Краевая задача для ОДУ. Метод прогонки.

Симаков Сергей Сергеевич
simakov.ss@phystech.edu

Рассмотрим краевую задачу третьего рода для ОДУ второго порядка (стационарное уравнение теплопроводности)

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$k(0)u'(0) = \delta_1 u(0) - \varepsilon_1,$$

$$-k(1)u'(1) = \delta_2 u(1) - \varepsilon_2,$$

где $\delta_{1,2}$, $\varepsilon_{1,2}$ — постоянные величины, $k(x) > 0$, $q(x) > 0$, $f(x) > 0$ — непрерывные и ограниченные на $[0, 1]$ функции.

Пусть для модельной задачи $\tilde{k} = k(0.5)$, $\tilde{q} = q(0.5)$, $\tilde{f} = f(0.5)$.

Пусть введена равномерная сетка
$\{x_l\}_{k=0}^{L} : x_l = lh, \quad l = 0, \ldots, L, \quad hL = 1, \quad (x_{l+1} - x_l = h).$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_l} \approx \frac{u_l - u_{l-1}}{h} \approx \frac{u_{l+1} - u_l}{h}$$

$$\left.\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)\right|_{x=x_l} \approx \frac{k_{l+1/2}\left(\dfrac{u_{l+1} - u_l}{h}\right) - k_{l-1/2}\left(\dfrac{u_l - u_{l-1}}{h}\right)}{h}$$

Тогда аппроксимация краевой задачи может быть записана в виде

$$\frac{k_{l+1/2}\left(u_{l+1}-u_l\right)-k_{l-1/2}\left(u_l-u_{l-1}\right)}{h^2}-q_l u_l=-f_l, \quad l=1,\ldots,L-1$$

$$k_0\frac{u_1-u_0}{h}=\delta_1 u_0-\varepsilon_1,$$

$$k_L\frac{u_L-u_{L-1}}{h}=\delta_2 u_L-\varepsilon_2$$

Пусть

$a_l=k_{l+1/2}$, $b_l=-\left(k_{l-1/2}+k_{l+1/2}+q_l h^2\right)$, $c_l=k_{l-1/2}$, $d_l=-f_l h^2$, $l=1,\ldots,L-1$,
$a_0=k_0$, $b_0=-\left(k_0+h\delta_1\right)$, $c_0=0$, $d_0=-\varepsilon_1 h$,
$a_L=0$, $b_L=-\left(k_L+h\delta_2\right)$, $c_L=k_L$, $d_L=-\varepsilon_2 h$.

$$
\begin{aligned}
a_0 u_1 + b_0 u_0 &= d_0, \\
a_l u_{l+1} + b_l u_l + c_l u_{l-1} &= d_l, \quad l = 1, \ldots, L-1, \\
b_L u_{L-1} + c_L u_L &= d_L.
\end{aligned}
$$

Из первого уравнения

$$
u_0 = -\frac{a_0}{b_0} u_1 + \frac{d_0}{b_0} = \alpha_0 u_1 + \beta_0, \left(\alpha_0 = -\frac{a_0}{b_0}, \beta_0 = \frac{d_0}{b_0} \right).
$$

Далее

$$
u_l = -\frac{a_l}{b_l + c_l \alpha_{l-1}} u_{l+1} + \frac{d_l + c_l \beta_{l-1}}{b_l + c_l \alpha_{l-1}} = \alpha_l u_{l+1} + \beta_l, \quad l = 1, \ldots, L-1,
$$

$$
u_L = \frac{d_L - c_L \beta_{L-1}}{b_L - c_L \alpha_{L-1}}.
$$