

Estudi sobre el pont de Wien no lineal

Catalina Vich Llompарт,
Quart curs de la llicenciatura de matemàtiques
Pràctica de l'assignatura de Simulació.

GAIREBÉ sempre que ens trobem davant d'una situació real podem donar-ne un model matemàtic de tal manera que ens aproximem aquesta i ens permeti observar, a priori, fets que poden donar-se. Ara bé, moltes vegades s'ha d'anar en compte amb el fet que el model no resulti massa ideal ja que ens podria provocar errors inesperats.

En aquest treball ens disposam a estudiar un circuit elèctric oscil·lador anomenat Pont de Wien. Començarem construint un model diferencial el qual ens portarà a dos possibles sistemes d'equacions, un lineal i un altre no lineal, depenent de les característiques d'una de les components. Fent servir eines analítiques i numèriques, explorarem les propietats qualitatives i quantitatives dels models. Finalment, construirem un circuit elèctric basat amb aquest disseny i, amb l'ajuda d'un oscil·loscopi, conclourem quins dels dos models modelitza millor el comportament del sistema.

PONT DE WIEN

Aquest circuit consisteix en quatre resistències, dos condensadors i un amplificador operacional amb realimentació negativa, connectat tal com s'observa en la Figura 1.

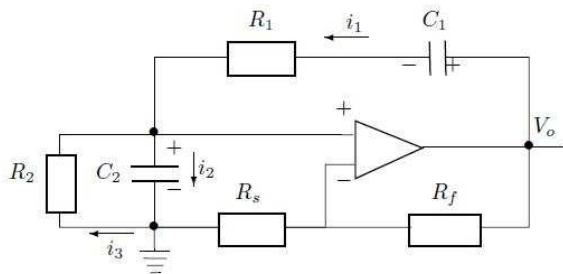


Figura 1. Circuit Pont de Wien clàssic.

Notem que el circuit consta de dues malles, la primera formada per la resistència R_1 i els condensadors C_1 i C_2 i, la segona, formada per la resistència R_2 i el condensador C_2 . Per a facilitar el nostre estudi, podem considerar sense pèrdua de generalitat que el circuit està orientat en sentit antihorari en la primera malla i sentit horari en la segona.

Aplicant les lleis de Kirchhoff i donat que la corrent en l'entrada de l'amplificador és nul·la obtenim

$$i_3 + i_1 = i_2. \quad (1)$$

Per altra part, aplicant la segona llei de Kirchhoff en cadascuna de les malles obtenim que: si V_{C_2} és la caiguda de potencial en travessar el condensador C_2 i V_{R_2} és la caiguda de potencial en atravesar la resistència R_2 , llavors

$$V_{C_2} = -V_{R_2}; \quad (2)$$

i si V_{C_1} i V_{R_1} són les caigudes de potencial en el condensador C_1 i la resistència R_1 , respectivament, i V_0 és la tensió en la sortida de l'amplificador, llavors se satisfà que

$$-V_0 = V_{C_1} + V_{R_1} + V_{C_2}. \quad (3)$$

Ara bé, com que

$$i_1 = C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt}, \quad i_2 = C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} \quad \text{i} \quad i_3 = \frac{V_{R_2}}{R_2},$$

de les equacions (1) i (2) obtenim

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} - C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{V_{R_2}}{R_2}, \quad (4)$$

i de l'equació (3) obtenim que

$$C_1 R_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = -V_0 - V_{C_1} - V_{C_2}. \quad (5)$$

Substituint l'equació (5) en l'equació (6), obtenim el següent sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\begin{cases} R_1 C_1 \dot{V}_{C_1} = -V_{C_1} - V_{C_2} - V_0, \\ R_1 C_2 \dot{V}_{C_2} = -V_{C_1} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_{C_2} - V_0, \end{cases} \quad (6)$$

on \dot{V}_{C_k} denota la derivada de V_{C_k} respecte del temps per a $k = 1, 2$.

La solució de l'equació diferencial (6) és una funció de dues variables, $V_{C_1}(t)$, $V_{C_2}(t)$ les quals representen la caiguda de potencial en el condensador C_1 i C_2 , respectivament, al llarg del temps.

Es fa notar que la tensió en la sortida de l'amplificador operacional no inversor, V_0 , és funció de la tensió en l'entrada no inversora, V_{C_2} . Aquesta funció es anomena funció característica de l'amplificador operacional.

Usualment la funció característica es considera lineal, és a dir

$$V_0 = -\alpha V_{C_2}, \quad (7)$$

on $\alpha = 1 + R_F/R_S$ és el guany. El que implica un comportament ideal de l'amplificador operacional (el rang de treball de l'amplificador és infinit).

No obstant, un amplificador real operacional té un rang de resposta finit a partir del qual se satura. Si es té en compte aquest valor, es pot considerar la funció característica

$$V_0 = \begin{cases} E \operatorname{sign}(-\alpha V_{C_2} + E) & \text{si } |\alpha V_{C_2}| > E, \\ -\alpha V_{C_2} & \text{si } |\alpha V_{C_2}| \leq E, \end{cases} \quad (8)$$

on $\alpha = 1 + R_F/R_S$ és el guany i E el voltatge de saturació.

S'arriba així a dos models diferents: un lineal, el qual és usual utilitzar, i un altre lineal a trossos.

En la resta del treball estudiarem algunes qüestions quantitatives i qualitatives dels models que ens permetin concloure quin dels dos models representa millor el comportament real del circuit.

Cas lineal

En el cas d'un amplificador operacional ideal, sense saturació, emprant l'equació (7), el sistema (6) es pot reescriure com el sistema d'equacions lineals ordinàries

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{C_1} \\ \dot{V}_{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1}(1 - \alpha) \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2} - \alpha\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \end{pmatrix}.$$

La matriu associada a aquest sistema d'equacions té traça i determinant

$$T = \frac{-C_2 R_2 - R_1 C_1 - C_1 R_2(1 - \alpha)}{C_1 R_1 C_2 R_2},$$

$$D = \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2} > 0,$$

respectivament.

A partir de la teoria d'equacions diferencials se sap que el retrat de fase (el comportament del conjunt de solucions) és caracteritzat pel valor de la traça i del determinant del sistema diferencial. Com que el determinant és estrictament positiu tenim la següent caracterització segons el signe de la traça:

Teorema 1: El sistema d'equacions diferencials satisfà

- Si $T < 0$, llavors l'origen és un atractor global.
- Si $T = 0$, llavors l'origen és un centre global.
- Si $T > 0$, llavors l'origen és un repulsor global.

Per a una demostració d'aquest resultat, podeu consultar el teorema de la pàgina 25 del llibre de L. Perko [1].

Per tant, per al sistema lineal, el model té tres possibles comportaments dels quals únicament n'hi ha un que és periòdic, quan la traça de la matriu és idènticament nul·la.

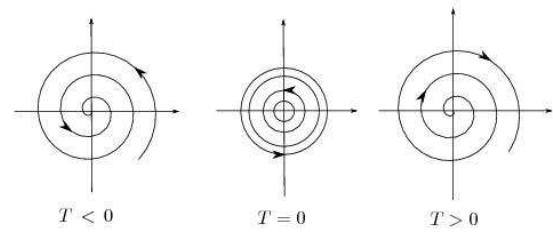


Figura 2. Comportament topològic de les òrbites d'un sistema lineal amb determinant positiu segons el signe de la traça.

A continuació es presenta una experimentació del sistema real per a observar si el comportament estudiat es fa present o no.

Connectant a un oscil·loscopi una placa elèctrica en la qual construïm el pont de Wien amb valors de les resistències $R_1 = 2.188K\Omega$, $R_2 = 2.167K\Omega$, $R_S = 2.192K\Omega$ i $R_F = 10.63K\Omega$ i dels condensadors $C_1 = 646nF$ i $C_2 = 328nF$. Per a aquests valors es té que el valor de la traça T és estrictament positiu, per la qual cosa, el comportament de qualsevol solució hauria de ser asimptòticament cap a l'origen.

Pel contrari, en la Figura 3 tenim la sortida de l'oscil·loscopi per a aquests valors de les resistències on s'observa un comportament periòdic de les dues variables V_{C_1} i V_{C_2} amb un període estimat de $P = 11.24ms$.

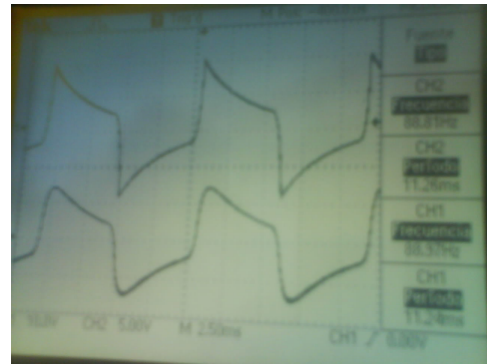


Figura 3. Representació de l'oscil·loscopi de les variables V_{C_1} i V_{C_2} del sistema respectivament.

Notis que aquest fet està en contradicció amb el model teòric plantejat pel qual les úniques òrbites periòdiques apareixen quan la traça és nul·la.

Cas lineal a trossos

En matemàtiques es poden construir models ideals com en el cas anterior al qual es considerava que es podia passar infinit voltatge als amplificadors però en la realitat aquest fet no és pas així sinó que, com que els amplificadors en un moment donat es saturen, llavors també s'ha de tenir en compte aquesta nova condició al model matemàtic. Per aquest motiu considerem la

característica lineal a trossos (8) la qual contempla el cas en què l'amplificador se satura. És a dir, es considera que a partir d'un cert valor del voltatge l'amplificador operacional manté constant la seva resposta. Aquest fet es pot observar en la Figura 4.

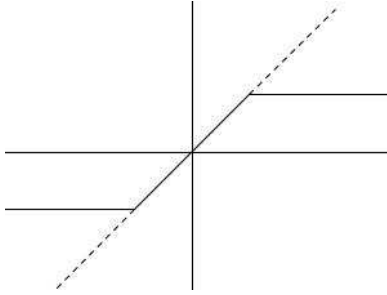


Figura 4. Funció característica lineal a trossos d'un amplificador operacional amb saturació.

Realitzant el canvi de variables

$$x_1 = \frac{\alpha V_{C_2}}{E}, \quad x_2 = \frac{\alpha V_{C_1}}{E}$$

i considerant l'expressió (8), es pot reescriure el sistema diferencial (6) com un nou sistema d'equacions diferencial ordinàries

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A\mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{si } x_1 > 1, \\ B\mathbf{x} & \text{si } -1 \leq x_1 \leq 1, \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b} & \text{si } x_1 < -1. \end{cases} \quad (9)$$

on $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{b} = \left(\frac{\alpha}{R_1 C_2}, \frac{\alpha}{R_1 C_1} \right)^T$, A és la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) & -\frac{1}{R_1 C_2} \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{pmatrix},$$

i $B = A + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T$.

El camp vectorial (9) és continu i Lipschitz, per la qual cosa està garantitzada l'existència i unicitat de les solucions en tot el pla, encara que el sistema no sigui diferenciable. Per tant, es pot parlar d'un flux associat al sistema (9). Aquest flux es compon de tres sistemes lineals definits cadascun en les següents regions de l'espai de fase

$$\begin{aligned} S_+ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 1\}, \\ S_0 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1\}, \\ S_- &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -1\}. \end{aligned}$$

Siguin Γ_+ i Γ_- les rectes que separen les regions S_+ i S_0 i les regions S_0 i S_- , respectivament.

Conseqüentment, encara que la implicació no sigui evident, el flux del sistema (9) està caracteritzat pels valors de les traces t i T i dels determinants d i D de les matrius A i B respectivament

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) < 0, & d &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_1} > 0 \\ T &= t + \frac{\alpha}{R_1 C_2}, & D &= d > 0. \end{aligned}$$

Variant els valor de les resistències convenientment, es pot alterar el signe de T i obtenir d'aquesta manera diferents solucions per al sistema (9) segons el següent Teorema, el qual es pot trobar en l'article [2] en l'apartat Teorema 1 o en l'article [3] apartats Teoremes B i C.

Teorema 2: El sistema d'equacions diferencials satisfà

- Si $T < 0$, llavors l'origen és atractor global del sistema.
- Si $T = 0$, llavors existeix un centre local entorn a l'origen contingut en S_0 del qual la frontera Γ és una òrbita periòdica tangent a les rectes Γ_+ i Γ_- . El període de totes aquestes òrbites és $2\pi/\sqrt{D}$. A més, Γ és atractor global de la regió exterior al centre.
- Si $T > 0$, llavors l'origen és atractor. Existeix una òrbita periòdica Γ la qual envolta l'origen i interseca a les tres regions. A més, Γ és un atractor global (llevat de l'origen).

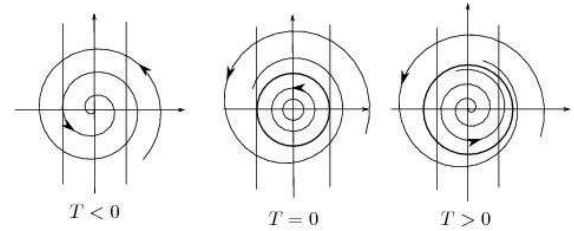


Figura 5. Comportament topològic de les òrbites del sistema lineal a trossos (9) amb determinant positiu segons el signe de la traça.

En aquest cas, el comportament periòdic també està previst en el cas en què la traça és positiva, tal com s'ha vist en l'oscil·loscopi. Donat que el model lineal a trossos representa millor qualitativament el sistema real, en la següent secció, s'estudiarà si quantitativament també es té aquesta aproximació.

COMPARACIÓ DEL MODEL AMB EL COMPORTAMENT REAL

Vist que els aspectes qualitatius del model lineal a trossos coincideix amb l'observat en l'oscil·loscopi, és a dir, que existeix un comportament periòdic, en aquesta secció s'estudiarà si el període previst pel model matemàtic coincideix amb el mesurat per l'oscil·loscopi.

Per a portar a terme l'experiment es mantenen constants els valors de les resistències R_1, R_2 i R_S i dels condensadors C_1 i C_2 que s'havien establert com a contraexemple en el cas lineal. Aleshores, canviant els valors de la resistència R_F segons els propòsits del moment, es pot calcular el període P de l'òrbita periòdica.

Mitjançant l'oscil·loscopi, es té que el període per a diferents valors de la resistència R_F són

Representant la variable x_1 respecte de x_2 en el cas en què $T > 0$, s'observa com les òrbites del sistema s'allunyen de l'origen cap a la solució periòdica.

R_F	T	P
$3.32K\Omega$	$-3.945E10^{-6} < 0$	$P = 7.360ms$
$3.47K\Omega$	$9.1406E10^{-5} > 0$	$P = 6.31ms$
$3.99K\Omega$	$4.2196E10^{-4} > 0$	$P = 6.66ms$
$10.63K\Omega$	$4.6429E-3 > 0$	$P = 11.24ms$

Figura 6. Taula dels valors dels períodes del moviment oscil·latori obtinguts amb l'oscil·loscopi per a diferents valors de R_F

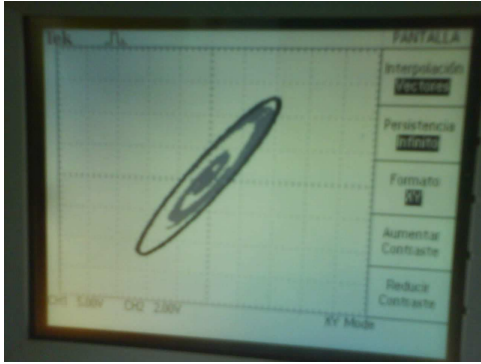


Figura 7. Comportament periòdic vist en l'oscil·loscopi al representar la variable x_1 respecte de x_2 per al valor $R_F = 10.63K\Omega$.

Per altra part, implementant el mètode numèric Runge-Kutta Felberg 4-5 i integrant amb aquest el sistema (9) es poden calcular els diferents períodes de les respectives òrbites periòdiques obtenint els següents resultats:

R_F	$P_{superior}$	error	$P_{inferior}$	error
$3.32K\Omega$	Decau	-	Decau	-
$3.47K\Omega$	$6.36ms$	0.0158	$6.31ms$	0.0217
$3.99K\Omega$	$6.66ms$	0.0038	$6.60ms$	0.0341
$10.63K\Omega$	$11.05ms$	0.0366	11.00	0.0332

Figura 8. Taula dels valors dels períodes del moviment oscil·latori obtinguts numèricament per a diferents valors de R_F

Fent una comparativa del cas real i del numèric, prenent en cada cas el valor que ens proporciona un error menor s'obté que

R_F	$P_{num.}$	$e_{num.}$	$P_{osc.}$	$e_{osc.}$
$3.47K\Omega$	$6.36ms$	0.0158	$6.31ms$	0.01
$3.99K\Omega$	$6.66ms$	0.0038	$6.66ms$	0.01
$10.63K\Omega$	$11.00ms$	0.0332	$11.24ms$	0.01

Figura 9. Comparació entre els resultats mesurats en l'oscil·loscopi i obtinguts numèricament

Concloem que el model lineal a trossos no tan sols s'aproxima qualitativament al sistema real sinó que també ho fa de manera quantitativa.

A més, numèricament es pot obtenir quin és el valor exacte de R_F pel qual el valor de la traça T s'anul·la. Aquest valor és $3.335K\Omega$ amb període corresponent, $P = 6.298ms$ que és aproximadament $2\pi/\sqrt{D}$ tal com ens predeia el Teorema 2(b).

Notis que per a valors més petits d'aquest valor crític, el Teorema 2(a) predeia que l'origen és un atractor global la qual cosa sembla estar en contradicció amb la primera fila de la Taula on s'obté un període per a $R_F = 3.32K\Omega$. Aquesta contradicció desapareix si pensam que, per a aquest valor, la traça és tan propera a 0 que el comportament del sistema està pròxim a un comportament de tipus centre previst en el Teorema 2(b).

REFERÈNCIES

- [1] Lawrence Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3a edició.
- [2] Emilio Freire, Enrique Ponce i Javier Ros, *Limit cycle bifurcation from center in symmetric piecewise-linear systems*, International Journal of Bifurcation and chaos, Vol. 9, N. 5 (1999) 895-907, World Scientific Publishing Company.
- [3] Jaume Llibre i Jorge Sotomayor, *phase portraits of planar control systems*, Nonlinear control systems, phase portait, bifurcation diagram.



Catalina Vich Llompart Llicenciada en Matemàtiques l'any 2010 en la Universitat de les Illes Balears. Matriculada al màster *Master in Advanced Mathematics and Mathematical Engineering* en la Universitat Politècnica de Catalunya.

Amb la col·laboració del Dr. Antonio E. Teruel Aguilar, doctor en Matemàtiques en la Universitat de les Illes Balears i el Dr. Rodrigo Picos, doctor en Tecnologia electrònica en la Universitat de les Illes Balears.