

# Recerca d'òrbites periodiques en Sistemes d'Equacions Diferencials

Aina Nadal Cárdenas i Juan Gabriel Gomila Salas  
Assignatura de Càlcul Numèric de 4t de la Llicenciatura de Matemàtiques  
UIB 2009

## I. INTRODUCCIÓ

En aquest article, cercam resoldre numèricament, emprant programació amb *Mathematica 7*, un dels problemes que provenen del món de les equacions diferencials ordinàries: trobar i continuar un objecte dinàmic que depèn d'un paràmetre, i estudiar-ne la seva evolució geomètrica en funció d'aquest. En concret, ens centrarem en el sistema de Michelson, un sistema amplament estudiat en la teoria qualitativa de les equacions diferencials, degut a la gran quantitat de dinàmiques riques i variades que s'hi poden trobar: cicles heteròclins, i homòclins, bifurcacions cocoon. En particular, ens centrarem en seguir una família d'òrbites periòdiques en anar variant un paràmetre  $\lambda$ .

## II. DEFINICIIONS I FONAMENTS MATEMÀTICS

Sigui  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funció contínua i localment Lipschitz, i considerem l'equació diferencial ordinària autònoma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

on  $\dot{\mathbf{x}}$  vol dir la derivada de la funció respecte de la variable independent  $t$ . Per qualsevol condició inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  existeix exactament una solució de l'equació diferencial, és a dir, una funció de  $t$  que satisfà (1) i que per a  $t = 0$  passa pel punt  $\mathbf{x}_0$ . Denotem per  $\phi(t; \mathbf{x}_0)$  aquesta solució per tal de ressaltar la dependència de la solució de la condició inicial  $\mathbf{x}_0$ . Usualment el terme *òrbita* denota la projecció de la gràfica de la solució en l'espai de fases, es a dir  $\gamma = \{\phi(t; \mathbf{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}$ . El conjunt de totes les òrbites del sistema s'anomena el *flux* de l'equació.

Direm que una òrbita  $\gamma$  és *periòdica* si existeix un valor positiu  $T$  tal que  $\phi(t; \mathbf{x}_0) = \phi(t + T; \mathbf{x}_0)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  (veure Figura 1). El menor valor de  $T$  que satisfà la igualtat anterior es denomina el *període* de l'òrbita. Llavors una condició necessària i suficient per l'existència d'òrbites periòdiques és l'existència de valors  $T > 0$  i  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\phi(T; \mathbf{p}) = \mathbf{p}. \quad (2)$$

El sistema de Michelson és el sistema uniparamètric, tridimensional donat per l'expressió:

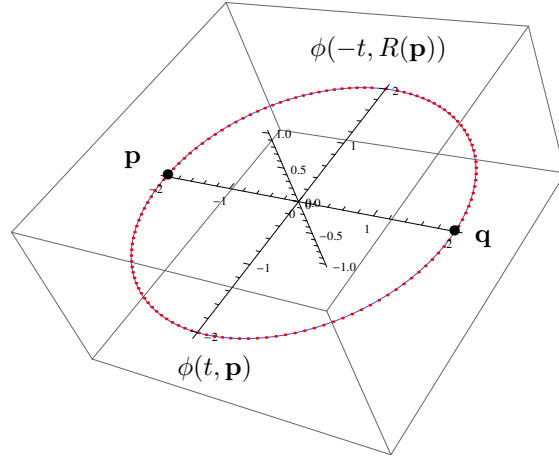


Figura 1. Exemple d'òrbita periòdica reversible en l'espai.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 1 - y - \lambda(1 + \lambda^2)x^2, \end{cases} \quad (3)$$

on  $\lambda > 0$  és el paràmetre del sistema. Aquest sistema, entre moltes altres particularitats, satisfà que és reversible, on l'eix de reversibilitat és l'eix  $OY$ . Que un sistema sigui *reversible* vol dir que el fluxe és invariant per una involució espacial i un canvi en la orientació temporal. En el nostre cas, la involució ve donada per:

$$R(x, y, z) = (-x, y, -z).$$

Per tant, el fluxe del sistema (3), satisfà que

$$R(\phi(t, \mathbf{x}_0)) = \phi(-t, R(\mathbf{x}_0)).$$

En aquest treball, ens centrarem en la recerca d'òrbites periòdiques reversibles. Vegem que aquestes òrbites han de tallar l'eix  $OY$ . Suposem que partim d'un punt sobre aquest eix,  $\mathbf{p} = (0, y_0, 0)$  i que existeix un instant  $t^*$  en el qual anem a parar a un altre punt,  $\mathbf{q} = (0, y_0^*, 0)$ , que anomenarem punt de retorn; és a dir,  $\mathbf{q} = \phi(t^*, \mathbf{p})$ . Com que

$$\mathbf{q} = R(\mathbf{q}) \quad \text{i} \quad \mathbf{p} = R(\mathbf{p}),$$

tenim que

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= R(\mathbf{q}) = R(\phi(t^*, \mathbf{p})) \\ &= \phi(-t^*, R(\mathbf{p})) = \phi(-t^*, \mathbf{p}).\end{aligned}$$

Per tant, partint del punt  $\mathbf{p}$  i seguint l'òrbita per  $t > 0$ , tenim que  $\phi(t^*, \mathbf{p}) = \mathbf{q}$  i que per  $t < 0$ , que  $\phi(-t^*, \mathbf{p}) = \mathbf{q}$ , en conseqüència,  $\phi(t, \mathbf{p})$  és una òrbita periòdica reversible de període  $2t^*$  (veure Figura 1). Per la recerca dels valors de  $t^*$  i de  $\mathbf{p}$ , emprarem l'anomenat *mètode del tir*.

Un cop trobades aquestes òrbites, el que voldrem serà estudiar com evolucionen quan feim variar el paràmetre  $\lambda$ . Per això, emprarem un *mètode de continuació* consistent en anar incrementant el valor de  $\lambda$  en intervals de  $10^{-3}$ , i prendre com a nova condició inicial la que s'hagi trobada emprant el valor de  $\lambda$  immediatament anterior.

El **mètode del tir**, transforma el problema d'equacions diferencials en la recerca d'un punt fix de l'aplicació de Poincaré

$$\phi(t; (0, y, z)) = (0, y, z),$$

o, equivalentment, en trobar els zeros d'una funció, que anomenarem funció desplaçament

$$H(t, y, z) = \phi(t; (0, y, z)) - (0, y, z) \quad (4)$$

on  $(t, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Així, ens queden a determinar tres incògnites. Ja que volem òrbites periòdiques tallant l'eix  $OY$ , forçarem que la variable  $z$  sigui zero. Per trobar els zeros de la funció  $H$ , s'han d'anar ajustant les condicions inicials de l'òrbita (i.e.  $\phi(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ ) perquè aquesta compleixi les condicions de frontera (2). En el nostre cas, el càlcul de zeros d'una funció el resoldrem emprant el mètode de Newton:

1. Partim d'una aproximació inicial,  $\mathbf{z}_0 = (T_0, y_0, z_0)$ , d'un nombre màxim d'iteracions,  $NMAX$  i d'una tolerància màxima  $\varepsilon > 0$ .
2. Feim  $k = 0$ .
3. Calculam la matriu Jacobiana  $DH(\mathbf{z}_k)$  de la funció  $H$  avaluada en el punt  $\mathbf{z}_k = (T_k, y_k, z_k)$ .
4. Resolem el sistema  $DH(\mathbf{z}_k) \cdot \mathbf{d} = -H(\mathbf{z}_k)$ .
5. Trobam  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \mathbf{d}$ .
  - a) Si  $\|\mathbf{d}\| \leq \varepsilon$ , aleshores donam com aproximació de la solució  $\mathbf{z}_{k+1}$ .
  - b) Si  $k > NMAX$ , llavors sortim sense trobar la solució.
  - c) En tot altre cas, Feim  $k = k + 1$  i tornam a la passa 3.

Remarquem en primer lloc que en la primera passa, hem de partir d'un punt que estigui relativament a prop d'on es trobi l'òrbita periòdica, per garantir la convergència del mètode. Destaquem que per  $\lambda = 0$ , el sistema és un sistema diferencial lineal i que té una òrbita periòdica en l'infinit de període  $2\pi$ . Per evitar problemes de computació, no començarem amb  $\lambda = 0$ ,

sinó que prendrem  $\lambda = 10^{-5}$ . Per aquest valor del paràmetre prendrem  $\mathbf{z}_0 = (2\pi, 450, 0)$ .

En segon lloc, observem que en la quarta passa del mètode de Newton, hem de resoldre un sistema de la forma  $DH(\mathbf{z}_k) \cdot \mathbf{d} = -H(\mathbf{z}_k)$ . Per tant, hem d'avaluar la funció desplaçament,  $H$  en el valor de  $\mathbf{z}_k = (T_k, y_k, z_k)$ . En conseqüència, hem d'avaluar la solució de l'equació diferencial (3) en l'instant  $T_k$  i amb condició inicial  $(0, y_k, z_k)$ , així com el valor de la matriu jacobiana  $DH$  en  $\mathbf{z}_k$ . Com que no coneixem la solució de (3) explícitament, haurem de fer ús de les eines de càlcul numèric per tal de trobar-ne una aproximació numèrica tant per  $H$  com per  $DH$ . Per això, emprarem el mètode de pas variable de Runge-Kutta-Felberg, d'ordre 4-5, que es troba citat en la bibliografia del final.

L'expressió en columnes de la matriu jacobiana  $DH$  avaluada en els punts  $\mathbf{z}_k = (T_k, y_k, z_k)$ , ve donada per

$$DH(\mathbf{z}_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial t}(\mathbf{z}_k) & \frac{\partial H}{\partial y}(\mathbf{z}_k) & \frac{\partial H}{\partial z}(\mathbf{z}_k) \end{pmatrix}.$$

Partint de (4)

$$\frac{\partial H}{\partial t}(\mathbf{z}_k) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(T_k; (0, y_k, z_k)) = f(\phi(T_k; (0, y_k, z_k))),$$

on  $f$  és el camp vectorial del sistema de Michelson

$$f(x, y, z) = (y, z, 1 - y - \lambda(1 + \lambda^2)x^2).$$

A més

$$\frac{\partial H}{\partial y}(\mathbf{z}_k) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(T_k; (0, y_k, z_k)) - y_k,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}(\mathbf{z}_k) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(T_k; (0, y_k, z_k)) - z_k.$$

La parcial  $\frac{\partial \phi}{\partial y}(T_k; (0, y_k, z_k))$  (respectivament la parcial  $\frac{\partial \phi}{\partial z}(T_k; (0, y_k, z_k))$ ) és la solució del problema variacional  $\dot{\mathbf{w}} = Df(\phi(T_k; (0, y_k, z_k)))\mathbf{w}$  amb condició inicial  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{e}_2$  (respectivament  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{e}_3$ ) avaluada a l'instant  $T_k$ . Denotem per  $\mathbf{e}_i$  l'i-èssim vector de la base canònica de l'espai.

Ara ja podem resoldre el sistema tridimensional

$$DH(\mathbf{z}_k) \cdot \mathbf{d}_k = -H(\mathbf{z}_k)$$

i trobar el següent iterat  $\mathbf{z}_{k+1}$  de la successió del mètode de Newton. Aquest procés proporciona una successió  $\{\mathbf{z}_k\}_{k=0}^N$  que, quan convergeix, ho fa a un valor  $(T^*, y^*, z^*)$ , de forma que l'òrbita que passa pel punt  $(0, y^*, z^*)$  és una òrbita periòdica de període  $T^*$ .

Finalment, remarquem que una vegada trobats els valors de  $T^*, y^*, z^*$  per un  $\lambda$  fixat, calcularem els valors de  $T, y, z$  corresponents a l'òrbita periòdica pel valor del paràmetre  $\lambda + 10^{-3}$  emprant com a condició inicial del mètode de Newton  $\mathbf{z}_0 = (T^*, y^*, z^*)$ .

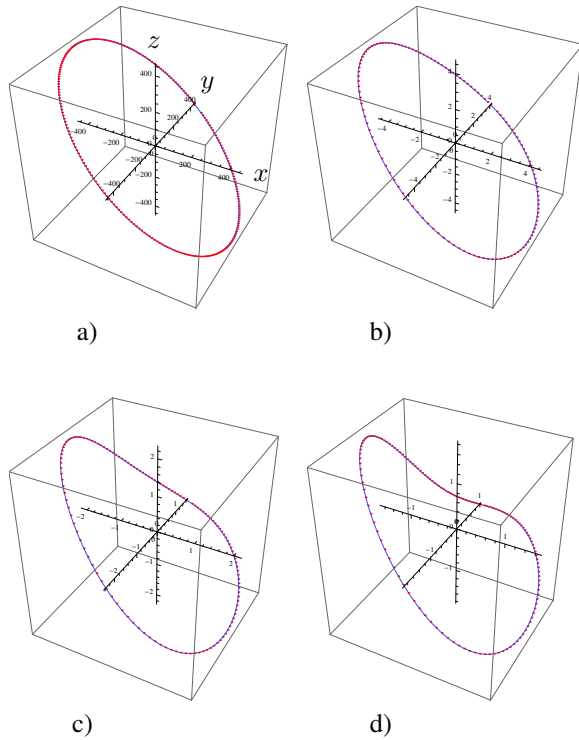


Figura 2. Evolució de les òrbites periòdiques reversibles per diversos valors de  $\lambda$ . Cal observar l'orientació dels eixos i el canvi d'escala.

### III. RESULTATS QUALITATIU

En la Figura 2 podem observar l'evolució de l'òrbita periòdica en funció de  $\lambda$ . Destacam que l'orientació dels eixos és la mateixa en totes elles. En la figura 2a), s'observa el cas particular que citàvem abans, amb  $\lambda = 10^{-5}$ . Com ja deiem, és una òrbita que bifurca de l'infinít, amb període  $2\pi$  per  $\lambda = 0$ . En les successives imatges, s'aprecia com l'òrbita va decreixent de tamany a mesura que anam augmentant el paràmetre  $\lambda$ , mentre que el període va augmentant. En particular, podem observar exemples de recerca d'òrbites periòdiques per diversos valors de  $\lambda$  resumits en la següent taula:

$\lambda$	$T$	$\mathbf{p}$
$10^{-5}$	6.28213	(0, 446, 0)
0.1	6.31353	(0, 4.07874, 0)
0.4	6.57756	(0, 1.61328, 0)
0.592	7.36103	(0, 0.980626, 0)

També, es pot veure com l'òrbita es retorça al llarg de la seva trajectòria, de forma que allò que al principi era una circumferència, al final es va corbant cap a dins, formant, una espècie de cor.

En un vídeo que vam elaborar, es pot observar el comportament dinàmic d'aquest sistema, ja que sols amb imatges no es pot apreciar una evolució contínua. En resum, s'observa com es parteix d'una circumferència de radi molt gran, a mesura que el paràmetre creix, aquesta es va fent de radi cada cop més petit, ràpidament al principi, més lentament al final, fins

a arribar un punt, on l'òrbita esretorça adoptant una forma semblant a un cor tridimensional.

### IV. RESULTATS QUANTITATIU

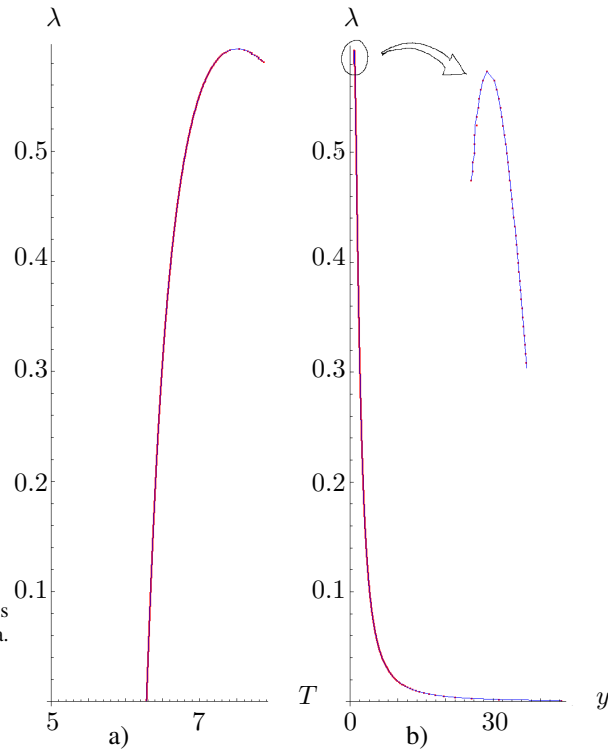


Figura 3. Evolució del període (a) i de l'amplitud (b) de les òrbites periòdiques reversibles en funció del paràmetre  $\lambda$ .

La Figura 3 representa d'una banda la relació entre el valor del paràmetre  $\lambda$  i del període  $T$  (Figura 3a) i de  $\lambda$  i el valor del radi  $y$  de l'òrbita periòdica (Figura 3b).

En primer lloc, com ja havíem dit al principi, el període comença a créixer desde  $2\pi$ . Això, juntament amb el fet de que les òrbites siguin cada cop més petites, ens diu que el sistema evoluciona més lentament: al principi, amb un període de  $2\pi$  el sistema recorria tota una circumferència de radi 446, i al final, amb un període de 7.36 en recorre una de radi menor que 1. Per tant, la velocitat a la que es recorre és menor.

Destaquem el fet de que ambdues figures tenen un màxim, pel valor de  $\lambda = 0.593$ . La primera es correspon amb un període  $T = 7.53099$  i la segona amb un radi  $y = 0.839764$ . Aquest fet es denomina una *bifurcació sella-node d'òrbites periòdiques*. Aquesta bifurcació descriu el mecanisme pel qual dues òrbites periòdiques col·lapsen en una única, la qual desapareix. Vegem aquest fenomen en les figures anteriors.

Per un valor de  $\lambda$  menor que 0.58 es pot observar que hi ha una única òrbita periòdica, que prové de l'infinít (el valor de  $y$  decreix respecte de  $\lambda$ ). Per  $\lambda = 0.581$ , en la regió ampliada de la Figura 3b,

s'aprecia que existeixen dues òrbites periòdiques de radi propers. Aquestes òrbites estan representades en la Figura 4a. L'aparició de la nova òrbita, és un tema que sobrepassa els objectius d'aquest treball. Segons feim créixer el valor del paràmetre, fins arribar al valor on es troba la bifurcació sella-node els radi d'aquestes òrbites es van apropant (Figura 4b). En arribar al valor màxim, tenim un únic valor del radi, la qual cosa, vol dir que ambdues han col·lapsat. Com calia esperar en el comportament d'una bifurcació sella-node, si feim créixer una mica més el valor de  $\lambda$ , observam que l'òrbita que ha col·lapsat, desapareix.

El mateix anàlisi, es pot fer mirant la gràfica del període (Figura 3a).

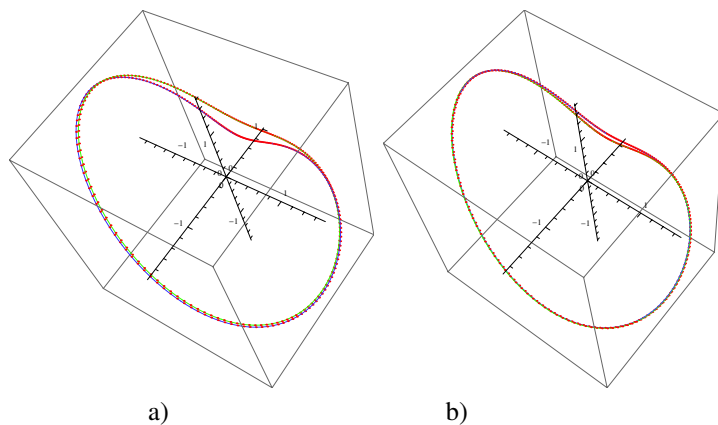


Figura 4. Parella d'òrbites periòdiques reversibles per  $\lambda = 0.581$  (a) i per  $\lambda = 0.593$  (b)

## V. CONCLUSIONS

Tots els aspectes tractats en aquest treball, han estat amplament estudiats, majoritàriament emprant eines numèriques, la qual cosa posa de manifest la utilitat dels mètodes numèrics per endinsar-se en problemes complexes i proporcionar orientacions en un posterior tractament analític.

D'altra banda, explicar el fet de que, existint dues òrbites periòdiques properes, hi hagi un valor del paràmetre a partir del qual es desvaneixin, és un tema que s'escapa a l'objectiu d'aquest treball. Realment, poder seguir l'evolució d'aquests fenòmens, és per un matemàtic, com per un arqueòleg és poder seguir les passes d'un tiranosaure o ser capaç d'esbrinar com funcionaven les seves mandíbules. En el nostre cas, poder observar fenòmens tan característics com són les òrbites periòdiques, que es retorcen, o col·lapsen entre elles, és tan gratificant, com per ells trobar un fòssil perdut, doncs en ambdós casos, cercam senyals d'activitat d'organismes dinàmics en entitats que són estàtiques.

## VI. BIBLIOGRAFIA

- Apunts de classe de càlcul numèric.
- Carmona, V; Fernández-Sánchez, F; Freire, E; García-Medina, E; Teruel, A.E: *Órbitas periódicas en una versión lineal a trozos del sistema de Michelson*, Proceedings del XXI CEDYA. Ciudad Real 2009.
- Wikipedia: Ciclo límites, sistemas d'equacions diferencials, mètode de Runge-Kutta.

Si estau interessats en disposar dels algorismes emprats per fer aquest experiment, o voleu visualitzar un video on es pot observar tot aquest procés de forma dinàmica, posau-vos en contacte amb els professors Catalina Sbert o Antonio E. Teruel.