

Taivaanmekaniikan kotitehtävät

Katja Matilainen

Vuodelta: En edes muista

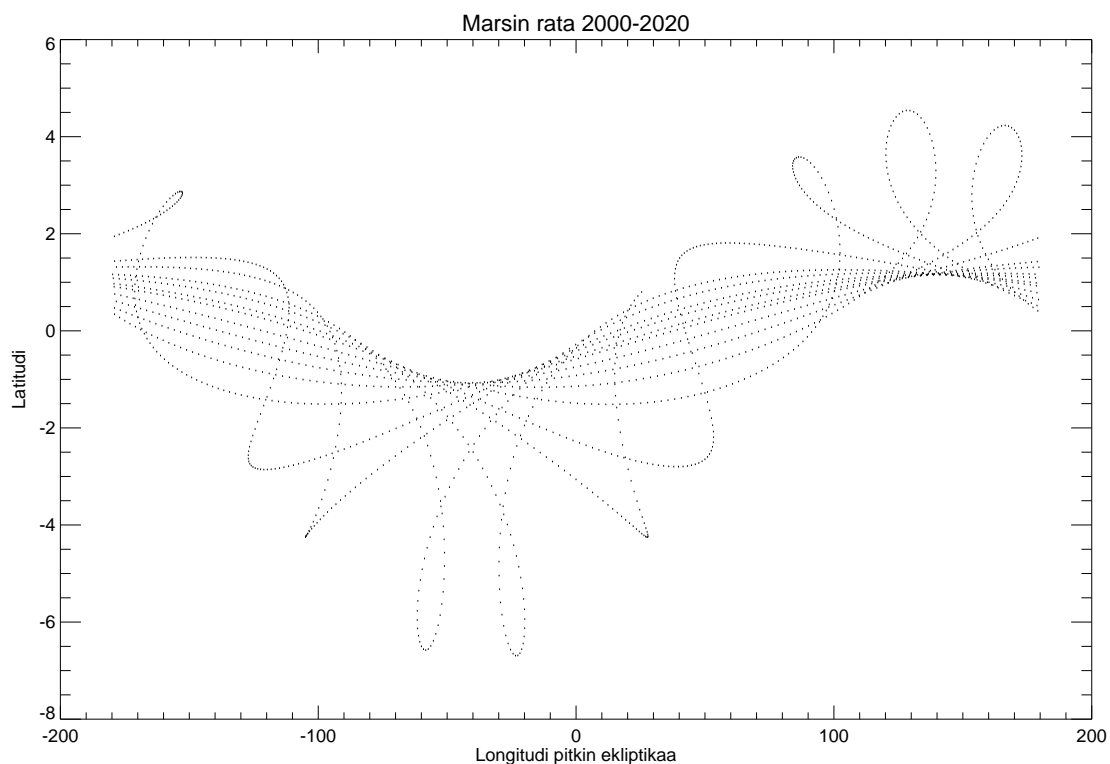
1 Marsin rata taivaalla vuosina 2000-2020

Ensimmäisessä tehtävässä selvitettiin Tähtitieteen perusteet -kirjasta löytyvän D.12 -taulukon rataelementtien avulla Marsin rata Maan taivaalla vuosien 2000-2020 aikana.

Tehtävä ratkaistiin IDL:llä tehdyllä 'mars.pro' -ohjelmalla, jonka sisältö on esitetty kappaleessa 4.1. Ohjelmassa käytettiin hyväksi valmista 'elem_to_rv.pro' -aliohjelmää, joka laskee annetuista rataelementeistä heliosentrisen paikkavektorin.

1.1 Marsin rata Maan ratatasokoordinaatistossa

Kuvassa 1 on esitetty ohjelmasta 'mars.pro' lopputuloksena saatu Marsin rata Maan ratatasokoordinaatistossa.

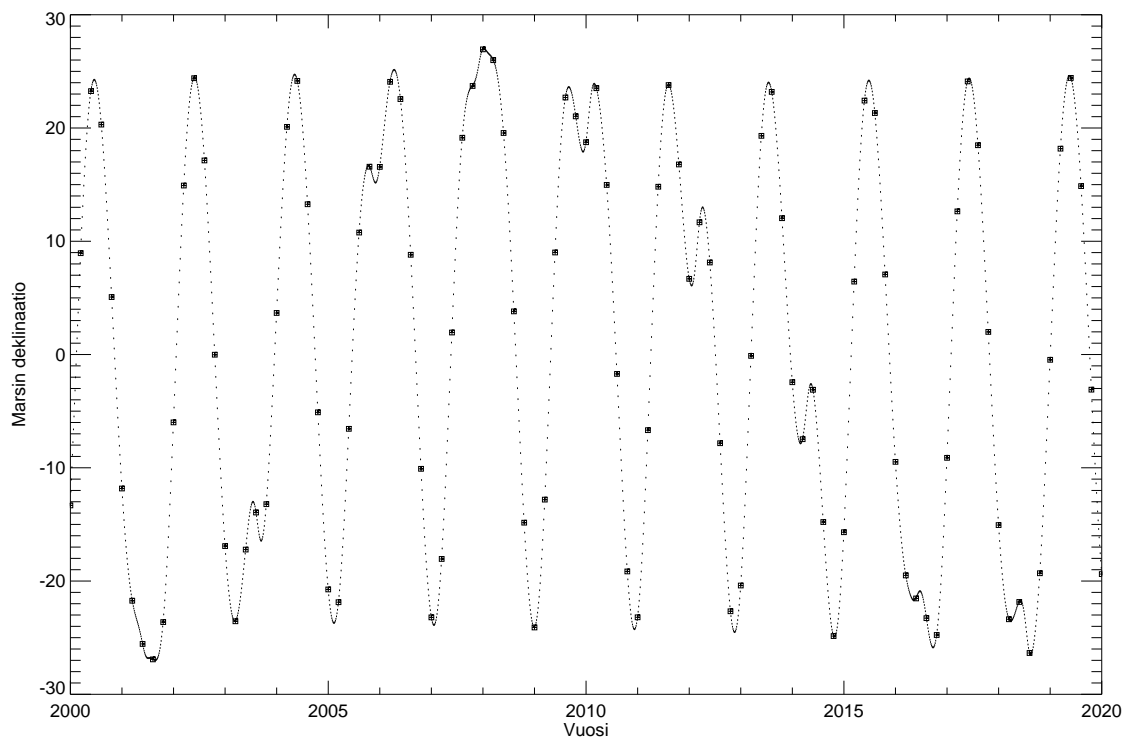


Kuva 1: Marsin rata Maan ratatasokoordinaatistossa vuosina 2000-2020

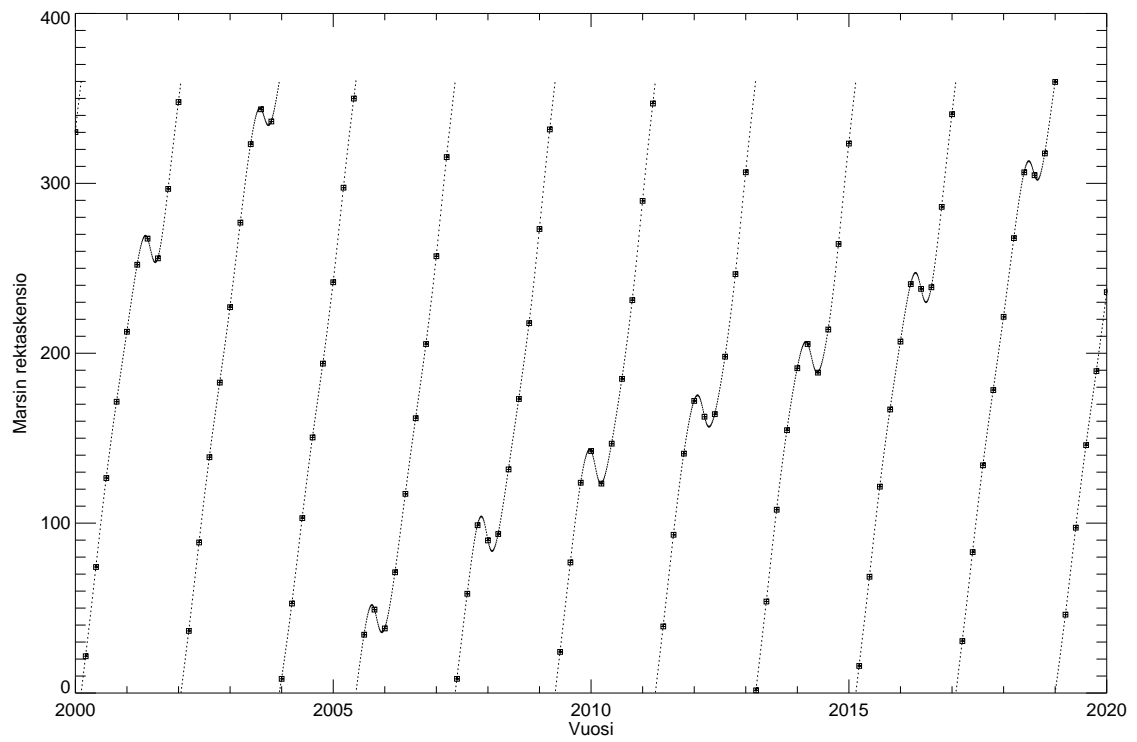
1.2 Marsin rata Maan ekvatoriaalisessa koordinaatistossa

Maan ekvaattorijärjestelmässä Marsin paikkaa ei voida yhtä yksikäsitteisen selkeästi esittää yhden kuvaajan avulla. Sen sijaan kuvissa 2 ja 3 on esitetty erikseen ohjelmassa 'mars.pro' lasketut Marsin deklinaatio ja rektaskensio ajan funktiona.

Saatuja laskennallisia arvoja (katkoviiva) verrattiin astro -kirjastosta saattuihin tarkkoihin arvoihin (neliösymbolit).

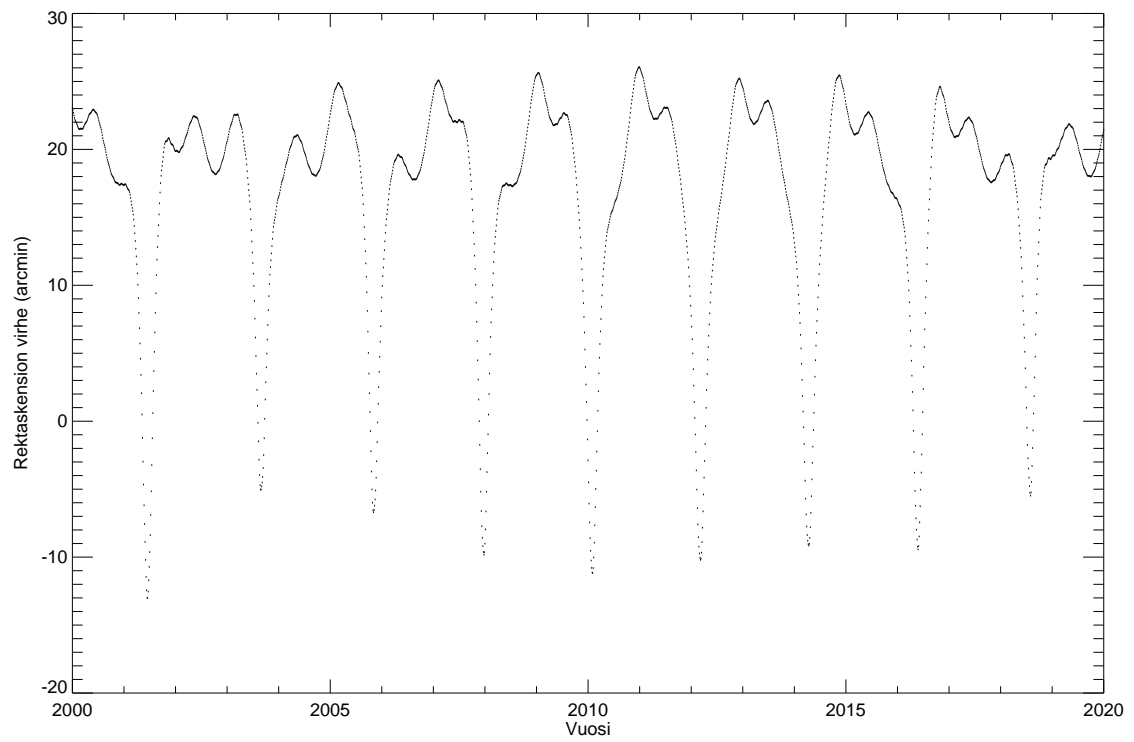
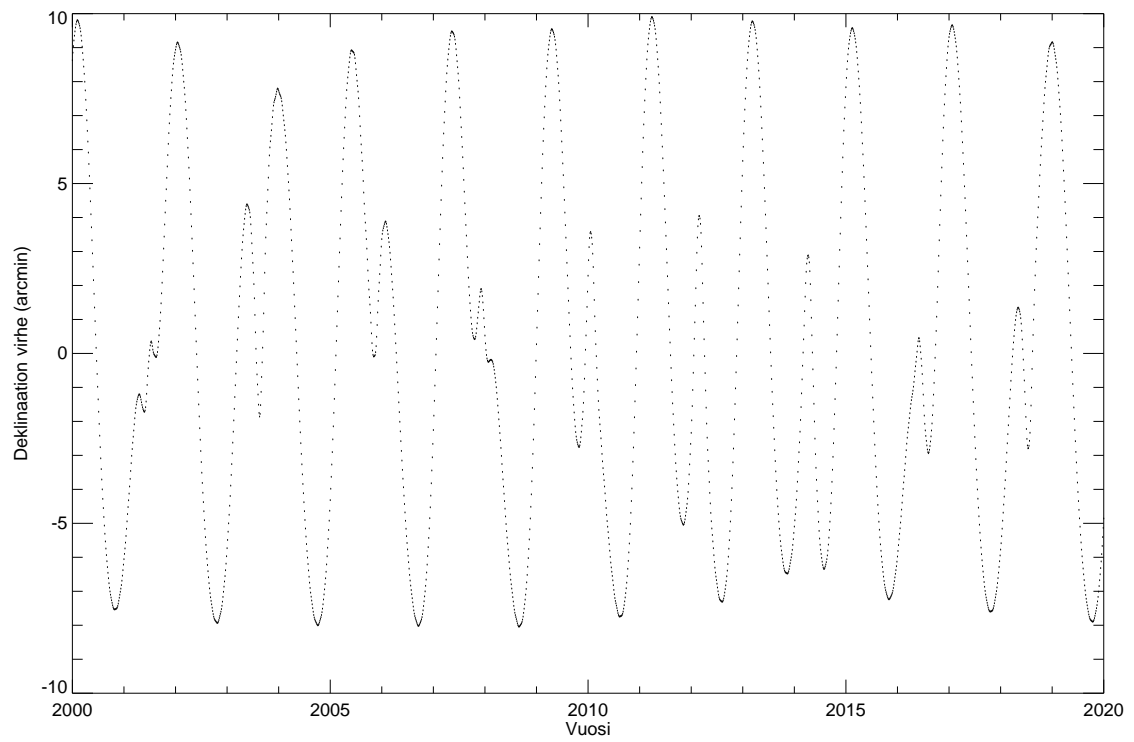


Kuva 2: Marsin deklinaatio



Kuva 3: Marsin rektaskensio

Lopuksi deklinaation ja rektaskension arvoja verrattiin JPL-ephemerideihin, ja esitettiin niiden virheet ajan funktiona (kuva 4).



Kuva 4: Deklinaation ja rektaskension virhe

2 Numeerinen integrointi

Toisessa tehtävässä oli tarkoitus laskea kappaleen rata erilaisilla numeerisilla menetelmillä $1/r^2$ ja $1/r^3$ -muotoisissa voimakentissä, ja verrata saatuja tuloksia analyyttiseen ratiaan. Samalla seurattiin energian ja impulssimomentin säilymistä eri menetelmillä.

Tehtävässä käytettiin valmiita aliohjelmia 'kepler.pro' sekä 'inte_simple_f.pro', joista jälkimmäistä muokattiin ratkaisemaan tarvittaessa myös kappaleen analyyttinen rata. Myös muutamia muita muutoksia tehtiin ohjelmaan.

2.1 Kahden kappaleen liike $1/r^2$ -voimakentässä

Kappaleen rata laskettiin neljällä eri menetelmällä eri eksentrisyyden arvoille ($e = 0$, $e = 0.5$ ja $e = 0.9$) niin, että isoakselin puolikkaan suurudeksi valittiin $a = 1$ ja systeemin massa skaalattiin arvoon $\mu = 1$.

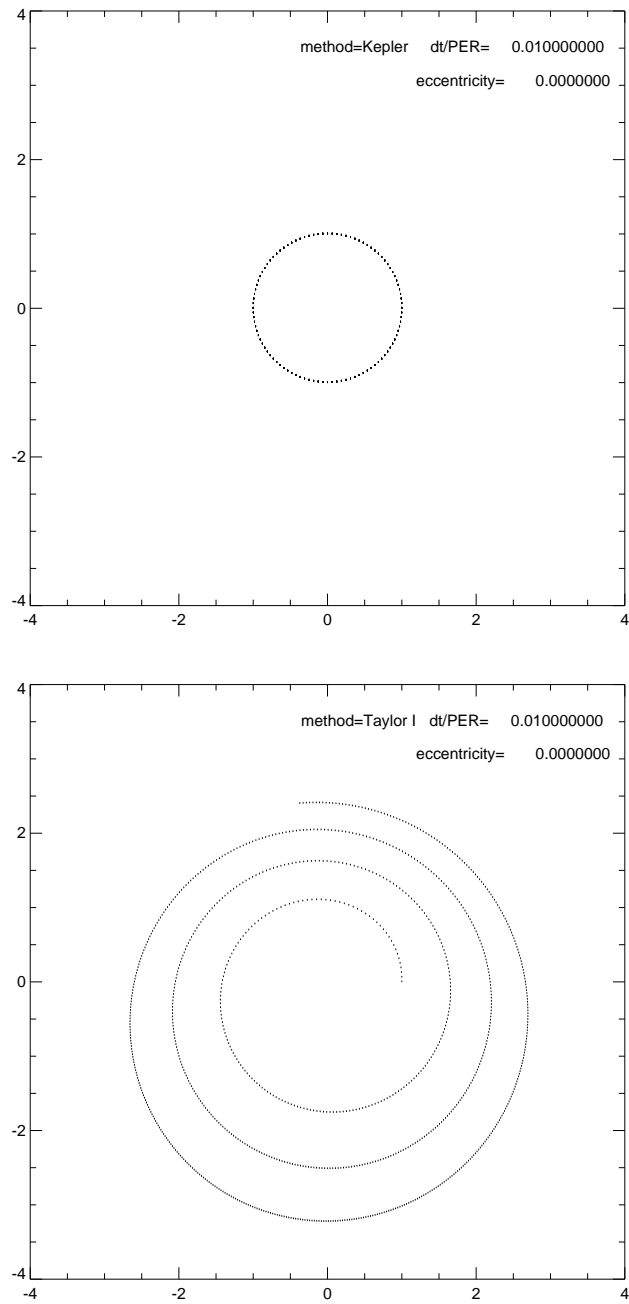
Laskelmat toistettiin aika-askeleen arvoilla $dt = 0.01P$, $dt = 0.001P$ ja $dt = 0.0001P$ niin, että integroinnin kokonaisaika oli $t = 10P$.

Jo pelkkien ratojen perusteella voidaan päätellä suuntaa-antavasti jotain integrointimenetelmien tarkkuudesta. Kuvista 5-18 nähdään, että ensimmäisen asteen Taylorin menetelmä on kaukana analyyttisestä ratkaisusta, ja ei tuota suljettua rataa suurilla aika-askeleen dt ja eksentrisyyden e arvoilla.

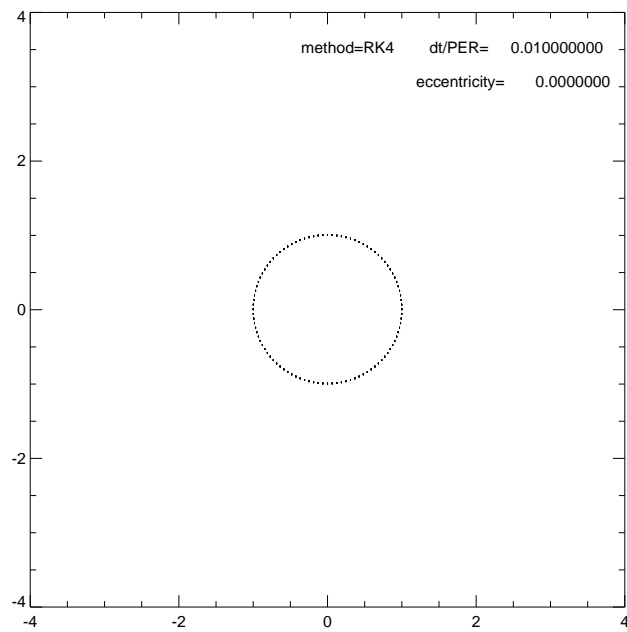
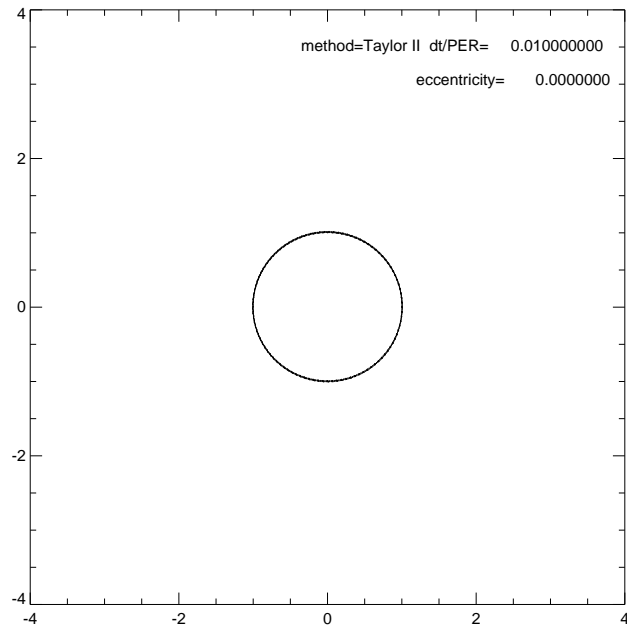
Toisen asteen Taylorin menetelmä on huomattavasti ensimmäisen asteen menetelmää luotettavampi, mutta molemmat häviävät kirkkaasti Runge-Kuttalle, jonka antama tulos on hyvin lähellä analyyttistä rataa kaikilla käytetyillä aika-askeleen arvoilla. Vain käyttämällä yhtä aikaa suurta eksentrisyyden ($e \geq 0.9$) ja aika askeleen ($dt \geq 0.01P$) arvoa myös Runge-Kuttan menetelmä on epäluotettava.

Saman tuloksen näkee myös energian ja impulssimomentin säilymisestä.

2.1.1 Kappaleen rata, kun $e = 0$ ja $dt = 0.01P$

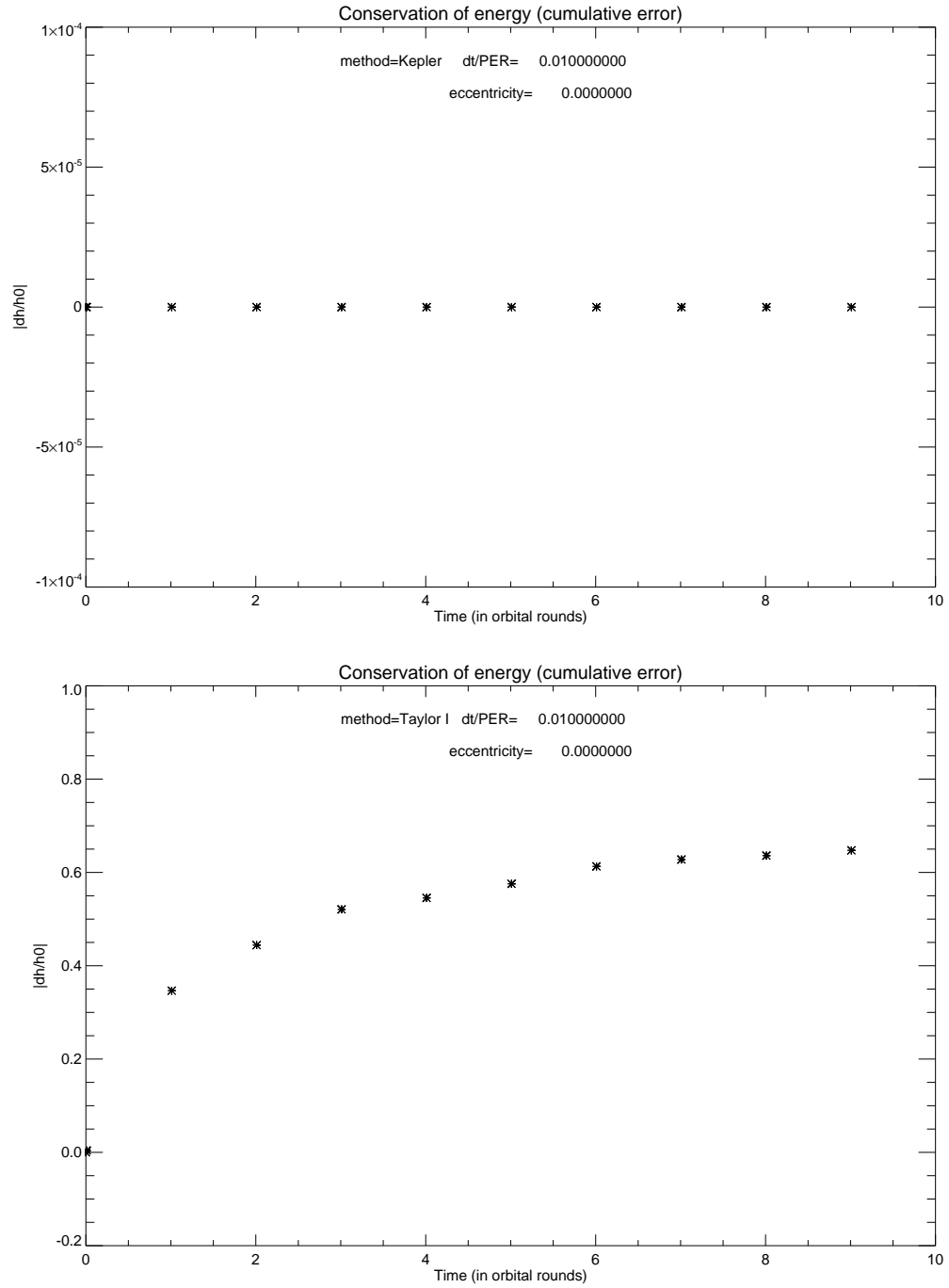


Kuva 5: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä, $dt = 0.01P$

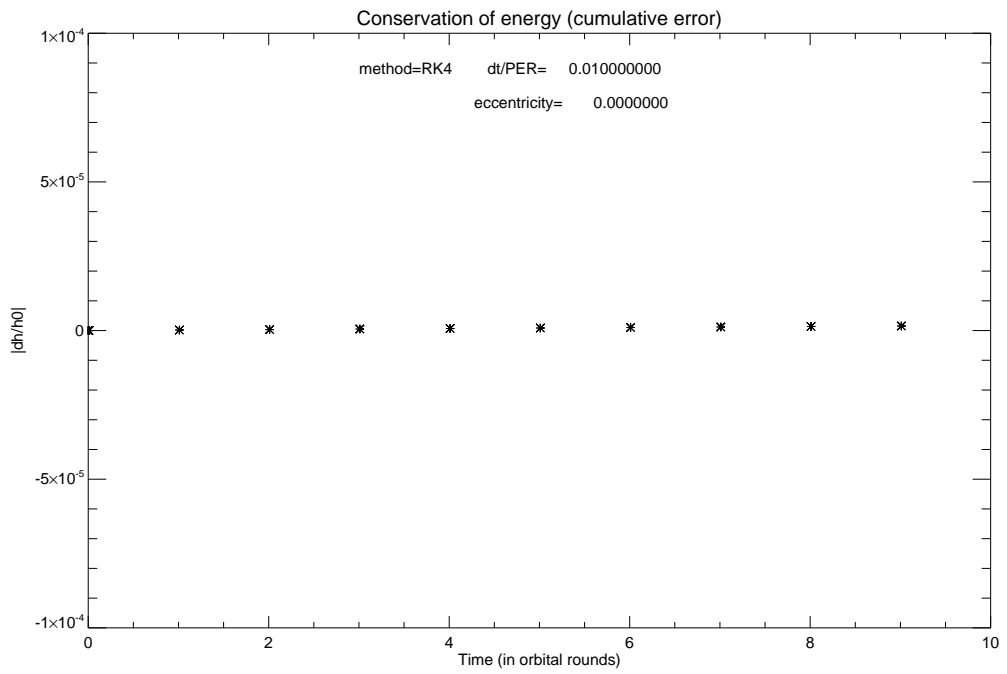
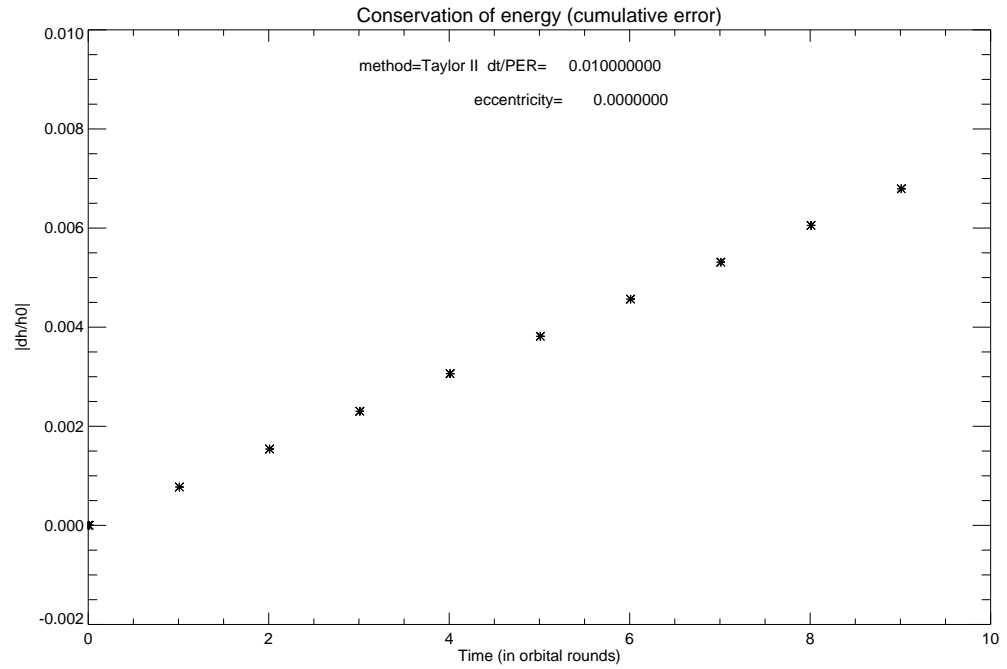


Kuva 6: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

2.1.2 Energian säilyminen, kun $e = 0$ ja $dt = 0.01$

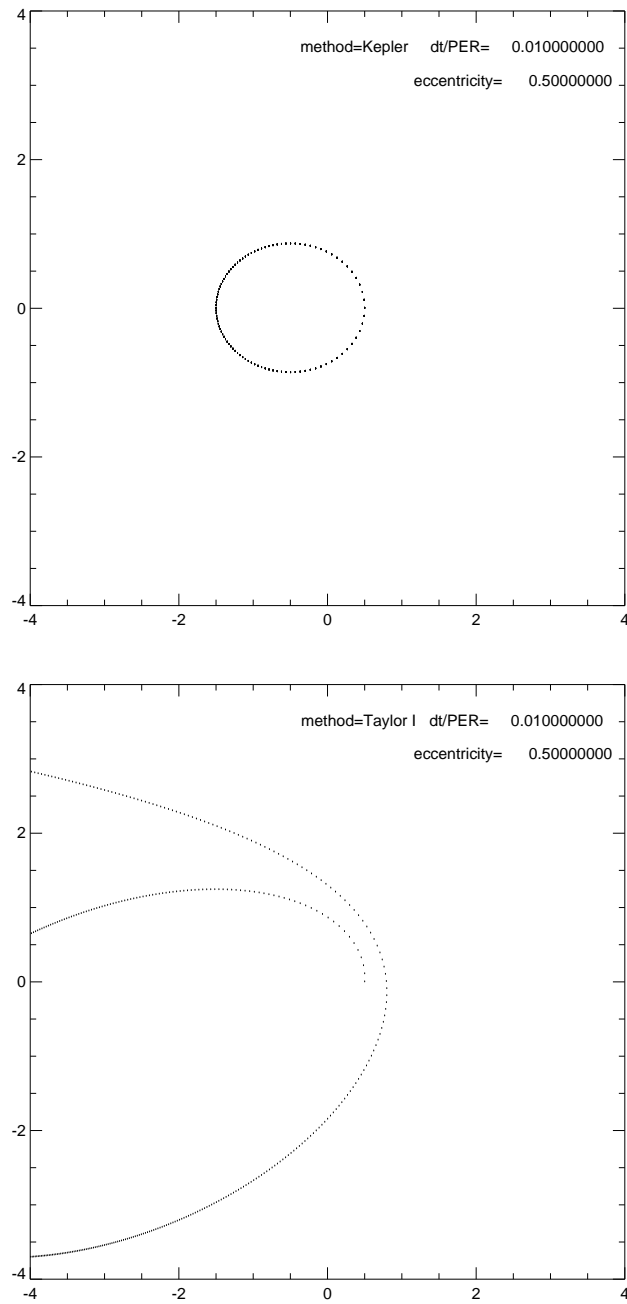


Kuva 7: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä $dt = 0.01P$

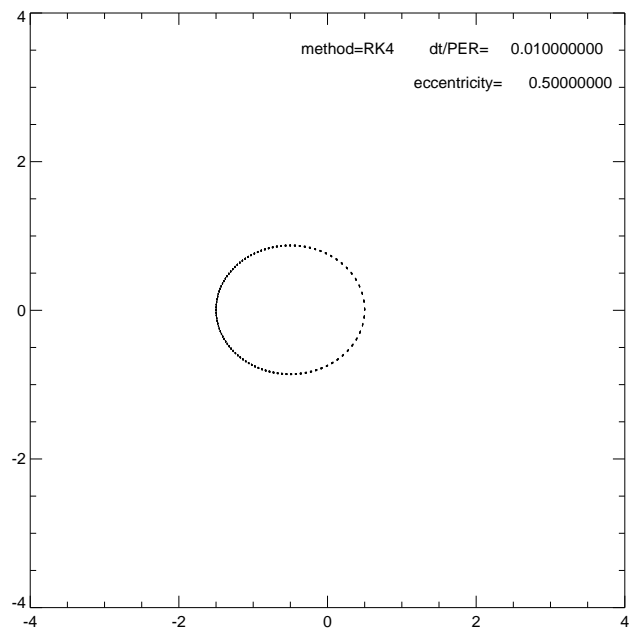
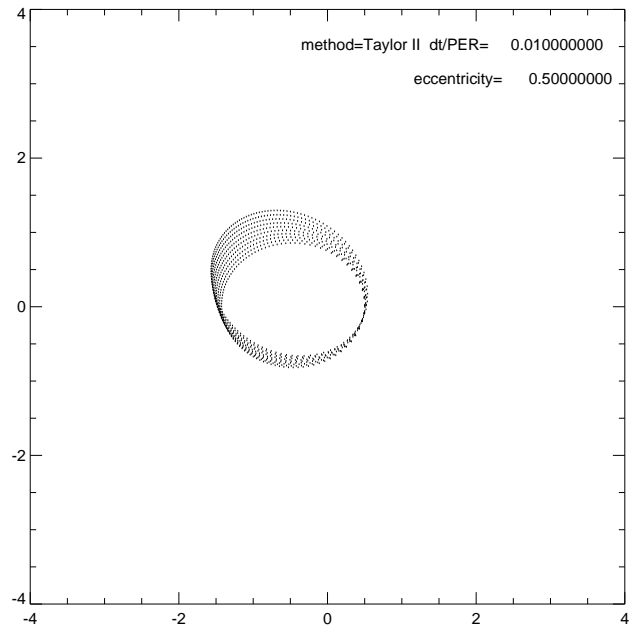


Kuva 8: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

2.1.3 Kappaleen rata, kun $e = 0.5$ ja $dt = 0.01P$

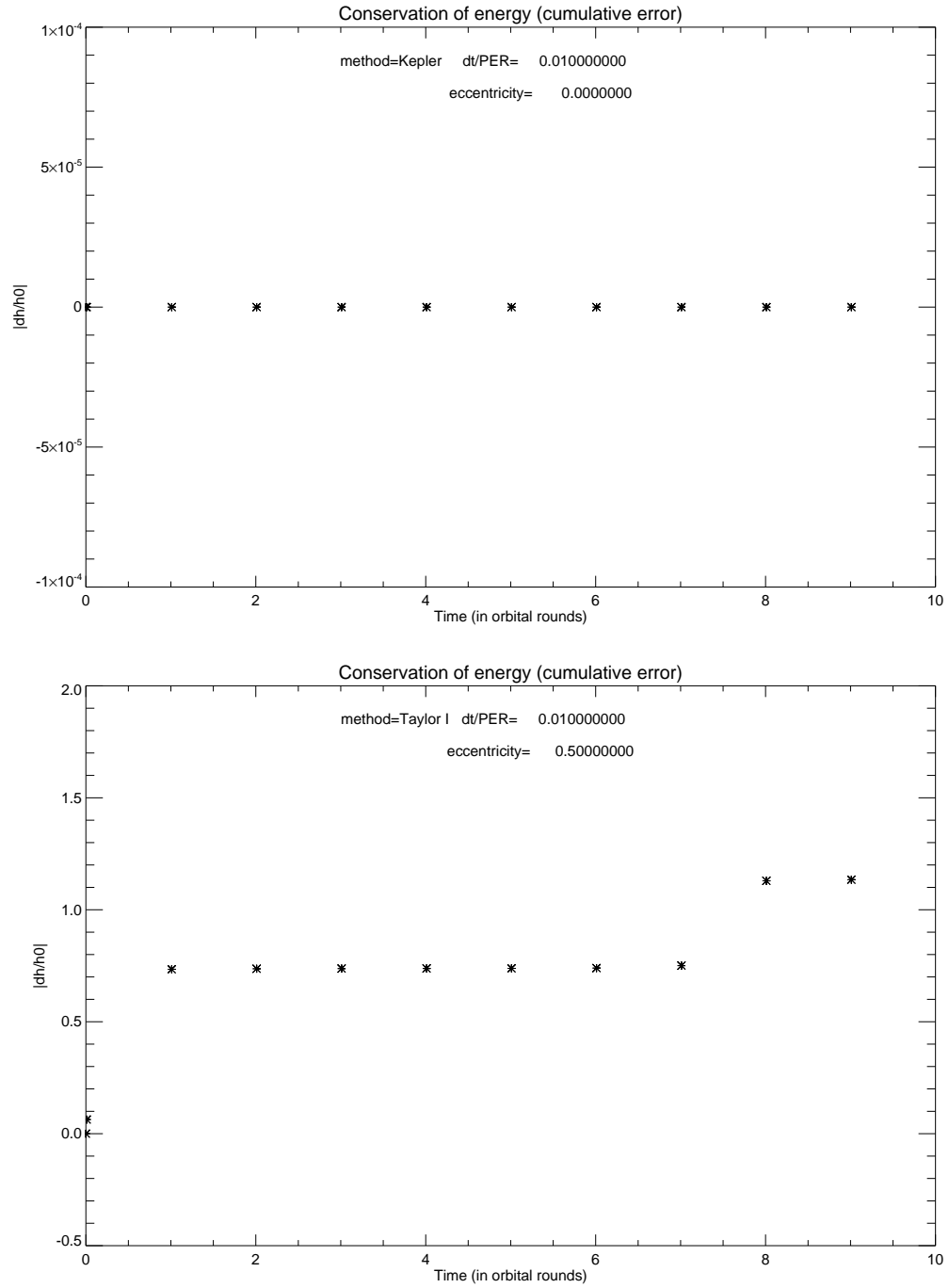


Kuva 9: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä, $dt = 0.01P$

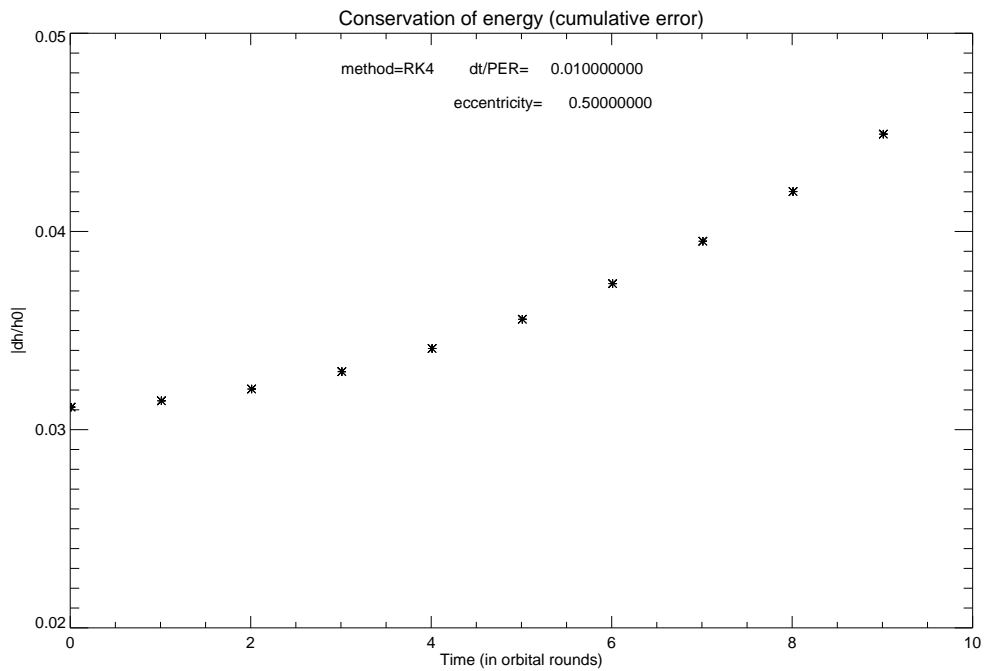
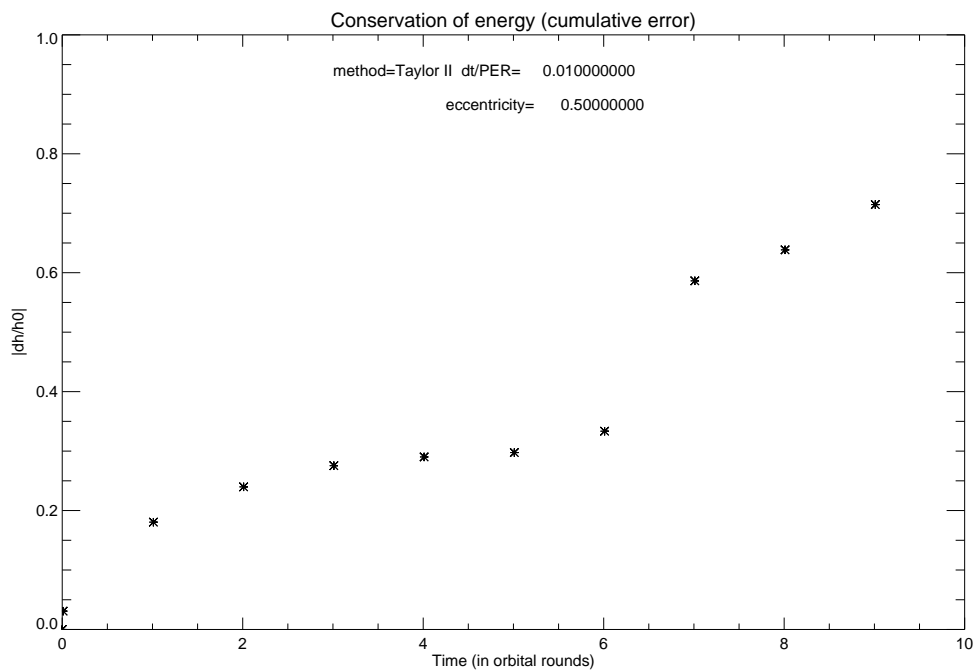


Kuva 10: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

2.1.4 Energian säilyminen, kun $e = 0.5$ ja $dt = 0.01$

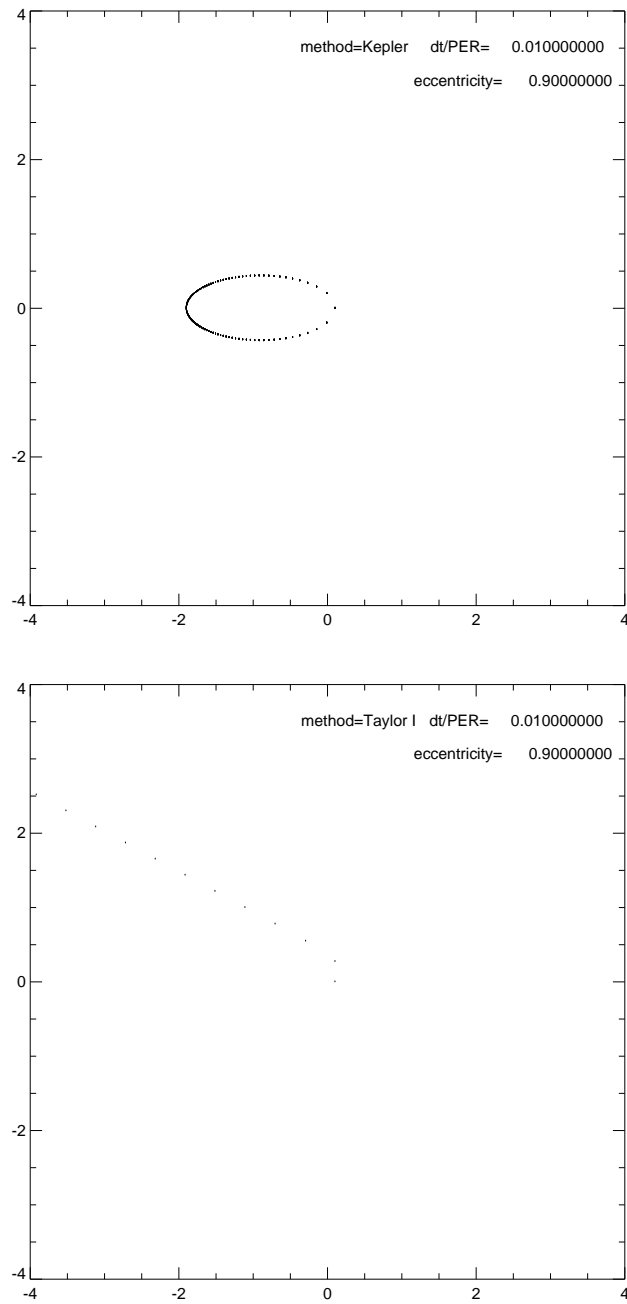


Kuva 11: Analyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä $dt = 0.01P$

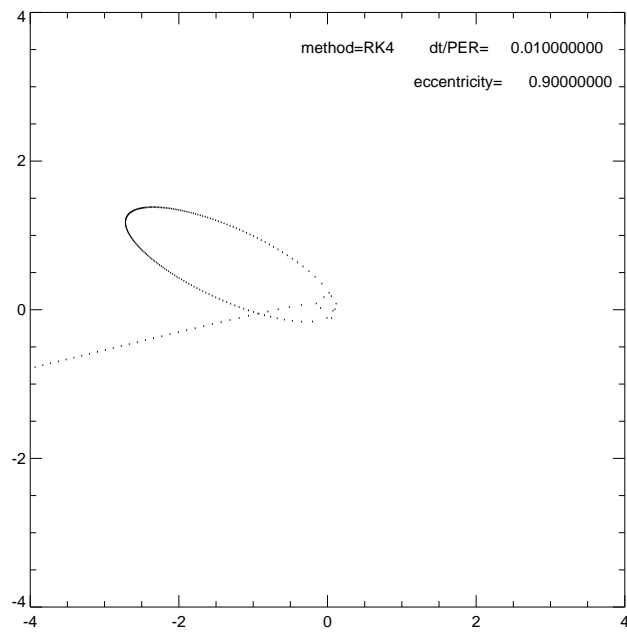
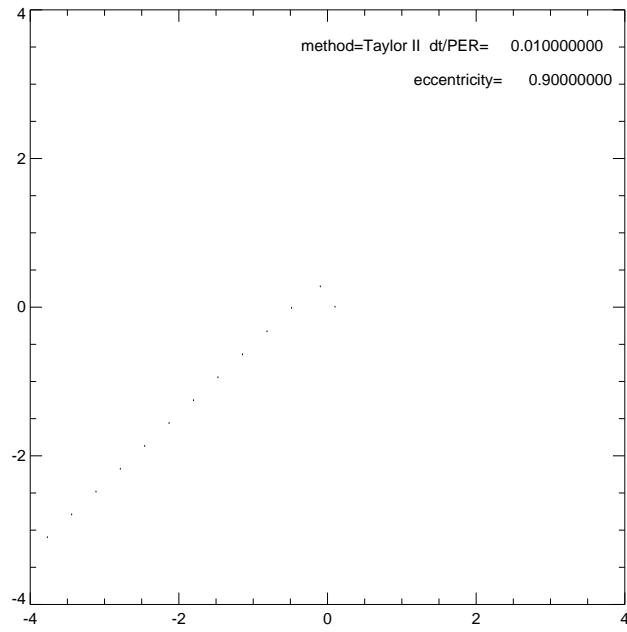


Kuva 12: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

2.1.5 Kappaleen rata, kun $e = 0.9$ ja $dt = 0.01P$

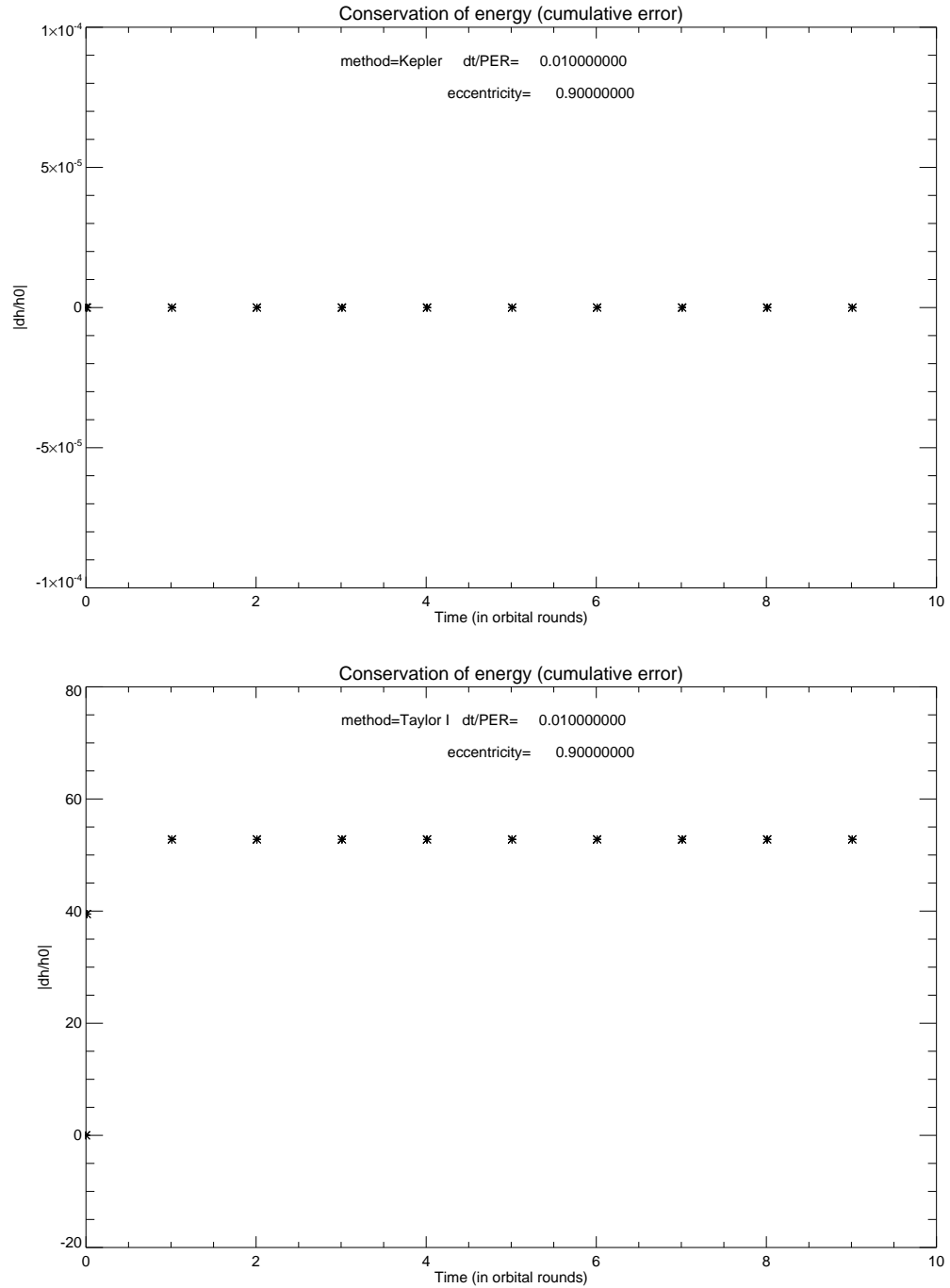


Kuva 13: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä, $dt = 0.01P$

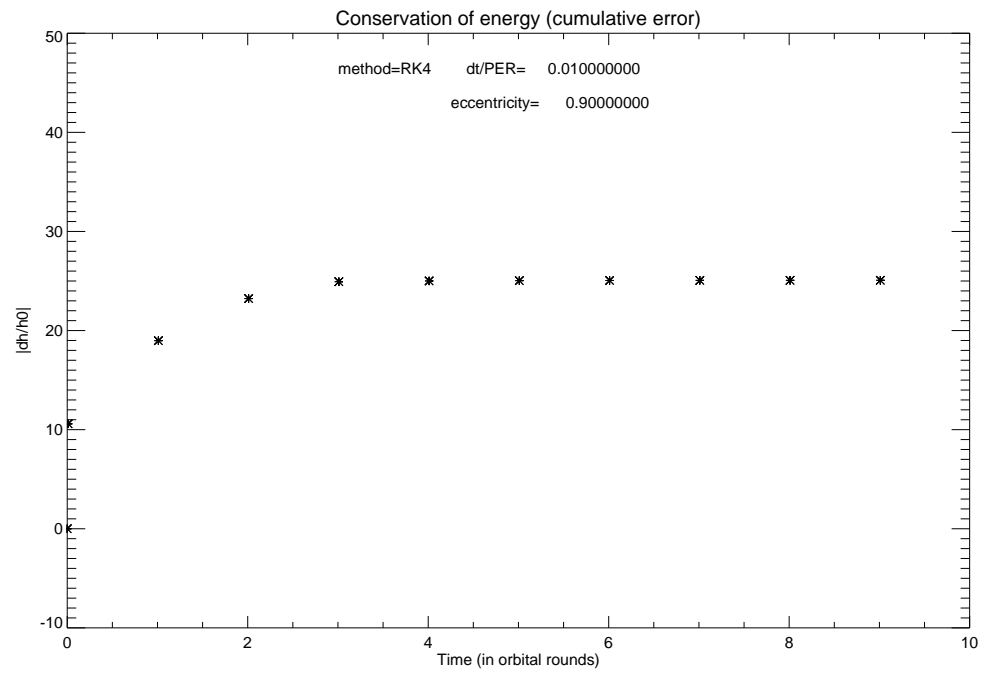
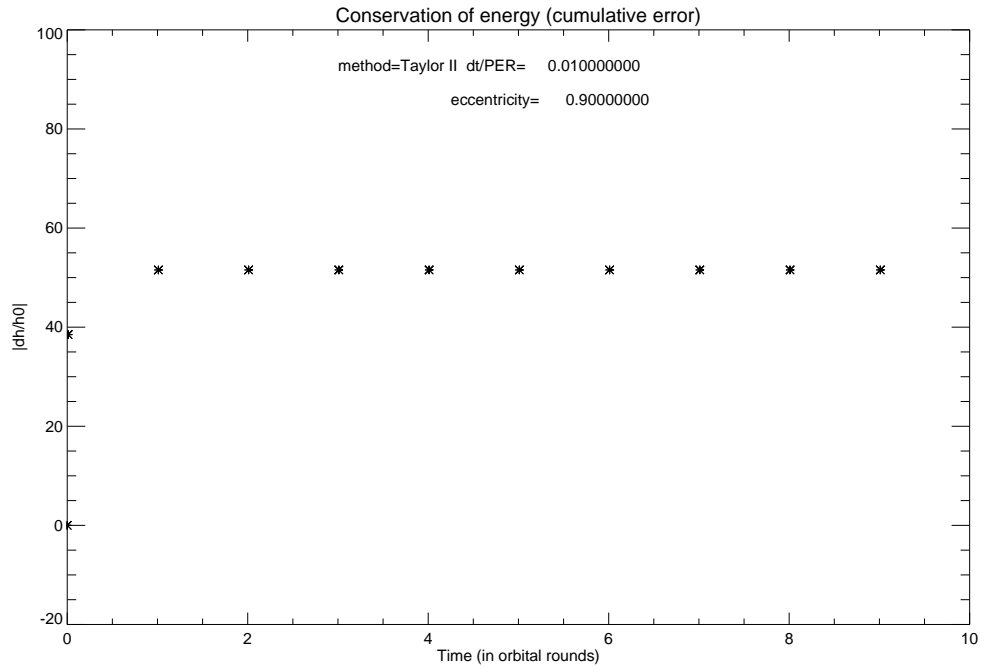


Kuva 14: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

2.1.6 Energian säilyminen, kun $e = 0.9$ ja $dt = 0.01$

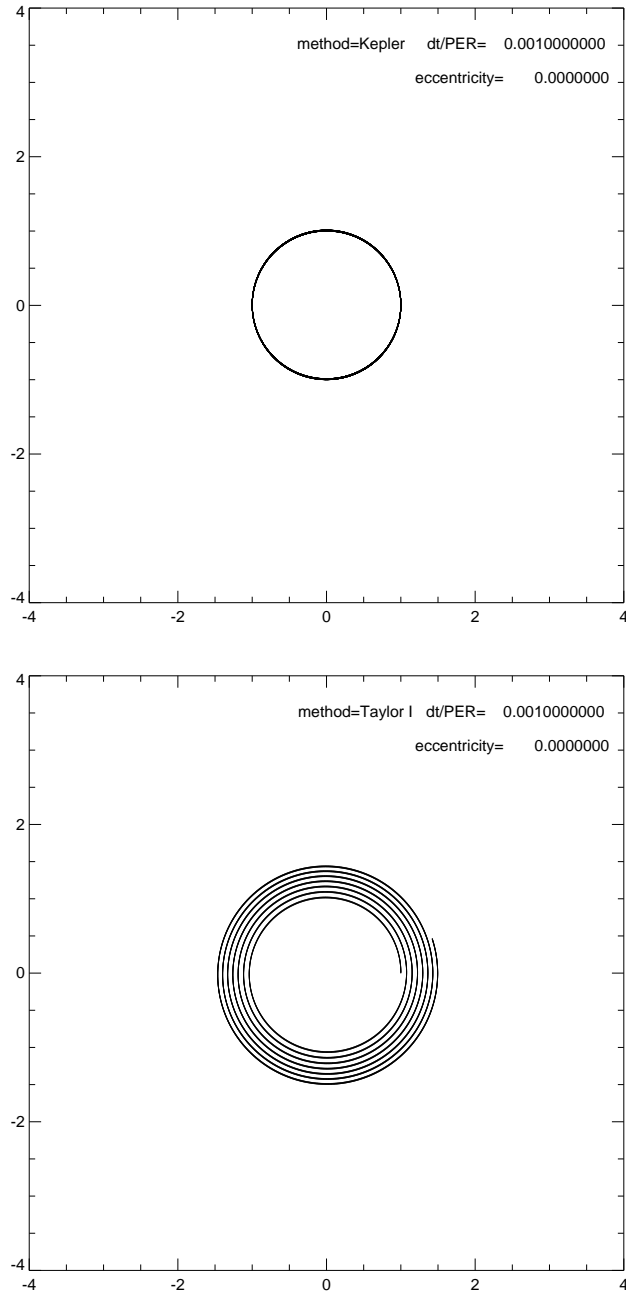


Kuva 15: Analyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä $dt = 0.01P$

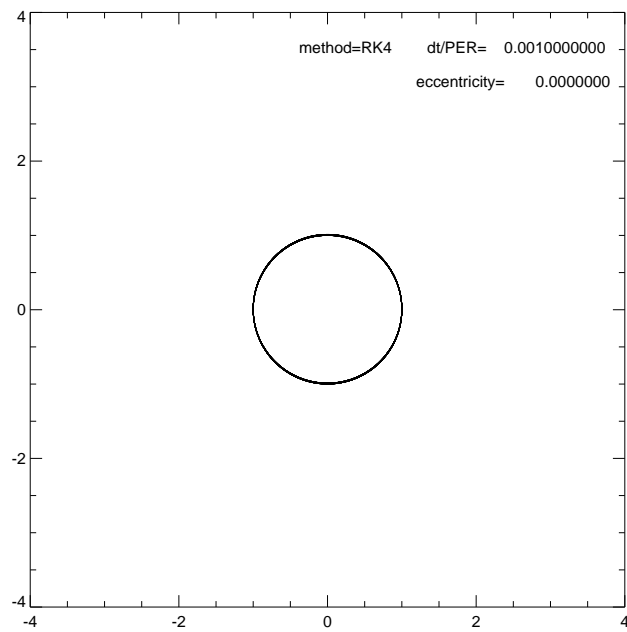
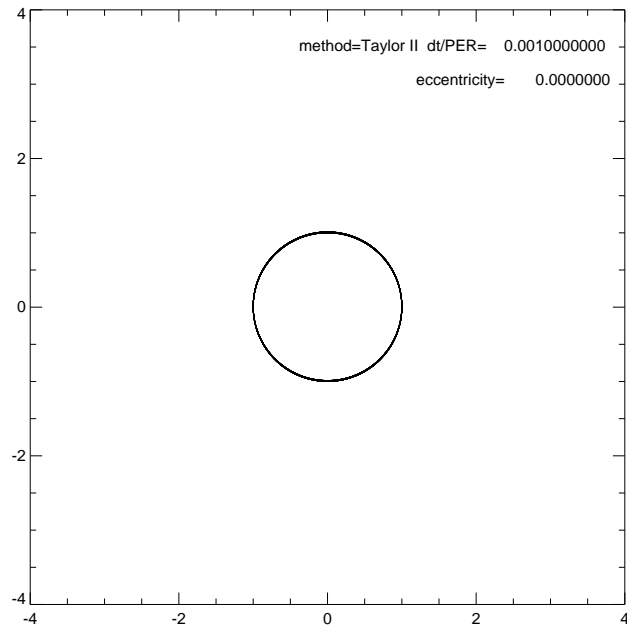


Kuva 16: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

2.1.7 Kappaleen rata, kun $e = 0$ ja $dt = 0.001P$

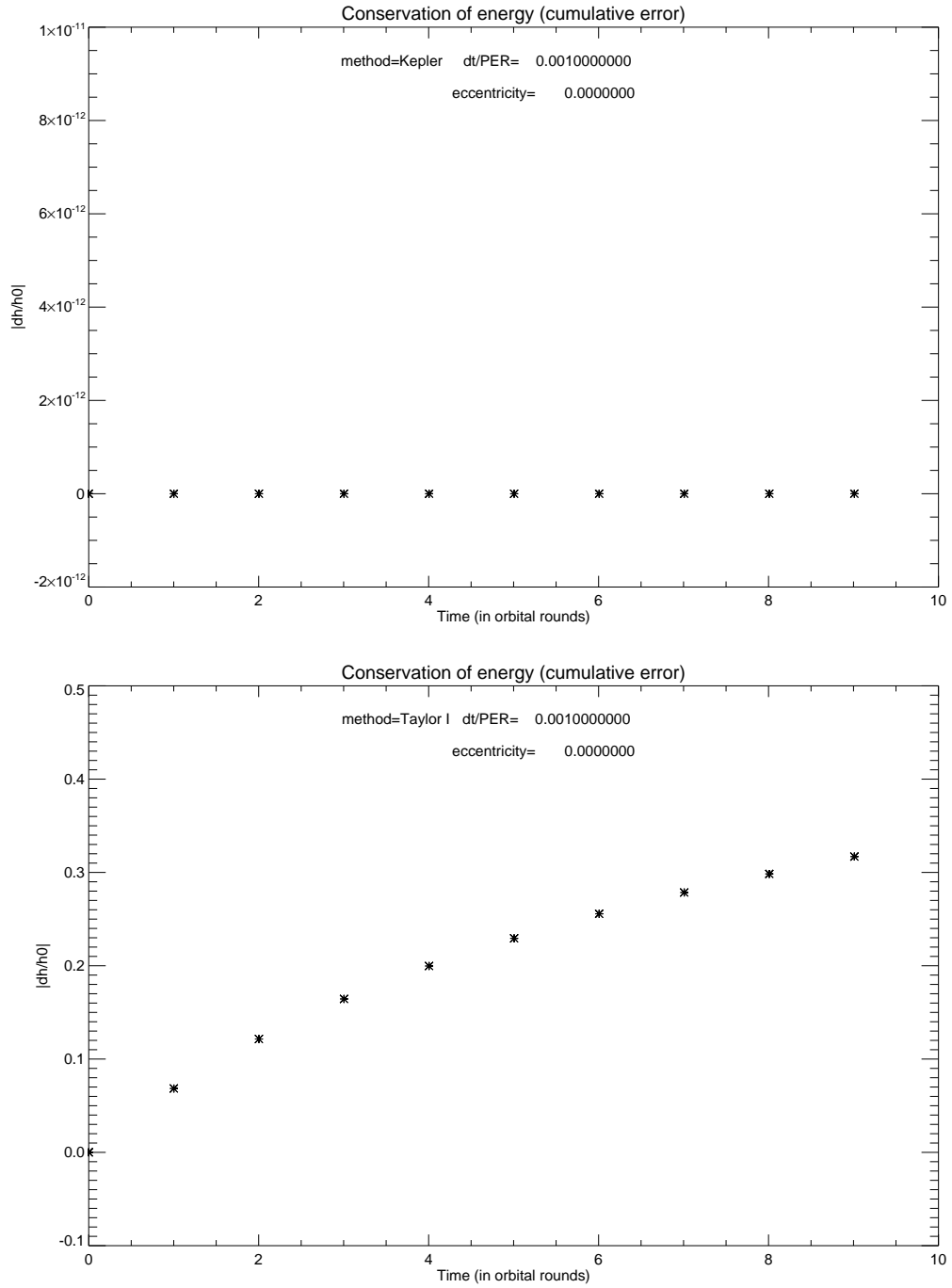


Kuva 17: Analyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä, $dt = 0.001P$

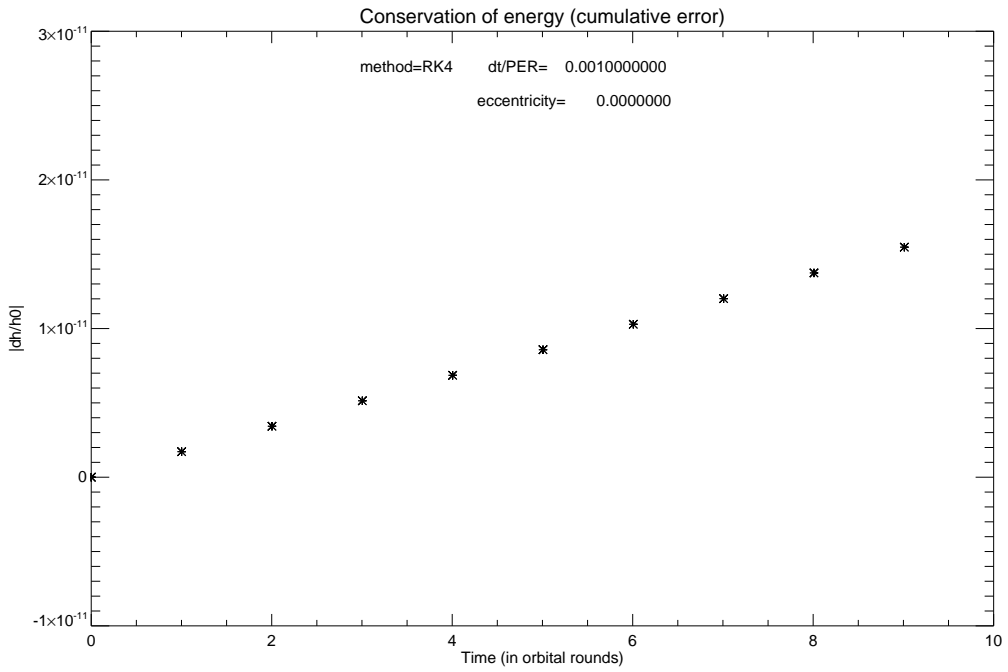
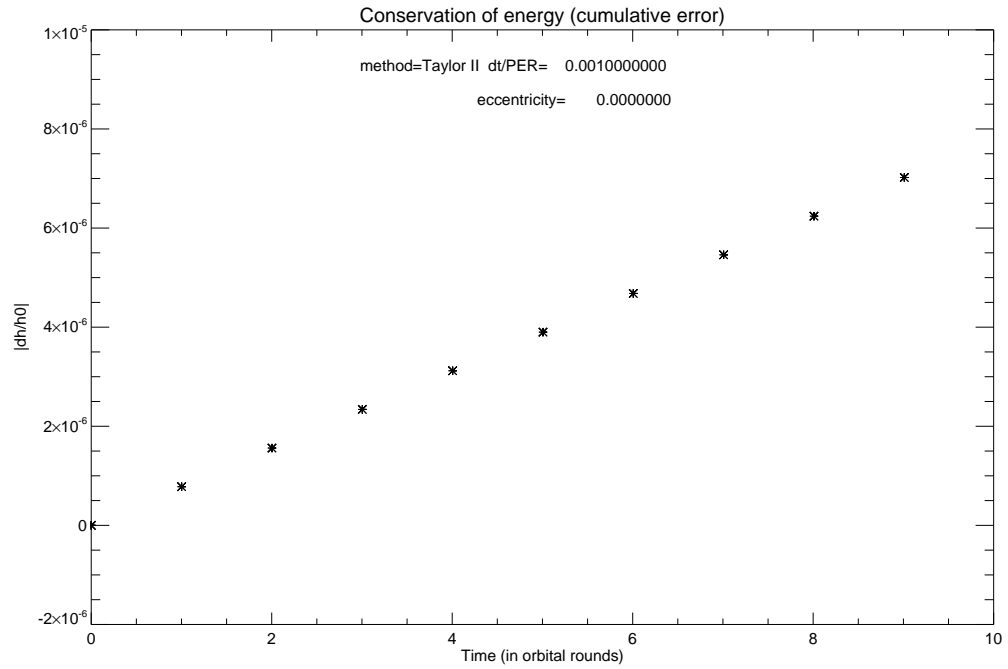


Kuva 18: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.001P$

2.1.8 Energian säilyminen, kun $e = 0.0$ ja $dt = 0.001$

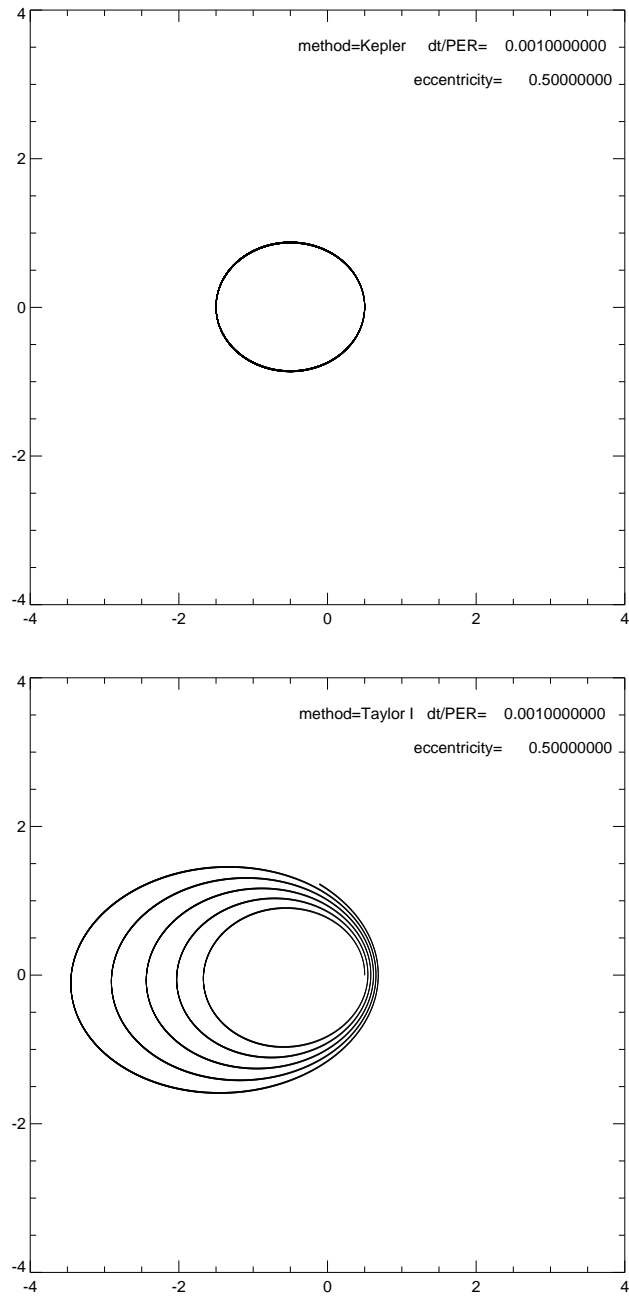


Kuva 19: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä $dt = 0.01P$

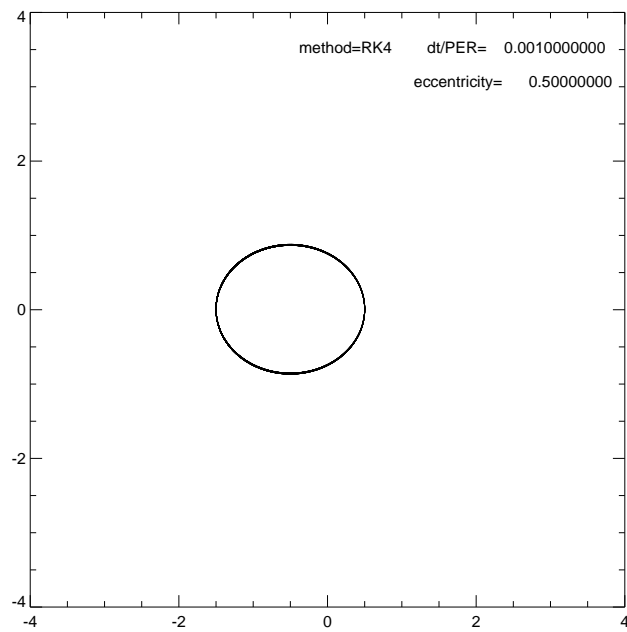
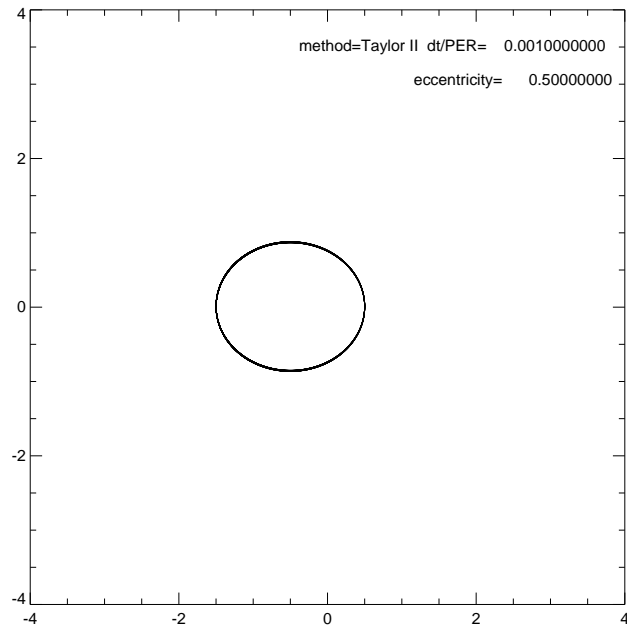


Kuva 20: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

2.1.9 Kappaleen rata, kun $e = 0.5$ ja $dt = 0.001P$

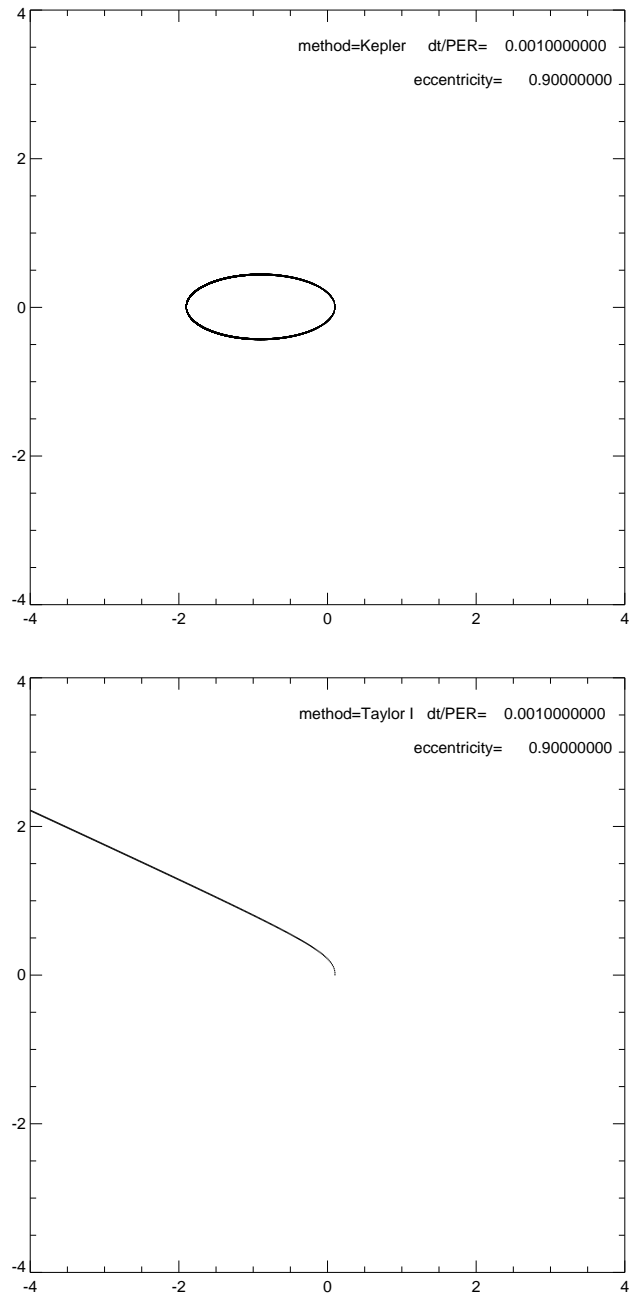


Kuva 21: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä, $dt = 0.001P$

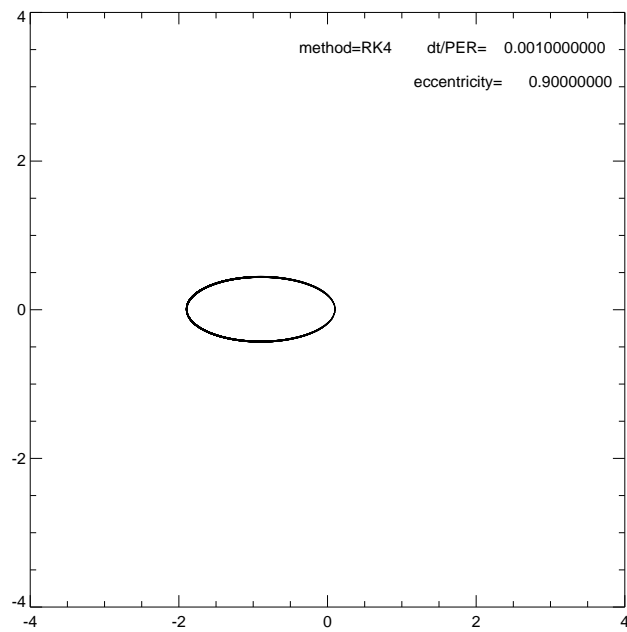
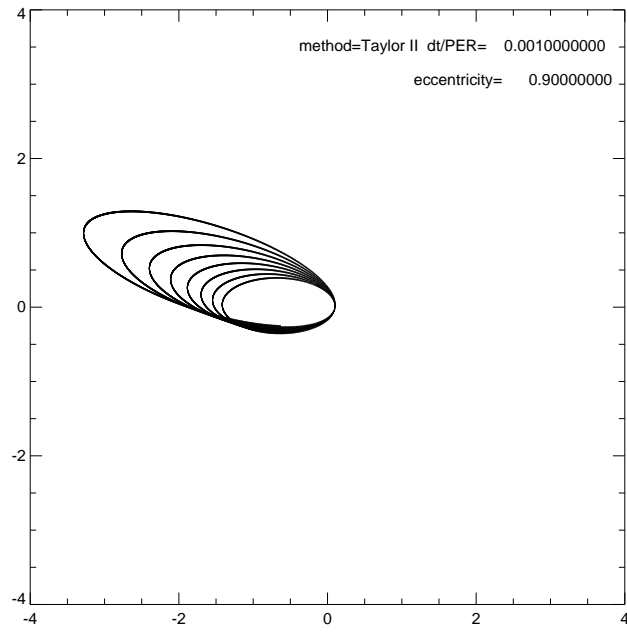


Kuva 22: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.001P$

2.1.10 Kappaleen rata, kun $e = 0.9$ ja $dt = 0.001P$

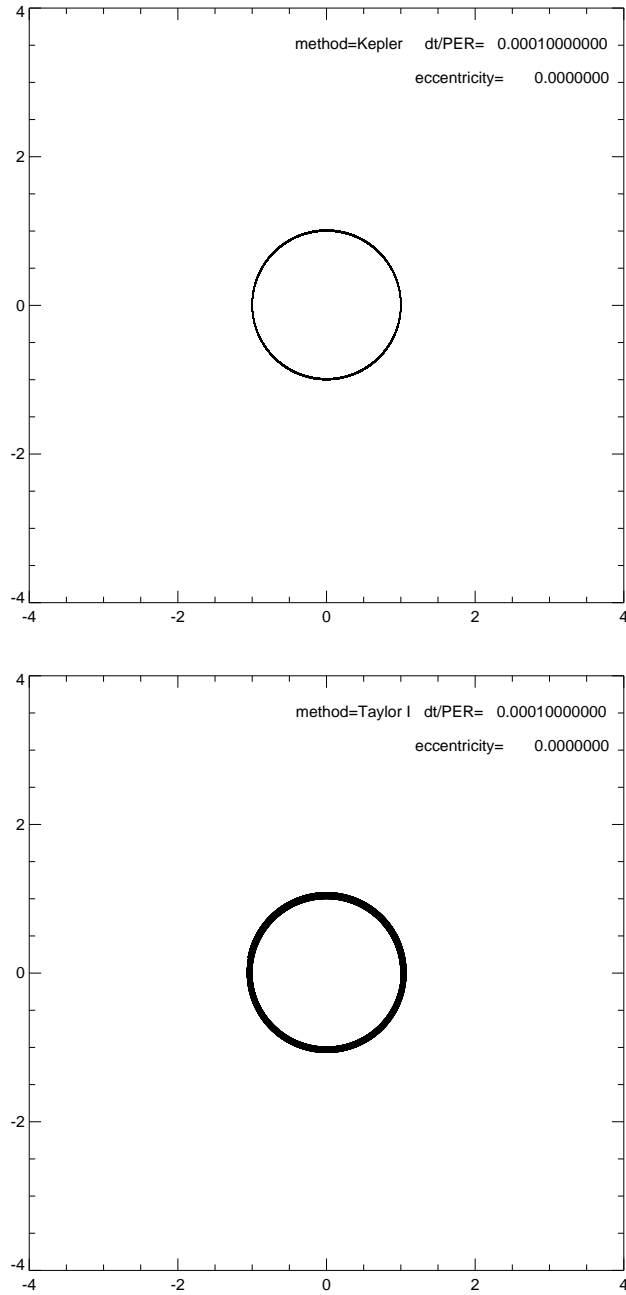


Kuva 23: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä, $dt = 0.001P$

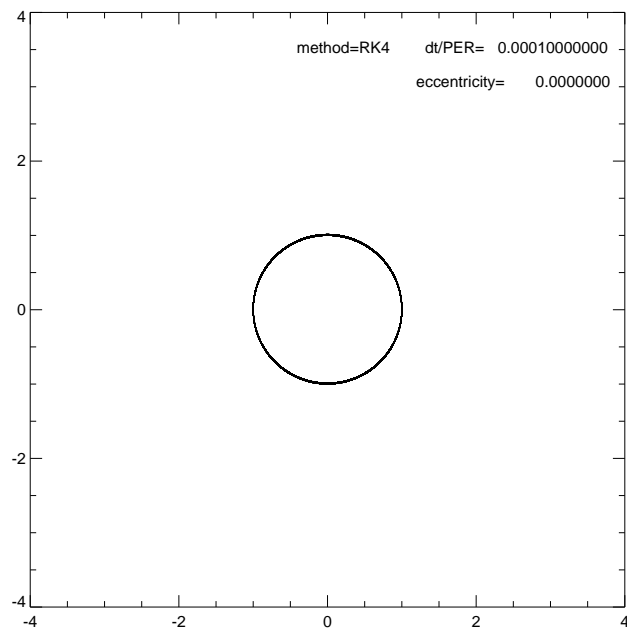
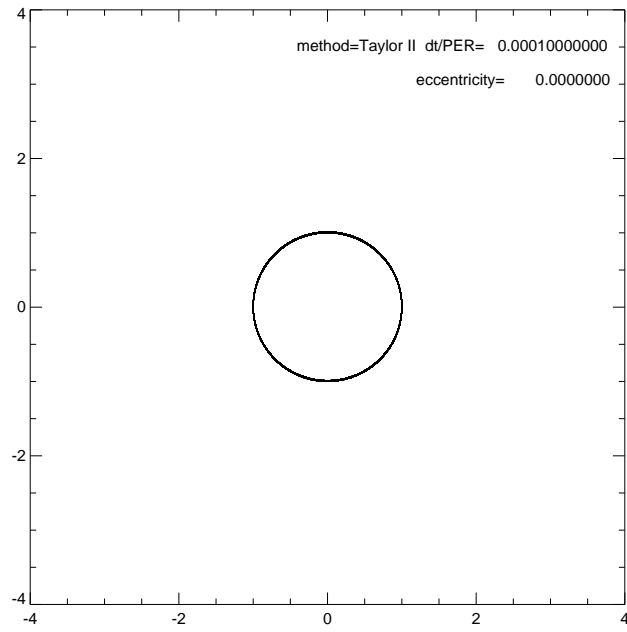


Kuva 24: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.001P$

2.1.11 Kappaleen rata, kun $e = 0$ ja $dt = 0.0001P$



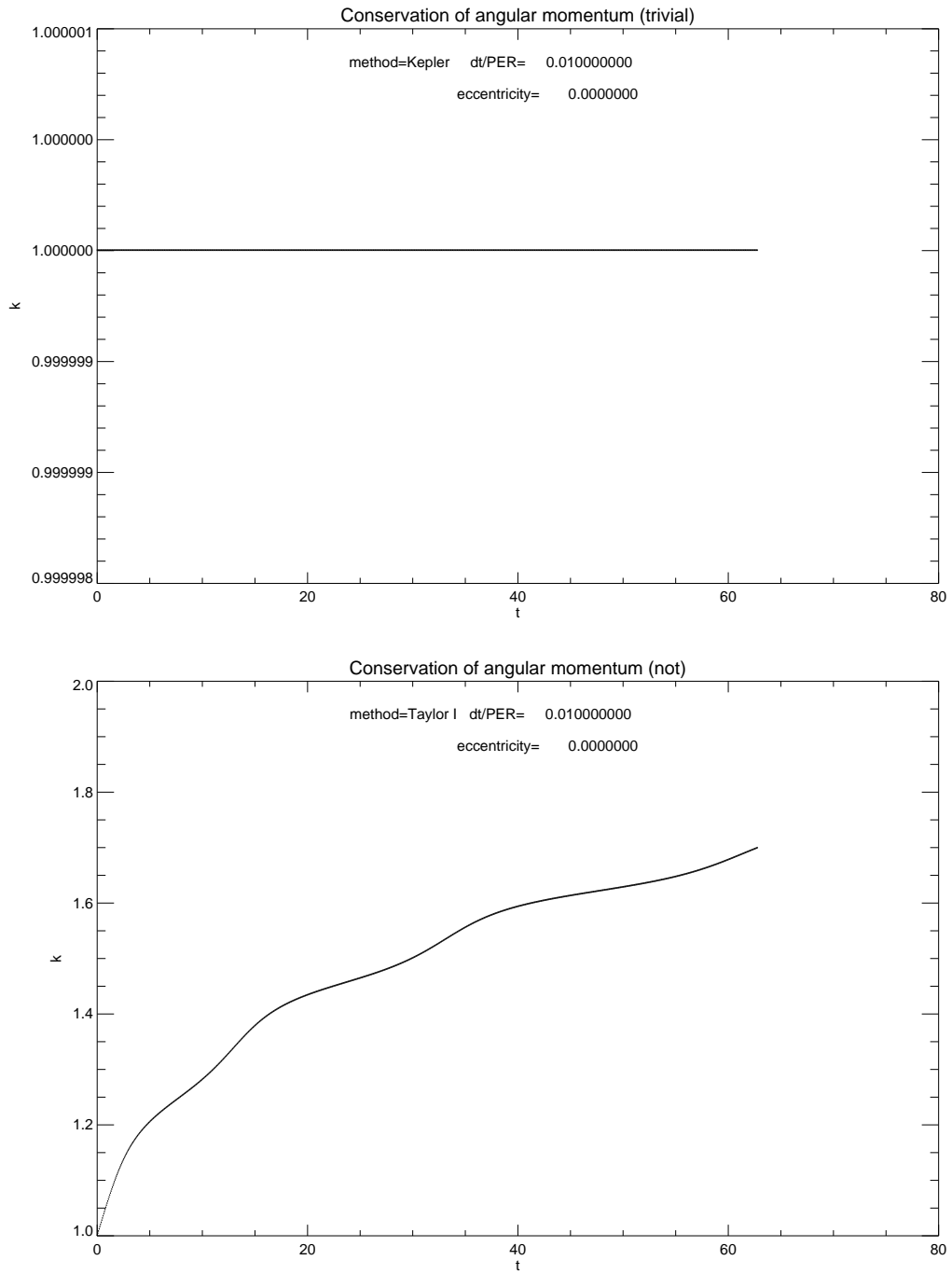
Kuva 25: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä, $dt = 0.0001P$



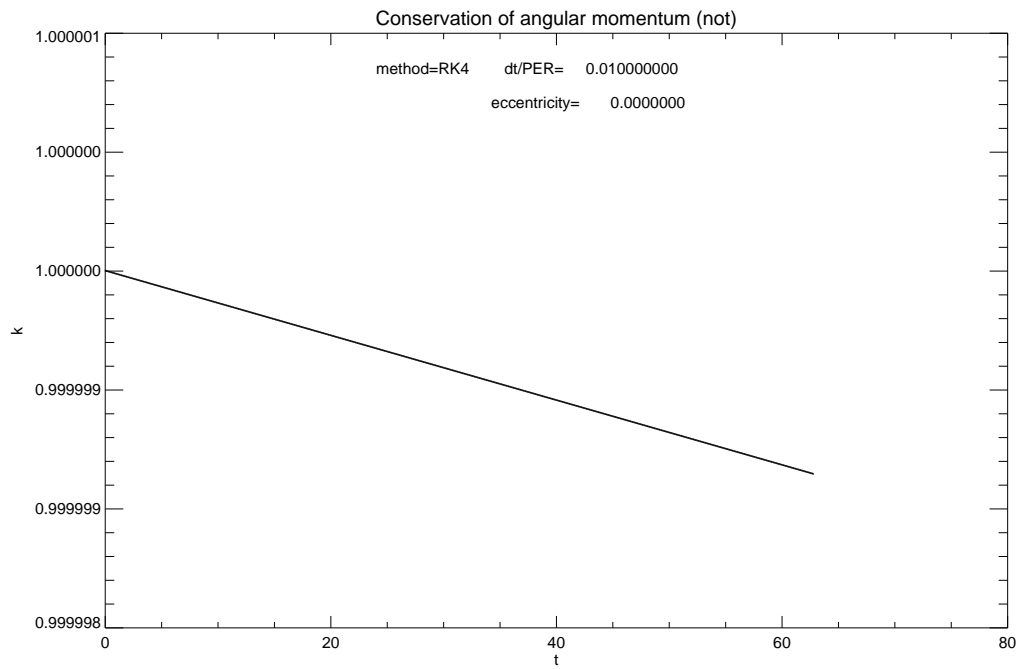
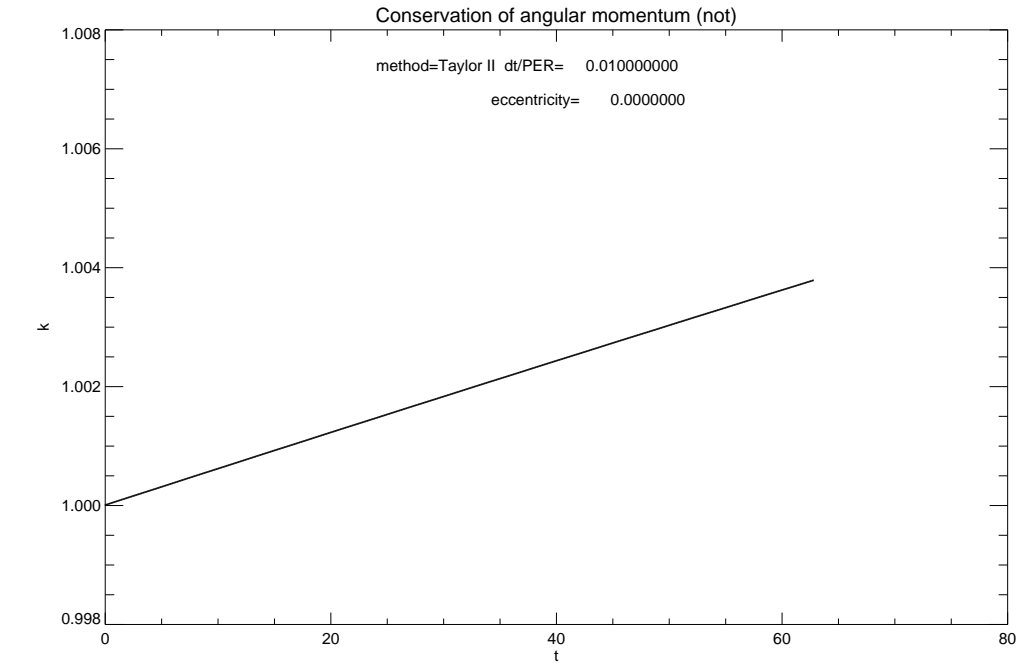
Kuva 26: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.0001P$

2.2 Impulssimomentin säilyminen $1/r^2$ -voimakentälle lasketuilla radoilla

2.2.1 Kun $e = 0$ ja $dt = 0.01$



Kuva 27: Analyyttinen rata ja 1. kertaluvun Taylorin menetelmä $dt = 0.01P$



Kuva 28: 2. kertaluvun Taylorin menetelmä ja Runge-Kutta, $dt = 0.01P$

3 Kahden kappaleen liike $1/r^3$ -voimakentässä

4 Käytetyt ohjelmat

4.1 Ohjelman mars.pro sisältö

```
-----;
; TAIVAANMEKANIIKAN KOTITEHTÄVÄT (vm 2012)
-----;
; Osa 1) Marsin rata taivaalla vuosina 2000-2020
-----;
; Use the subroutine PsPlot to save results in a postscript plot
-----;
pro PsPlot,routine,filename
thisdir=getenv('PWD')+ '/'
psopen,/color,dir=thisdir,filename
call_procedure,routine
psclose
end

-----;
; MAIN PROGRAM starts here
-----;
pro mars

-----;
; TIME between 2000-2020 (21 years)
-----;
; In years (0.01yr interval)
timet=dindgen(2100)/100.d0
; In days
tday=timet*365.25d0
; In centuries (functions as Julian centuries, technically should
; subtract t=J-2451545.0 though)
tcen=tday/36525.d0

-----;
; Elements in epictic and equatorial systems
-----;
;Declination
deltat=timet
;Rectascension
alphat=timet

;Latitude
lattab=timet
;Longitude
lontab=timet

-----;
; Loop for solving the orbit starts here
-----;
;NOTE: use 'long' type for index i so that the loop won't end
;prematurely

for i=0l,n_elements(timet)-1 do begin

;Time in julian centuries
T=tcen(i)

-----;
; Orbital elements of Mars (from Karttunen: Johdatus taivaanmekaniikkaan)
; (time-dependent)
```

```

;-----;
; Semimajor axis (in AU)
a=1.52366231d0-0.0000722d0*T
; Eccentricity
eks=0.09341233d0+0.00011902d0*T
; Inclination (in degrees)
ink=1.85061d0-25.47d0/3600.d0*T
; Longitude of ascending node (in degrees)
ome=49.57854d0-1020.19d0/3600.d0*T
; Longitude of perihelion (in degrees)
wp=336.04084d0+1560.78d0/3600.d0*T
; Longitude (in degrees)
L=355.45332d0+0.52403304d0*tday(i)

; Argument of pericenter
w=wp-ome
; Mean anomaly
M=L-wp

; Time of pericenter (not really needed here since M is given directly,
; but the program input wants it)
tau=0.d0
; All the elements combined
elem_mars=[a,eks,ink,ome,w,tau]

; Corrected mean anomaly (use modulo to loop every 360deg)
M_mars=(M mod 360.d0)/360.d0*2.d0!*dpi

;-----;
; Orbital elements of Earth (from Karttunen: Johdatus taivaanmekaniikkaan)
;-----;
; Semimajor axis
a_m=1.00000011d0-0.00000005*T
; Eccentricity
eks_m=0.01671022d0-0.00003804*T
; Inclination
ink_m=0.00005d0-46.94/3600.*T
; Longitude of ascending node (in degrees)
ome_m=-11.26064d0-18228.25/3600.*T
; Longitude of perihelion (in degrees)
wp_m=102.94719d0+1198.28/3600*T
; Longitude (in degrees)
L_m=100.46435d0+0.98560910*tday(i)

; Argument of pericenter
w_m=wp_m-ome_m
; Mean anomaly
M_m=L_m-wp_m

; Elements combined (can use same tau as Mars)
elem_m=[a_m,eks_m,ink_m,ome_m,w_m,tau]

; Corrected mean anomaly (again use modulo)
M_maa=(M_m mod 360.d0)/360.d0*2.d0!*dpi

;-----;
; Use the subprogram 'elem_to_rv.pro' to get the radius vector
;-----;
; For Mars
time=0.d0
elem_to_rv,elem_mars,time,rad,vel,M0=M_mars
rad_mars=rad

```

```

; For Earth
elem_to_rv,elem_m,time,rad_m,vel_m,M0=M_maa
rad_maa=rad_m

;-----;
; Get place coordinates in ecliptic system
;-----;
; (x,y,z) from subtracting (x_mars-x_maa,y_mars-y_maa,z_mars-z_maa)
x=rad_mars(0)-rad_maa(0)
y=rad_mars(1)-rad_maa(1)
z=rad_mars(2)-rad_maa(2)

; Change from (x,y,z) to (r,lat,long)
r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
lattab(i)=asin(z/r)*!radeg
lontab(i)=atan(y,x)*!radeg

;-----;
; Rotate -23deg with respect to x axis to get coord. in equator system
;-----;
; Angle of Earth's rotational axis (in radians)
ekli=23.43928d0;!/radeg
; Slightly faster to define cos(ekli) and sin(ekli) beforehand
sine=sin(ekli!/radeg)
cose=cos(ekli!/radeg)

; (x',y',z') solved from rotational matrix
; actually 'ekli' should be negative, but the same result is achieved
; by setting sin(ekli) -> -sin(ekli) and cos(ekli) -> cos(ekli) in the
; rotation matrix
xe=x
ye=y*cose-z*sine
ze=y*sine+z*cose

; Change from (x',y',z') to (r,delta,alpha)
re=sqrt(xe^2+ye^2+ze^2)
delta=asin(ze/re)*!radeg
alpha=atan(ye,xe)*!radeg

; Make sure that the rectascension is not negative
if (alpha le 0) then alpha=alpha+360.d0

; Add current values to the tables defined in the beginning of program
deltat(i)=delta
alphan(i)=alpha

; END THE LOOP finally
endfor

;-----;
; Draw the orbit (ecliptic)
;-----;
nwin
plot,lontab,lattab,xtitle='Longitudi pitkin ekliptikaa',$
title='Marsin rata 2000-2020',ytitle='Latitudi',psym=3

;-----;
; Check results by using 'planet_coords' procedure in ASTRO-library
;-----;
; Use julian date
juldate,[2000.,1.,1],jd0 ;gives reduced JD-2400000.0

```

```

jd0=jd0+2400000.d0      ;get JD for our starting time
jd=jd0+tday             ;transform used timetable into JD

; From ASTRO-library (two options)
planet_coords,jd,/jd,ra_astro,dec_astro,planet='mars'
;JPL ephemerids did not work?
planet_coords,jd,/jd,ra_jpl,dec_jpl,planet='mars',/jpl

;-----;
; Declination
;-----;
nwin
;!p.multi=[0,2,2]
;!p.charsize=0.7

plot,timet+2000,deltat,xr=[0,20]+2000,$
yttitle='Marsin deklinaatio',xttitle='Vuosi',psym=3

;Plot only one in every 20 points
index=lindgen(n_elements(timet)/20)*20

oplot,2000+timet(index),dec_astro(index),psym=6,syms=0.5
oplot,2000+timet(index),dec_astro(index),psym=1,syms=0.5

;-----;
; Rectascension
;-----;
nwin
plot,2000+timet,alphan,xr=[0,20]+2000,$
    xttitle='Vuosi',yttitle='Marsin rektaskensio',psym=3

oplot,2000+timet(index),ra_astro(index),psym=6,syms=0.5
oplot,2000+timet(index),ra_astro(index),psym=1,syms=0.5

;-----;
; Errors (compare to JPL)
;-----;
; For declination
nwin
plot,timet+2000,(deltat-dec_jpl)*60.,xr=[0,20]+2000,$
    xttitle='Vuosi',yttitle='Deklinaation virhe (arcmin)',psym=3
; For rectascension (neglect full round difference)
d_alpha=atan(tan((alphan-ra_jpl)/!radeg))*!radeg
nwin
plot,2000+timet,d_alpha*60,xr=[0,20]+2000,$
    xttitle='Vuosi',yttitle='Rektaskension virhe (arcmin)',psym=3
end

;-----;
; Save the results to a PostScript file using PsPlot
;-----;
pro Plot_everything
PsPlot, 'mars', 'mars.ps'
end

```