Аппроксимация, устойчивость и сходимость

Симаков Сергей Сергеевич
simakov.ss@phystech.edu

Пусть заданы дифференциальная и разностная задачи

$$\mathscr{L}y(x) = F(x) \text{ и } \mathscr{L}_h y^{(h)} = F^{(h)},$$

где $y^{(h)},\ F^{(h)}$ — сеточные функции, заданные на сетке $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ $(x_{k+1} - x_k = h)$.

Пример

$$y' = f(x, y), y(0) = y_0, 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\mathscr{L}y(x) = \begin{cases} y', 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} f(x, y) \\ y_0 \end{cases}$$

Сеточная фукнция

Пусть $[y(x)]^{(h)} = \{y(x_k)\}_{k=0}^{N}$ — сеточная функция, проекция (след) непрерывной функции $y(x)$ на сетку $\{x_k\}_{k=0}^{N}$, а $y^{(h)}$ — некоторая сеточная функция на той же сетке

$$[y(x)]^{(h)} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ \dots \\ y(x_N) \end{pmatrix} \quad y^{(h)} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Аппроксимация, устойчивость, сходимость

Сходимость

$\|\delta^{(h)}\|_{h\to 0} \to 0$, где $\delta^{(h)} = y^{(h)} - [y(x)]^{(h)}$. Если $\|\delta^{(h)}\| < Ch^p$, то сходимость имеет порядок p.

Аппроксимация:

$\|\psi^{(h)}\|_{h\to 0} \to 0$, где $\psi^{(h)} = \mathscr{L}_h\,[y(x)]^{(h)} - F^{(h)}$. Если $\|\psi^{(h)}\| < Ch^p$, то аппроксимация имеет порядок p.

Устойчивость:

$\mathscr{L}_h z^{(h)} = F^{(h)} + \delta F^{(h)} \Rightarrow \|z^{(h)} - y^{(h)}\| < C\|\delta F^{(h)}\|$

Оценка погрешности

$$y^{(h)} = [y(x)]^{(h)} + Ch^p e^{(h)}$$
$$\hat{y}^{(h)} = [y(x)]^{(2h)} + Ch^p e^{(2h)}$$
$$y^{(2h)} = [y(x)]^{(2h)} + C\,(2h)^p\, e^{(2h)}$$

тогда $E(h) = Ch^p\|e^{(2h)}\| \approx \dfrac{\|\hat{y}^{(h)} - y^{(2h)}\|}{2^p - 1}$, $\ln E(h) \approx \ln C + p \ln h$ и

$$\|\delta^{(h)}\| = \|y^{(h)} - [y(x)]^{(h)}\| \approx \frac{\|\hat{y}^{(h)} - y^{(2h)}\|}{2^p - 1} \leqslant \varepsilon$$

$\hat{y}^{(h)}$ — сеточная функция, полученная на основе значений $y^{(h)}$ взятых в каждой второй точке начиная с первой;
$e^{(h)}$ и $e^{(2h)}$ — постоянные во всех точках сеточные функции, с единичной нормой;
p — порядок аппроксимации.

Задача

Для решения задачи Коши

$$y'' + 6y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2, x \in [0, 1]$$

предложена разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} + 6\dfrac{y_{l+1} - y_{l-1}}{2h} + 5y_l = 0, l = 1, \ldots, L-1 \\ y_0 = 0, y_1 = 2h - 6h^2 \end{cases}.$$

Опеределить порядок аппроксимации дифференциальной задачи разностной.

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$\psi^{(h)} = \mathscr{L}_{(h)} \left[y(x)\right]^{(h)} - F^{(h)} = \begin{cases} [y]_0 - 0 \\ [y]_1 - 2h + 6h^2 \\ \dfrac{[y]_{l+1} - 2\,[y]_l + [y]_{l-1}}{h^2} + 6\dfrac{[y]_{l+1} - [y]_{l-1}}{2h} + 5\,[y]_l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [y]_{l+k} &= [y(x+kh)]_l = \\ &= \left[y(x) + khy'(x) + \frac{(kh)^2}{2} y''(x) + \cdots + \frac{(kh)^n}{n!} y^n(x) + O\big(h^{n+1}\big)\right]_l = \\ &= [y]_l + kh\left[y'\right]_l + \frac{(kh)^2}{2}\left[y''\right]_l + \cdots + \frac{(kh)^n}{n!}\left[y^n\right]_l + O\big(h^{n+1}\big) \end{aligned}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$\psi^{(h)} = \begin{cases} 0, \\ [y]_0 + h\,[y']_0 + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_0 + O\big(h^3\big) - 2h + 6h^2, \\ \quad \dfrac{1}{h^2}\Big(\,[y]_l + h\,[y']_l + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l + \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l - 2\,[y]_l + \\ \qquad\quad + [y]_l - h\,[y']_l + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l - \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l + O\big(h^4\big) + \Big) + \\ + \dfrac{6}{2h}\Big(\,[y]_l + h\,[y']_l + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l + \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l - \\ \qquad\quad - [y]_l + h\,[y']_l - \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l + \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l + O\big(h^4\big)\,\Big) + 5\,[y]_l\,, \\ l = 1, \ldots, L-1 \end{cases}$$

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$\psi^{(h)} = \begin{cases} 0, \\ [y]_0 + h\,[y']_0 + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_0 + O\big(h^3\big) - 2h + 6h^2, \\ \quad \dfrac{1}{h^2}\Big([y]_l + h\,[y']_l + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l + \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l - 2\,[y]_l + \\ \qquad + [y]_l - h\,[y']_l + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l - \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l + O\big(h^4\big) + \Big) + \\ + \dfrac{6}{2h}\Big([y]_l + h\,[y']_l + \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l + \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l - \\ \qquad - [y]_l + h\,[y']_l - \dfrac{h^2}{2}\,[y'']_l + \dfrac{h^3}{6}\,[y''']_l + O\big(h^4\big)\Big) + 5\,[y]_l\,, \\ l = 1, \ldots, L-1 \end{cases}$$

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$y'' + 6y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2, x \in [0,1]$$

Из начальных условий: $[y]_0 = 0, [y']_0 = 2$

Из дифференциального уравнения: $[y'']_0 = -6\,[y']_0 - 5\,[y]_0 = -12$

$$\psi^{(h)} = \begin{cases} 0 \\ 2h - 6h^2 + O\big(h^3\big) - 2h + 6h^2 \\ \dfrac{h^2\,[y'']_l + O\big(h^4\big)}{h^2} + 6\dfrac{2h\,[y']_l + \frac{h^3}{3}\,[y''']_l}{2h} + 5\,[y]_l\,, l = 1, \dots, L-1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 \\ O\big(h^3\big) \\ [y'']_l + 6\,[y']_l + 5\,[y]_l + O\big(h^2\big)\,, l = 1, \dots, L-1 \end{cases} = \begin{cases} O(h^\infty) \\ O\big(h^3\big) \\ O\big(h^2\big)\,, l = 1, \dots, L-1 \end{cases}$$

$$\|\psi^{(h)}\| = \max_l |\psi_l^{(h)}| \leqslant O\big(h^2\big)$$

Задача

Для численного решения задачи Коши

$$y' = ax + b, y(0) = 0, a, b = \text{const}, x \in [0, 1]$$

на сетке $D_h = \left\{ x_l = lh, l = 0, \ldots, L, h = \dfrac{1}{L} \right\}$ предложена разностная схема

$$\frac{-y_{l+1} + 4y_l - 3y_{l-1}}{2h} = ax_l + b, l = 1, \ldots, L - 1$$
$$y_0 = 0, y_1 = bh.$$

Исследовать разностную схему на аппроксимацию.

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$\psi_0 = [y(x)]_0 - 0$$
$$\psi_1 = [y(x)]_1 - bh$$
$$\psi_{l+1} = \frac{-[y(x)]_{l+1} + 4[y(x)]_l - 3[y(x)]_{l-1}}{2h} - ax_l - b, \quad l = 1, \dots, L-1$$

$$[y]_{l+k} = [y(x+kh)]_l = [y]_l + kh\,[y']_l + \frac{(kh)^2}{2}[y'']_l + \dots + \frac{(kh)^n}{n!}[y^n]_l + O\left(h^{n+1}\right)$$

$$\psi_0 = y(0) - 0 = 0 - 0 = O(h^\infty)$$

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$\psi_1 = [y(x+h)]_0 - bh = [y]_0 + h\left[y'\right]_0 + \frac{h^2}{2}\left[y''\right]_0 + O\left(h^3\right) - bh = \dots$$

Из уравнения $y' = ax + b, y(0) = 0, x \in [0,1]$:

$$[y]_0 = 0, \left[y'\right]_0 = ax_0 + b = b, \left[y''\right]_l = a, \left[y^{(n)}\right]_l = 0, n \geqslant 3, 0 \leqslant l \leqslant L$$

$$\psi_1 = hb + \frac{h^2}{2}a - bh = O\left(h^2\right)$$

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$\psi_{l+1} = \frac{-\left[y(x+h)\right]_l + 4\left[y(x)\right]_l - 3\left[y(x-h)\right]_l}{2h} - ax_l - b, \quad l = 1, \ldots, L-1$$

$$\begin{aligned}\psi_{l+1} = \frac{1}{2h}\Big(&-[y]_l - h\left[y'\right]_l - \frac{h^2}{2}\left[y''\right]_l - \frac{h^3}{6}\left[y'''\right]_l + O\left(h^4\right) + \\ &+4[y]_l \\ &-3[y]_l + 3h\left[y'\right]_l - 3\frac{h^2}{2}\left[y''\right]_l + 3\frac{h^3}{6}\left[y'''\right]_l + O\left(h^4\right)\Big) - ax_l - b, \\ &l = 1, \ldots, L-1\end{aligned}$$

$$\psi_{l+1} = \left[y'\right]_l - h\left[y''\right]_l + \frac{h^2}{6}\left[y'''\right]_l + O\left(h^3\right) - ax_l - b = -hb = O(h)$$

Решение (исследование на аппроксимацию)

$$\psi^{(h)} = \begin{cases} O(h^{\infty}) \\ O\left(h^{2}\right) \\ O(h)\,, l = 1, \ldots, L-1 \end{cases}$$

$$\|\psi^{(h)}\| = \max_{l=0,\ldots,L} |\psi_l| = O(h)$$

Задача.

Для предложенных разностных схем вычислить порядок аппроксимации дифференциальной задачи Коши $y' = \alpha x, y(0) = y_0, 0 \leqslant t \leqslant T, \alpha = const$. Указать дополнительные краевые условия в схемах в) и г).

а) $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \alpha y_n,$

б) $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \alpha \dfrac{y_n + y_{n+1}}{2},$

в) $\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} = \alpha y_n,$

г) $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \dfrac{\alpha}{2}\left(3y_n - y_{n-1}\right).$