Метод прогонки

Одномерные задачи фильтрации приводятся к системе из N совместных алг. уравнений вида

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + b_1 u_2 &= d_1, \\ c_i u_{i-1} + a_i u_i + b_i u_{u+1} &= d_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ c_N u_{N-1} + a_N c_N &= d_N \end{aligned}$$

с известными коэф-тами a_i, b_i, c_i, d_i.

Такую систему уравнений можно записать в матричной форме

$$\mathbf{Au} = \mathbf{d}$$

где $\mathbf{A}$ — трехдиагональная матрица, $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_N]$, $\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_N]$.

Метод прогонки

Такую систему уравнений можно записать в матричной форме

$$\mathbf{Au} = \mathbf{d}$$

где $\mathbf{A}$ — трехдиагональная матрица, $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_N]$, $\mathbf{d} = [d_1, \ldots, d_N]$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & c_N & a_N \end{pmatrix}$$

Для ее решения существует эффективный алгоритм – метод прогонки (алгоритм Томаса).

Метод прогонки

- Трехдиагональные матрицы возникают в результате дискретизаций оператора Лапласа в 1D
- Существует упрощение метода Гаусса для таких матриц (вычислительная сложность метода Гаусса – $\mathcal{O}(n^3)$) – метод прогонки
- Если исходное ДУ линейное, коэф-ты вдоль каждой диагонали одинаковы
- Вычислительная сложность метода прогонки линейная $\mathcal{O}(n)$ — наиболее эффективный способ решения систем с такими матрицами

Метод Гаусса

Матричное разложение квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размера $n \times n$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$\mathbf{L}$ – нижнетреугольная ('Lower'), $\mathbf{U}$ – верхнетреугольная ('Upper').
Вычислительная сложность $\mathcal{O}(n^3)$ — при увеличении размера матрицы в 2 раза нужно затратить в 8 раз больше времени.

Метод Гаусса

Система

$$\mathbf{Au} = \mathbf{LUu} = \mathbf{d}$$

решается последовательно

$$\mathbf{Lv} = \mathbf{d}$$
$$\mathbf{Uu} = \mathbf{v}$$

приводя **A** к верхнетреугольному виду (прямой ход м.Гаусса), затем решая систему с верхнетреугольной матрицей (обратный ход м.Гаусса)

Метод последовательного исключения

Система с нижнетреугольной матрицей

$$\mathbf{Lv} = \mathbf{d}$$

решается последовательно 'сверху вниз', подставляя найденные компоненты $v_1, \ldots, v_{i-1}$ в уравнение $v_i, i = 2, \ldots, N$.
Аналогично, система с верхнетреугольной матрицей

$$\mathbf{Uu} = \mathbf{v}$$

решается последовательно 'снизу вверх', подставляя найденные компоненты $u_N, \ldots, u_{i+1}$ в уравнение $u_i, i = N-1, \ldots, 1$.

Алгоритм Томаса

Метод Гаусса для трехдиагональных матриц приводит к меньшему числу вычислений.
Разложение квадратной матрицы $\mathbf{A}$ на произведение нижне- и верхнетреугольной матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{WQ}$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & & & & \\ c_2 & w_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{N-1} & w_{N-1} & \\ & & & c_N & w_N \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & q_1 & & & \\ & 1 & q_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & q_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Алгоритм Томаса

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & c_N & a_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & & & & \\ c_2 & w_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{N-1} & w_{N-1} & \\ & & & c_N & w_N \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & q_1 & & & \\ & 1 & q_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & q_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Нижняя диагональ W состоит из тех же элементов, что и нижняя диагональ A, $w_1 = a_1$.
- Главная диагональ Q состоит из единиц.

Алгоритм Томаса

$$\mathbf{A} = \mathbf{WQ}$$

Приравнивая соотв. элементы ПЧ и ЛЧ, остается $2N - 1$ уравнений на неизвестные

$$w_1, w_2, \ldots, w_N$$

и

$$q_1, q_2, \ldots, q_{N-1}$$

Сами уравнения:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1; \\ q_{i-1} &= b_{i-1}/w_{i-1}, \\ w_i &= a_i - c_i q_{i-1}, i = 2, 3, \ldots, N. \end{aligned}$$

Каждую неизвестную можно найти последовательным исключением, сначала прямым ходом, затем обратным ходом м.Гаусса.

Алгоритм Томаса

Систему

$$\mathbf{WQu} = \mathbf{d}$$

представляем в виде двух систем уравнений

$$\mathbf{Wg} = \mathbf{d}$$
$$\mathbf{Qu} = \mathbf{g}$$

Найденное $\mathbf{g}$ из первой системы используется как вектор правой части для решения второй системы.

$\mathbf{Wg} = \mathbf{d}$

$$\begin{pmatrix} w_1 & & & & \\ c_2 & w_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{N-1} & w_{N-1} & \\ & & & c_N & w_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{N-1} \\ g_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}$$

Т.к. $\mathbf{W}$ нижнетреугольная и $w_1 = a_1$, первое уравнение $w_1 g_1 = d_1$ содержит одно неизвестное $g_1 = \frac{d_1}{w_1} = \frac{d_1}{a_1}$. Остальные уравнения можно решить прямым исключением неизвестных

$$\begin{aligned} w_i &= a_i - c_i q_{i-1} \\ g_i &= \frac{d_i - c_i g_{i-1}}{w_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, N \end{aligned}$$

$\mathbf{Qu} = \mathbf{g}$

$$\begin{pmatrix} 1 & q_1 & & & \\ & 1 & q_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & q_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{N-1} \\ g_N \end{pmatrix}$$

Т.к. $\mathbf{Q}$ нижнетреугольная, последнее уравнение содержит одно неизвестное $u_N = g_N$.
Остальные уравнения можно решить прямым исключением неизвестных

$$u_i = g_i - q_i g_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 1$$

Алгоритм Томаса

1. Полагаем

$$q_1 = \frac{b_1}{a_1}, g_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

2. Вычисляем для $i = 2, 3, \ldots, N$

$$w_i = a_i - c_i q_{i-1}$$
$$q_i = \frac{b_i}{w_i}$$
$$g_i = \frac{d_i - c_i g_{i-1}}{w_i}$$

3. Полагаем $u_N = g_N$
4. Вычисляем для $i = N-1, N-2, \ldots, 1$

$$u_i = g_i - q_i u_{i+1}$$

Условие корректной работы алгоритма

- При использовании алгоритма необходимо, чтобы

$$a_1 \neq 0$$
$$w_i = a_i - c_i q_{i-1} \neq 0$$

  Если условия не соблюдаются, можно использовать метод исключения неизвестных с выбором ведущего элемента.

- Если матрица с диагональным преобладанием по столбцам/строкам, то существует единственное решение, которое можно найти методом прогонки