# Корректно поставленные задачи

Перед тем, как решать задачу численно, необходимо убедиться в том, что решение задачи может быть таким образом получено.
Математическая задача поставлена корректно, если

- решение существует,
- единственно,
- оно непрерывно зависит от входных данных задачи.

Нужно ставить корректные граничные/начальные условия.

# Пример

Задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \quad \Omega = (0,1)^2$$

$$u(x,0) = x^2, \quad u(x,1) = x^2 - 1$$
$$u(0,y) = y^2, \quad u(1,y) = 1 - y^2$$

поставлена корректно. Существует единственное решение

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \text{ в } \quad \Omega$$

- решение не единственно, если нет одного из 4 ГУ
- решения не существует, если ГУ больше

# Еще пример

Уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f \text{ в } \quad \Omega = (0,1)^2$$

с ГУ Неймана

$$\mathrm{n} \cdot \nabla u = g \text{ на } \quad \Gamma$$

Из теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int_\Omega f\, d\mathrm{x} = -\int_\Omega \Delta u\, d\mathrm{x} = -\int_\Gamma \mathrm{n} \cdot \nabla u\, ds$$

# Проблема

- Задача Неймана не имеет решения, если

$$\int_{\Omega} f\, dx \neq -\int_{\Gamma} g\, ds$$

- Даже если условие выше выполнено и решение существует, оно не единственно ($u_2 = u + C, C \in \mathrm{R}$ также является решением, "решение определено с точностью до константы").
- Решение вопроса: либо нужны ГУ Дирихле на части границы $\Gamma_D \subseteq \Gamma, \Gamma_D \neq \emptyset$, либо нужно дополнительное ограничение (фиксируем свободную константу решения – среднее значение решения по области – нуль)

$$\int_{\Omega} u dx = 0$$

# Принцип максимума

- Физические свойства (примеры – концентрация, температура (в K) не может отрицательной)
- Математические свойства – верхние/нижние границы точного решения (принцип максимума, гарантии неотрицательности решения)
- Дискретизация – ограниченность численного решения (дискретный принцип максимума)

# Принцип максимума, пример

- Рассмотрим $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и задачу

$$f = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$$

- Необходимые условия для существования максимума внутри области:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \leq 0, \quad k = 1, \ldots, d$$

- Если $\Delta u = f > 0$ в $\Omega$, тогда $u$ достигает максимума только на границе $\Gamma$
- Если диапазон значений $u$ на $\Gamma$ известен до решения задачи (например, ГУ Дирихле $u|_\Gamma = g$), известны и границы решения во всей $\Omega$

# Принцип максимума для $\Delta u$

- Принцип максимума: $-\Delta u = f$ в $\Omega$

$$f \leq 0 \;\rightarrow\; \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\Gamma} u$$

- Принцип минимума: $-\Delta u = f$ в $\Omega$

$$f \geq 0 \;\rightarrow\; \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\Gamma} u$$

- Ограниченность: $\Delta u = 0$ в $\Omega$

$$\min_{\Gamma} u \leq u \leq \max_{\Gamma} u \quad \forall x \in \Omega$$

# Принцип максимума для $v \cdot \nabla u - \Delta u$

- Рассмотрим $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и задачу

$$\mathcal{L}u = v \cdot \nabla u - \Delta u \text{ в } \Omega$$

- Необходимые условия для существования максимума внутри области:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \leq 0, \quad k = 1, \ldots, d$$

- Если $\mathcal{L}u < 0$ в $\Omega$, тогда $u$ достигает максимума только на границе $\Gamma$