Metody numeryczne

Sprawozdanie 7

Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położeń węzłów

Kateryna Andrusiak

23 kwietnia 2020

1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach niebędących węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości.

Twierdzenie. Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n (n ≥ 0), który w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Interpolacja Lagrange'a polega na wyznaczeniu funkcji interpolacyjnej w postaci wielomianu stopnia n+1, gdzie n – liczba węzłów.

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \Phi_i(x) \tag{1}$$

Funkcje $\Phi_i(x)$ są wielomianami, co najwyżej stopnia **n**.

Dla każdego podanego punktu tworzymy **wielomian węzłowy Lagrange'a** który ma postać:

$$\Phi_j(x) = \prod_{i=0 \wedge i \neq j}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \tag{2}$$

gdzie: x – kolejne szukane przybliżenie, x_j– kolejne wartości położeń węzłów.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{i=0 \wedge i \neq j}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \tag{3}$$

Za pomocą zbioru otrzymanych wyników jesteśmy w stanie narysować przybliżony wykres interesującej nas funkcji.

Optymalizacja położeń węzłów **metodą Chebyshev'a**, określamy położenia węzłów, jako zera wielomianów Chebyshev'a

$$x_m = \frac{1}{2}[(x_{max} - x_{min}) \cos\left(\pi \cdot \frac{2m+1}{2n+1}\right) + (x_{min} + x_{max}) \qquad m = 0,1,2, \dots, n \tag{4}$$

Pozwala to zwiększyć dokładność interpolacji.

2. Problem

Naszym zadaniem było znalezienie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a ($W_n(x)$) dla funkcji:

$$y(x) = \exp(-x^2) \tag{5}$$

w przedziale $x\epsilon\,[-5{,}5]$.

Czyli dla wektora położeń węzłów interpolacji $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ oraz wartości funkcji interpolowanej $y = [y_0, y_1, \ldots, y_n]$ wykorzystujemy wzór wynikający z wzoru (3):

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)} \tag{6}$$

gdzie $\omega_n(x)$ to wielomian czynnikowy (stopnia n + 1)

$$\omega_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \ldots (x - x_n) \tag{7}$$

a $\omega_n'(x)$ jest pochodną wielomianu czynnikowego (stopnia n) liczonym w punkcie x_j

$$\omega_n'(x_j) = (x_j - x_0) \cdot (x_j - x_1) \ldots (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \ldots (x_j - x_n) \tag{8}$$

Korzystamy z pseudokodu pozwalającego wyznaczyć wartość interpolowaną w położeniu międzywęzłowym:

```
inicjalizacja:

x = ... − wartość argumentu dla którego liczymy W_n(x)
wielomian=0    − zerujemy zmienną w której zachowujemy sumę W_n(x)

for(j=0; j<=n;j++){

  licznik=1.0 // wartość 1 jest neutralna dla iloczynu
  mianownik=1.0

  // pętla w której obliczamy iloczyny (licznik i mianownik)
  // pojedynczy wyraz sumy

  for(i=0; i<=n; i++){
    licznik = licznik · (x − x_j)
    if( i != j ) mianownik = mianownik · (x_i−x_j) // pomijamy element (x_j − x_j)
  }

  // sumowanie wkładów od poszczególnych węzłów y_j

  wielomian = wielomian + y_j/(x−x_j) · licznik/mianownik

}
```

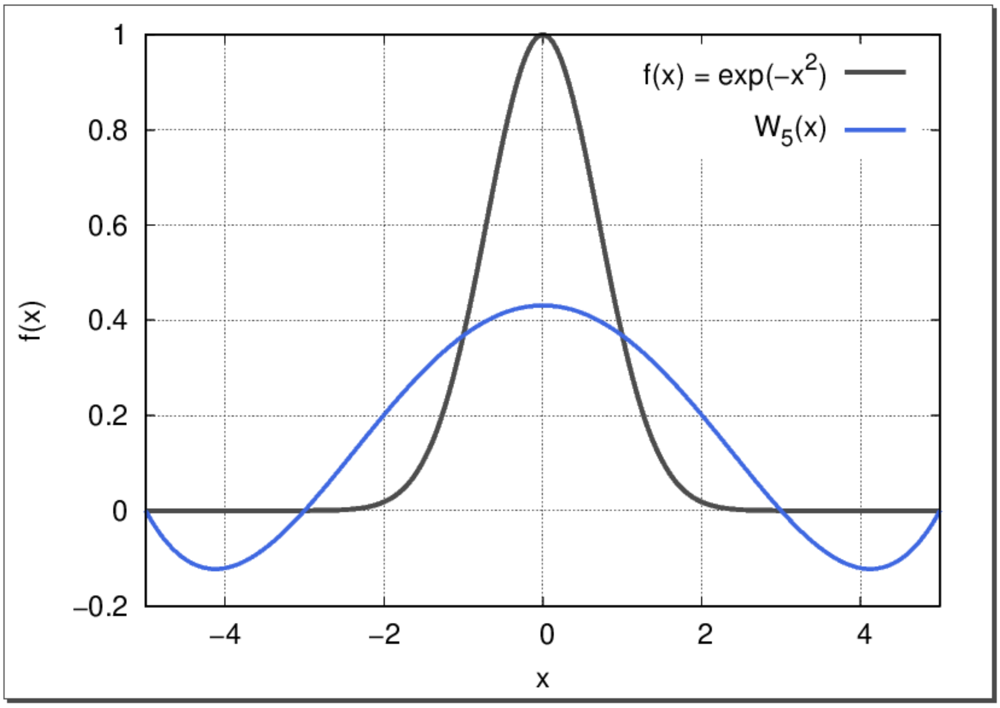
Przeprowadziliśmy interpolację funkcji (5) dla: $n = 5, 10, 15, 20$.
Najpierw wykonywali ten proces dla węzłów równoległych, gdzie pierwszy i ostatni element wyznaczają krańce przedziału interpolacji.
Odległość wyznaczamy następująco: $h = ((x_{max} - x_{min})/n)$.

Następnie po optymalizacji położeń węzłów, za pomocą metody Chebyshev'a (4), powtórzyliśmy interpolację dla: $n = 5, 10, 15, 20$.

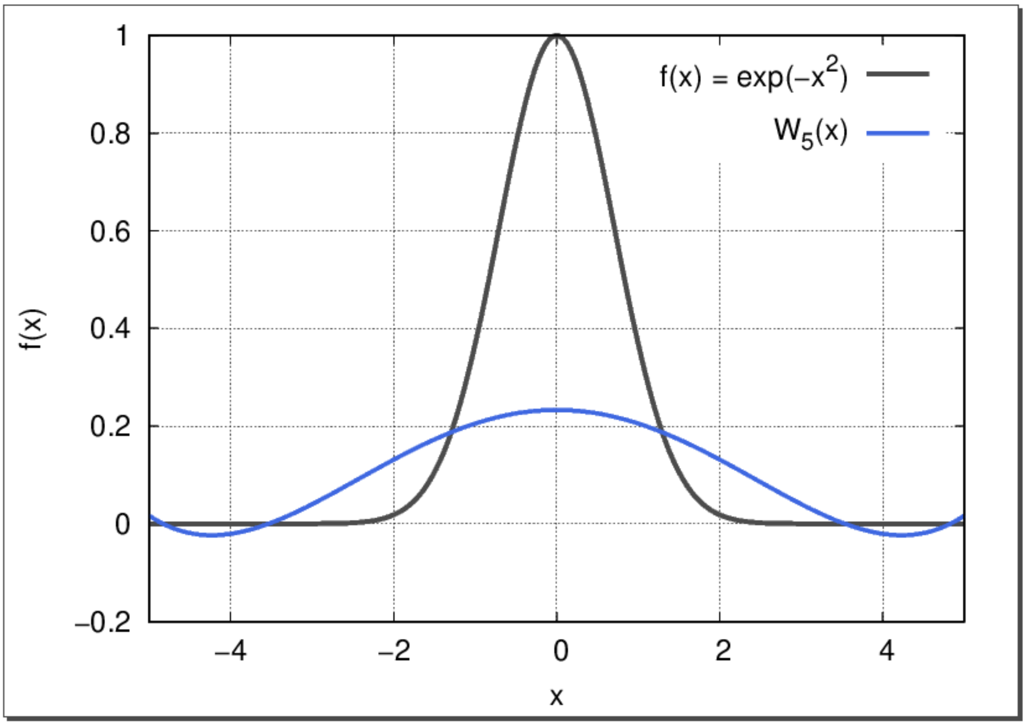
3. Wyniki

Wyniki działania programu zapisaliśmy do pliku, na podstawie którego wygenerowaliśmy wykresy.

1) Dla $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$:

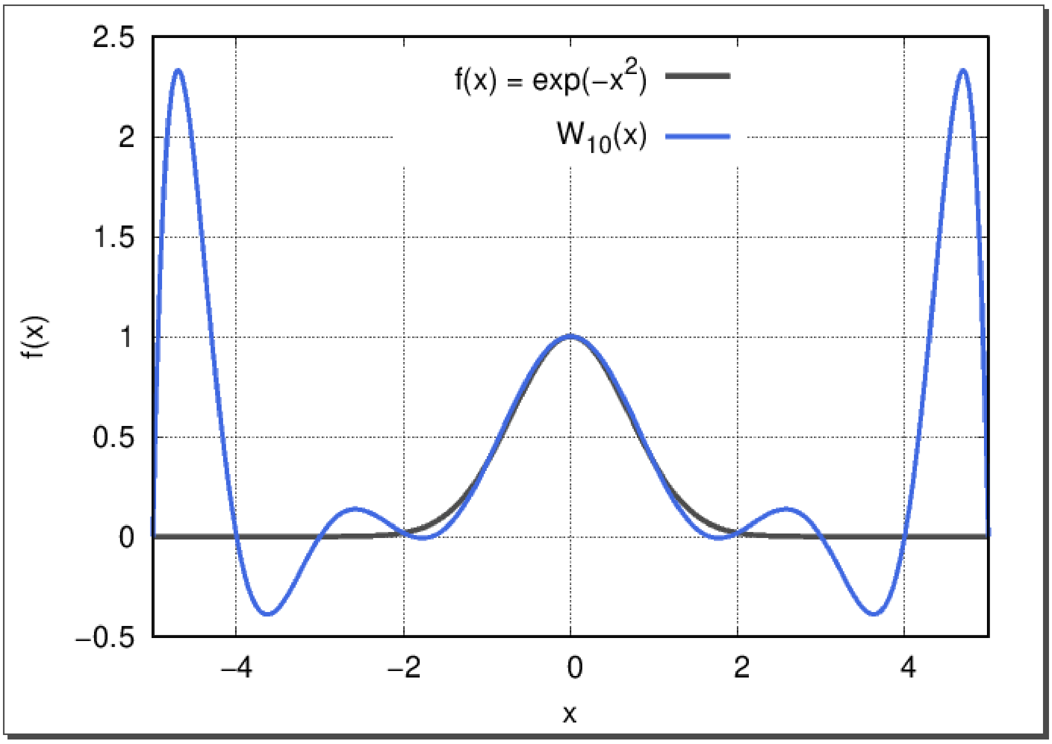


Rysunek 1. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 5$, równoodległe położenia węzłów.

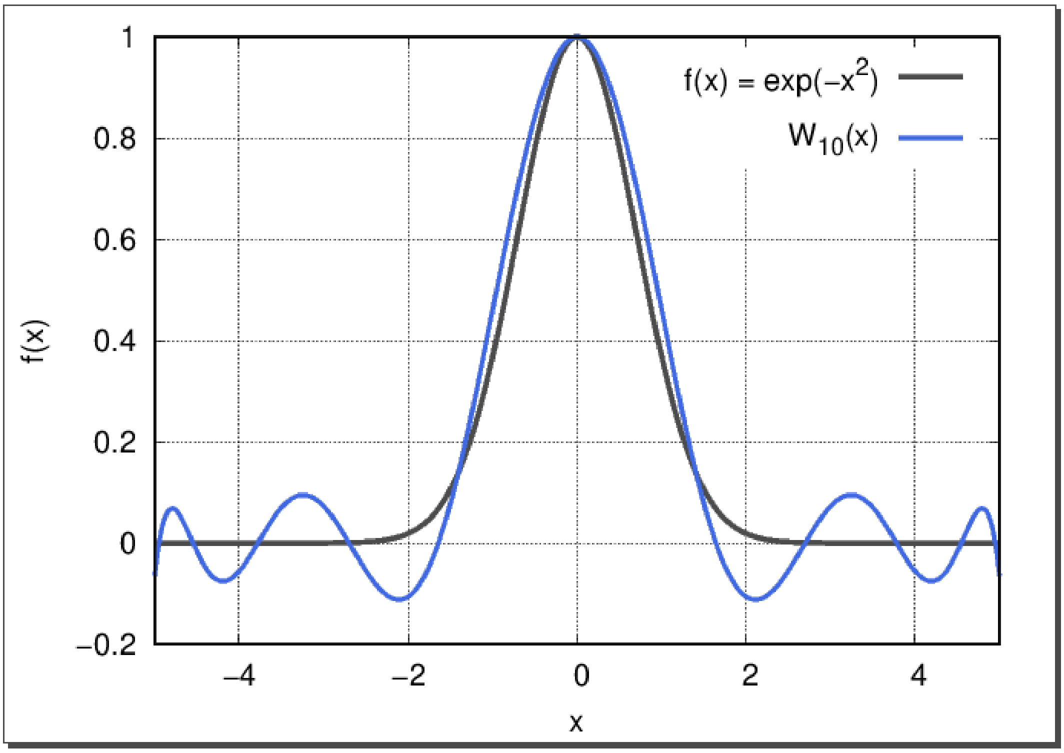


Rysunek 2. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 5$ (położenia węzłów - metoda Chebyshev'a)

2) Dla $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}$:

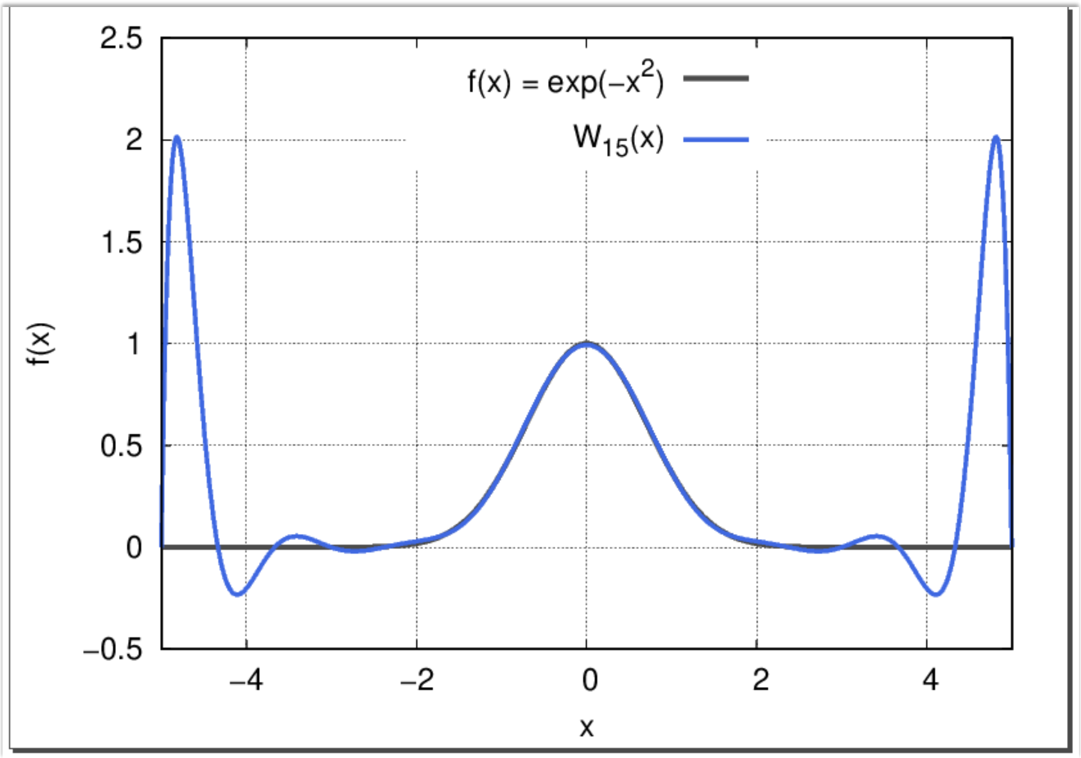


Rysunek 3. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 10$, równoodległe położenia węzłów.

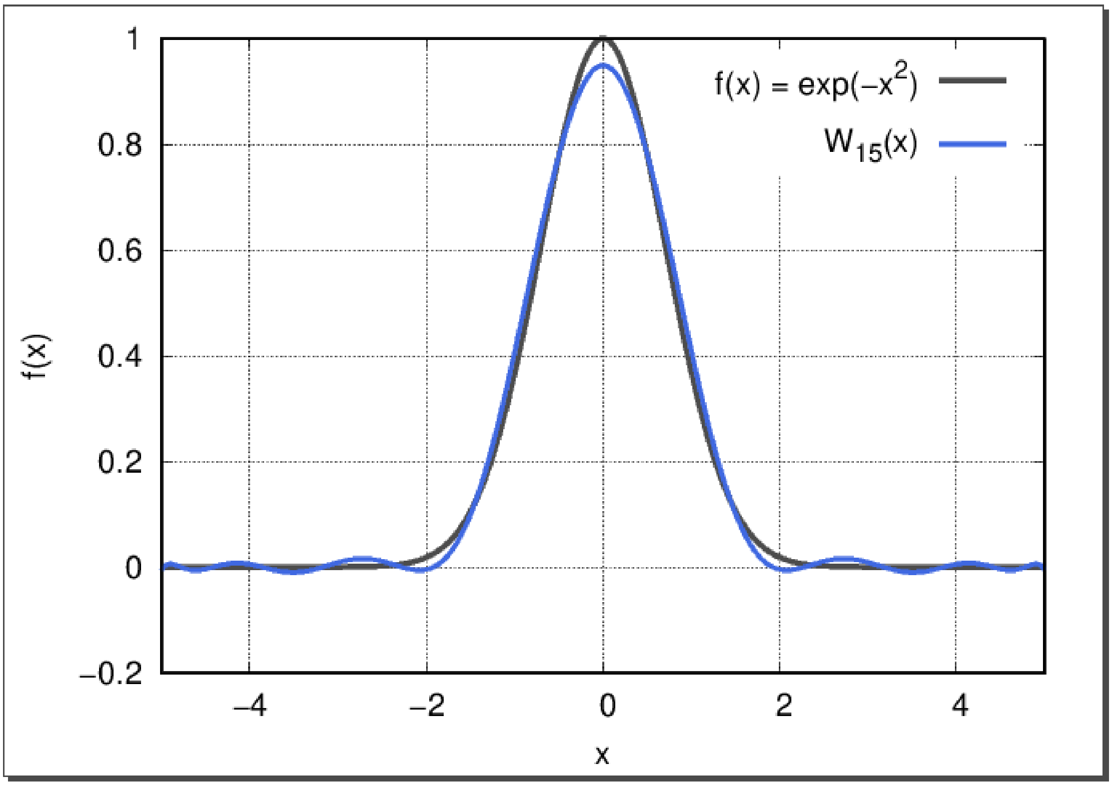


Rysunek 4. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 10$ (położenia węzłów - metoda Chebyshev'a)

3) Dla $\boldsymbol{n} = \mathbf{15}$:

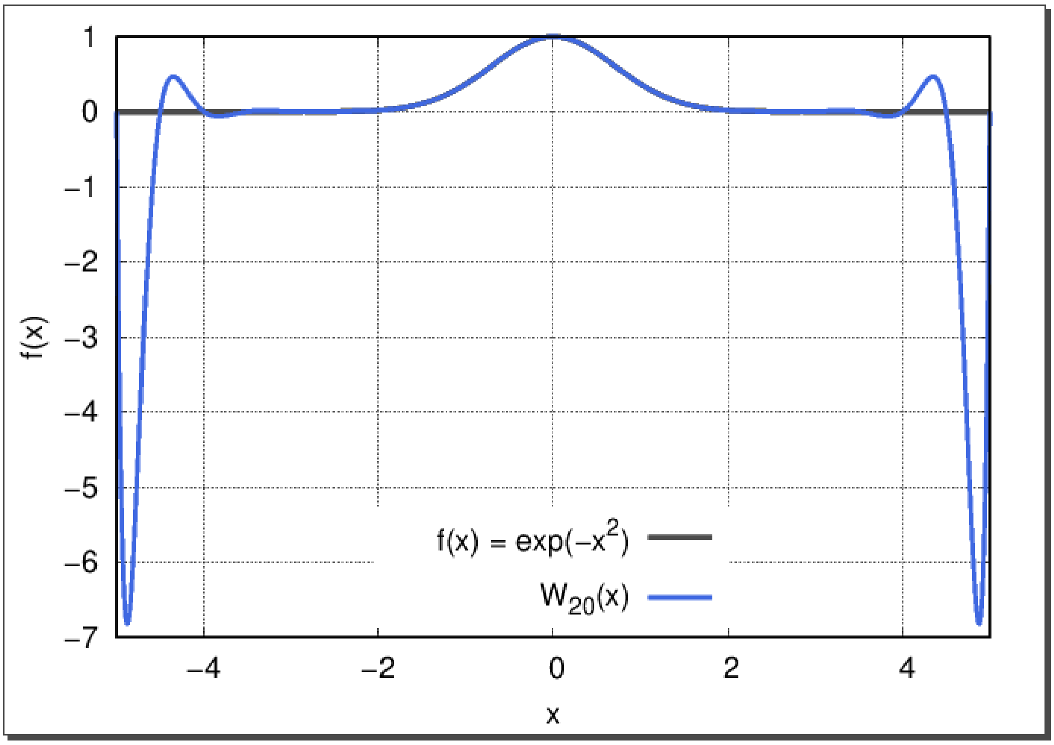


Rysunek 5. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 15$, równoodległe położenia węzłów.

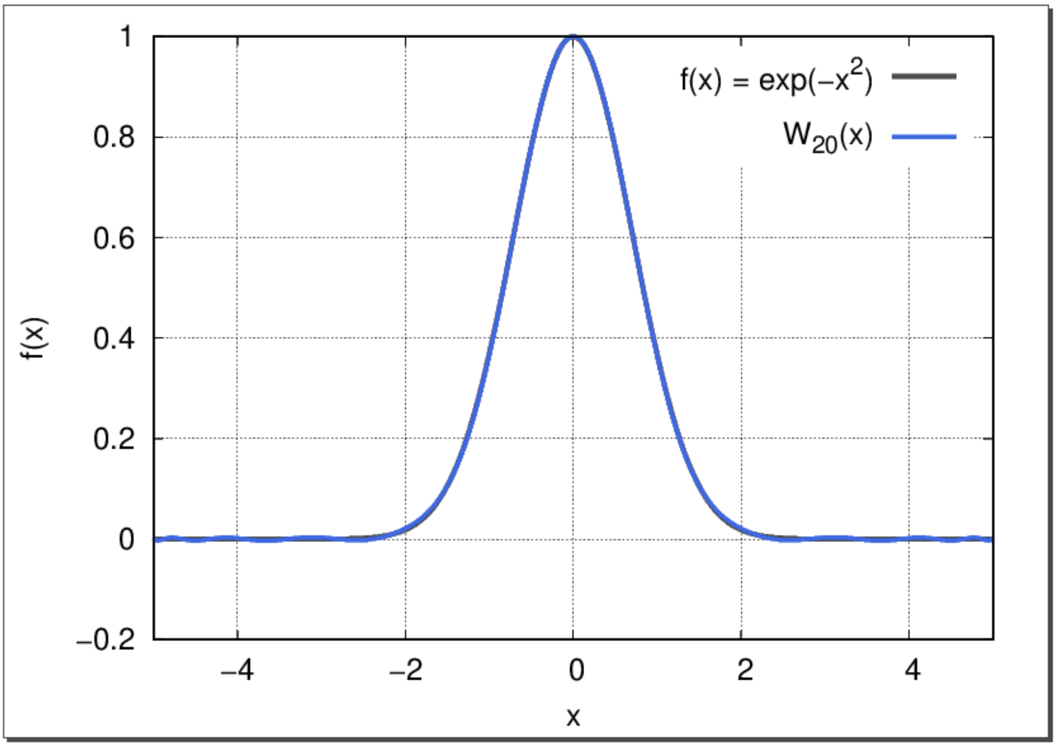


Rysunek 6. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 15$ (położenia węzłów - metoda Chebyshev'a)

4) Dla $n = 20$:



Rysunek 7. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 20$, równoodległe położenia węzłów.



Rysunek 8. Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla $n = 20$ (położenia węzłów - metoda Chebyshev'a)

4. Wnioski

Udało się nam znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a ($W_n(x)$) dla funkcji (5).
Jak widać z wyników im większa liczba węzłów, tym bardziej dokładne wyniki otrzymujemy. Też musimy zwrócić uwagę (w szczególności rysunki 3,5,7), że krańcach przedziału interpolacji pojawią się silne oscylacje wielomianu interpolacyjnego.
Zwiększanie liczby węzłów interpolacji (przy stałych odległościach) nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Wpływ na to mają oscylacje wielomianów wyższych rzędów. Jest to efekt Rungego - zadanie jest źle uwarunkowane.
W naszym przypadku, jak widać z rysunku 8, zwiększając liczbę węzłów oraz wykorzystując metodę optymalizacji węzłów Chebyshev'a, udało się nam osiągnąć prawie idealną interpolację.