

## Задание

Исследование поведения различных пар базисных элементов для скорости и давления в задаче Стокса для круглой области  $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ :

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \in \Omega$$

$$-\nabla \mathbf{u} = 0 \in \Omega$$

с граничными условиями  $\mathbf{u} = 0$  на  $\partial\Omega$  и правой частью  $\mathbf{f}(x, y) = (0, x)$ .

Исследование конечно-элементных пар, которые (не) приводят к возникновению паразитных мод решения в поле давлений (осцилляций). Необходимо выделить две "хорошие" (осцилляций нет без регуляризации), одну "очень плохую" (для подавления осцилляций нужен настолько большой коэф-т регуляризации  $\varepsilon$ , что решение регуляризованной задачи значительно отличается от решения исходной), и одну "плохую" (есть осцилляции без регуляризации, для подавления осцилляции нужен  $\varepsilon$  порядка шага сетки  $h^2$ ).

## Ход работы

Для исследования были взяты комбинации конечно-элементных пар со следующими базисными функциями:

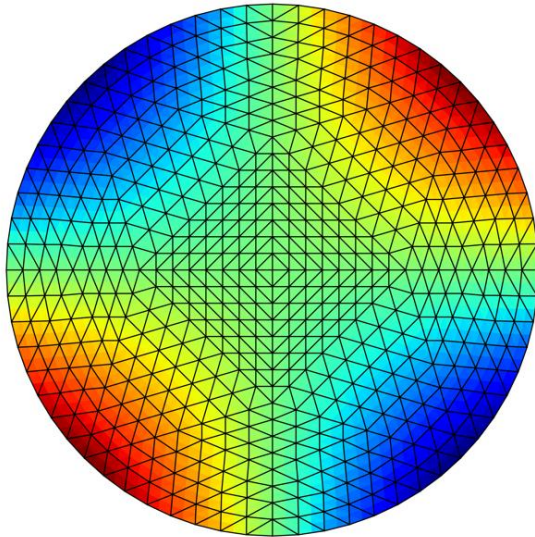
- 'P0': ElementTriP0() - элемент с постоянной аппроксимацией внутри каждого треугольника,
- 'P1': ElementTriP1() - линейный элемент с линейной аппроксимацией внутри каждого треугольника,
- 'P2': ElementTriP2() - квадратичный элемент с квадратичной аппроксимацией внутри каждого треугольника,
- 'P3': ElementTriP3() - кубический элемент с кубической аппроксимацией внутри каждого треугольника,
- 'P4': ElementTriP4() - квартальный элемент с квартальной аппроксимацией внутри каждого треугольника.

Также было исследовано поведение решения на различных вычислительных сетках (mesh\_3, mesh\_4, mesh\_5).

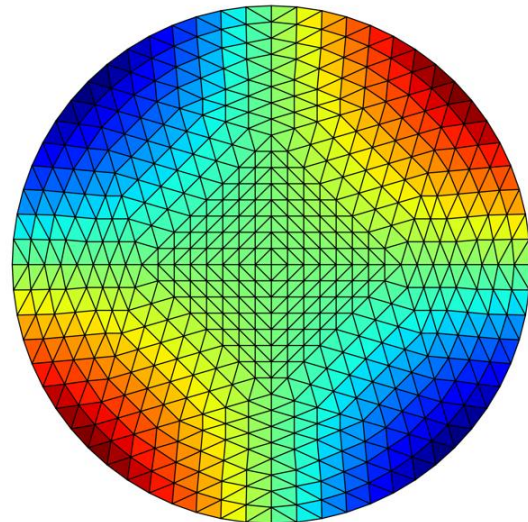
### «Хорошие» базисные пары

Были определены конечно-элементные пары, исключающие осцилляции в процессе решения:  $(P2-P0)$ ,  $(P3-P1)$ :

P3\_P1 Pressure



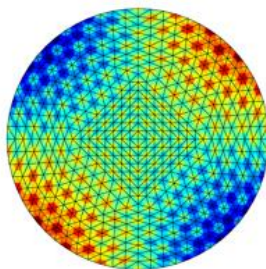
P2\_P0 Pressure



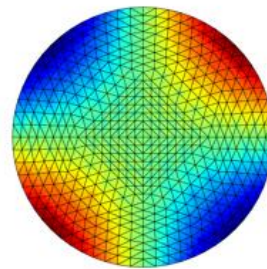
### «Плохие» базисные пары

Пример "неблагоприятной пары" представлен в виде  $(P1, P1)$ .

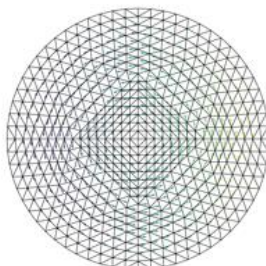
P1\_P1 Pressure



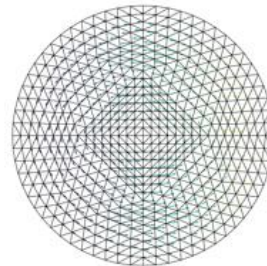
P1\_P1 Pressure



P1\_P1 Velocity

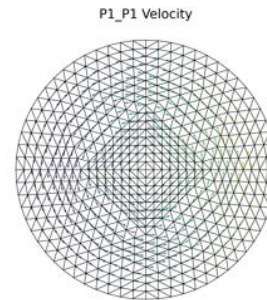
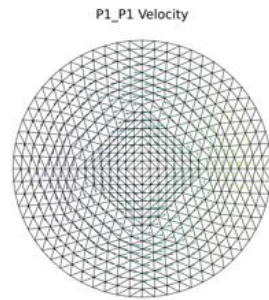
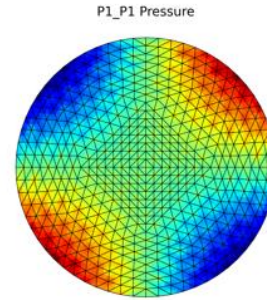
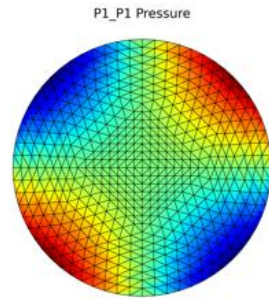


P1\_P1 Velocity



$$\varepsilon = 0, \text{ mesh} = 4$$

$$\varepsilon = 0.1, \text{ mesh} = 4$$

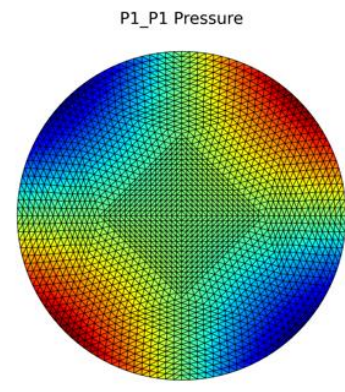
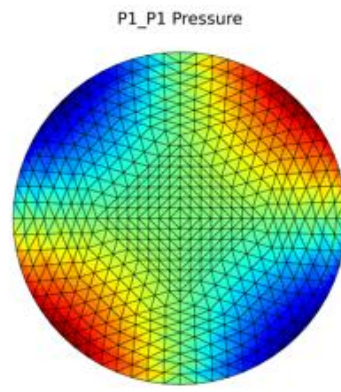
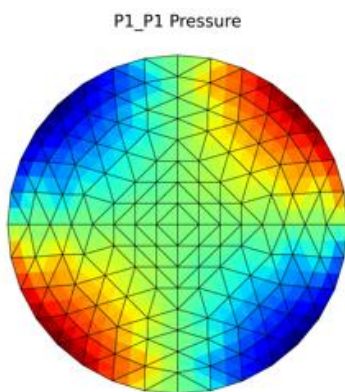


$\varepsilon = 1e-10$ . mesh = 4

$\varepsilon = 1e-15$ . mesh = 4

При  $E = 0$  на графике давления наблюдаются заметные осцилляции. Однако, при визуальном анализе можно заметить, что изменение значений регуляризации, например, при  $E = 1e-10$ , позволяет устранить эти осцилляции.

Также рассмотрим результаты вычислений с одновременным изменением сетки и уменьшением  $\varepsilon \sim h^2$ :



$\varepsilon_1 = 4*\varepsilon_1$ , mesh = 3

$\varepsilon_2 = 1e-10$ , mesh = 4

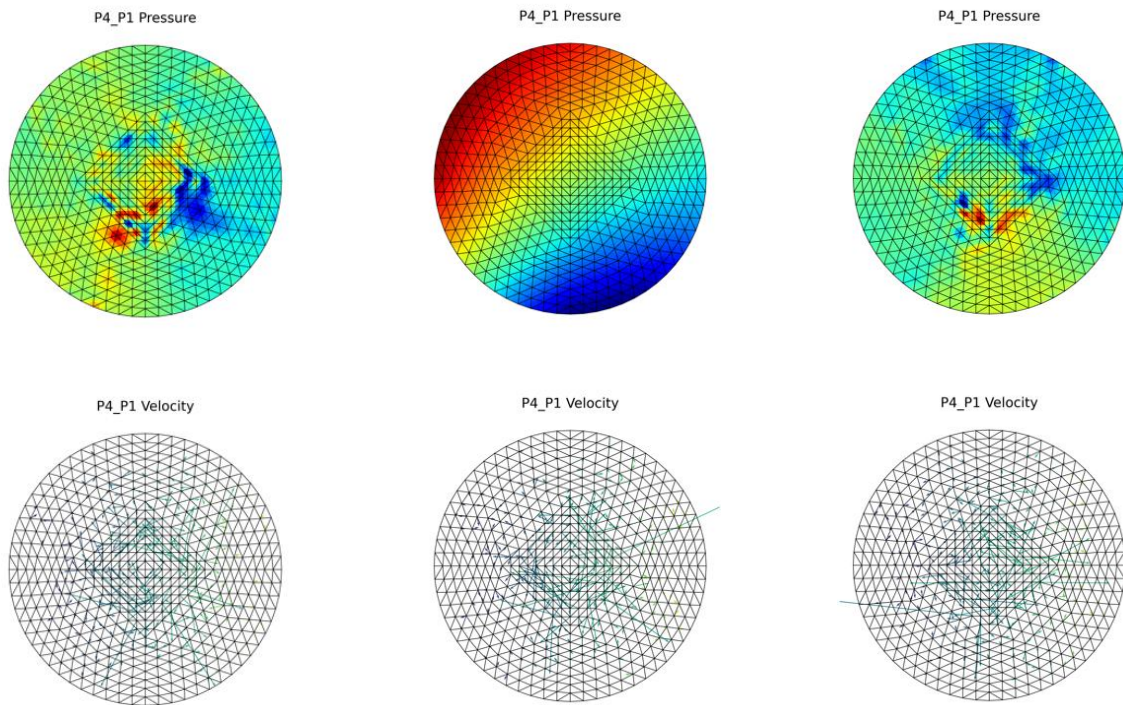
$\varepsilon_3 = 0.25*\varepsilon_2$ , mesh = 5

Видно, что при измельчении  $\varepsilon \sim h^2$  сходимость решения улучшается.



## «Очень плохие» базисные пары

Примером очень плохой пары является пара, например, (P4-P1).



$\varepsilon = 0, mesh = 4$

$\varepsilon = 0.5, mesh = 4$

$\varepsilon = 1e-4, mesh = 4$

При коэффициенте регуляризации 0.5 наблюдаем решение без осцилляций, однако даже при визуальной оценке решение не является устойчивым.