Введение в метод смешанных конечных элементов

Рассмотрим метод смешанных конечных элементов на примере задачи Пуассона на отрезке $I = [0, 1]$ с однородными ГУ типа Дирихле:

$$-\frac{d^2 p}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$p(0) = p(1) = 0. \tag{2}$$

Функция в правой части $f \in L^2(I)$.
Напомним, что скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2(I)$ определено как $(v, w) = \int\limits_0^1 v(x)w(x)dx$.
Также введем пространство функций $H^1 = \left\{v \in L^2(I) : \frac{dv}{dx} \in L^2(I)\right\}$.

Введение в метод смешанных конечных элементов

Введем обозначения для пространств функций $V = H^1(I)$, $W = L^2(I)$ [1].

Также введем новую переменную

$$u = -\frac{dp}{dx} \tag{3}$$

и перепишем исходное уравнение (1) в виде

$$\frac{du}{dx} = f. \tag{4}$$

[1] Отметим, что функции из W могут быть разрывными, в то время как функции из V непрерывны в силу теоремы вложений Соболева.

Введение в метод смешанных конечных элементов

Домножим (4) на $v \in V$ и проинтегрируем по отрезку I:

$$(u, v) = -\left(\frac{dp}{dx}, v\right).$$

После интегрирования по частям правой части и использования ГУ $p(0) = p(1) = 0$:

$$(u, v) = \left(p, \frac{dv}{dx}\right).$$

Также скалярно перемножим обе части уравнения (3) на тестовую функцию $w \in W$:

$$\left(\frac{du}{dx}, w\right) = (f, w)$$

Введение в метод смешанных конечных элементов

Неизвестные u, p удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(u, v) - \left(p, \frac{dv}{dx}\right) = 0, \quad \forall\, v \in V, \tag{5}$$

$$\left(\frac{du}{dx}, w\right) = (f, w) \quad \forall\, w \in W. \tag{6}$$

Говорят, что задача представлена в смешанной слабой (вариационной) постановке.

Введение в метод смешанных конечных элементов

Можно показать, что задача (5) эквивалентна задаче с седловой точкой: найти функции $u \in V$, $p \in W$, такие, что

$$F(u, w) \leq F(u, p) \leq F(v, p). \tag{7}$$

Здесь

$$F(v, w) = \frac{1}{2}(v, v) - \left(\frac{dv}{dx}, w\right) + (f, w), \quad v \in V, w \in W.$$

Поэтому и задачу (5) также иногда называют задачей с седловой точкой.

Введение в метод смешанных конечных элементов

Введем разбиение $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_M = 1$ отрезка $I = [0, 1]$ на подотрезки $I_{i-1} = (x_{i-1}, x_i)$ длины $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, M$. Пусть $h = \max_i h_i$. Введем конечно-элементные пространства для V и W: $V_h \subset V$ задает кусочно-линейные функции на I (непрерывные на I и линейные на каждом I_{i-1}), $W_h \subset W$ – кусочно-постоянные функции (постоянные на каждом I_{i-1}).

Метод смешанных конечных элементов

Тогда метод смешанных КЭ определяется так: найти $u_h \in V_h$, $p_h \in W_h$, такие, что

$$\left(u_h, v\right) - \left(\frac{dv}{dx}, p_h\right) = 0, \quad \forall\, v \in V_h, \tag{8}$$

$$\left(\frac{du_h}{dx}, w\right) = (f, w), \quad \forall\, w \in W_h \tag{9}$$

Можно показать, что у этой задачи существует единственное решение.

Введение в метод смешанных конечных элементов

Введем базисные (пробные) функции $\phi_i(x) \in V_h$ и $\xi_i(x) \in W_h$,

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, M;$$

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in I_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}, \qquad j = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Если использовать $v = \phi_i$ и $w = \psi_j$, (8) приведется к

$$(u_h, \phi_i) - \left(\frac{d\phi_i}{dx}, p_h\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M; \tag{10}$$

$$\left(\frac{du_h}{dx}, \psi_j\right) = (f, \psi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{11}$$

Введение в метод смешанных конечных элементов

После подстановки в (10)

$$u_h = \sum_{p=1}^{M} u_q \phi_q(x), \quad u_q = u(x_q)$$

$$p_h = \sum_{k=1}^{M-1} p_k \psi_q(x), \quad p_k = p_h|_{I_k}$$

получим

$$\sum_{p=1}^{M} (\phi_p, \phi_i) u_i + \sum_{k=1}^{M-1} -\left(\frac{d\phi_i}{dx}, \psi_k\right) p_k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M; \tag{12}$$

$$\sum_{p=1}^{M} \left(\frac{d\phi_p}{dx}, \psi_j\right) u_j = (f, \psi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{13}$$

Введение в метод смешанных конечных элементов

$$\sum_{p=1}^{M} (\phi_p, \phi_i) u_i + \sum_{k=1}^{M-1} -\left(\frac{d\phi_i}{dx}, \psi_k\right) p_k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M;$$

$$\sum_{p=1}^{M} -\left(\frac{d\phi_p}{dx}, \psi_j\right) u_j = -(f, \psi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Введем матрицы и векторы

$$\mathbf{A} = (a_{pi})_{p,i=1,2,\ldots,M}, \quad \mathbf{B} = (b_{ik})_{j=1,2,\ldots,M,\ k=1,2,\ldots,M-1},$$

$$\mathbf{U} = (u_i)_{i=1,2,\ldots,M}, \quad \mathbf{p} = (p_k)_{k=1,2,\ldots,M-1}, \quad \mathbf{f} = (f_j)_{j=1,2,\ldots,M-1}.$$

Введение в метод смешанных конечных элементов

Тогда система имеет следующий матричный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{f} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Можно показать, что

- матрица симметричная, но не является знакоопределенной;
- подматрица A – трехдиагональная, а B – двухдиагональная;
- подматрица A является положительно определенной;
- у матрицы имеется M положительных и $M-1$ отрицательных собств.значений.

Введение в метод смешанных конечных элементов

Для матрицы $\mathbf{A}$:

$$a_{i,j} = (\phi_i, \phi_j) = 0 \quad \text{if} |i-j| \geq 2;$$

$$a_{1,1} = \frac{h_2}{3}, \quad a_{M,M} = \frac{h_M}{3},$$

$$a_{i-1,i} = \frac{h_i}{6}, a_{i,i} = \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i-1}}{3}, a_{i,i+1} = \frac{h_{i+1}}{6} \; i = 2, 3, \ldots, M-1.$$

Для матрицы $\mathbf{B}$ ненулевыми являются элементы:

$$b_{jj} = 1, \quad b_{j+1,j} = -1, \quad j = 1, 2, \ldots, M-1$$

Введение в метод смешанных конечных элементов

Матрица $\mathbf{B}$ размера $M \times (M-1)$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Введение в метод смешанных конечных элементов

Матрица $\mathbf{A}$ размера $M \times M$ в случае равномерной сетки $h_i = h$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{A} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Введение в метод смешанных конечных элементов

Можно показать, что справедлива оценка ошибки:

$$||p - p_h|| + ||u - u_h|| \leq Ch. \tag{15}$$

Здесь в качестве нормы используется $||p||^2 = (p, p)_W, ||u||^2 = (u, u)_V$ из скалярного произведения W и V.
В случае достаточной гладкости ($u \in H^2(I)$) можно показать, что

$$||u - u_h|| \leq Ch^2. \tag{16}$$

Эквивалентность постановок (5) и (7)

Пусть (u, p) – решение (5). Выбрав произвольный $v \in V$, определим $\tau = v - u \in V$ и докажем одно из двух неравенств в (7) (второе доказывается аналогично):

$$
\begin{aligned}
F(v,p) &= F(u+\tau,p) = \frac{1}{2}(u+\tau,u+\tau) - \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\tau}{dx}, p\right) + (f,p) \\
&= \frac{1}{2}(u,u) - \left(\frac{du}{dx}, p\right) + (f,p) + (u,\tau) - \left(\frac{d\tau}{dx}, p\right) + \frac{1}{2}(\tau,\tau) \\
&= F(u,p) + \frac{1}{2}(\tau,\tau) \geq F(u,p).
\end{aligned}
$$

Эквивалентность постановок (5) и (7)

Пусть (u, p) – решение (7). Тогда из второго неравенства $F(u, p) \leq F(u + \varepsilon v, p)$ для некоторого $0 \neq v \in V$.
Определим функционал

$$G(\varepsilon) = F(u + \varepsilon v, p)$$
$$= \frac{1}{2}(u, u) + \varepsilon(v, v) + \frac{\varepsilon^2}{2}(v, v) - \left(\frac{du}{dx}, p\right) - \varepsilon\left(\frac{dv}{dx}, p\right) + (f, p).$$

Поскольку G имеет минимум в точке $\varepsilon = 0$, необходимо, чтобы $\frac{dG}{d\varepsilon}(0) = 0$. Поскольку

$$\frac{dG}{d\varepsilon}(0) = (u, v) - \left(\frac{dv}{dx}, p\right),$$

пара (u, v) удовлетворяет первому уравнению (5). Второе уравнение можно вывести аналогичным способом.