Задание. Для заданной смешанной задачи для уравнения переноса и разностной схемы выполнить исследование на аппроксимацию, постановку необходимых дополнительных граничных условий, найти аналитическое решение, определить величину шагов по времени τ, обеспечивающую устойчивость алгоритма.

$$\begin{cases} u_t - u_x = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(x,0) = x^2 + \cos x, \\ u(1,t) = (1+t)^2 + \cos 1. \end{cases}$$

Разностная схема

$$\begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n - \dfrac{\sigma}{2}\left(u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 3u_l^n\right) + \dfrac{\sigma^2}{2}\left(u_{l+2}^n - 2u_{l+1}^n + u_l^n\right) + \tau \sin x_l + \dfrac{\tau^2}{2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l = 0, \ldots, L-2, n = 0, \ldots, N-1, \\ u_l^0 = x_l^2 + \cos x_l, \quad l = 0, \ldots, L, \\ u_L^n = (1+t^n)^2 + \cos 1, \quad n = 1, \ldots, N, \\ u_{L-1}^n = ?, \quad n = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

$$(x_l, t^n) = \left\{ h_l = lh, hL = 1, l = 0, \ldots L; t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0, \ldots, N; \sigma = \frac{\tau}{h} \right\}.$$

Аналитическое решение. Первые интегралы

$$dt = -dx \to t = -x + C_1$$

$$-dx = \frac{du}{\sin x} \to du = \sin x dx - \to u(x,t) = -\cos x + C_2$$

$t = 0$

$$\tilde{C}_1 = x$$
$$\tilde{C}_2 = u(x,0) + \cos x = x^2 + 2\cos x$$
$$\tilde{C}_2 = \left(\tilde{C}_1\right)^2 + 2\cos \tilde{C}_1$$

$t < 1 - x$

$$C_2 = (C_1)^2 + 2\cos C_1$$
$$u(x,t) + \cos x = (t+x)^2 + 2\cos(t+x)$$
$$u(x,t) = (t+x)^2 + 2\cos(t+x) - \cos x$$

$x = 1$

$$\bar{C}_1 = t + 1$$
$$\bar{C}_2 = u(1,t) + \cos 1 = (1+t)^2 + 2\cos 1$$
$$\bar{C}_2 = \left(\bar{C}_1\right)^2 + 2\cos 1$$

$t > 1 - x$

$$C_2 = (C_1)^2 + 2\cos 1$$
$$u(x,t) + \cos x = (t+x)^2 + 2\cos 1$$
$$u(x,t) = (t+x)^2 + 2\cos 1 - \cos x$$

Устойчивость. $u_l^n \to \lambda^n e^{i\alpha l}$

$$\lambda^{n+1}e^{i\alpha l} = \lambda^n e^{i\alpha l} - \frac{\sigma}{2}\lambda^n\left(e^{i\alpha(l+2)} - 4e^{i\alpha(l+1)} + 3e^{i\alpha l}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^n\left(e^{i\alpha(l+2)} - 2e^{i\alpha(l+1)+e^{i\alpha l}}\right)$$

$$\lambda = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n},\ \beta = \frac{\sigma}{2}$$

$$\lambda(\alpha,\beta) = 1 - \beta\left(e^{2i\alpha} - 4e^{i\alpha} + 3\right) + 2\beta^2\left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha} + 1\right)$$

$$\lambda = \left(1 - 3\beta + 2\beta^2\right) + 4\beta\left(1-\beta\right)e^{i\alpha} - \beta\left(1-2\beta\right)e^{2i\alpha}$$

$$1 - 3\beta + 2\beta^2 = (1-\beta)(1-2\beta)$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 = \lambda\bar{\lambda} = &\left[\left(1 - 3\beta + 2\beta^2\right) + 4\beta\left(1-\beta\right)e^{i\alpha} - \beta\left(1-2\beta\right)e^{2i\alpha}\right]\\ &\left[\left(1 - 3\beta + 2\beta^2\right) + 4\beta\left(1-\beta\right)e^{-i\alpha} - \beta\left(1-2\beta\right)e^{-2i\alpha}\right] \leqslant 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 = &(1-\beta)^2(1-2\beta)^2 + 16\beta^2(1-\beta)^2 + \beta^2(1-2\beta)^2+\\ &+ 4\beta(1-\beta)^2(1-2\beta)2\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}-\\ &- \beta(1-\beta)(1-2\beta)^2 2\frac{e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}}{2}-\\ &- 4\beta^2(1-\beta)(1-2\beta)2\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \leqslant 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 = &(1-\beta)^2(1-2\beta)^2 + 16\beta^2(1-\beta)^2 + \beta^2(1-2\beta)^2+\\ &+ 8\beta(1-\beta)(1-2\beta)(1-\beta-\beta)\cos\alpha - 2\beta(1-\beta)(1-2\beta)^2\cos 2\alpha \leqslant 1\end{aligned}$$

$$16\beta^2(1-\beta)^2 - 1 = (1-2\beta)^2(4\beta^2 - 4\beta - 1)$$

$$(1-\beta)^2 + 4\beta^2 - 4\beta - 1 + \beta^2 + 8\beta(1-\beta)\cos\alpha - 2\beta(1-\beta)\cos 2\alpha \leqslant 0$$

$$2\beta(\beta-1)(3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha) \leqslant 0$$

$$\beta(\beta-1)(\cos\alpha - 1)^2 \leqslant 0$$

$$0 \leqslant \beta \leqslant 1$$

$$\boxed{\tau \leqslant 2h}$$

Аппроксимация.

$$\psi_l^n = \frac{[u]_l^{n+1} - [u]_l^n}{\tau} + \frac{[u]_{l+2}^n - 4[u]_{l+1}^n + 3[u]_l^n}{2h} + \tau\frac{[u]_{l+2}^n - 2[u]_{l+1}^n + [u]_l^n}{2h^2} - \tau\sin x_l - \frac{\tau^2}{2}$$

$$\psi_l^n = \frac{[u] + \tau[u_t'] + \frac{\tau^2}{2}[u_{tt}''] - [u] + O(\tau^3)}{\tau} - \frac{[u] + 2h[u_x'] + \frac{4h^2}{2}[u_{xx}''] + \frac{8h^3}{3!}[u_{xxx}''']}{2h} -$$
$$+ 4\frac{[u] + h[u_x'] + \frac{h^2}{2}[u_{xx}''] + \frac{h^3}{3!}[u_{xxx}'''] - 3[u] + O(h^4)}{2h} -$$
$$- \tau\frac{[u] + 2h[u_x'] + \frac{4h^2}{2}[u_{xx}''] + \frac{8h^3}{3!}[u_{xxx}'''] - 2[u] - 2h[u_x'] - 2\frac{h^2}{2}[u_{xx}''] - 2\frac{h^3}{3!}[u_{xxx}'''] + [u] + O(h^4)}{2h^2} +$$
$$+ \tau\sin x_l + \frac{\tau^2}{2} = \dots$$

$$\psi_l^0 = [u]_l^0 - x_l^2 - \cos x_l = 0$$

$$\psi_L^n = [u]_L^n - (1 + t^n)^2 - \cos 1 = 0$$

Дополнительное граничное условие.

$$[u]_{L-1}^n = [u]_L^n - h[u_x']_L^n - \frac{h^2}{2}[u_{xx}'']_L^n + O(h^3)$$

$$[u_x']_L^n = [u_t']_L^n - \sin x_L = 2(1 + t^n) - \sin x_L$$

$$\begin{cases} u_{tt}'' - u_{tx}'' &= 0 \quad \to \quad u_{tx}'' = u_{tt}'', \\ u_{tx}'' - u_{xx}'' &= \cos x \quad \to \quad u_{xx}'' = u_{tt}'' - \cos x \end{cases}$$

$$[u_{xx}'']_L^n = 2 - \cos x_L$$

$$[u]_{L-1}^n = [u]_L^n - h(2(1 + t^n) - \sin x_L) - \frac{h^2}{2}(2 - \cos x_L) + O(h^3)$$