Oppgave R6.5

D)

For å finne derivatet av funksjonen $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$, bruker vi reglen for derivasjon av potenser på hvert ledd:

1. Derivert av $4x^3$ er $12x^2$.
2. Derivert av $-5x^2$ er $-10x$.
3. Derivert av $6x$ er 6.
4. Derivert av -7 er 0 (siden derivert av en konstant er 0).

Så derivatet av $f(x)$ er:

$f'(x) = 12x^2 - 10x + 6$.

Oppgave R6.7

B)

For å finne derivatet av funksjonen $f(x) = 5 + 9x - 7x^2$, bruker vi reglen for derivasjon av potenser på hvert ledd.

1. Derivert av 5 (en konstant) er 0.
2. Derivert av $9x$ er 9.
3. Derivert av $-7x^2$ er $2 * (-7) * x = -14x$.

Derfor er derivatet av $f(x)$:

$f'(x) = 9 - 14x$.

D)

For å finne derivatet av funksjonen $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$, bruker vi reglen for derivasjon av potenser på hvert ledd:

1. Derivert av $3x^2$ er $6x$.
2. Derivert av $-8x$ er -8.
3. Derivert av 4 (en konstant) er 0.

Derfor er derivatet av $f(x)$:

$f'(x) = 6x - 8$.

Oppgave R6.13

Gitt høydefunksjonen $h(t) = 0.80 + 0.065t^2 - 0.0015t^3$, hvor t er antall år treet har levd, og $t \in [0, 25]$:

A) Hvor høyt er treet etter 15 år?
Dette kan finnes ved å sette inn $t = 15$ i høydeformelen $h(t)$.

B) Hvor stor er den momentane veksthastigheten etter 15 år?
Dette kan finnes ved å beregne den deriverte av $h(t)$, kalt $h'(t)$, og deretter evaluere den for $t = 15$.

For del A setter vi $t = 15$ inn i høydeformelen:
$h(15) = 0.80 + 0.065(15)^2 - 0.0015(15)^3$

For del B beregner vi først den deriverte av $h(t)$:
$h'(t) = 2(0.065)t - 3(0.0015)t^2 = 0.13t - 0.0045t^2$

Deretter setter vi inn $t = 15$ i $h'(t)$:
$h'(15) = 0.13(15) - 0.0045(15)^2$

Svarene er som følger:

A:
Høyden på treet etter 15 år er omtrent 10,36 meter.

B:
Den momentane veksthastigheten til treet etter 15 år er omtrent 0,94 meter per år.

R6.15

D)

Den deriverte hjelper oss med å identifisere kritiske punkter hvor stigningstallet er null (potensielle maksimums- eller minimumspunkter). Den deriverte av funksjonen er:

$f'(x) = d/dx\ [(1/3)x^3 + (1/2)x^2 - 2x] = x^2 + x - 2$

2. Sett $f'(x) = 0$ for å finne kritiske punkter:
For å finne de kritiske punktene, setter vi den deriverte lik null og løser:

$x^2 + x - 2 = 0$

Faktorisering av det kvadratiske uttrykket:

$(x - 1)(x + 2) = 0$

Dette gir de kritiske punktene:

$x = 1$ og $x = -2$

3. Bruk den andrederiverte:
For å avgjøre om de kritiske punktene er maksimums- eller minimumspunkter, finner vi den andrederiverte:

$f''(x) = d/dx\, [x^2 + x - 2] = 2x + 1$

4. Evaluer den andrederiverte ved de kritiske punktene:
- For $x = 1$:
$f''(1) = 2(1) + 1 = 3$ (siden denne er positiv, er $x = 1$ et lokalt minimum)

- For $x = -2$:
$f''(-2) = 2(-2) + 1 = -3$ (siden denne er negativ, er $x = -2$ et lokalt maksimum)

5. Beregn funksjonsverdiene ved de kritiske punktene:
- Når $x = 1$:
$f(1) = (1/3)(1)^3 + (1/2)(1)^2 - 2(1) = -7/6$

- Når $x = -2$:
$f(-2) = (1/3)(-2)^3 + (1/2)(-2)^2 - 2(-2) = 2/3$

Konklusjon:
- Det er et lokalt minimum ved $(1, -7/6)$.
- Det er et lokalt maksimum ved $(-2, 2/3)$.

Oppgave 6.4.2

A)

For å finne overskuddsfunksjonen $O(x)$ når bedriften produserer og selger x enheter per måned, må vi trekke fra kostnadene fra inntektene.

1. Inntektsfunksjonen $R(x)$: Siden bedriften selger hver enhet for 250 kr, er den totale inntekten når de produserer og selger x enheter:

$R(x) = 250x$

2. Kostnadsfunksjonen $K(x)$: Kostnadsfunksjonen er gitt som:

$K(x) = 0,2x^2 + 60x + 30,000$

3. Overskuddsfunksjonen $O(x)$: Overskuddet er inntektene minus kostnadene:

$O(x) = R(x) - K(x)$

Ved å sette inn uttrykkene for $R(x)$ og $K(x)$:

$O(x) = 250x - (0,2x^2 + 60x + 30,000)$

Vi forenkler dette:

$O(x) = 250x - 0,2x^2 - 60x - 30,000$

$O(x) = -0,2x^2 + 190x - 30,000$

Dermed er uttrykket for overskuddsfunksjonen:

$O(x) = -0,2x^2 + 190x - 30,000$

B)

For å finne ut hvor produksjonen gir størst overskudd, må vi finne toppunktet (maksimum) til overskuddsfunksjonen:

$O(x) = -0,2x^2 + 190x - 30,000$

Dette er en kvadratisk funksjon, og toppunktet kan finnes ved å bruke formelen for toppunktet til en andregradsfunksjon:

$x = -b / (2a)$

Her er $a = -0,2$ og $b = 190$. Vi kan nå beregne verdien for x som gir størst overskudd:

$x = -190 / (2 * -0,2) = -190 / -0,4 = 475$

Dermed gir en produksjon på 475 enheter per måned det største overskuddet.

C)

Oppgaven spør om å finne det maksimale overskuddet for en bedrift, gitt kostnadsfunksjonen $K(x) = 0.2x^2 + 60x + 30,000$, der x er antall enheter produsert, og bedriften selger varen for 250 kr per enhet.

Trinn 1: Definer inntektsfunksjonen

Inntektsfunksjonen R(x) er pris per enhet multiplisert med antall solgte enheter, så:
$R(x) = 250x$

Trinn 2: Definer overskuddsfunksjonen

Overskuddsfunksjonen P(x) er inntektene minus kostnadene:
$P(x) = R(x) - K(x)$
Sett inn verdiene for R(x) og K(x):
$P(x) = 250x - (0.2x^2 + 60x + 30,000)$

Forenkling:
$P(x) = 250x - 0.2x^2 - 60x - 30,000$
$P(x) = -0.2x^2 + 190x - 30,000$

Trinn 3: Maksimer overskuddsfunksjonen

For å finne verdien av x som maksimerer overskuddet, må vi ta den deriverte av P(x) og sette den lik null:
$P'(x) = -0.4x + 190$
Sett $P'(x) = 0$ for å finne kritiske punkter:
$-0.4x + 190 = 0$
$0.4x = 190$
$x = 190 / 0.4 = 475$

Trinn 4: Beregn det maksimale overskuddet

Nå som vi vet verdien av x, setter vi den tilbake i overskuddsfunksjonen for å finne det maksimale overskuddet:
$P(475) = -0.2(475)^2 + 190(475) - 30,000$
Først, beregn hver del:
$P(475) = -0.2(225625) + 90250 - 30,000$
$P(475) = -45,125 + 90,250 - 30,000$
$P(475) = 15,125$

Dermed er det maksimale overskuddet 15,125 kr.

Oppgave 6.4.18

A)

For å finne uttrykket for farten $v(t)$ til ballen, må vi ta den deriverte av høydefunksjonen $h(t)$ med hensyn til tiden t.

Gitt:
$h(t) = 1,70 + 9,81t - 4,9t^2$

Farten $v(t)$ er den deriverte av høyden $h(t)$:

$v(t)$ = deriver $1,70 + 9,81t - 4,9t^2$ med hensyn til t.

Nå deriverer vi hvert ledd:

1. Den deriverte av konstanten 1,70 er 0.
2. Den deriverte av $9,81t$ er 9,81.
3. Den deriverte av $-4,9t^2$ er $-9,8t$ (fordi vi bruker regelen for derivasjon av potenser).

Dermed blir fartsfunksjonen:

$v(t) = 9,81 - 9,8t$

Dette er uttrykket for farten til ballen som en funksjon av tiden.

B)

For å finne farten etter 1,5 sekunder, setter vi $t = 1,5$ inn i uttrykket for farten $v(t)$:

Uttrykket for farten er:
$v(t) = 9,81 - 9,8t$

Sett inn $t = 1,5$:

$v(1,5) = 9,81 - 9,8 * 1,5$

$v(1,5) = 9,81 - 14,7 = -4,89$

Farten etter 1,5 sekunder er -4,89 meter per sekund. Det negative tegnet betyr at ballen beveger seg nedover etter denne tiden.

C)

For å finne når ballen når sin største høyde, kan vi bruke fartsfunksjonen $v(t)$. På det høyeste punktet vil farten være 0, fordi ballen stopper et øyeblikk før den begynner å falle ned igjen.

Vi har fartsfunksjonen:

$v(t) = 9{,}81 - 9{,}8t$

For å finne når ballen når sin største høyde, setter vi $v(t) = 0$:

$0 = 9{,}81 - 9{,}8t$

Løs for t:

$9{,}8t = 9{,}81$

$t = 9{,}81 / 9{,}8 = 1$

Det tar altså 1 sekund før ballen når sin største høyde.

D)

For å finne hvor høyt ballen går, kan vi bruke høydefunksjonen h(t). Vi har allerede funnet ut at ballen når sin største høyde etter 1 sekund. Nå setter vi t = 1 inn i høydefunksjonen.

Høydefunksjonen er:

$h(t) = 1{,}70 + 9{,}81t - 4{,}9t^2$

Sett inn t = 1:

$h(1) = 1{,}70 + 9{,}81 * 1 - 4{,}9 * 1^2$

Regn ut:

$h(1) = 1{,}70 + 9{,}81 - 4{,}9 = 6{,}61$

Så ballen når en makshøyde på 6,61 meter.