Metody numeryczne

Sprawozdanie 1

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Kateryna Andrusiak

4 marca 2020

1. Wstęp teoretyczny

Metoda LU słuzy do rozwiązywania układu równań liniowych. Rozkład LU polega na podziale macierzy $\boldsymbol{A}_{(n\times n)}$ na macierz $\boldsymbol{L}_{(n\times n)}$(dolnotrójkątnej z jedynkami na diagonali) oraz macierz $\boldsymbol{U}_{(n\times n)}$(górnotrójkątnej z niezerowymi elementami na diagonali):

$$\boldsymbol{A}_{(n\times n)} = \boldsymbol{L}_{(n\times n)} \cdot \boldsymbol{U}_{(n\times n)} \qquad (1)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Rozwiązywanie układu równań liniowych:

Dzięki rozkładowi LU możemy rozwiązac układ równań liniowych:

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}} \qquad (3)$$

gdzie $\vec{\boldsymbol{x}}$-wektor niewiadomych,

$\vec{\boldsymbol{b}}$- wektor wyrazów wolnych.

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}} \qquad (4)$$

Rozwiązanie ukladu równań sprowadza się do rozwiązania dwóch układów równań z macierzami **L** i **U**:

$$\boldsymbol{L} \cdot \vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{b}} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{U} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}} \qquad (6)$$

Obliczanie wyznacznika:
Posługują się rozkładem LU łatwo da się obliczyć wyznacznik danej macierzy:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}) = \det(\boldsymbol{L}) \cdot \det(\boldsymbol{U}) \qquad (7)$$

Przy czym $\det(\boldsymbol{L}) = 1$, a $\det(\boldsymbol{U})$ jest iloczynem elementów stojących na diagonali tej macierzy.

Odwracanie macierzy:
W celu znalezienia macierz odwrotnej $\boldsymbol{A^{-1}}$ za pomacą rozkładu **LU** należy rozwiązać **n** układów równań:

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{i})} = \boldsymbol{e}^{(\boldsymbol{i})} \qquad \boldsymbol{i} = 1,2,3, \dots, n \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{e}^{(\boldsymbol{i})} = [0,0, \dots, 1, \dots, 0]^T$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{X} = \boldsymbol{A^{-1}} \qquad (9)$$

Rozwiązania układów równań $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{i})}$stanowią kolumny macierzy odwrotnej $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \left\|\boldsymbol{A^{-1}}\right\| \qquad (10)$$

Duży wskaźnik uwarunkowania macierzy może powodować duże względne zaburzenia rozwiązania nawet dla małych zaburzeń wektora danych. Zadanie jest wówczas źle uwarunkowane.

2. Problem

Na labolatorium mieliśmy do czynienia z macierzą kwadratową $\boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})}$, $\boldsymbol{n} = 4$**.**

Elementy macierzy zdefiniowane są następująco:

$$\boldsymbol{a_{i,j}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{i+j+\delta}} \quad gdzie\ \boldsymbol{\delta} = 2\ oraz\ \ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 0,1, \dots, n \qquad (11)$$

1) Mając macierz **A** dokonaliśmy rozkładu LU, czyli zamieniliśmy oryginalną macierz na macierzy **L** oraz **U**. Zrobiliśmy to korzystając z funkcji biblioteki GSL:

int gsl_linalg_LU_decomp(gsl matrix *A, gsl permutation *p, int *signum)

gdzie: **A** - macierz układu, **p** - wektor permutacji wierszy,
signum - określa parzystą lub nieparzystą liczbę permutacji

2) Następnym krokiem było wyliczanie wyznacznika macierzy **A** za pomocą wykorzystania macierzy **L** oraz macierzy **U** (żeby dostać wynik wystarczyło wymnożyć elementy stojące na diagonali macierzy **U**).

3) Znaleźliśmy macierz odwrotną $\boldsymbol{A^{-1}}$ rozwiązując n układów równań z wektorami wyrazów wolnych:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Zrobiliśmy to korzystając z funkcji biblioteki GSL:

**int gsl_linalg_LU_solve(gsl matrix *A, gsl permutation *p,
gsl vector *b, gsl vector *x**)
gdzie: **b** - to wektor wyrazów wolnych, a **x** - to wektor rozwiązań.

4) Następnie szukaliśmy iloczyn $\boldsymbol{A \cdot A^{-1}}$ żeby sprawdzić skuteczność metody **LU** (w najlepszym wypadku powinniśmy dostać macierz jednostkową).

   Element macierzowy dla iloczynu macierzy

$$C = A \cdot B \qquad (13)$$

   obliczamy następująco:

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j} \qquad (14)$$

5) Obliczyliśmy wskaźnik uwarunkowania macierzy korzystając z normy:

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}| \qquad (15)$$

3. Wyniki

1) Macierz **A** :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 \\ 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125000 \end{bmatrix} \tag{16}$$

2) Elementy diagonalne macierzy **U:**

$$(0.50000000,\ \ 0.03333333,\ \ -0.0013889,\ \ 0.00010204) \tag{17}$$

3) Wyznacznik macierzy **A**:

$$\det(\boldsymbol{A}) = -2.36206 \cdot 10^{-9}$$

4) Macierz $\mathbf{A^{-1}}$:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix} \tag{18}$$

5) Iloczyn $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^{-1}}$**:**

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1.36424 \cdot 10^{-12} & 9.09495 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 3.12639 \cdot 10^{-13} & 1 & 9.09495 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 2.27374 \cdot 10^{-13} & -6.82121 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 2.27374 \cdot 10^{-13} & -6.82121 \cdot 10^{-13} & 4.54747 \cdot 10^{-13} & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

6) Wskaźnik uwarunkowania:

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}) = 14700$$

4. Wnioski

Przebadaliśmy działanie metody LU. Za pomocą rozkładu LU udało się nam obliczyć wyznacznik macierzy $\boldsymbol{A}$ oraz znaleźć macierz odwrotną $\mathbf{A^{-1}}$**.** Aby sprawdzić skuteczność metody znaleźliśmy iloczyn $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$, oczekiwaliśmy w wyniku dostać macierz jednostkową, ale jak widzimy elementy diagonalne są jedynkami ,gdyż pozostałe elementy są przybliżone do zera, ale niezerowe. Wyliczyliśmy wskaźnik uwarunkowania, duża wartość świadczy o tym że mamy źle uwarunkowaną macierz, dlatego wynik iloczynu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ nie spełnia naszych oczekiwań.
Metoda LU nie gwarantuje dokładności wyników, jednak za pomocą tej metody można szybko wyliczyć wyznacznik oraz odwrócić macierz.