Задача. На шаблоне, содержащем точки $(n, l-1)$,(n, l) ,$(n, l+1)$,$(n+1, l)$, методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему и выяснить, при каком значении параметра α имеет место аппроксимация с порядком $O(h^4)$ в точке(n, l) задачи Коши для уравнения теплопроводности. Использовать сетку $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0, \ldots, N, x_l = lh, h = \mathrm{const}, l \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \alpha h^2$.

$$\begin{cases} u'_t - 121u''_{xx} = 0 \\ u(0, x) = \phi(x)\,, 0 \leqslant t \leqslant 1, -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Решение. Все возможные схемы на указанном шаблоне имеют вид

$$\begin{cases} au_l^n + bu_{l+1}^n + cu_{l-1}^n + du_l^{n+1} = 0, n = 1, \ldots, N-1 \\ u_l^0 = \varphi_l^0, l \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Исследуем их на аппроксимацию.

$$\psi_l^0 = [u]_l^0 - \varphi_l^0 = 0, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\psi_l^{n+1} = a[u]_l^n + b[u]_{l+1}^n + c[u]_{l-1}^n + d[u]_l^{n+1} = a[u]_l^n +$$
$$+ b\Big([u]_l^n + h[u'_x]_l^n + \frac{h^2}{2}[u''_{xx}]_l^n + \frac{h^3}{6}[u'''_{xxx}]_l^n + \frac{h^4}{24}\big[u_{xxxx}^{IV}\big]_l^n + \frac{h^5}{5!}\big[u_{xxxxx}^{V}\big]_l^n + \frac{h^6}{6!}\big[u_{xxxxxx}^{VI}\big]_l^n + O\big(h^7\big)\Big) +$$
$$+ c\Big([u]_l^n - h[u'_x]_l^n + \frac{h^2}{2}[u''_{xx}]_l^n - \frac{h^3}{6}[u'''_{xxx}]_l^n + \frac{h^4}{24}\big[u_{xxxx}^{IV}\big]_l^n - \frac{h^5}{5!}\big[u_{xxxxx}^{V}\big]_l^n + \frac{h^6}{6!}\big[u_{xxxxxx}^{VI}\big]_l^n + O\big(h^7\big)\Big) +$$
$$+ d\Big([u]_l^n + \tau[u'_t]_l^n + \frac{\tau^2}{2}[u''_{tt}]_l^n - \frac{\tau^3}{6}[u'''_{ttt}]_l^n + O\big(\tau^4\big)\Big), n = 0, \ldots N-1, l \in \mathbb{Z}.$$

По условию требуется аппроксимация $O(h^4)$, т.е. должно выполняться

$$\psi_l^{n+1} = [u'_t]_l^n - 121[u''_{xx}]_l^n + O\big(h^4\big) = O\big(h^4\big)\,, n = 0, \ldots N-1, l \in \mathbb{Z}.$$

Группируя и приравнивая коэффициенты у соответствующих производных получаем

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ h(b - c) = 0 \\ \frac{h^2}{2}(b + c) = -121 \\ d\tau = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{\alpha h^2} + \dfrac{121}{h^2} \\ b = c = -\dfrac{121}{h^2} \\ d = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{\alpha h^2} \end{array}\right. .$$

Такая схема имеет вид

$$\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} - 121\frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2} = 0.$$

В этом случае

$$\psi_l^{n+1} = [u'_t]_l^n - 121[u''_{xx}]_l^n + (b+c)\,\frac{h^4}{24}\big[u_{xxxx}^{IV}\big]_l^n + (b+c)\,\frac{h^6}{6!}\big[u_{xxxxxx}^{VI}\big]_l^n + (b+c)\,O\big(h^8\big) +$$
$$+ d\frac{\tau^2}{2}[u''_{tt}]_l^n - d\frac{\tau^3}{6}[u'''_{ttt}]_l^n + dO\big(\tau^4\big) = -121\frac{h^2}{12}\big[u_{xxxx}^{IV}\big]_l^n + \frac{\alpha h^2}{2}[u''_{tt}]_l^n + O\big(h^4\big)\,, n = 0, \ldots N-1, l \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, α выбираем из условия

$$-\frac{121}{6}\big[u_{xxxx}^{IV}\big]_l^n + \alpha[u''_{tt}]_l^n = 0.$$

Дифференцируя исходное уравнение один раз по t и второй раз два раза по x, находим

$$u''_{tt} = 121 u'''_{xxt}, u'''_{txx} = 121 u^{IV}_{xxxx}, u''_{tt} = 121^2 u^{IV}_{xxxx}.$$

$$\alpha = \frac{1}{6 \cdot 121} = \frac{1}{726}.$$

Ответ: $\boxed{\alpha = \frac{1}{726}}$.