Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Лабораторна робота № 6

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Розв’язування систем лінійних алгебраїчних
рівнянь

Виконала
студентка групи ІА-23
Архип’юк К. О.

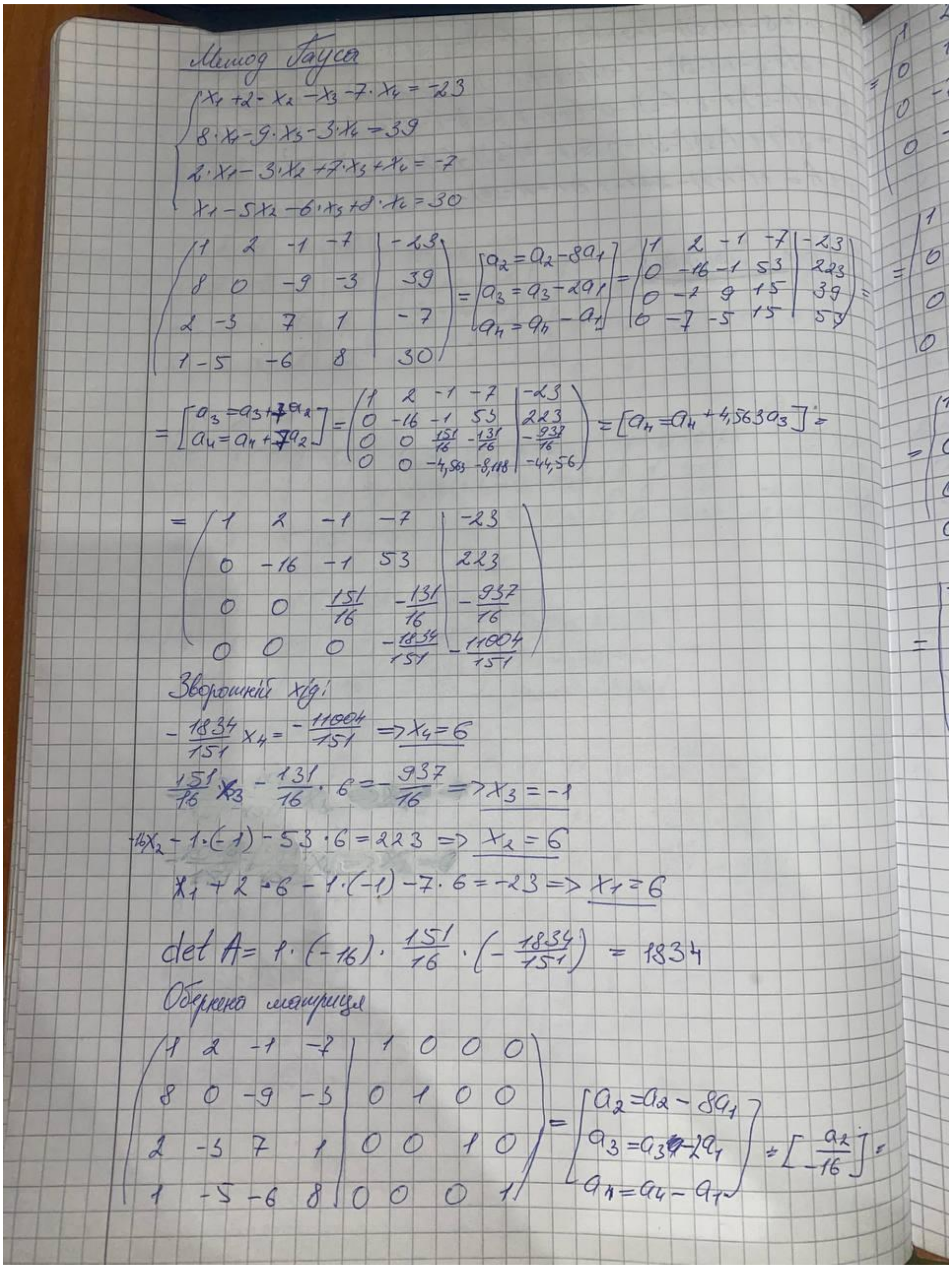
Перевірила:
Вітюк А. Є.

Київ 2023

Мета роботи: ознайомитись з ітераційними методами розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Оцінити похибку, збіжність та продуктивність ітераційних методів.

Студент	Лаб 6	
	Методом Гауса	Методом Зейделя
Архип`юк Катерина Олександрівна	$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 - 7\cdot x_4 = -23 \\ 8\cdot x_1 - 9\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = 39 \\ 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 7\cdot x_3 + x_4 = -7 \\ x_1 - 5\cdot x_2 - 6\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = 30 \end{cases}$	$\begin{cases} 14\cdot x_1 - 4\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 38 \\ -3\cdot x_1 + 23\cdot x_2 - 6\cdot x_3 - 9\cdot x_4 = -195 \\ -7\cdot x_1 - 8\cdot x_2 + 21\cdot x_3 - 5\cdot x_4 = -27 \\ -2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 18\cdot x_4 = 142 \end{cases}$

1. Методом Гауса розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для матриці СЛАР обчислити визначник і обернену матрицю.



Метод Гауса

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 - 7\cdot x_4 = -23 \\ 8\cdot x_1 - 9\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = 39 \\ 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 7\cdot x_3 + x_4 = -7 \\ x_1 - 5x_2 - 6\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = 30 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -7 & -23 \\ 8 & 0 & -9 & -3 & 39 \\ 2 & -3 & 7 & 1 & -7 \\ 1 & -5 & -6 & 8 & 30 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} a_2 = a_2 - 8a_1 \\ a_3 = a_3 - 2a_1 \\ a_4 = a_4 - a_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -16 & -1 & 53 & 223 \\ 0 & -7 & 9 & 15 & 39 \\ 0 & -7 & -5 & 15 & 53 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} a_3 = a_3 + 7a_2 \\ a_4 = a_4 + 7a_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -16 & -1 & 53 & 223 \\ 0 & 0 & \frac{151}{16} & -\frac{131}{16} & -\frac{937}{16} \\ 0 & 0 & -4{,}563 & -8{,}118 & -44{,}56 \end{array}\right) = [a_4 = a_4 + 4{,}5630 a_3] =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -16 & -1 & 53 & 223 \\ 0 & 0 & \frac{151}{16} & -\frac{131}{16} & -\frac{937}{16} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1834}{151} & -\frac{11004}{151} \end{array}\right)$$

Зворотній хід:

$-\frac{1834}{151} x_4 = -\frac{11004}{151} \Rightarrow x_4 = 6$

$\frac{151}{16} x_3 - \frac{131}{16} \cdot 6 = -\frac{937}{16} \Rightarrow x_3 = -1$

$-16x_2 - 1\cdot(-1) - 53\cdot 6 = 223 \Rightarrow x_2 = 6$

$x_1 + 2\cdot 6 - 1\cdot(-1) - 7\cdot 6 = -23 \Rightarrow x_1 = 6$

$\det A = 1\cdot(-16)\cdot\frac{151}{16}\cdot\left(-\frac{1834}{151}\right) = 1834$

Обернена матриця

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -9 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} a_2 = a_2 - 8a_1 \\ a_3 = a_3 - 2a_1 \\ a_4 = a_4 - a_1 \end{array}\right] = \left[\frac{a_2}{-16}\right] =$$

$$
=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0{,}0625 & -3{,}3125 & 0{,}5 & -0{,}0625 & 0 & 0 \\
0 & -7 & 9 & 15 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -7 & -5 & 15 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
=\begin{bmatrix} a_1 = a_1 - 2a_2 \\ a_3 = a_3 + 7a_2 \\ a_4 = a_4 + 7a_2 \end{bmatrix}
=\left[\frac{a_3}{9{,}4375}\right]=
$$

$$
=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1{,}125 & -0{,}375 & 0 & 0{,}125 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0{,}0625 & -3{,}3125 & 0{,}5 & -0{,}0625 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{131}{151} & \frac{24}{151} & -\frac{7}{151} & \frac{16}{151} & 0 \\
0 & 0 & -4{,}5625 & -8{,}1875 & 2{,}5 & -0{,}4375 & 0 & 1
\end{array}\right)
=\begin{bmatrix} a_1 = a_1 + 1{,}125a_3 \\ a_2 = a_2 - 0{,}0625a_3 \\ a_4 = a_4 + 4{,}56a_3 \end{bmatrix}
=\left[\frac{-12\frac{22}{151}}{a_4}\right]=
$$

$$
=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1\frac{53}{151} & \frac{27}{151} & \frac{11}{151} & \frac{11}{151} & 0 \\
0 & 1 & 0 & -3\frac{39}{151} & \frac{74}{151} & -\frac{9}{151} & -\frac{1}{151} & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{131}{151} & \frac{24}{151} & -\frac{7}{151} & \frac{16}{151} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{487}{1834} & \frac{7}{131} & -\frac{73}{1834} & -\frac{151}{1834}
\end{array}\right)
=\begin{bmatrix} a_1 = a_1 + 1\frac{53}{151}a_4 \\ a_2 = a_2 + 3\frac{39}{151}a_4 \\ a_3 = a_3 + \frac{131}{551}a_4 \end{bmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
-\frac{165}{917} & \frac{19}{151} & \frac{60}{917} & -\frac{102}{917} \\
-\frac{344}{917} & \frac{15}{131} & -\frac{125}{917} & -\frac{246}{917} \\
-\frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} \\
-\frac{487}{1834} & \frac{7}{131} & -\frac{73}{1834} & -\frac{151}{1834}
\end{pmatrix} = A^{-1}
$$

2. Методом простих ітерацій і методом Зейделя розв'язати СЛАР з точністю ε = 0.01

Метод простої ітерації

$14 \cdot x_1 - 4x_2 - 2 \cdot x_3 + 3x_4 = 38$

$-3x_1 + 23x_2 - 6x_3 - 9x_4 = -195$

$-7x_1 - 8x_2 + 21x_3 - 5x_4 = -27$

$-2x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 18x_4 = 142$

$x_1^{(0)} = 38$

$x_2^{(0)} = -195$

$x_3^{(0)} = -27$

$x_4^{(0)} = 142$

$x_1 = (38 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4)/14$

$x_2 = (-195 + 3x_1 + 6x_3 + 9x_4)/23$

$x_3 = (-27 + 7x_1 + 8x_2 + 5x_4)/21$

$x_4 = (142 + 2x_1 + 2x_2 - 8x_3)/18$

1 Ітерація

$x_1^{(1)} = 2{,}714\ (0 \cdot 38 + 0{,}286 \cdot (-195) + 0{,}143 \cdot (-27) - 0{,}214 \cdot 142) = -87{,}29$

$x_2^{(1)} = -8{,}48 + (0{,}13 \cdot 38 + 0 \cdot (-195) + 0{,}261 \cdot (-27) + 0{,}391 \cdot 142) = 45$

$x_3^{(1)} = -1{,}29 + (0{,}33 \cdot 38 + 0{,}381 \cdot (-195) + 0{,}238 \cdot 142) = -29{,}095$

2 Ітерація

$x_1^{(2)} = 2,714 + (0 \cdot 10,89 + 0,286 \cdot -26,497 + 0,143 \cdot -12,66 - 0,21 \cdot 16,12) = -10,11$

$x_2^{(2)} = -8,48 + (0,13 \cdot 10,89 + 0,261 \cdot -12,66 + 0,39 \cdot 16,12) = -4,05$

$x_3^{(2)} = -1,29 + (0,33 \cdot 10,89 + 0,38 \cdot -26,497 + 0,238 \cdot 16,12) = -3,91$

$x_4^{(2)} = 7,89 + 3,89096 = 11,7798$

3 Ітерація

$x_1^{(3)} = 2,714 - 3,984 = -1,271$

$x_2^{(3)} = -8,48 + 2,066 = -6,41$

$x_3^{(3)} = -1,2857 - 0,96 = -2,24$

$x_4^{(3)} = 7,89 + 0,6504 = 8,54$

4 Ітерація

$x_1^{(4)} = 2,714 - 3,7162 = \underline{-1,0013}$

$x_2^{(4)} = -8,48 + 2,47726 = \underline{-6,001}$

$x_3^{(4)} = -1,2857 - 0,71529 = \underline{-2,001}$

$x_4^{(4)} = 7,8889 + 0,11278 = \underline{8,00167}$

Метод Зейделя

$x_1 = (38 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4)/14$

$x_2 = (-195 + 3x_1 + 6x_3 + 9x_4)/23$

$x_3 = (-27 + 7x_1 + 8x_2 + 5x_4)/21$

$x_4 = (142 + 2x_1 + 2x_2 - 8x_3)/18$

1 Ітерація

$x_1 = (38 + 40 + 20 - 30)/14 = 2,7143$

$x_2 = (-195 + 30 + 60 + 90)/23 = -8,1242$

$x_3 = (-27 + 70 + 80 + 50)/21 = -3,4759$

$x_4 = (142 + 20 + 20 - 80)/18 = 8,8326$

2 Ітерація

$x_1 = (38 + 4 \cdot (-8,1242) + 2(-3,4759) - 3 \cdot (8,8326))/14 = -1,996$

$x_2 = (-195 + 3 \cdot 2,7143 + 6 \cdot (-3,4759) + 9 \cdot (8,8326))/23 = -6,189$

$x_3 = (-27 + 7 \cdot 2,7143 + 8 \cdot (-3,4759) + 5 \cdot (8,8326))/21 = -2,206$

$x_4 = (142 + 2 \cdot 2,7143 + 2 \cdot (-8,1242) - 8 \cdot (-3,4759))/18 = 7,9598$

3 Ітерація	4 Ітерація	5 Ітерація	6 Ітерація
$x_1 = -1,0748$	$x_1 = -1,0543$	$x_1 = -1,007$	$\underline{x_1 = -1,000}$
$x_2 = -6,079$	$x_2 = -6,016$	$x_2 = -6,004$	$\underline{x_2 = -6,000}$
$x_3 = -2,0647$	$x_3 = -2,015$	$x_3 = -2,003$	$\underline{x_3 = -2,000}$
$x_4 = 8,0116$	$x_4 = 8,0010$	$x_4 = 8,000$	$\underline{x_4 = 8,000}$

3. Написати програму розв’язування задач прямим методом Гауса-Жордана та ітераційним методом Зейделя мовою Python.

```
Gauss Jordan method

Matrix A|B:
 [[  1.   2.  -1.  -7. -23.]
 [  8.   0.  -9.  -3.  39.]
 [  2.  -3.   7.   1.  -7.]
 [  1.  -5.  -6.   8.  30.]]

Results with Gauss-Jordan method:
x1 = 6.00
x2 = 6.00
x3 = -1.00
x4 = 6.00

Result matrix:
 [[ 1.  0.  0.  0.  6.]
 [ 0.  1.  0.  0.  6.]
 [ 0.  0.  1.  0. -1.]
 [ 0.  0.  0.  1.  6.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.]]
--------------------------------------------------
Seidel method

Matrix A|B:
 [[  14.   -4.   -2.    3.   38.]
 [  -3.   23.   -6.   -9. -195.]
 [  -7.   -8.   21.   -5.  -27.]
 [  -2.   -2.    8.   18.  142.]]

Iteration 1 [ 2.71428571 -8.1242236  -3.47589471  8.83262677]
Iteration 2 [-1.99618315 -6.18914247 -2.20587086  7.95979531]
Iteration 3 [-1.07483554 -6.07919887 -2.06468872  8.01163561]
Iteration 4 [-1.03436284 -6.01680436 -2.01508556  8.00101945]
Iteration 5 [-1.00717478 -6.00447229 -2.0038526   8.00041815]
Number of iterations for accuracy 0.01: 6

Results with Seidel method:
x1 = -1.00
x2 = -6.00
x3 = -2.00
x4 = 8.00
```

Посилання на код: https://github.com/KatiaArkhyp/numerical-methods/blob/main/Lab%206/main.py

Висновок: При виконанні лабораторної роботи я ознайомилась з ітераційними методами розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь та оцінила похибку, збіжність та продуктивність ітераційних методів.