

Краевая задача для ОДУ. Метод прогонки.

Симаков Сергей Сергеевич
simakov.ss@phystech.edu

Рассмотрим краевую задачу третьего рода для ОДУ второго порядка (стационарное уравнение теплопроводности)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u &= -f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ k(0)u'(0) &= \delta_1 u(0) - \varepsilon_1, \\ -k(1)u'(1) &= \delta_2 u(1) - \varepsilon_2,\end{aligned}$$

где $\delta_{1,2}$, $\varepsilon_{1,2}$ — постоянные величины, $k(x) > 0$, $q(x) > 0$, $f(x) > 0$ — непрерывные и ограниченные на $[0, 1]$ функции.

Пусть для модельной задачи $\tilde{k} = k(0.5)$, $\tilde{q} = q(0.5)$, $\tilde{f} = f(0.5)$.

Пусть введена равномерная сетка

$$\{x_l\}_{k=0}^L : x_l = lh, \quad l = 0, \dots, L, \quad hL = 1, \quad (x_{l+1} - x_l = h).$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_l} \approx \frac{u_l - u_{l-1}}{h} \approx \frac{u_{l+1} - u_l}{h}$$

$$\left. \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) \right|_{x=x_l} \approx \frac{k_{l+1/2} \left(\frac{u_{l+1} - u_l}{h} \right) - k_{l-1/2} \left(\frac{u_l - u_{l-1}}{h} \right)}{h}$$

Тогда аппроксимация краевой задачи может быть записана в виде

$$\frac{k_{l+1/2}(u_{l+1} - u_l) - k_{l-1/2}(u_l - u_{l-1})}{h^2} - q_l u_l = -f_l, \quad l = 1, \dots, L-1$$

$$k_0 \frac{u_1 - u_0}{h} = \delta_1 u_0 - \varepsilon_1,$$

$$k_L \frac{u_L - u_{L-1}}{h} = \delta_2 u_L - \varepsilon_2$$

Пусть

$$a_l = k_{l+1/2}, \quad b_l = -(k_{l-1/2} + k_{l+1/2} + q_l h^2), \quad c_l = k_{l-1/2}, \quad d_l = -f_l h^2, \quad l = 1, \dots, L-1,$$

$$a_0 = k_0, \quad b_0 = -(k_0 + h\delta_1), \quad c_0 = 0, \quad d_0 = -\varepsilon_1 h,$$

$$a_L = 0, \quad b_L = -(k_L + h\delta_2), \quad c_L = k_L, \quad d_L = -\varepsilon_2 h.$$

$$\begin{aligned}
a_0 u_1 + b_0 u_0 &= d_0, \\
a_l u_{l+1} + b_l u_l + c_l u_{l-1} &= d_l, \quad l = 1, \dots, L-1, \\
b_L u_{L-1} + c_L u_L &= d_L.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения

$$u_0 = -\frac{a_0}{b_0} u_1 + \frac{d_0}{b_0} = \alpha_0 u_1 + \beta_0, \quad \left(\alpha_0 = -\frac{a_0}{b_0}, \beta_0 = \frac{d_0}{b_0} \right).$$

Далее

$$u_l = -\frac{a_l}{b_l + c_l \alpha_{l-1}} u_{l+1} + \frac{d_l - c_l \beta_{l-1}}{b_l + c_l \alpha_{l-1}} = \alpha_l u_{l+1} + \beta_l, \quad l = 1, \dots, L-1,$$

$$u_L = \frac{d_L - c_L \beta_{L-1}}{b_L - c_L \alpha_{L-1}}.$$

