardziej dokładne wyniki otrzymujemy.