



## 程序说明文档

### 一、程序目录

1. main.m	程序主入口
2. LU.m	LU分解函数
3. QR.m	QR分解函数
4. Householder.m	Householder分解函数
5. Givens.m	Givens分解函数
6. URV.m	URV分解函数

### 二、程序说明及测试

#### 2.1 LU分解

##### 2.1.1 实现思想

判断矩阵A是否满足分解条件：

- A为方阵且主元不为0
- A的顺序主子式都非奇异

若矩阵A存在LU分解，经过Gauss行消减为上三角行列式，该上三角行列式为U；Type III消减过程中系数的相反数即L对应位置的元素。

##### 2.1.2 计算行列式

L为下三角矩阵、U为上三角矩阵

$$\det(A) = \det(L) * \det(U)$$

其中,  $\det(L) = \prod_{i=1}^n L_{ii}$ ,  $\det(U) = \prod_{i=1}^n U_{ii}$

##### 2.1.3 计算Ax=b

$A_{n \times n}$ ,  $b$ 为n维列向量, 有 $A = LU$ , 则 $LUx = b \rightarrow Ux = y \rightarrow Ly = b \rightarrow y$ , 利用 $Ux = y$ 回代法即可得到x.

##### 2.1.4 程序测试

测试一：

对于非方阵[1 2;3 4;5 6], 测试结果如下：

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [1 2;3 4;5 6]
2. 请输入矩阵分解参数 (如LU): LU
A is not a square matrix, please try again!
```

测试二:

对于存在奇异顺序主子式的矩阵[1 2;1 2], 测试结果如下:

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [1 2;1 2]
2. 请输入矩阵分解参数 (如LU): LU
A can not be decomposed, please try again!
```

测试三:

对于符合分解条件的矩阵[1 2 4;3 7 2;2 3 3], 测试结果如下:

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [1 2 4;3 7 2;2 3 3] 输出矩阵A
2. 请输入矩阵分解参数 (如LU): LU 输入矩阵分解参数
matrix L=
    1     0     0
    3     1     0  输出分解后的矩阵L
    2    -1     1

matrix U=
    1     2     4
    0     1    -10  输出分解后的矩阵U
    0     0    -15

det(A)=
   -15  输出A的行列式

Calculate the solution of Ax=b?(yes/no)yes 输入是否计算Ax = b
please enter the vetor b:[1 2 3]' 输入向量b
Ax=b solution x=
    3
   -1  输出Ax=b的结果x
    0
```

## 2.2 QR分解 (Gram-Schmidt)

### 2.2.1 实现思想

判断矩阵A是否满足分解条件:

- A的列线性无关

若A满足分解条件, 用Gram-Schmidt将其分解为Q矩阵和R矩阵。

### 2.2.2 计算行列式

Q为正交矩阵, R为上三角矩阵

$$\det(A) = \det(Q) * \det(R)$$

其中,  $\det(L) = 1$  or  $-1$ ,  $\det(R) = \prod_{i=1}^n R_{ii}$

### 2.2.3 计算 $Ax=b$

$A_{m \times n}$ ,  $b$ 为 $n$ 维列向量, 有 $A = QR$ , 则 $QRx = b \xrightarrow{R \text{ 为正交矩阵}} Rx = Q^T b$ ,  $R$ 为上三角矩阵.用回代法即可求得 $x$ .

### 2.2.4 程序测试

测试一:

对于列线性相关矩阵[1 2 1;2 4 7;3 6 12], 测试结果如下:

```
>> main
```

1. 请输入即将分解的矩阵A: [1 2 1;2 4 7;3 6 12]

2. 请输入矩阵分解参数 (如LU): QR

A with liner independent columns can not be decomposed as A = QR, please try again!

测试二:

对于符合分解条件的矩阵[1 19 -34;-2 -5 20;2 8 37], 测试结果如下:

![image-20211126153211508](C:\Users\dell\AppData\Roaming\Typora\typora-user-images\image-

```
>> main
```

1. 请输入即将分解的矩阵A: [1 19 -34;-2 -5 20;2 8 37] 输入矩阵

2. 请输入矩阵分解参数 (如LU): QR 输入分解参数

```
matrix Q=
```

```
0.3333    0.9333   -0.1333
-0.6667    0.3333    0.6667
0.6667   -0.1333    0.7333
```

输出Q

```
matrix R=
```

```
3.0000   15.0000    0
0   15.0000  -30.0000
0    0   45.0000
```

输出R

20211126153211508.png

```
det(A)=
```

```
2025
```

输出A行列式

Calculate the solution of  $Ax=b$ ? (yes/no) yes 输入是否计算  $Ax = b$

please enter the vetor b:[1 2 3]' 输入列向量矩阵 b

```
Ax=b solution x=
```

```
-0.8222
0.2311
0.0756
```

输出结果 x

## 2.3 Householder分解

### 2.3.1 实现思想

对于任意矩阵A, 计算投影投影矩阵

$$u = x - \mu \|x\| e_1$$

$$R = I - 2 \frac{uu^T}{u^T u}$$

经过 $n$ 次投影后的矩阵即为 $R$ ,  $Q = (R_1 R_2 \dots R_n)^T$

### 2.3.2 计算行列式

若A为n阶方阵，Q为正交矩阵，R为上三角矩阵

$$\det(A) = \det(Q) * \det(R)$$

其中,  $\det(L) = 1 \text{ or } -1$ ,  $\det(R) = \prod_{i=1}^n R_{ii}$

### 2.3.3 计算Ax=b

$A_{m \times n}$ ,  $b$ 为n维列向量, 有 $A = QR$ , 则 $QRx = b \rightarrow R$ 为正交矩阵 $\rightarrow Rx = Q^T b$ , R为上三角矩阵.用回代法即可求得x.

### 2.3.4 程序测试

测试一:

对于任意矩阵[1 19 -34;-2 -5 20;2 8 37], 测试结果如下:

```
>> main                                     输入任意矩阵A
1. 请输入即将分解的矩阵A: [1 19 -34;-2 -5 20;2 8 37]
2. 请输入矩阵分解参数 (如LU):Householder 输入参数Householder
matrix Q=
    0.3333    0.9333   -0.1333
   -0.6667    0.3333    0.6667  输出矩阵Q
    0.6667   -0.1333    0.7333

matrix R=
    3.0000   15.0000         0
    0.0000   15.0000  -30.0000  输出矩阵R
   -0.0000   -0.0000   45.0000

det(A)=
    2.0250e+03  输出A的行列式

Calculate the solution of Ax=b?(yes/no)yes  是否计算Ax=b
please enter the vetor b:[1 2 3]'  输入向量b
Ax=b solution x=
   -0.8222
    0.2311  输出结果x
    0.0756
```

测试二:

对于任意非方阵的矩阵[4 -3 4;2 -14 3;-2 14 0;1 -7 15], 测试结果如下:

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [4 -3 4;2 -14 3;-2 14 0;1 -7 15]
2. 请输入矩阵分解参数(如LU):Householder
matrix Q=
    0.8000    0.6000         0    0.0000
    0.4000   -0.5333   -0.1225   -0.7352
   -0.4000    0.5333    0.3431   -0.6617
    0.2000   -0.2667    0.9313    0.1470

matrix R=
    5.0000  -15.0000    7.4000
   -0.0000   15.0000   -3.2000
    0.0000    0.0000   13.6015
    0.0000    0.0000    0.0000

A is not square matrix,we can not calculate det(A)
Calculate the solution of Ax=b?(yes/no)yes
please enter the vetor b:[1 2 3 4]'
Ax=b solution x=
   -0.0252
    0.0752
    0.3315
```

有唯一解

测试三:

对于任意非方阵的矩阵[4 -3 4;2 -14 3], 测试结果如下:

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [4 -3 4;2 -14 3]
2. 请输入矩阵分解参数(如LU):Householder
matrix Q=
    0.8944    0.4472
    0.4472   -0.8944

matrix R=
    4.4721   -8.9443    4.9193
    0.0000   11.1803   -0.8944

A is not square matrix,we can not calculate det(A)
Calculate the solution of Ax=b?(yes/no)yes
please enter the vetor b:[1 2]'
特解为:
    0.1600
   -0.1200
         0

通解为:
   -0.9400
    0.0800
    1.0000
```

无穷多解

## 2.4 Givens分解

### 2.4.1 实现思想

对于任意矩阵A，计算旋转矩阵

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}, s = \frac{x_k}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}$$
$$P_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c & \dots & s & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -s & \dots & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

经过n次变换后的矩阵即为R,  $Q = (P_{i1}P_{i2}\dots P_{in})^T$ .

### 2.4.2 计算行列式

若A为n阶方阵, Q为正交矩阵, R为上三角矩阵

$$\det(A) = \det(Q) * \det(R)$$

其中,  $\det(L) = 1$  or  $-1$ ,  $\det(R) = \prod_{i=1}^n R_{ii}$

### 2.4.3 计算Ax=b

$A_{m \times n}$ ,  $b$ 为n维列向量, 有 $A = QR$ , 则 $QRx = b \rightarrow R$ 为正交矩阵 $\rightarrow Rx = Q^T b$ , R为上三角矩阵.用回代法即可求得x.

### 2.4.4 程序测试

测试一:

对于任意矩阵[1 19 -34;-2 -5 20;2 8 37], 测试结果如下:

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [1 19 -34;-2 -5 20;2 8 37]
2. 请输入矩阵分解参数 (如LU): Givens
matrix Q=
    0.3333    0.9333   -0.1333
   -0.6667    0.3333    0.6667
    0.6667   -0.1333    0.7333

matrix R=
    3.0000   15.0000   -0.0000
     0      15.0000  -30.0000
     0         0    45.0000

det(A)=
    2.0250e+03    输出方阵A的行列式

Calculate the solution of Ax=b?(yes/no)yes
please enter the vetor b:[1 2 3]'
Ax=b solution x=
   -0.8222    输出Ax=b的唯一解
    0.2311
    0.0756
```

测试二:

对于任意非方阵的矩阵[4 -3 4;2 -14 3;-2 14 0;1 -7 15]，测试结果如下：

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [4 -3 4;2 -14 3;-2 14 0;1 -7 15]
2. 请输入矩阵分解参数 (如LU):Givens
matrix Q=
    0.8000    0.6000         0    0.0000
    0.4000   -0.5333   -0.7071   -0.2357
   -0.4000    0.5333   -0.7071    0.2357
    0.2000   -0.2667         0    0.9428

matrix R=
    5.0000  -15.0000    7.4000
    0.0000   15.0000   -3.2000
         0    0.0000   -2.1213
   -0.0000   -0.0000   13.4350
```

非方阵无法计算行列式

```
A is not square matrix,we can not calculate det(A)
Calculate the solution of Ax=b?(yes/no)yes
please enter the vetor b:[1 2 3 4]'
Ax=b solution x=
   -1.1467
    0.3600
    1.6667
```

唯一解

```
>>
```

测试三：

对于任意非方阵的矩阵[4 -3 4;2 -14 3]，测试结果如下：

```
>> main
1. 请输入即将分解的矩阵A: [4 -3 4;2 -14 3]
2. 请输入矩阵分解参数 (如LU):Givens
matrix Q=
    0.8944   -0.4472
    0.4472    0.8944

matrix R=
    4.4721   -8.9443    4.9193
         0  -11.1803    0.8944

A is not square matrix,we can not calculate det(A)
Calculate the solution of Ax=b?(yes/no)yes
please enter the vetor b:[1 2]';
特解为:
    0.1600
   -0.1200
         0
```

无穷多解

```
通解为:
   -0.9400
    0.0800
    1.0000
```

## 2.5 URV分解

### 2.4.1 实现思想

$U$ 的前 $r$ 列是 $R(A)$ 的一组标准正交基;

$U$ 的后 $m - r$ 列是 $N(A^T)$ 的一组标准正交基;

$V$ 的前 $r$ 列是 $R(A^T)$ 的一组标准正交基;

$V$ 的后 $n - r$ 列是 $N(A)$ 的一组标准正交基;

### 2.4.2 计算行列式

若 $A$ 为 $n$ 阶方阵,  $Q$ 为正交矩阵,  $R$ 为上三角矩阵

$$\det(A) = \det(Q) * \det(R)$$

其中,  $\det(L) = 1$  or  $-1$ ,  $\det(R) = \prod_{i=1}^n R_{ii}$

### 2.4.3 计算 $Ax=b$

$$A = URV^T, x = A^{-1}b,$$

其中,  $A$ 的Moore-Penrose伪逆

$$A^{-1} = V \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$$

### 2.4.4 程序测试

测试一:

对于任意矩阵 $[-4 -2 4 2; 2 -2 -2 -1; -4 1 4 2]$ , 测试结果如下:

```
>> main
```

1. 请输入即将分解的矩阵A:  $[-4 -2 4 2; 2 -2 -2 -1; -4 1 4 2]$

2. 请输入矩阵分解参数 (如LU) URV

```
matrix U=
```

```
0.6667  -0.6667  -0.3333
-0.3333  -0.6667   0.6667
0.6667   0.3333   0.6667
```

输出U

```
matrix R=
```

```
9.0000  -0.0000   0.0000   0
-0.0000   3.0000  -0.0000  -0.0000
-0.0000  -0.0000   0.0000   0
```

输出R

```
matrix V=
```

```
-0.6667  -0.0000  -0.7454  -0.0000
-0.0000   1.0000  -0.0000  -0.0000
0.6667  -0.0000  -0.5963  -0.4472
0.3333  -0.0000  -0.2981   0.8944
```

输出V

```
A is not square matrix, we can not calculate det(A)
```

A不是方阵, 没有行列式



Calculate the solution of  $Ax=b$ ?(yes/no)yes

please enter the vetor b:[1 2 3]'

Moore-Penrose Pseudoinverse of A=

-0.0494	0.0247	-0.0494
-0.2222	-0.2222	0.1111
0.0494	-0.0247	0.0494
0.0247	-0.0123	0.0247

输出A的伪逆

$Ax=b$  solution x=

-0.1481
-0.3333
0.1481
0.0741

输出 $Ax=b$ 的解