Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости

$$\overbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}}^{\text{material derivative}} - \overbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}^{\text{viscous force}} + \frac{\nabla p}{\rho} = \overbrace{\mathbf{f}}^{\textit{body forces}}$$

$$\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0}_{\text{incompressibility}}$$

Уравнения Стокса

Уравнения Навье-Стокса в безразмерной форме:

$$\overbrace{Re\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{u}}}{\partial\bar{t}} + \left(\bar{\mathbf{u}}\cdot\bar{\nabla}\right)\bar{\mathbf{u}}\right)}^{\text{material derivative}} - \overbrace{\bar{\Delta}\bar{\mathbf{u}}}^{\text{viscous force}} + \bar{\nabla}\bar{p} = \bar{\mathbf{f}}$$

$$\underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{u}} = 0}_{\text{incompressibility}}$$

В случае $Re \ll 1$ первым слагаемым можно пренебречь (инерциальные силы малы), что приводит к уравнениям Стокса (в размерном виде)

$$-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

Задача Стокса

Задача Стокса для жидкости в области Ω

$$
\begin{aligned}
-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ в } \Omega \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ в } \Omega \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ на } \partial\Omega_D \\
-\mu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p\mathbf{n} &= 0 \text{ на } \partial\Omega_N
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{u}$ – скорость жидкости, p – давление
- $\mathbf{f}$ – объемные силы
- $\mathbf{n}$ – единичная нормаль из Ω
- $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, граница состоит из границы с главными (Dirichlet) и естественными (natural) граничными условиями.

Метод смешанных конечных элементов

- МКЭ-дискретизация слабой постановки с гильб. пр-ми $\mathbf{H} = \mathbf{H}^1(\Omega, \partial\Omega_D), P = L^2(\Omega)$ и $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}$, $p, q \in P$

$$\int\limits_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} d\Omega - \int\limits_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int\limits_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_N} \left(\mu \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \right) ds, \ \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}$$

$$-\int\limits_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0, \qquad \forall q \in P$$

- Независимые неизвестные $\mathbf{u}, p$ приближаются различными конечно-элементными аппроксимациями

- Эти аппроксимации должны быть связаны между собой дополнительными условиями устойчивости для получения устойчивого численного метода [1].

[1] условия Ладыженской-Бабу́шки-Брецци

Метод смешанных конечных элементов

КЭ-аппроксимации используют базисные (*пробные*) скалярные функции N_j для компонент $\mathbf{u}$ и L_j для p:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{v}} = \sum_{r=1}^{d} \sum_{j=1}^{n_v} v_j^r \mathbf{e}^r N_j$$

$$p \approx \hat{p} = \sum_{j=1}^{n_p} p_j L_j$$

Здесь $\mathbf{e}^r$ – единичный $r^{\text{ый}}$ вектор декартовой СК, n_v, n_p – число степеней свободы для компоненты скорости и давления, соответственно.

Неизвестные компоненты в разложении по базису можно представить в векторном виде

$$\mathbf{v} = \left[v_1^1, \ldots, v_{n_v}^1, \ldots, v_1^d, \ldots, v_{n_v}^d\right],$$

$$\mathbf{p} = \left[p_1, p_2, \ldots, p_{n_p}\right]$$

Метод смешанных конечных элементов

Неизвестные представляются через базисные функции N_j для компонент $\mathbf{u}$ и L_j для p:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{v}} = \sum_{r=1}^{d} \sum_{j=1}^{n_v} v_j^r \mathbf{e}^r N_j, \quad p \approx \hat{p} = \sum_{j=1}^{n_p} p_j L_j$$

Метод Галеркина: в слабой постановке заменим пространство $\mathbf{H}$ на его подпространство $(span\{N_j\})^3$, а пространство P – на его подпространство $span\{L_j\}$

Это приводит к $dn_v + n_p$ уравнениям на $dn_v + n_p$ неизвестных

$$\int\limits_{\Omega} \left(\mu \nabla \hat{v}^r \cdot \nabla N_i - \frac{\partial N_i}{\partial x^r} \hat{p} \right) d\Omega = \int\limits_{\Omega} f^r N_i d\Omega, \quad i = 1, .., n_v, \;\; r = 1, .., d$$

$$\int\limits_{\Omega} L_i \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0, \qquad i = 1, \dots, n_p$$

Метод смешанных конечных элементов

$$\int\limits_{\Omega} \left(\mu \nabla \hat{v}^r \cdot \nabla N_i - \frac{\partial N_i}{\partial x^r} \hat{p} \right) d\Omega = \int\limits_{\Omega} f^r N_i d\Omega, \quad i = 1, .., n_v, \; r = 1, ..$$

$$\int\limits_{\Omega} L_i \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_p$$

При выводе использовались ГУ, обозначение $\hat{v}^r = \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{e}^r = \sum\limits_i v_i^r N_i$.

Подстановка конечно-элементных выражений для $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{p}$ приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n_v} A_{i\,j} v_j^r + \sum_{j=1}^{n_p} B_{i\,j}^r p_j = c_i^r, \quad i = 1, \ldots, n_v, \; r = 1, \ldots, d$$

$$\sum_{r=1}^{d} \sum_{j=1}^{n_v} B_{j\,i}^r v_j^r = 0, \quad i = 1, \ldots, n_p$$

Система линейных уравнений

Подстановка конечно-элементных выражений для $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{p}$ приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n_v} A_{ij} v_j^r + \sum_{j=1}^{n_p} B_{ij}^r p_j = c_i^r, \quad i = 1, \dots, n_v, \ r = 1, \dots, d$$

$$\sum_{r=1}^{d} \sum_{j=1}^{n_v} B_{ji}^r v_j^r = 0, \quad i = 1, \dots, n_p$$

- $\hat{v}^r = \sum_{j=1}^{n_v} v_j^r N_j, \quad \hat{p} = \sum_{j=1}^{n_p} p_j L_j$
- $A_{ij} = \int\limits_{\Omega} \mu \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \right) d\Omega, \quad B_{ij}^r = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x^r} L_j d\Omega$
- $c_i^r = \int\limits_{\Omega} f^r N_i d\Omega$

Разрешимость системы уравнений

Подстановка конечно-элементных выражений для $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{p}$ приводит к системе лин. уравнений ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$)

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}^T\\ \mathbf{B} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$$

Выразим из первого уравнения

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}$$

и подставим во второе

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}) = \mathbf{g}$$

$$-\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p} = \mathbf{g} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$$

Система имеет решение ($\mathcal{A}$ обратима), если обратима матрица $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$ (*матрица дополнения по Шуру*)

Разрешимость системы уравнений

Система линейных уравнений $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M\times M}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

свелась к уравнению

$$\mathbf{S}\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{g}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$$

- $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{M\times M}$
- $\mathbf{S}$ получена линейной комбинацией строк и столбцов невырожденной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$

Чтобы $\det \mathbf{S} \neq 0$, необходимо

- $M < N$
- $\operatorname{rank} \mathbf{B} = M$

Также мы хотим выполнения условия устойчивости

- $\exists C : ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{p}|| < C||f||$

Условия Ладыженской-Бабу́шки-Брецци

Система лин. уравнений

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}^T\\ \mathbf{B} & \mathbf{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$$

имеет решение, если

- $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} > 0,\ \forall\mathbf{v}\in Ker(\mathbf{B})$ ($\mathbf{A}$ "достаточно" обратима)
- $Ker(\mathbf{B}^T) = \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$ обратима).

Эти условия являются алгебраическим аналогом условий Ладыженской-Бабу́шки-Брецци и накладывают *ограничения на выбор конечно-элементных аппроксимаций для пары* $\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}$.

Условия Ладыженской-Бабу́шки-Брецци

Говоря нестрого, часто достаточно [2] :

A при использовании низкого порядка аппроксимации: ст.св. для $\hat{p}$ должны располагаться на более грубой сетке, чем для $\hat{\mathbf{v}}$

B при использовании высокого (> 1) порядка аппроксимации: степень полиномов для $\hat{p}$ должна быть меньше, чем для $\hat{\mathbf{v}}$ (пример — элементы Тейлора-Худа (кусочно-квадратичные $\hat{\mathbf{v}}$, кусочно-линейные $\hat{p}$)

[2] Layton, W., Manica, C. C., Neda, M., Olshanskii, M., & Rebholz, L. G. (2009). On the accuracy of the rotation form in simulations of the Navier–Stokes equations. Journal of Computational Physics, 228(9), 3433-3447.

Условия Ладыженской-Бабу́шки-Брецци, пример А

А: ст.св. для $\hat{p}$ должны располагаться на более грубой сетке, чем для $\hat{\mathbf{v}}$

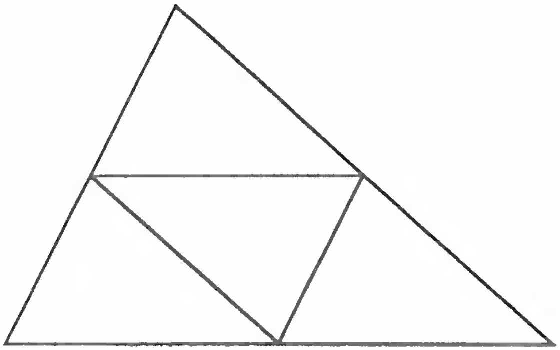

Рис.: Давления $\hat{p} \in P_0(\triangle_h)$ постоянны на большом треугольнике $\triangle_h$, скорости $\hat{\mathbf{v}} \in P_1(\triangle_{h/2})$ линейны на 4 треугольниках $\triangle_{h/2}$ вдвое меньше

Условия Ладыженской-Бабу́шки-Брецци, пример B

B: степень полиномов для $\hat{p}$ должна быть меньше, чем для $\hat{\mathbf{v}}$

Рис.: Элементы Тейлора-Худа (на треугольниках) — кусочно-квадратичные $\hat{\mathbf{v}} \in P_2(\triangle)$ (требуют большего числа ст.св.), кусочно-линейные $\hat{p} \in P_1(\triangle)$

Пример плохой КЭ аппроксимации (locking phenomenon) $P_1 - P_0$

Условие несжимаемости $\int_{T_i} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0$ должно выполняться для любой конечно-элементной аппроксимации $\hat{\mathbf{v}}$.

- Пусть область состоит из n_t треугольников, и выбраны кусочно-линейные базисные функции N_j, $j = 1, \dots, n_{v,i}$.
- Формула Эйлера $n_t = 2n_{v,i} + n_{v,b} - 2 \to n_t - 1 > 2n_{v,i}$
- Пусть также в задаче все граничные условия обращают скорость на границе в нуль: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ на $\partial\Omega$.
- Тогда ***единственной*** линейной функцией, удовлетворяющей

$$\int_{T_i} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \text{ на } \partial\Omega$$

  будет

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{0}.$$

- Неформальное объяснение – слишком мало степеней свободы для вектора скорости для удовлетворения всех n_t ограничений

Альтернативный подход

Можно избежать выполнения LBB-условий, если рассмотреть *регуляризованную* задачу

$$\mathcal{A}_\varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\varepsilon \\ \mathbf{p}^\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\varepsilon\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\varepsilon \\ \mathbf{p}^\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} + \varepsilon\mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Для построения $\varepsilon\mathbf{M}$ применяют методы дискретизации регуляризованной задачи $(\varepsilon = \alpha h^2)$:

- $\nabla \cdot \mathbf{v} = \varepsilon \Delta p$ — сглаживание осцилляций давления, условия LBB выполнены для любых типов элементов
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = -\varepsilon p$ — метод штрафных функций, позволяет избавиться от $p = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla \cdot \mathbf{v}$ подстановкой в первое уравнение
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t}$ — метод искусственной сжимаемости, процесс установления до достижения $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

Немного теории

Задачу
$$
\begin{aligned}
-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ в } \Omega \\
\nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \text{ в } \Omega \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ на } \partial\Omega_D \\
-\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} + p\mathbf{n} &= 0 \text{ на } \partial\Omega_N
\end{aligned}
$$
можно сформулировать в слабой постановке:

$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1(\Omega, \partial\Omega_D)$, $P = L^2(\Omega)$ и $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}$, $p, q \in P$
$$
\int\limits_\Omega \mu\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w}\,d\Omega - \int\limits_\Omega p\nabla\cdot\mathbf{w}\,d\Omega = \int\limits_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{w}\,d\Omega +
$$
$$
+ \int\limits_{\partial\Omega_N}\left(\mu\mathbf{w}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} - p\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\right)ds, \quad \forall\mathbf{w}\in\mathbf{H}
$$
$$
-\int\limits_\Omega q\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\Omega = 0, \qquad \forall q\in P
$$

Слабая постановка

Введем билинейные формы

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_\Omega \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} d\Omega$$

$$b(p, \mathbf{w}) = -\int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega$$

и перепишем слабую постановку в виде: найти $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$, $p \in P$

$$\begin{array}{llll} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(p, \mathbf{w}) & = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H} \\ b(q, \mathbf{u}) \ + & = 0, & \forall q \in P \end{array}$$

Слабая постановка

- Допустим, выбраны дискретные аналоги гильбертовых пространств $\mathbf{H}_h \subset \mathbf{H}$, $P_h \subset P$, в которых ищется дискретное решение.
- На $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ и $p \in P$ накладываются разные требования гладкости — следует перенести эти требования на дискретные аппроксимации ($\hat{\mathbf{v}}$ представляется полиномами более высокого порядка, чем $\hat{p}$)
- Условия LBB изначально были сформулированы для непрерывных билинейных форм $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$:
  - *коэрцитивность квадр.формы*: $\exists \alpha > 0$, α не зависит от шага сетки:
  $$a(\hat{\mathbf{w}},\hat{\mathbf{w}}) \geq \alpha ||\hat{\mathbf{w}}||^2_{\mathbf{H}}, \quad \forall \hat{\mathbf{w}} \in \mathbf{H}_h$$
  - *условие inf-sup*: $\exists \beta$, β не зависит от шага сетки:
  $$0 < \beta := \inf_{\hat{q} \in P_h} \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_h} \frac{b(\hat{\mathbf{w}},\hat{q})}{||\hat{\mathbf{w}}||_{\mathbf{H}} \, ||\hat{q}||_P}$$

Неформальное объяснение условия коэрцитивности

- Пусть имеется система линейных уравнений $Ax = b$ с матрицей A, полученная в результате дискретизации эллиптического уравнения на сетке с шагом h. Допустим, что $\lambda_{min}(A) = h^2$. Что произойдет при $h \to 0$?
- Матрица становится все ближе к вырожденной, поскольку $\lambda_{min}(A) \to 0$. Существование решения в предельном случае зависит от того, содержит ли решение минимальный собств.вектор. Это приводит к *неустойчивости*.
- Чтобы избежать этого, нужно требовать $\lambda_{min}(A) > c \geq 0$, т.е. отделимости спектра матрицы A снизу от нуля.
  Из условия коэрцитивности квадр.формы это требование следует.

Условия Ладыженской-Бабу́шки-Брецци

- В пределе $h \to 0$ методы линейной алгебры (свойства матриц конечного размера) не позволяют определить, существует ли у задачи решение
- Коэрцитивность квадратичной формы $\to \exists$ единственное решение задачи
- Т.е. первое условие достаточно, чтобы утверждать $\exists$ и ! решения
- Коэрцитивность проще показать в бесконечномерном случае, чем использовать другие способы для доказательства существования и единственности решения

Неформальное объяснение условия inf-sup

Условие inf-sup необходимо для получения *оптимальной* точности найденного решения $\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}$:

$$||\mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}}||_{\mathbf{H}} + ||p - \hat{p}||_P \leq c \left(\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h} ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||_{\mathbf{H}} + \inf_{q \in P_h} ||p - q||_P \right)$$

Чтобы условие оптимальности было выполнено, нужно, чтобы β из условия inf-sup не зависело от шага сетки.
В противном случае порядок аппроксимации падает и не равен оптимальному, также не гарантируется устойчивость.
Однако для разрешимости дискретной задачи это условие не нужно, достаточно коэрцитивности.