Теория 1.

Найти обратную матрицу хотя бы двумя способами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Практика 1.

Реализовать степенной метод поиска наибольшего и наименьшего по модулю собственных значений симметричной положительно определённой матрицы *A.*
Для поиска наименьшего по модулю собственного значения применить степенной метод к матрице спектрального сдвига: $A_s = A - \lambda_{max}E$. Какое собственное значение будет наибольшим по модулю для сдвинутой матрицы?
Испытать метод на небольших матрицах с известными собственными значениями, а затем на случайно сгенерированных симметричных положительно определённых 50x50 и 100x100.

Теория 2.

Найти LDU-разложение матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Практика 2.

Реализовать два итерационных метода решения СЛАУ $Ax=b$: метод Зейделя, метод простой итерации с параметром. Сравнить время работы методов на различных хорошо обусловленных матрицах (симметричные положительно определённые, с диагональным преобладанием). Для оценки параметра в методе простой итерации с параметром можно использовать встроенные функции по вычислению собственных чисел.

Теория 3.

Вычислите определитель пятого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Практика 3.

Написать функцию, осуществляющую *RQ* разложения квадратной невырожденной матрицы, где матрица *R* – верхняя(правая) треугольная, матрица *Q* – ортогональная. Запрещено пользоваться другими функциями, реализующими другие разложения. Испытать её на простых матрицах, убедиться в правильности работы.

Реализовать вторую такую же функцию, но реализовать все операции с векторами (скалярное произведение, сложение, умножение на число) через функции BLAS.

Сравнить быстродействие первой и второй функций на матрицах порядка 100 и 200.

Теория 4.

Найти собственные значения и векторы матрицы. Представьте матрицу в виде $A = SDS^{-1}$ (D — диагональная матрица).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Практика 4.

Создайте датасет следующим образом: выберите n=7 точек x_i из равномерного распределения на отрезке [0,6].
Затем вычислите y_i=$f(x_i)$+ϵ_i , где $f(x)$ = 10sin(x), а ϵ_i − погрешности (независимые нормальные стандартные случайные величины). Изобразите на одном графике точки датасета и функцию $f(x)$.

Аппроксимируйте датасет с помощью линейной $l(x)$=w_0+w_1x и кубической $c(x)$= w_0+w_1x+w_2x^2+w_3x^3 функций с помощью метода наименьших квадратов. Изобразите на одном графике получившиеся функции $l(x)$, $c(x)$ и исходный датасет.

Рекомендации:
1) Для генерации шума можно использовать *scipy.stats.norm*. Амплитуду подобрать так, чтобы на первом графике погрешности были заметными, но небольшими.
2) Для решения задачи МНК можно использовать библиотеку *scipy.linalg.lstsq*.
Бонусные баллы, если решение МНК будет прописано без библиотеки, с помощью операций с матрицей системы.

Теория 5.

Показать, что матричная норма подчинена векторной норме:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad\qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

Практика 5.

Написать функцию, которая принимает на вход два уравнения прямых в пространстве в каноническом виде, т.е. координаты двух направляющих векторов и двух точек.
На выходе функция выдаёт взаимное расположение двух прямых (совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются). Также функция выдаёт дополнительную информацию:
- расстояние между прямыми, если они скрещиваются или параллельны,
- координаты общей точки, если прямые пересекаются.
Предусмотреть возможную погрешность вычислений и погрешность в начальных данных.
Протестировать на функцию на нескольких примерах.

Теория 6.

Даны два вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти вектор $\vec{c}$ единичной длины,

перпендикулярный вектору $\vec{a}$ и образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\frac{\pi}{3}$.
Тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ должна иметь положительную ориентацию.

Практика 6.

Алгебраическая интерполяция.

Напишите функцию, которая строит интерполяционный многочлен, проходящий через заданный набор точек.

Точки генерируются следующим образом: выберите n значений x_i из **равномерного** распределения на отрезке [-2;2].
Затем вычислите y_i=$f(x_i)$. Таким образом, вы получите n пар (x_i, y_i).

Нужно построить алгебраический многочлен степени *n-1,* проходящий через все указанные точки. Построить график, указать на нём все точки и нарисовать построенный многочлен, а также исходную функцию.
График построить на отрезке [-2.5;2.5]

Построить графики для следующих случаев:
Рассмотрите $n = 5, 10, 20, 40, 50$.
Рассмотрите функции $f(x)$ = sin(x); $f(x)$ = Exp(x); $f(x)$ = |x|.

Указание: свести задачу построения алгебраического многочлена к решению СЛАУ, где неизвестными являются его коэффициенты.

Теория 7.

В линейном пространстве матриц 2x2 задано преобразование $\hat{A}$, которое умножает произвольную матрицу $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ слева и справа на фиксированные матрицы:

$$\hat{A}: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Является ли преобразование $\hat{A}$ линейным? Ответ доказать, в случае положительного ответа записать матрицу преобразования в базисе:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Практика 7.

Написать программу, которая решает систему линейных уравнений с помощью ортогонализации по строкам. Протестировать на различных матрицах (небольших и 100x100, 300x300).

Написать второй вариант, в котором все операции (сложение векторов, скалярное произведение) реализованы с помощью библиотеки BLAS. Сравнить быстродействие с первым вариантом.

Теория 8.

Составить уравнения плоскости (или плоскостей), проходящей через прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{4}$ и равноудалённой от точек A(1;2;5) и B(3;0;1).

Практика 8.

Написать функцию, которая генерирует набор из *n* точек на плоскости, а затем с помощью метода наименьших квадратов проводит через них кривую второго порядка $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$.

Рассмотреть *n* = 20, 30, 50.
Для генерации точек использовать уравнения эллипса, параболы, окружности с произвольными центрами. Сгенерировать нужное количество точек, а затем добавить к каждой координате случайную погрешность.

Нарисовать на одном графике исходную кривую, набор точек и построенную с помощью МНК кривую.
Для построения неявно заданной кривой можно использовать:
https://www.tutorialspoint.com/is-it-possible-to-plot-implicit-equations-using-matplotlib
https://docs.sympy.org/latest/modules/plotting.html

Теория 9.

Является ли линейным пространством множество ограниченных числовых последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?
Под суммой последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ понимается последовательность $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Под произведением последовательности на число — новая последовательность, каждый элемент которой умножен на это число.

Практика 9.

Реализовать функцию, выполняющую разложение Холецкого симметричной квадратной матрицы. При необходимости использовать комплексные числа в результате. Испытать на небольших матрицах и матрицах произвольных размеров.

Описание алгоритма:
https://algowiki-project.org/

Теория 10.

Методом наименьших квадратов найти «псевдорешение» переопределённой системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Практика 10.

Реализовать алгоритм Штрассена перемножения матриц (см. Википедию). Исследовать его асимптотику: измерить время расчётов при перемножении матриц различных размерностей.

Сравнить с асимптотикой классического перемножения матриц (реализовать самостоятельно, не использовать встроенное перемножение матриц).

Сравнить с асимптотикой Matmul и @.

Теория 11.

Написать Жорданову форму матрицы и базис, в котором она принимает эту форму

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Практика 11.

Реализуйте итерационный метод Шульца для вычисления обратной матрицы.
Испытайте реализованный метод.

Описание метода.

Введем невязку $\Psi^{(k)}=E-AX^{(k)}$, где $X^{(k)}$ - приближение с номером k.

Рассмотрим $(E-\Psi^{(k)})^{-1} = E+(\Psi^{(k)})+(\Psi^{(k)})^2+(\Psi^{(k)})^3+\ldots = (AX^{(k)})^{-1} = (X(k))^{-1}A^{-1}$

Умножим обе части на $X^{(k)}$:

$X^{(k)}(\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}(\Psi^{(k)})^i) = A^{-1}$

К сожалению, считать бесконечный ряд мы не можем.
Таким образом, мы можем ввести итерацию :

$X^{(k+1)} = X^{(k)}(\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{m}}(\Psi^{(k)})^i)$

Где m - порядок метода.

Получается порядок действий:

- Задать начальное приближение, порядок метода и необходимую точность.
- Вычислить невязку : $\Psi^{(k)} = E-AX^{(k)}$
- Проверить норму невязки на точность
- Найти следующее приближение по формуле: $X^{(k+1)} = X^{(k)}(\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{m}}(\Psi^{(k)})^i)$

Замечание:

Данный метод сходится при норме первой невязки меньше единицы.