Sprawozdanie 14

Generowanie ciągu liczb pseudolosowych o rozkładzie jednorodnym w kuli 3D

Kateryna Andrusiak

10 czerwca 2020

1. Wstęp teoretyczny

Generatory liniowe.

Generatory liniowe tworzą ciąg liczb według schematu:

$$X_{n+1} = (a_1X_n + a_2X_{n-1} + \cdots + a_kX_{n-k+1} + c)\ mod\ m \tag{1}$$

gdzie: $a_1, a_2, \dots, a_k, m, c$ – parametry generatora(ustalone liczby).

Generator multiplikatywny.

Generatorem multiplikatywnym nazywa się generator liniowy dla $c = 0$:

$$X_{i+1} = aX_{i-1}\ mod\ m \tag{2}$$

$$k_i = \left\lfloor \frac{aX_{i-1}}{m} \right\rfloor, i\ \geq 1 \tag{3}$$

$$X_1 = aX_0 - \ mk_1 \tag{4}$$

$$X_2 = a^2X_0 - \ mk_2 - \ amk_1 \tag{5}$$

$$X_3 = a^3X_0 - \ mk_3 - amk_2 - a^2mk_1 \tag{6}$$

...

$$X_n = a^nX_0 - \ m(k_n + ak_{n-1} + \cdots + a^{n-1}k_1) \tag{7}$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci:

$$X_n = a^nX_0\ mod\ m \tag{8}$$

Skąd wynika, że wybór X_0 determinuje wszystkie liczby w generowanym ciągu (a i m są ustalone) – uzyskany ciąg liczb jest **deterministyczny**.

Metoda Boxa-Mullera – metoda generowania liczb losowych o rozkładzie normalnym, na podstawie dwóch wartości zmiennej o rozkładzie jednorodnym na przedziale (0,1).

Niech U_1 oraz U_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednorodnym na (0,1). Niech zmienne r, θ dane w odpowiednim układzie współrzędnych biegunowych spełniają:

$$x = rcos\theta, \quad y = rsin\theta \tag{9}$$

$$r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$r = \sqrt{-2\ln(1-U_1)}, \ \ U_1 \in (0,1) \tag{10}$$

$$\theta = 2\pi U_2, \qquad U_2 \in (0,1) \tag{11}$$

Wówczas r, θ są niezależne. Połóżmy:

$$x = rcos\theta = \sqrt{-2ln(1-U_1)}\cos(2\pi U_2) \tag{12}$$

$$y = rsin\theta = \sqrt{-2\ln(1-U_1)}\sin(2\pi U_2) \tag{13}$$

Wówczas zmienne losowe x, y są niezależne i o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym 1.

2. Problem

Pierwsze, co trzeba było zrobić to wylosować $N = 2000$ liczb pseudolosowych z generatora multiplikatywnego (2) które należało unormować:

$$x_i = \frac{X_i}{m + 1.0} \tag{14}$$

Dla dwóch pierwszych przypadków przyjęliśmy następujące parametry:

$$U_1(0,1){:}\, a = 17, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10$$

$$U_2(0,1){:}\, a = 85, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10$$

W trzecim przypadku korzystaliśmy z generatora multiplikatywnego, który miał wzór:

$$X_i = (1176 \cdot X_{i-1} + 1476 \cdot X_{i-2} + 1776 \cdot X_{i-3})\ mod\ (2^{35} - 5) \tag{15}$$

gdzie parametry startowe są równe: $X_0 = X_{-1} = X_{-2} = 10$.

Wyniki działania trzech generatorów zapisaliśmy do pliku.

Kolejnym zadaniem było wykonanie rozkładu jednorodnego w kuli 3D: $K^3(0,1)$. Najpierw generowaliśmy cztery liczby losowe u_1, u_2, u_3, u_4 za pomocą generatora numer 3 (15). Następnie za pomocą metody Boxa-Mullera utworzyliśmy $N = 2000$ trzywymiarowych wektorów ($\vec{r_i} = [x_i, y_i, z_i]$) o rozkładzie normalnym. Współrzędne wektorów są dane następującymi wzorami:

$$x_i = \sqrt{-2ln(1-u_1)}\cos(2\pi u_2) \tag{16}$$

$$y_i = \sqrt{-2ln(1-u_1)}\sin(2\pi u_2) \tag{17}$$

$$x_i = \sqrt{-2ln(1-u_3)}\cos(2\pi u_4) \tag{18}$$

Następnie trzeba było znormalizować współrzędne dzieląc każdą z nich przez długość wektora:

$$\|\vec{r_i}\|_2 = \sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2 + {z_i}^2} \tag{19}$$

Dalej chcemy, aby punkty wektora $\vec{r_i}$ były rozłożone równomiernie w kuli. Aby tego dokonać losujemy kolejną liczbę u_5 z generatora numer 3 (15) i liczymy liczbę s_i według poniższego wzoru:

$$s_i = (u_5)^{\frac{1}{d}}, \quad d = 3 \tag{20}$$

Następnie mnożymy każdą współrzędną wektora przez s_i.

Ostatnie co trzeba było zrobić to sprawdzić czy rozkład punktów w kuli jest jednorodny tj. czy gęstość losowanych punktów jest stała w obszarze kuli. W tym celu podzieliliśmy promień kuli na $K = 10$ podprzedziałów o równej długości, a następnie dla każdego punktu określiliśmy jego przynależność do konkretnego przedziału:

$$\Delta = \frac{1}{K} \tag{21}$$

$$j = (int)\frac{\|\vec{r_i}\|_2}{\Delta}, \quad j = 0,1, \ldots K-1 \tag{22}$$

Indeks j mówi nam w którym podprzedziale znajduje się dany punkt. Dalej liczymy gęstość (g_j) jako ilość liczb wpadających do danego przedziału podzieloną przez jego objętość:

$$R_j = \Delta \cdot (j+1) \tag{23}$$

$$R_{j-1} = \Delta \cdot j \tag{24}$$

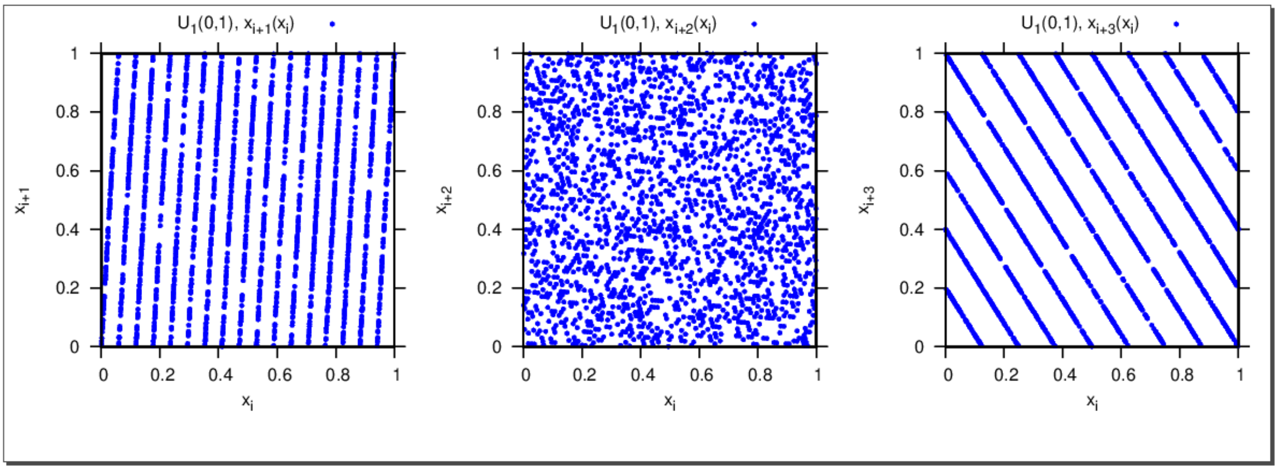
$$V_j = \frac{4}{3}\pi {R_j}^3 \tag{25}$$

$$V_{j-1} = \frac{4}{3}\pi {R_{j-1}}^3 \tag{26}$$

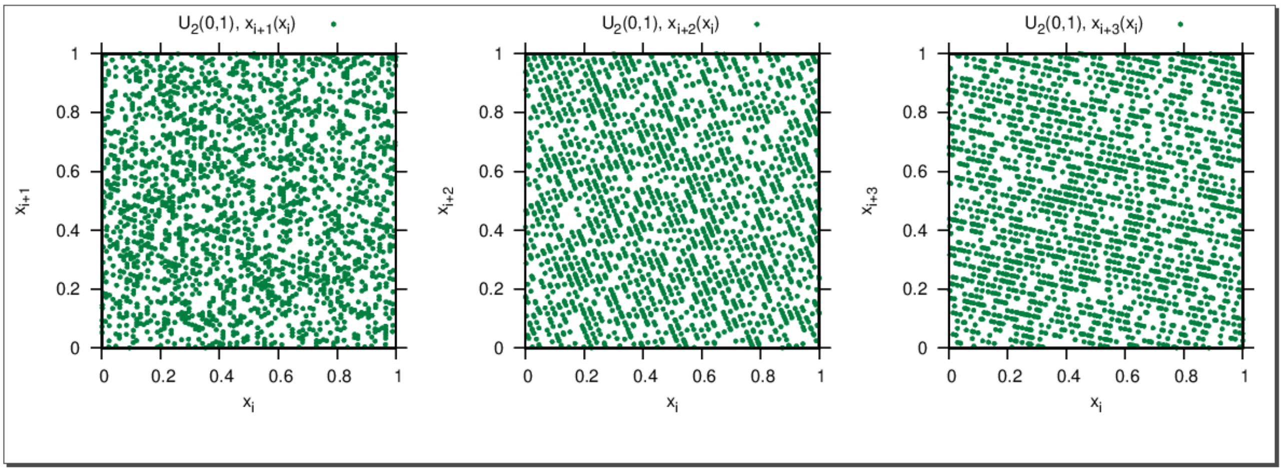
$$g_j = \frac{n_j}{V_j - V_{j-1}} \tag{27}$$

Obliczenia wykonaliśmy kolejno dla N = $2000, 10^4, 10^7$.

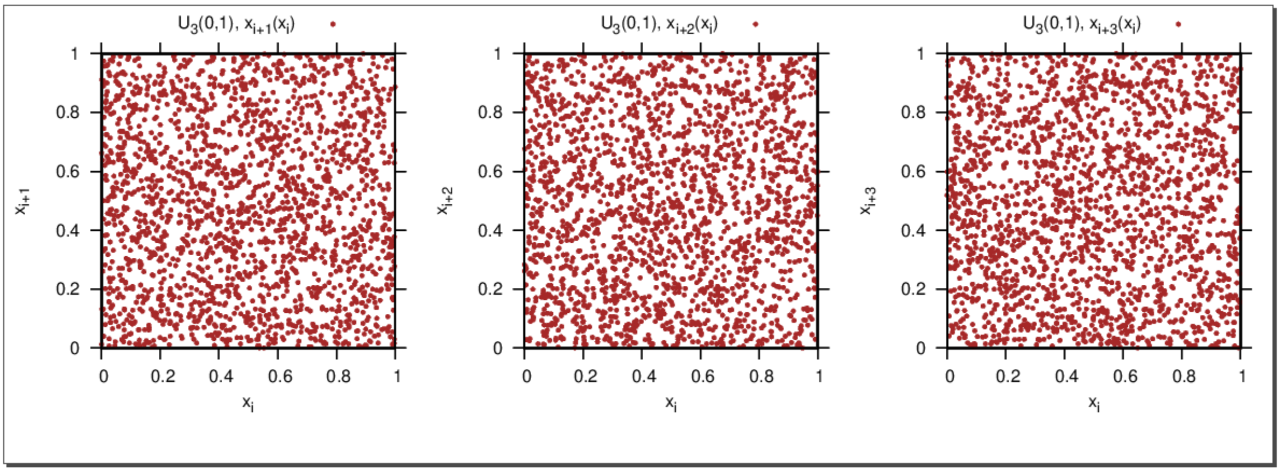
3. Wyniki



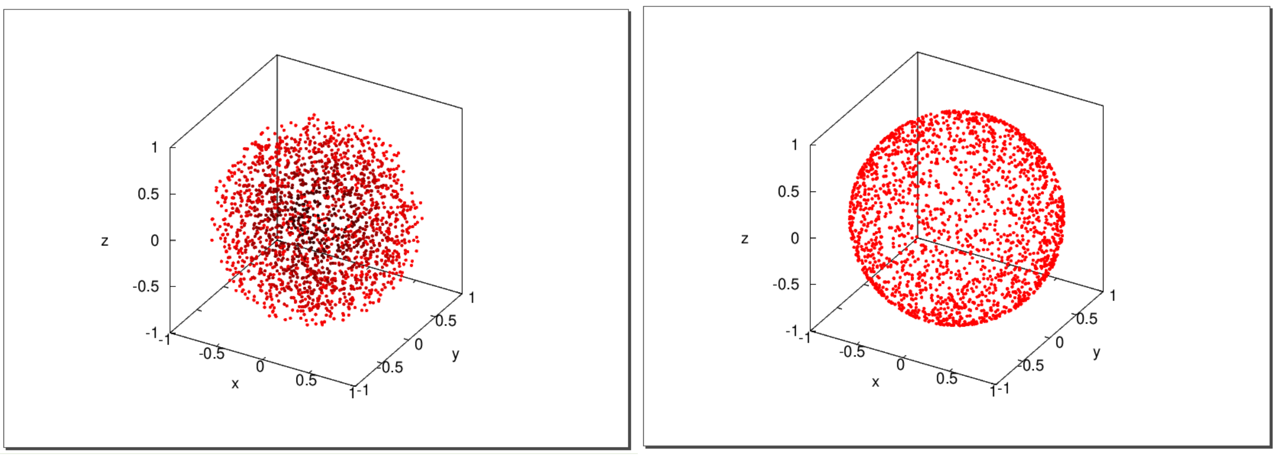
Rys. 1: Wykresy zależności par kolejnych liczb pseudolosowych dla rozkładu jednorodnego $U_1(0,1)$: $a = 17, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10$



Rys. 2: Wykresy zależności par kolejnych liczb pseudolosowych dla rozkładu jednorodnego $U_2(0{,}1)$: $a = 85, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10$

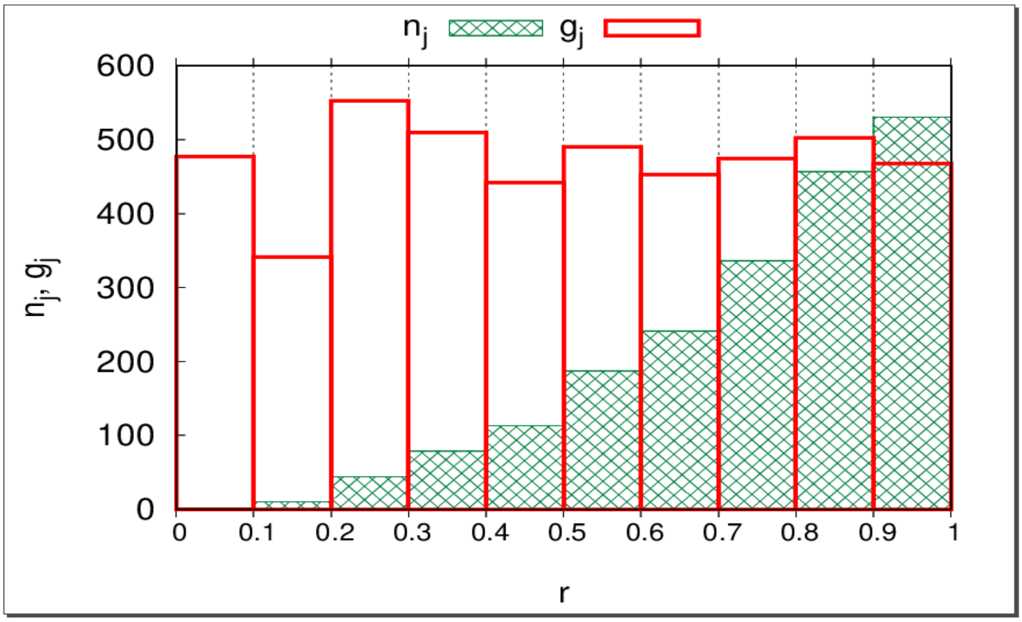


Rys 3: Wykresy zależności par kolejnych liczb pseudolosowych dla rozkładu jednorodnego $U_3(0{,}1)$, *(wz.15)*



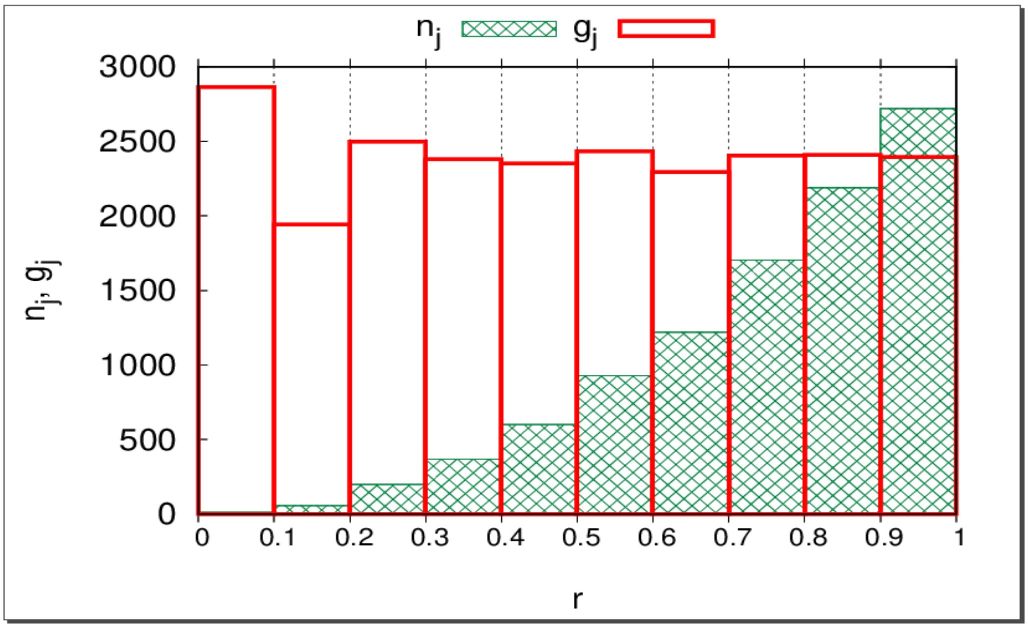
(a) (b)

Rys 4: Rozkład wylosowanych punktów w 3D wymiarze dla (a) kuli o promieniu 1 oraz (b) sfery wokół niej.

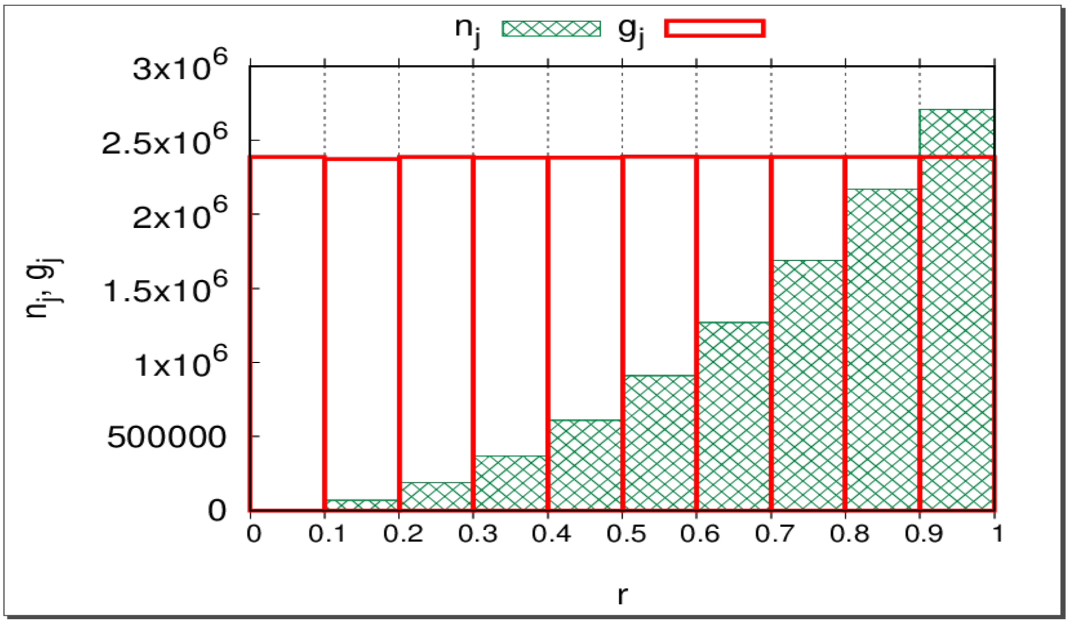


Rys5. Histogram dla rozkładu jednorodnego w trójwymiarowej kuli $K^3(0,1)$. $(N = 2000)$

n_j − liczba wylosowanych punktów znajdujących się w j-tym podzbiorze, g_j − gęstość wylosowanych punktów



Rys 6. Histogram dla rozkładu jednorodnego w trójwymiarowej kuli $K^3(0,1)$. $(N = 10^4)$



Rys7. Histogram dla rozkładu jednorodnego w trójwymiarowej kuli $K^3(0,1)$. $(N = 10^7)$

4. Wnioski

Po wykonaniu ćwiczenia można wywnioskować następujące rzeczy:

Na rysunkach 1-2 widać, że generatory U_1, U_2 losują liczby pseudolosowe z widoczną korelacją i pewną zależnością okresową. Natomiast patrząc na rysunek 3, czyli na liczby pseudolosowe wygenerowane generatorem U_3, nie spostrzegamy korelacji, co świadczy o tym że ten generator jest lepszy.

Za pomocą metody Boxa-Mullera udało się wygenerować wektory o rozkładzie normalnym, rezultat widzimy na rysunku 4(b) - punkty są rozłożone na obwodzie sfery. Na rysunku 4(a) widzimy jak punkty są rozłożone równomiernie wewnątrz kuli.

Na rysunkach 5-7 można zaobserwować, że im większe jest N, tym bardziej jednorodny rozkład punktów otrzymujemy, tj. że gęstość losowanych punktów jest stała w obszarze kuli.