Закон Дарси (Дарси, 1856)

Эмпирический закон для скорости фильтрации $\mathbf{v}$ сквозь пористую среду

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\mu}\nabla u,$$

- K – проницаемость
- μ – вязкость
- $u = p + \rho g z$ – напор

Применяется для малых скоростей фильтрации ($Re \ll 1$). Для средних и высоких скоростей зависимость $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\nabla u)$ нелинейна (например, закон Форхгеймера – квадратичный).

Закон Дарси (Дарси, 1856)

Подставим скорость в условие несжимаемости:

$$\nabla \cdot \left(-\frac{K}{\mu} \nabla u \right) = 0.$$

Получили уравнение Лапласа (эллиптического типа) на неизвестную u. Необходимо дополнить его граничными условиями (например, условиями Дирихле).

Пусть область – интервал $\Omega = (0, L)$, $\frac{K}{\mu} = 1$. Эволюция во времени описывается параболическим уравнением с начальным и краевым условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f$$
$$u(x, 0) = u^0(x) \qquad\qquad + \text{к.у.}$$

Это "испытательный полигон" для различных численных методов решения в силу его простоты.

Полудискретизация

Производные по пространству и времени не связаны друг с другом, так что можно рассматривать дискретизации по x и t по отдельности.
Получаем систему ОДУ с начальными условиями (*полудискретизация*):

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{du_i}{dt} + f_i, i = 1, \dots, N$$
$$u_i(0) = u^0(x_i)$$

Аппроксимация производной по времени

- Разность вперед $\left(\frac{du_i}{dt}\right)^n \approx \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}$
  После подстановки получим систему уравнений
  $$\frac{\tau}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = u_i^{n+1} - u_i^n + f_i^n\tau, i = 1, \dots, N$$
  Единственная неизвестная – u_i^{n+1}, можно ее *явно* определить – **явный** метод.
- Разность назад $\left(\frac{du_i}{dt}\right)^{n+1} \approx \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}$
  Подставим выражение в уравнение на слое $n+1$
  $$\frac{\tau}{h^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = u_i^{n+1} - u_i^n + f_i^{n+1}\tau, i = 1, \dots, N$$
  Все u_i^{n+1} неизвестны и связаны между собой в уравнении, нужно решать N уравнений одновременно – **неявный** метод.

Аппроксимация производной по времени

- **метод Кранка-Николсон.**
  Аппроксимация методом Кранка-Николсон для полудискретизации $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,t)$ – на слое $n+1/2$ с линейной интерполяцией F и центральной разностью по времени:

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = F(u^{n+1/2}, t^{n+1/2}) = F^{n+1/2} \approx \frac{F^{n+1}+F^n}{2}$$

Например, для рассмотренной задачи

$$\frac{\tau}{2h^2}\left[\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) + \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\right] = u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\tau}{2}\left(f_i^{n+1} + f_i^n\right)$$

Типы сеток

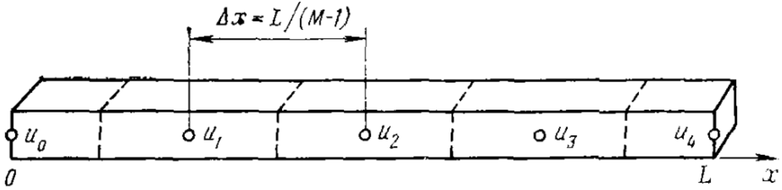


Рис.: Неизвестные введены в узлах равномерной сетки (сетка центрированна в узлах)

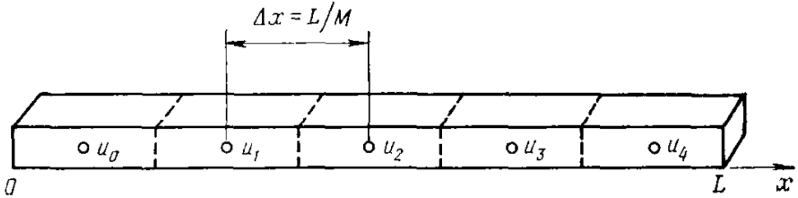


Рис.: Область разбита на непересекающиеся блоки одинаковых размеров (конечные объемы), неизвестные введены в центрах блоков (блочно-центрированная сетка)

Граничные условия

Для параболического уравнения с заданным начальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ в } \Omega = (0, L)$$
$$u(x, 0) = u^0(x)$$

возможны различные граничные условия (в $x = 0$)[1]:

- Дирихле (1$^{\text{ого}}$ рода) — $u(0, t) = g_1(t)$
- Неймана (2$^{\text{ого}}$ рода) — $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g_2(t)$
- Робина (3$^{\text{его}}$ рода) — $\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x}\right)(0, t) = g_3(t)$
- периодические (4$^{\text{ого}}$ рода) — $u(0, t) = u(L, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$

Дискретное представление ГУ зависит от расположения неизвестных, поэтому оно различается для приведенных ранее типов сеток.

[1] в $x = L$ аналогично

Матричная форма уравнений

$$-Tu = B\frac{du}{dt} + Q,$$

T – трехдиагональная матрица с полож. диаг. элементами,
B – диагональная матрица с полож.элементами.
Например, при использовании сетки с распр.узлами и гран. условиях $U(L,t) = u_{N+1} = u_L$ и $\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = g$:

$$T = \begin{bmatrix} T_{3/2} & -T_{3/2} & & & & \\ -T_{3/2} & T_{3/2}+T_{5/2} & -T_{5/2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -T_{i-1/2} & T_{i-1/2}+T_{i+1/2} & -T_{i+1/2} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -T_{N-1/2} & T_{N-1/2}+T_{N+1/2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 + g \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_N + T_{N+1/2}u_L \end{bmatrix}$$

Матричная форма уравнений

$$T = \begin{bmatrix} T_{3/2} & -T_{3/2} & & & & & \\ -T_{3/2} & T_{3/2}+T_{5/2} & -T_{5/2} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -T_{i-1/2} & T_{i-1/2}+T_{i+1/2} & -T_{i+1/2} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -T_{N-1/2} & T_{N-1/2}+T_{N+1/2} \end{bmatrix}$$

- Для каждой строки T диаг. эл-т равен сумме абс. значений внедиагональных (кроме последней с ГУ Дирихле)
- T – матрица с диагональным преобладанием и нулевой суммой в строке для ГУ Неймана (если они имеются)
- T – положительно определенная матрица, если есть хотя бы одно ГУ Дирихле

Существование дискретных решений

- неявный метод

$$-Tu^{n+1} = \frac{B}{\tau}(u^{n+1} - u^n) + Q^{n+1}$$

$$\left(T + \frac{B}{\tau}\right) u^{n+1} = \frac{B}{\tau} u^n - Q^{n+1}$$

  Элементы B положительны $\rightarrow$ $T + \frac{B}{\tau}$ – матрица со *строгим* диагональным преобладанием $\rightarrow$ является полож.определенной $\rightarrow$ система имеет единственное решение

- метод Кранка-Николсон

$$-\frac{1}{2}\left(Tu^{n+1} + Tu^n\right) = \frac{B}{\tau}(u^{n+1} - u^n) + \frac{1}{2}\left(Q^{n+1} + Q^n\right)$$

  Те же аргументы для матрицы $\frac{1}{2}T + \frac{B}{\tau}$ $\rightarrow$ система имеет единственное решение

Течение слабосжимаемой жидкости

Рассмотрим уравнение однофазной фильтрации на отрезке

$$AU \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,U)\frac{\partial U}{\partial x}\right] - c(x,U)\frac{\partial U}{\partial t} - q(x,t),$$

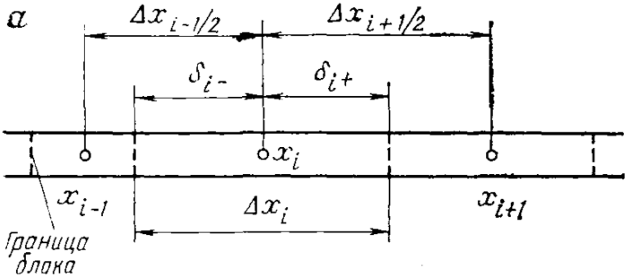
где $\lambda(x,U) = \frac{k(x)}{B(U)\mu(U)}$, $c(x,U) = \frac{\phi(x)c_f}{B_0} + \frac{\phi^0 c_R}{B(U)}$

- U – давление жидкости, $\phi(x,U) = \phi^0(x) + c_R(U - U^0)$ – пористость породы, линейно зависящая от давления
- $k(x)$ – проницаемость породы, $B(U) = B_0 + c_f(U - U^0)$ – сжимаемость породы, $\mu(U)$ – вязкость жидкости
- $q(x,t)$ – интенсивность источника (например, закачка из скважины), $\lambda(x,U)$ – коэф-т проводимости

Особенности:

- представление нелинейных коэф-тов λ, c
- использование неравномерной сетки (больше узлов/блоков в зонах с большими перепадами U)

Блочно-центрированная сетка

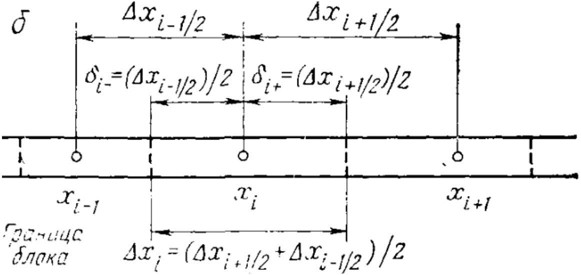


- Сначала выбираю размер блоков Δx_i
- Затем размещаю узлы в центрах блоков

$$\delta_{i-} = \delta_{i+} = \Delta x_i / 2$$

$$\Delta x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$$

Сетка с распределенными узлами

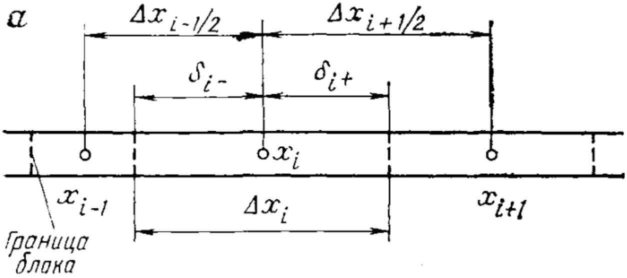


- Сначала выбираю расположение узлов x_i, $\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$
- Затем устанавливаю границы блоков в середине отрезков, соединяющий два узла-соседа

$$\delta_{i+} = \delta_{i+1,-} = \Delta x_{i+1/2}/2,$$
$$\delta_{i-} = \delta_{i-1,+} = \Delta x_{i-1/2}/2,$$

Размер блоков $\Delta x_i = \frac{1}{2}(\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}) = \delta_{i+} + \delta_{i-}$

Блочно-центрированная сетка

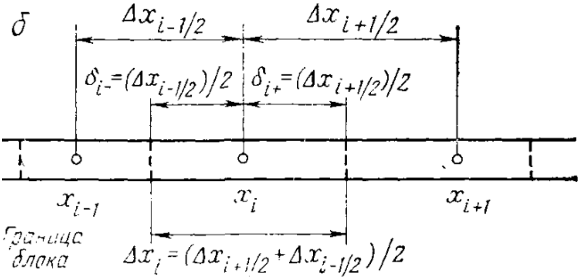


Конечно-разностная аппроксимация

$$L_1 u_i = \frac{1}{\Delta x_i}\left[\lambda_{i+1/2}\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \lambda_{i-1/2}\frac{u_{i-1} - u_i}{\Delta x_{i-1/2}}\right]$$

Необходимо определить межблочные проводимости $\lambda_{i\pm1/2}$

Сетка с распределенными узлами



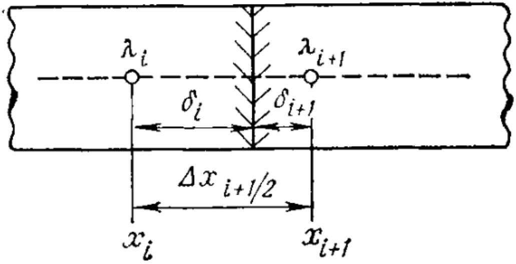
Конечно-разностная аппроксимация

$$L_2 u_i = \frac{2}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} \left[\lambda_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \lambda_{i-1/2} \frac{u_{i-1} - u_i}{\Delta x_{i-1/2}} \right]$$

Необходимо определить межблочные проводимости $\lambda_{i\pm1/2}$

Учет переменных коэффициентов (вертикальный разрыв)

Допустим, что λ кусочно-постоянна с поверхностью раздела между точками i, $i+1$ (необязательно совпадает с границей блока).

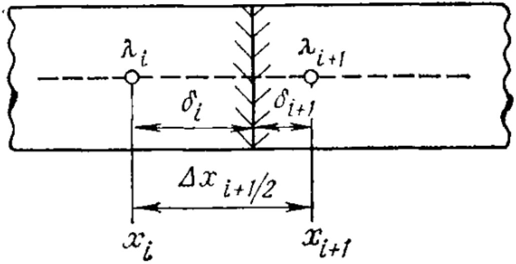


Расход между узлами

$$-q = A\frac{p_{int} - p_i}{\delta_i}\lambda_i = A\frac{p_{i+1} - p_{int}}{\delta_{i+1}}\lambda_{i+1},$$

Учет переменных коэффициентов (вертикальный разрыв)

Определим среднюю проводимость, дающую то же значение расхода между узлами



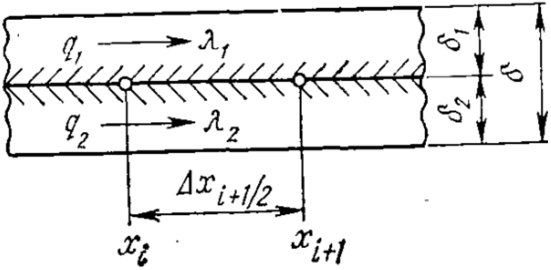
$$-q = A\frac{p_{i+1} - p_i}{\delta_{i+1/2}}\lambda_{i+1/2}$$

Отсюда $\lambda_{i+1/2}$ – *среднее гармоническое* значений λ_i, λ_{i+1}:

$$\boxed{\lambda_{i+1/2} = \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\frac{\delta_{i+1}}{\lambda_{i+1}} + \frac{\delta_i}{\lambda_i}}}$$

Учет переменных коэффициентов (горизонтальный разрыв)

Рассмотрим случай, когда в пласте содержится два слоя различной проводимости.

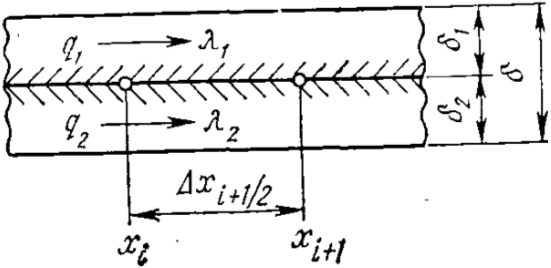


Общий расход между узлами

$$-q = -(q_1 + q_2) = A\frac{\delta_1}{\delta}\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x_{i+1/2}}\lambda_1 + A\frac{\delta_2}{\delta}\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x_{i+1/2}}\lambda_2$$

Учет переменных коэффициентов (горизонтальный разрыв)

Определим среднюю проводимость, дающую суммарное значение расхода $-q$



$$-q = A\frac{p_{i+1} - p_i}{\delta_{i+1/2}}\lambda_{i+1/2}$$

Отсюда $\lambda_{i+1/2}$ – *среднее арифметическое* значений λ_i, λ_{i+1}:

$$\boxed{\lambda_{i+1/2} = \frac{\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2}{\delta_1 + \delta_2}}$$

Учет переменных коэффициентов

Значения c_i, q_i следует выбирать путем осреднения

$$c_i V_i = \int\limits_{\Delta x_i} Ac(x)dx, \quad q_i V_i = \int\limits_{\Delta x_i} Aq(x)dx$$

- Обычно источниками являются добывающие / нагнетательные скважины, которые часто аппроксимируют точечными источниками $q_i(x) = \delta(x - x_0)$, δ — функция Дирака.
- В случае, когда перфорация скважины расположена полностью внутри блока, общая интенсивность источника $Q_i = q_i V_i$ *не зависит от расположения перфорации внутри блока*.

Учет нелинейностей

Система уравнений для полудискретизации – коэф-ты T зависят от самого решения u:

$$T_{i+1/2}(x_i, x_{i+1}, u_i, u_{i+1})(u_{i+1} - u_i) + T_{i-1/2}(x_i, x_{i-1}, u_i, u_{i-1})(u_{i-1} - u_i)$$
$$= V_i c_i(x_i, u_i)\frac{du_i}{dt} + V_i q_i, i = 1, \ldots, N$$

Система нелинейных уравнений имеет матричный вид

$$-T(u)u = B(u)\frac{du}{dt} + q$$

Нелинейные алгебраические уравнения, получаемые при аппроксимации $\frac{du}{dt}$, можно решать итерационно или линеаризовать.

Явная аппроксимация по времени

$$-T(u^n)u^n = \frac{1}{\tau}B(u^{n+1})(u^{n+1} - u^n) + Q$$

- нелинейность только в матрице B
- N скалярных нелинейных уравнений вида $u_i^{n+1} = f(u_i^{n+1})$
- возможный метод решения — итерации

$$u_i^{(\nu)} = f(u_i^{(\nu-1)}), \nu = 1, \dots$$
$$u_i^{(0)} = u_i^n$$

до достижения сходимости — например

$$\left| \frac{u_i^{(\nu+1)} - u_i^{(\nu)}}{u_i^{(\nu+1)}} \right| < \varepsilon$$

Неявные аппроксимации по времени

Рассмотрим аппроксимацию разностью назад

$$-T(u^{n+1})u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B(u^{n+1})(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Некоторые подходы

- решение возникающих системы нелинейных уравнений итерационными методами
- замена системы нелинейных уравнений системой линейных уравнений методами линеаризации

Итерационные методы решения нелинейных уравнений

$$-T(u^{n+1})u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B(u^{n+1})(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Простая итерация:

$$\left(T^{(\nu-1)} + \frac{1}{\tau}B^{(\nu-1)}\right)u^{(\nu)} = \frac{1}{\tau}B^{(\nu-1)}u^n - Q$$

$$u^{(0)} = u^n$$

Каждая итерация требует решения линейной системы соответствующей линейной задачи.

Итерационные методы решения нелинейных уравнений

$$\overbrace{-(T^{n+1}+\frac{1}{\tau}B^{n+1})u^{n+1}-\frac{1}{\tau}B(u^{n+1})u^{n}+Q}^{f(u^{n+1})=f^{n+1}}=0$$

Метод Ньютона:

$$u^{(\nu)}-u^{(\nu-1)}=-\left[F^{(\nu-1)}\right]^{-1}f^{(\nu-1)},\quad \nu=1,\dots,$$

$$F^{(\nu)}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)^{(\nu)}$$

Каждая $\nu^{\text{ая}}$ итерация требует решения линейной системы с новой матрицей $F^{(\nu)}$ (*матрицей Якоби*).

Итерационные методы решения нелинейных уравнений

$$\overbrace{-(T^{n+1} + \frac{1}{\tau}B^{n+1})u^{n+1} - \frac{1}{\tau}B(u^{n+1})u^n + Q}^{f(u^{n+1})=f^{n+1}} = 0$$

Метод Ньютона:

$$\begin{aligned} F^{(\nu-1)}\delta^{(\nu)} &= -f^{(\nu-1)}, \\ u^{(\nu)} &= u^{(\nu-1)} + \delta^{(\nu)}, \nu = 1, \dots; \\ u^{(0)} &= u^n \end{aligned}$$

Каждая $\nu^{\text{ая}}$ итерация требует решения линейной системы с новой матрицей $F^{(\nu)}$ (*матрицей Якоби*).

Линеаризация системы нелинейных уравнений

$$-T^{n+1}u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B^{n+1}(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Простая итерация — сдвинуть нелинейность в коэф-тах T, B со слоя $n+1$ на n, $T^{n+1} \approx T^n, B^{n+1} \approx B^n$:

$$-T^n u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B^n(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Порядок аппроксимации понижается до $\mathcal{O}(\tau)$.

Линеаризация системы нелинейных уравнений

$$-T^{n+1}u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B^{n+1}(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Линейная экстраполяция:

$$u(t^{n+1}) \approx \hat{u}^{n+1} = u^n + \frac{\tau^n}{\tau^{n-1}}(u^n - u^{n-1})$$
$$T^{n+1} \approx T(\hat{u}^{n+1}), B^{n+1} \approx B(\hat{u}^{n+1})$$

- возможна экстраполяция высокого порядка, но повышаются требования к памяти — нужно хранить больше векторов на предыдущих слоях по времени
- $\hat{u}^{n+1}$ — аппроксимация $2^{\text{ого}}$ порядка, поэтому методы второго порядка сохраняют свой порядок при использовании $T(\hat{u}^{n+1}), B(\hat{u}^{n+1})$

Линеаризация системы нелинейных уравнений

$$-T^{n+1}u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B^{n+1}(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Полунеявный метод

Рассмотрим слагаемое $T_{i+1/2}(u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1})(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})$.
Разложим в ряд Тейлора и оставим только слагаемые низшего порядка

$$T_{i+1/2}^{n+1} = T_{i+1/2}^{n} + \left(\frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n) + \left(\frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}}\right)^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n)$$

Подставим и получим нелинейные слагаемые, подлежащие линеаризации

$$\left(\frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n)(u_{i+1} - u_i)^{n+1} \approx$$
$$\left(\frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n)(u_{i+1} - u_i)^{n}$$

Линеаризация системы нелинейных уравнений

$$-T^{n+1}u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B^{n+1}(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Полунеявный метод
Слагаемое линеаризовано,

$$\begin{aligned}
T^{n+1}_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i)^{n+1} \approx T^{n}_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i)^{n+1} + \\
+ \left[\left(\frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_{i+1} - u_i)^n\right](u_i^{n+1} - u_i^n) + \\
+ \left[\left(\frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}}\right)^n (u_{i+1} - u_i)^n\right](u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) +
\end{aligned}$$

поскольку коэф-ты при u^{n+1} зависят только от решения на предыдущем слое u^n.

Линеаризация системы нелинейных уравнений

$$-T^{n+1}u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B^{n+1}(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Полунеявный метод
Линеаризация для слагаемого
$B^{n+1}_{i+1/2}(u_i^{n+1} - u_i^n) \approx B^{n}_{i+1/2}(u_i^{n+1} - u_i^n)$, поскольку при подстановке разложения

$$B^{n+1}_{i+1/2} = B^{n}_{i+1/2} + \left(\frac{\partial B_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n) + \left(\frac{\partial B_{i+1/2}}{\partial u_{i+1}}\right)^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n)$$

получим , что нелинейные слагаемые, подлежащие линеаризации, приближенно равны нулю

$$\left(\frac{\partial B_{i+1/2}}{\partial u_i}\right)^n (u_i^{n+1} - u_i^n)(u_i^{n+1} - u_i^n) \approx 0$$

Линеаризация системы нелинейных уравнений

$$-T^{n+1}u^{n+1} = \frac{1}{\tau}B^{n+1}(u^{n+1} - u^n) + Q$$

Полунеявный метод
Линеаризованная система

$$\left[T + \frac{1}{\tau}B + T'\right]^n (u^{n+1} - u^n) = T^n u^n - Q$$

соответствует матрице первой итерации метода Ньютона. Такой метод линеаризации иногда называют *методом Пикара*.