



Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Лабораторна робота № 5

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Чисельне розв’язування звичайних
диференціальних рівнянь

Виконала
студентка групи ІА-23
Архип’юк К. О.

Перевірила:
Вітюк А. Є.

Київ 2023

Мета роботи: ознайомитись з підходами до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Хід роботи

Студент	Лаб 5	
	Задача Коші	Точний розв'язок
Архип'юк Катерина Олександрівна	$x^2 y'' + xy' - y - 3x^2 = 0$	$y = x^2 + x + \frac{1}{x}$
	$y(1) = 3$ $y'(1) = 2$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	

Розв'язок задачі Коші в аналітичній формі трьома вказаними методами

Задача Коші
 $x^2 y'' + xy' - y - 3x^2 = 0$
 $y(1) = 3 \quad y'(1) = 2$
 $x \in [1, 2], h = 0.1$

Метод Ейлера:
 Зробимо заміну $y' = z$, тоді сформулюємо рівняння:
 $y' = z$
 $z' = \frac{(y + 3x^2 - xy)}{x^2}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1.1 \quad x_3 = 1.2$
 $y_1 = 3$
 $z_1 = 2$
 $y_2 = y_1 + h \cdot z_1 = 3 + 0.1 \cdot 2 = 3.2$
 $z_2 = z_1 + h \cdot \frac{(y_1 + 3x_1^2 - x_1 z_1)}{x_1^2} = 2 + 0.1 \cdot \frac{(3 + 3 - 1 \cdot 2)}{1} = 2.4$
 $y_3 = y_2 + h \cdot z_2 = 3.2 + 0.1 \cdot 2.4 = 3.44$
 $z_3 = z_2 + h \cdot \frac{(y_2 + 3x_2^2 - x_2 z_2)}{x_2^2} = 2.4 + 0.1 \cdot \frac{(3.2 + 3 \cdot 1.21 - 1.1 \cdot 2.4)}{1.21} = 2.71394$

Метод Ейлера-Кунса:
 $y' = z$
 $z' = \frac{(y + 3x^2 - xy)}{x^2}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1.1 \quad x_3 = 1.2$
 $y_1 = 3$
 $z_1 = 2$
 $z_2 = z_1 + h \cdot \frac{(y_1 + 3x_1^2 - x_1 z_1)}{x_1^2} = 2 + 0.1 \cdot \frac{(3 + 3 - 1 \cdot 2)}{1} = 2.4$
 $y_2 = y_1 + h \cdot (0.5 \cdot (z_1 + z_2)) = 3 + 0.1 \cdot 0.5 \cdot (2 + 2.4) = 3.22$
 $z_3 = z_2 + h \cdot \left(0.5 \cdot \frac{(y_2 + 3x_2^2 - x_2 z_2)}{x_2^2} + 0.5 \cdot \frac{(y_1 + 3x_1^2 - x_1 z_1)}{x_1^2} \right) = 2.4 + 0.1 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{(3.22 + 3 \cdot 1.21 - 1.1 \cdot 2.4)}{1.21} + \frac{(3 + 3 - 1 \cdot 2)}{1} \right) = 2.6187$
 $y_3 = y_2 + h \cdot (0.5 \cdot (z_2 + z_3)) = 3.22 + 0.1 \cdot 0.5 \cdot (2.4 + 2.6187) = 3.475$

Точний розв'язок
 $y = x^2 + x + \frac{1}{x}$

Метод Рунге-Кутты:

$$K_1 y = h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$K_1 z = h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$K_2 y = h \cdot f_1(x_i + h, y_i + K_1 y, z_i + K_1 z)$$

$$K_2 z = h \cdot f_2(x_i + h, y_i + K_1 y, z_i + K_1 z)$$

$$y_{i+1} = y_i + 0,5 \cdot (K_1 y + K_2 y)$$

$$z_{i+1} = z_i + 0,5 \cdot (K_1 z + K_2 z)$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1,1$$

$$y_1 = 3$$

$$z_1 = 2$$

$$K_1 y = 0,1 \cdot z_1 = 0,2$$

$$K_1 z = 0,1 \cdot (y_1 + 3x_1^2 - z_1)/x_1^2 = -0,16$$

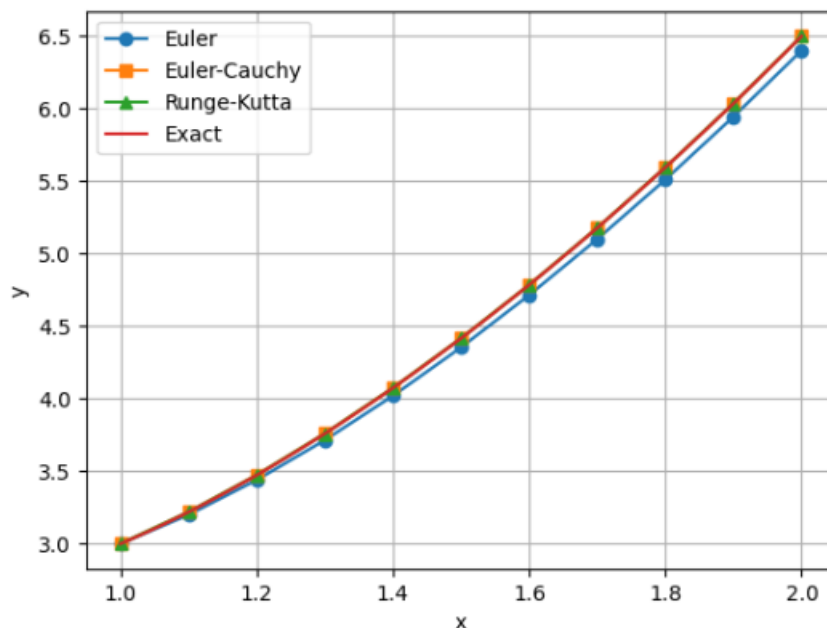
$$K_2 y = 0,1 \cdot (z_1 + K_1 z) = 0,184$$

$$K_2 z = 0,1 \cdot (-y_1 + 5(x_1 + h)^2 - (z_1 + K_1 z))/(x_1 + h)^2 = -0,142$$

$$y_2 = y_1 + 0,5 \cdot (K_1 y + K_2 y) = 3 + 0,5 \cdot (0,2 + 0,184) = 3,218$$

$$z_2 = z_1 + 0,5 \cdot (K_1 z + K_2 z) = 2 + 0,5 \cdot (-0,16 - 0,142) = 1,84$$

Лістинги програми розв'язування завдання



Результати виконання програми

x	Euler	Euler-Cauchy	Runge-Kutta	Exact	Error
1.0	3.000000	3.000000	3.000000	3.000000	0.000000
1.1	3.200000	3.220000	3.219093	3.219091	0.006667
1.2	3.440000	3.474691	3.473336	3.473333	0.011565
1.3	3.714628	3.760758	3.759235	3.759231	0.015378
1.4	4.020259	4.075808	4.074290	4.074286	0.018518
1.5	4.354361	4.418073	4.416671	4.416667	0.021239
1.6	4.715109	4.786217	4.785005	4.785000	0.023704
1.7	5.101160	5.179216	5.178241	5.178235	0.026020
1.8	5.511502	5.596269	5.595561	5.595556	0.028257
1.9	5.945357	6.036741	6.036321	6.036316	0.030463
2.0	6.402119	6.500123	6.500006	6.500000	0.032670

Посилання на код: <https://github.com/KatiaArkhyp/numerical-methods/tree/main/Lab%205>

Висновки: При виконанні лабораторної роботи я ознайомилась з підходами до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.