ISTY UVSQ
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

*M1 **C**alcul **H**aute **P**erformance, **S**imulation*
PROJET DE PROGRAMMATION NUMÉRIQUE
RAPPORT DE PROJET

Recherche de Clique Maximale dans des Graphes Creux

Réalisé par :

Mme. RIM ACHRRAB
Mme. KATIA CHIKHI
Mme. NEDJMA BOUAMARA

Encadré par :

M. BOLLORÉ Hugo
M. MANOUSSAKIS George

Soutenu le 20 Septembre 2020, Devant le jury composé de :

M. xxxx XXXXX : UVSQ - Président
M. xxx XXXXX : UVSQ - Examinateur
M. xxxx XXXXX : UVSQ - Rapporteur

Promotion : 2022/2023

Remerciements

Résumé

Absract

Avant-propos

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Liste des abréviations

DFS	Depth-First-Searchl

Introduction générale

Chapitre 1

1 Contexte général du projet

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord commencer le sujet en lançant les grandes lignes de notre projet qui vont nous aider à projeter l'idée de ce sujet d'une manière simple au sein de nos cerveaux avant de commencer la partie présentation du projet où on va rédiger son contexte de vue mathématique et informatique (explications des algorithmes et le code utilisé).

1.2 Concepts fondamentaux

1.2.1 La théorie des graphes

La théorie des graphes est un domaine polyvalent de base mathématique qui s'applique en plusieurs domaines informatiques,elle est dédiée à l'étude des graphes et leurs applications. Un graphe est une représentation mathématique d'un ensemble de relations entre des objets.Elle a été créée par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1774 afin de mettre des relations entre plusieurs éléments.

On peut définir un graphe comme une structure de couples qui ont une ou des relations entre eux.ils sont appliqués en maints domaines tels que la chimie, la physique, réseaux et transports, recherche opérationnelle, géographie, modélisation des ohénomènes,etc... .

Dans la vie quotidienne,pour qu'on puisse visualiser les relations et comprendre d'une manière simple les relations entre chaque élément, on peut appliquer la théorie des graphes partout : les réseaux sociaux tels que Facebook, les systèmes de transport, les réseaux de communication, l'ensemble des routes reliants les villes d'un pays, etc... .

Les graphes sont répartis en plusieurs types, les plus connus sont les graphes orientés, les graphes non-orientés, les graphes pondérés,et graphes parfaits.

Dans notre projet on va traiter les graphes non-orientés pour présenter les relations entre des personnes dans les réseaux sociaux (par exemple).

La théorie des graphes est développée entre temps pour chercher des solutions aux problèmes posées et elle a mis en présence des algorithmes modélisants les graphes, comme l'algorithme de Dijkstra pour chercher le plus court chemin entre les sommets, l'algorithme de parcours en profondeur ou DFS pour trouver le chemin qui relie un sommet et un autre, et l'algorithme de Bron-Kerbosh -qu'on va l'utiliser dans les parties qui suivent- qui permet de trouver les cliques maximales contenues dans un graphe.

1.2.2 Définition d'un graphe

Un graphe est une structure de données définie par un couple G = (S, A) tel que :

- S est un ensemble fini de sommets (ou nœuds), un sommet est tout simplement n'importe quelle entité représentée par les données (par exemple : un utilisateur de réseaux sociaux).
- A est un ensemble d'arêtes ou des relations reliant ces sommets, tel que $A \subseteq \{(x, y)|x, y \in Setx \neq y\}$.

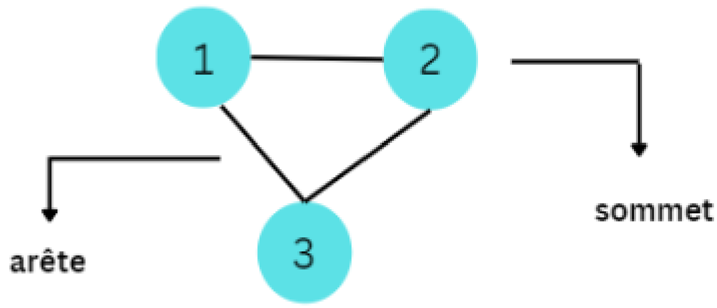

FIGURE 1 – Un graphe avec ses arrêts et ses sommets

1.2.3 Définition d'un graphe simple

Un graphe G =(S,A) est dit simple si chaque sommet est relié à un nombre fini d'arêtes et il n'y a pas de boucles (des relations d'un sommet à lui-même).Il peut être orienté ou non orienté et il est souvent utilisé pour faciliter l'analyse des relations entre les objets.

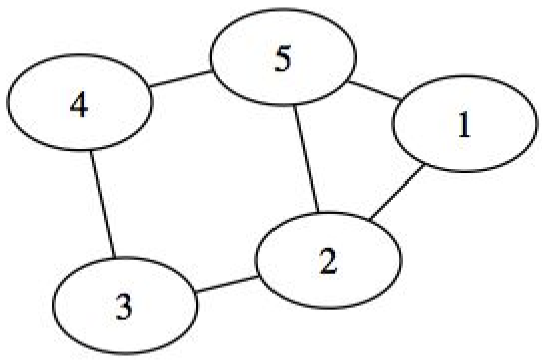

FIGURE 2 – Graphe simple

1.2.4 Définition d'un graphe non-orienté

Un graphe est dit non-orienté si les arêtes n'ont pas de sens entre deux sommets, Cela signifie que si un sommet S_1 est relié à un autre sommet S_2 par un arc, ils sont également en relation suivant les deux sens (S_1 vers S_2 et S_2 vers S_1).

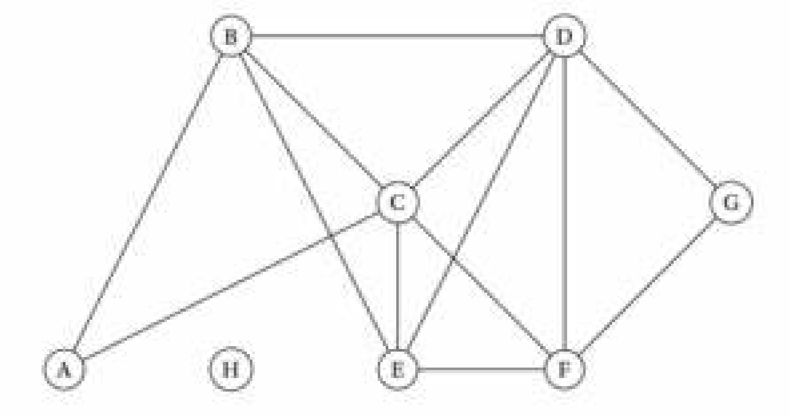

FIGURE 3 – Graphe non-orienté

1.2.5 Définition d'un graphe complet

un graphe G est dit complet s'il comporte une arête (s_i, s_j) pour toute paire de sommets différents s_i , $s_j \in S$ (S est l'ensemble des sommets contenants dans le graphe G).

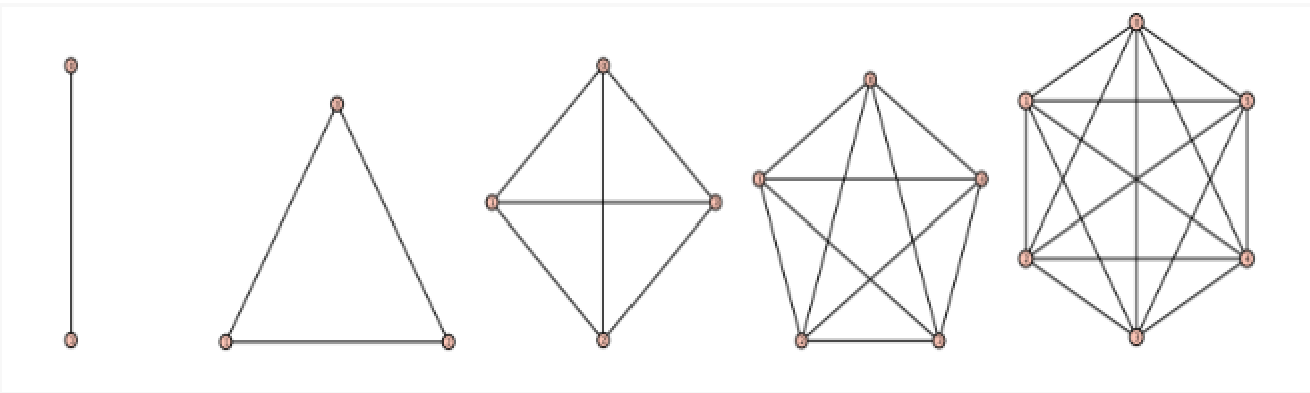

FIGURE 4 – Exemples de graphes complets

1.2.6 Ordre d'un graphe

L'ordre d'un graphe est défini comme le nombre fini de sommets qu'il contient. Si un graphe possède six sommets alors il est d'ordre six.

L'ordre du graphe est important dans notre travail, en fait, il influence la complexité des algorithmes utilisés car certains algorithmes peuvent être plus efficaces pour des graphes de petite taille que pour des graphes de grande taille.

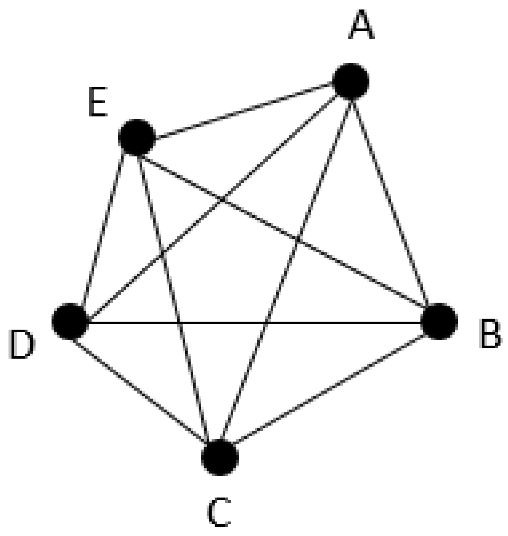

FIGURE 5 – Graphe d'ordre 5

1.2.7 Ordre d'une arête

L'ordre d'une arête a_i est défini comme le nombre de sommets s_i auxquels elle est reliée, $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}\, on \in \mathbb{N}$. Prenons par exemple un graphe non orienté, une arête de deux sommets est dite une arête de premier ordre, tandis qu'une arête reliée à trois sommets est dite une arête de deuxième ordre,et on procède de la même manière.

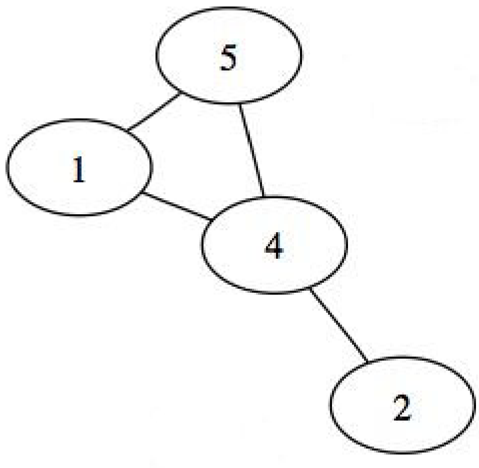

FIGURE 6 – L'arête 1 de deuxième ordre

1.2.8 Définition d'un sous-graphe

Soit G=(S,A) un graphe qui contient un ensemble fini S de sommets et A d'arrêts. On dit que $G' = (S', A'$ est un sous-graphe de G si et seulement si :

- S $\subseteq S'$
- A $\subseteq A'$

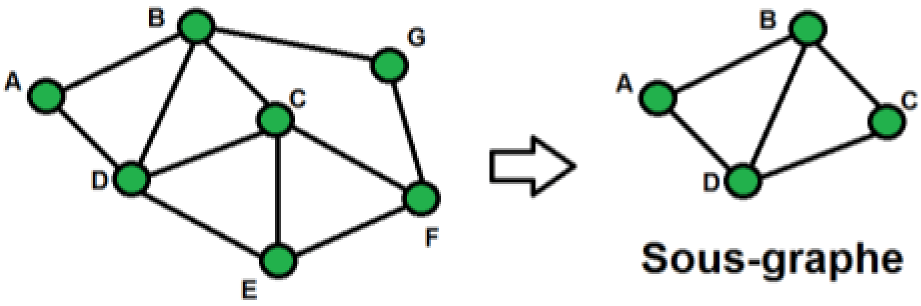

FIGURE 7 – Un sous-graphe du graphe

1.2.9 Définition d'une clique

ne clique dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que chaque sommet est relié à tous les autres par des arêtes, une clique est donc un sous-graphe complet.

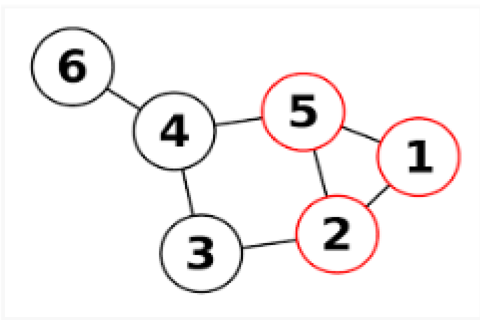

FIGURE 8 – L'ensemble $\{1, 2, 5\} formeunecliquemaximale$

1.2.10 Définition d'une clique maximale

Une clique est dite maximale si elle n'est pas incluse dans une clique de taille supérieure. c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être étendue en ajoutant un sommet supplémentaire. Dans l'exemple ci-dessous :

- $\{1, 2, 5\}$ est une clique maximale
- $\{2, 3, 4\}$ n'est pas une clique maximale car elle est incluse dans$\{2, 3, 4, 6\}$

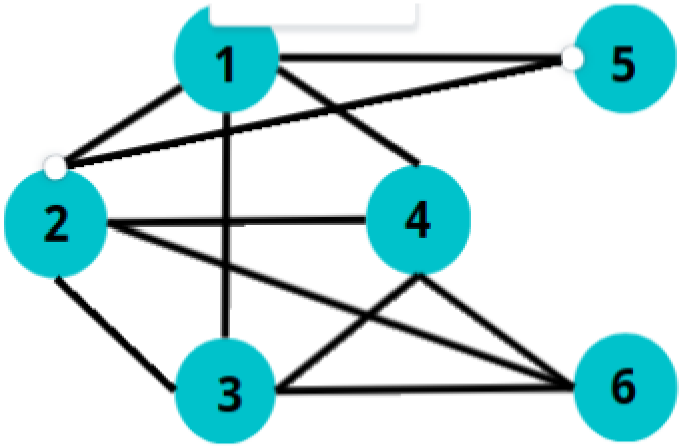

Figure 9 – Clique maximale dans un graphe

1.3 Justification des choix

Dans notre travail, on a choisi des graphes simples non orienté pour qu'on puisse représenter des relations symétriques entre des sommets qui n'ont pas de statut supérieur à l'autre,afin de bien représenter un réseau social où les sommets sont illustrés par les utilisateurs et les arêtes sont également les relations d'amitié entre eux (prenons Facebook comme exemple). Dans ce cas, si s_1 est un ami avec s_2, alors s_2 est également ami avec s_1. Ainsi qu'il est un peu facile de former des sous-graphes et chercher toutes les cliques maximales en utilisant un algorithme adéquat à ce problème.

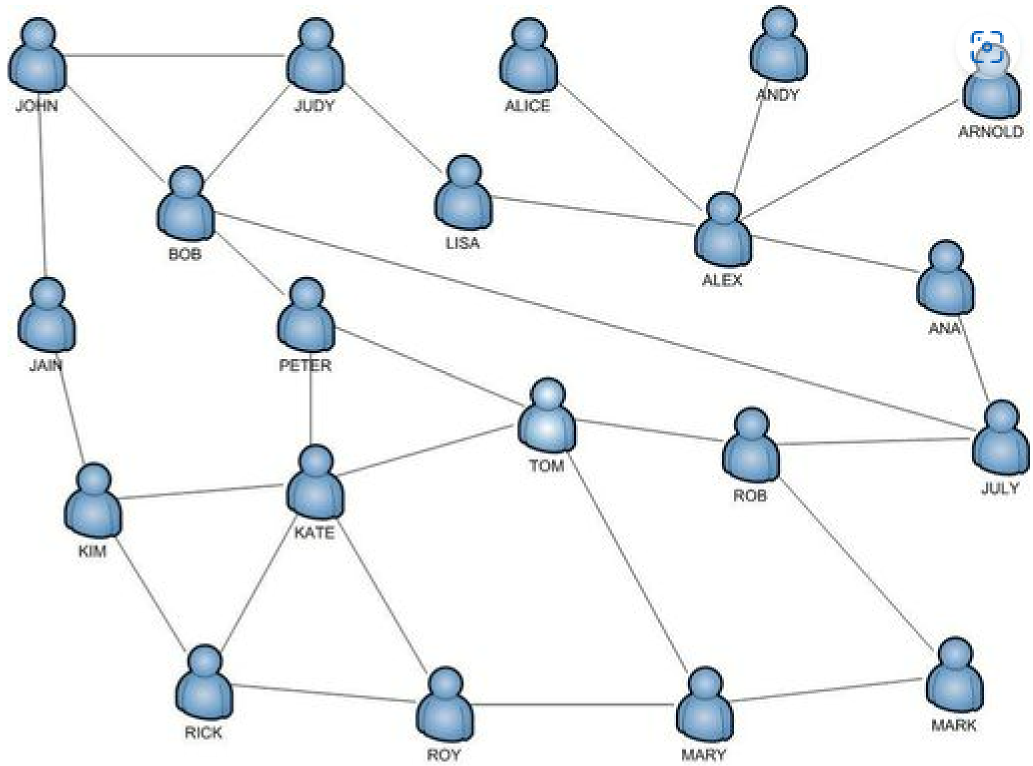

Figure 10 – Relations entre les personnes dans un réseau social