Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΜΕΙΩΣΗ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ LOCALLY LINEAR EMBEDDINGS ΚΑΙ ΣΤΟΧΟ ΤΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΣΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΞΟΡΥΞΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Εκπόνηση:
Πέτρος Κατσιλέρος

Επίβλεψη:
Νικόλαος Πιτσιάνης
Νίκος Σισμάνης

Με την εκπόνηση της εν λόγω διπλωματικής εργασίας ολοκληρώνεται ο κύκλος των προπτυχιακών μου σπουδών αποκτώντας δίπλωμα Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Η/Υ απο το Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Περίληψη

Η τεχνητή νοημοσύνη μέσω της μηχανικής μάθησης είναι αναμφισβήτητα ένας επιστημονικός κλάδος ο οποίος επικεντρώνει το ενδιαφέρον ολοένα και περισσότερων μηχανικών-ερευνητών. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην επιτυχία τέτοιου είδους εφαρμογών σε διάφορους κλάδους της καθημερινότητάς μας όπως αυτός της ρομποτικής, της υγείας, της εξόρυξης γνώσης κλπ. Επίσης οι σημερινοί υπολογιστές λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης της τεχνολογίας παρέχουν τους απαραίτητους πόρους ώστε να μπορέσουν να αναπτυχθούν και να διερευνηθούν τέτοιου είδους προβλήματα. Παρ΄ όλα αυτά, όσους πόρους και αν διαθέσουμε δεν μπορούμε σε καμιά περίπτωση να δημιουργήσουμε κάτι αντίστοιχο με τον ανθρώπινο εγκέφαλο.

Γνωρίζουμε οτι ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι ένα τρομερά περίπλοκο σύστημα εκατομμυρίων νευρώνων συνδεδεμένων μεταξύ τους οι οποίοι είναι σε θέση να εκτελούνε σε κλάσματα του δευτερολέπτου έναν τεράστιο αριθμό λογικών πράξεων. Το μοντέλο αυτό είναι αδύνατον να προσομοιωθεί με οποιοδήποτε υπολογιστικό σύστημα διαθέτει ο άνθρωπος σήμερα. Στην προσπάθεια των Μηχανικών να μοντελοποιήσουν τις λειτουργίες του λαμβάνοντας φυσικά υπόψιν ευρήματα και αποτελέσματα των επιστημόνων της Ιατρικής σημαντικές λύσεις και βελτιστοποιήσεις έρχονται να δώσουν αλγόριθμοι οι οποίοι έχουν ως στόχο να μειώσουν τις παραμέτρους τις οποίες πρέπει να εκτιμήσει κάποιο υπολογιστικό σύστημα ώστε τελικά να μπορέσει να εξάγει συμπεράσματα ανάλογα με αυτά ενός ανθρώπου.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών με τα οποία καταπιάνεται και η εργασία αυτή είναι η χαρακτηριστικών σε μοτίβα εικόνων ή άλλων δεδομένων με στόχο την εξαγωγή συμπεράσματος για την ταξινόμηση των δεδομένων σε κλάσεις. Συγκεκρίμένα γίνεται εφαρμογή του αλγορίθμου Locally Linear Embedding σε δύο σετ δεδομένων με εικόνες ψηφία αριθμών και σε ένα με ιατρικά δεδομένα απο καρκινοπαθείς και μη ασθενείς. Αφού γίνει μείωση των διαστάσεων που πρέπει να ληφθούν υπόψιν για την εξαγωγή συμπεράσματος εφαρμόζεται ο ταξινομητής κοντινότερων γειτόνων ο οποίος εξάγει και το τελικό συμπέρασμα για την ταξινόμηση των δεδομένων στις κατάλληλες κλάσεις.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον κ.Νικόλαο Πιτσιάνη επίκουρο καθηγητή του τμήματός μου ο οποίος μου έδωσε το ερέθισμα καθώς και χρήσιμες συμβουλές αλλά και πόρους ώστε να μπορέσω να ολοκληρώσω την έρευνα για το συγκεκριμένο θέμα. Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στον υποψήφιο διδάκτορα του τμήματος Νίκο Σισμάνη για την καθοδήγηση του καθ΄όλη την διάρκεια εκπλήρωσης της εργασίας μου αυτής.

Τέλος, ένα πολύ θερμό και μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου οι οποίοι με στήριξαν τόσο οικονομικά όσο και ψυχολογικά όλα αυτά τα χρόνια ώστε να μπορέσω να αποκτήσω το δίπλωμά μου. Στο σημείο αυτό δεν θα μπορούσα να παραλείψω τον σκύλο μου, τους φίλους και την κοπέλα μου διότι ο καθένας με τον τρόπο του βοήθησαν στην αντιμετώπιση των δυσκολιών που συνάντησα καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Κατσιλέρος Πέτρος

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2016

Αφιέρωση

Αφιερώνω την διπλωματική αυτή εργασία πρωτίστως στον εαυτό μου για τον κόπο μου όλα αυτά τα χρόνια ώστε να μπορέσω να αποκτήσω το δίπλωμα Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Η/Υ και κατά δεύτερον στους γονείς μου οι οποίοι με στήριξαν ανελλιπώς και με κάθε τρόπο σε όλη αυτή την πορεία.

Κατσιλέρος Πέτρος

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2016

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αναγνώριση προτύπων και μηχανική μάθηση

Αναγνώριση προτύπων καλείται η επιστημονική περιοχή που έχει στόχο την ταξινόμηση αντικειμένων σε κατηγορίες ή κλάσεις. Ανάλογα με την κάθε εφαρμογή τα δεδομένα μπορεί να είναι είτε εικόνες, είτε σήματα είτε οποιοδήποτε άλλο σετ δεδομένων χρειάζεται για κάποιο λόγο να ταξινομηθεί. Στις μέρες μας η ανάγκη διαχείρισης αλλά και ανάκτησης πληροφοριών μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών αποκτά τεράστια σπουδαιότητα καταρχήν διότι ο όγκος των πληροφοριών αυξάνεται ραγδαία με ρυθμό αδύνατο να διαχειριστεί ο άνθρωπος και επίσης διότι η ανάπτυξη της τεχνολογίας μας παρέχει πολύ ισχυρά υπολογιστικά συστήματα με τη χρήση των οποίων μπορούμε να δημιουργήσουμε πολύπλοκα μοντέλα εξόρυξης γνώσης .

Αντίστοιχοι κλάδοι στους οποίους έχει τεράστια σημασία η αναγνώριση προτύπων είναι οι επιστημονικοί κλάδοι της Ιατρικής, της Βιολογίας, ο χώρος των αγορών και των επιχειρήσεων και τέλος η διαχείριση και η εξόρυξη γνώσης απο τον τεράστιο όγκο της πληροφορίας που είναι διαθέσιμος στο διαδίκτυο. Φυσικά η αναγνώριση προτύπων είναι ένα πολύ σημαντικό μέρος του κλάδου της μηχανικής μάθησης σε ρομποτικά/υπολογιστικά συστήματα.

Η υπολογιστική όραση για παράδειγμα είναι αντικείμενο ιδιαίτερα χρήσιμο τόσο στον χώρο της ρομποτικής όσο σε αυτόν της ιατρικής αλλά και προφανώς της βιομηχανίας. Τέτοιου είδους εφαρμογές έχουν εισέλθει πολύ δυναμικά στην καθημερινότητά μας τα τελευταία χρόνια. Συγκεκριμένα

στον χώρο της βιομηχανίας υπάρχουν συστήματα τα οποία επιβλέπουν μέσω μια κάμερας την γραμμή παραγωγής καθώς και ρομπότ τα οποία μεταφέρουν και συναρμολογούν αντικείμενα. Επίσης υπάρχουν εφαρμογές οι οποίες αναγνωρίζουν για παράδειγμα πρόσωπα τραβώντας μια εικόνα με το κινητό μας τηλέφωνο. Τέλος στον χώρο της αυτοκινητοβιομηχανίας δεν είναι λίγες αντίστοιχες εφαρμογές οι οποίες έχουν συμβάλει δυναμικά στην αυτόνομη οδήγηση αλλά και στην προειδοποίηση για εμπόδια κλπ.

Ιδιαίτερη έμφαση αξίζει να δωθεί στην εξόρυξη γνώσης σε κλάδους όπως στη βιολογία αλλά και στην ιατρική. Για παράδειγμα η πρόβλεψη εμφάνισης ασθενειών όπως ο καρκίνος μέσω αναγνώρισης συγκεκριμένων μοτίβων σε εικόνες απο μαγνητικό τομογράφο, η μελέτη της αλύσίδας του γεννετικού υλικού αλλά και ο χώρος των εγχειρίσεων υψηλής ακρίβειας με τη χρήση της ρομποτικής.

1.2 Ερεθίσματα απο τον τρόπο λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου

Απο μελέτες που έχουν γίνει για την λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε σύνολο μετρήσεων προέρχεται για παράδειγμα είτε απο την όραση μας είτε απο την ακοή μας ο εγκέφαλός μας μετασχηματίζει το σύνολο των δεδομένων αυτών σε ένα νέο σύνολο χαρακτηριστικών. Με τον τρόπο αυτό, επιλέγοντας προφανώς κάθε φορά τα κατάλληλα χαρακτηριστικά, επιτυγχάνεται τεράστια συμπίεση του όγκου της πληροφορίας σε σύγκριση με τα αρχικά δεδομένα εισόδου. Αυτο σημαίνει λοιπόν ότι το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας για παράδειγμα μια σκηνής που βλέπουμε και στην οποία θέλουμε να αναγνωρίσουμε τα αντικείμενα που περιέχονται, συμπιέζεται σε έναν πολύ μικρό αριθμό χαρακτηριστικών. Η παραπάνω διαδικασία χαρακτηρίζεται ως τεχνική μείωσης διάστασης γνωστή στην βιβλιογραφία με τον όρο Dimensionality Reduction.

Ας πάρουμε για παράγειγμα τον κλάδο της υπολογιστικής όρασης ο οποίος αποτελεί και αντικείμενο μελέτης της εν λόγω εργασίας και ας αναρωτηθούμε το εξής: Πόσο δύσκολο είναι για κάποιον απο εμάς να ανγνωρίσει κάποιο νούμερο αποτυπωμένο σε μια εικόνα· Η προφανής απάντηση είναι καθόλου. Και αυτή είναι μια πολύ σωστή απάντηση, διότι για τον ανθρώπινο εγκέφαλο το να

καταλάβει οτι το ψηφίο το οποίο βρίσκεται στην εικόνα είναι για παράδειγμα το 1 και όχι το 9 είναι ένα πολύ απλό πρόβλημα.

Πιο συγκεκριμένα βλέποντας μια οποιαδήποτε σκηνή ο ανθρώπινος εγκέφαλος προσπαθεί να εντοπίσει σημεία ενδιαφέροντος τα οποία αποτελούν χαρακτηριστικά σημεία της. Τέτοια μπορεί να είναι πολύ έντονες αλλαγές στην φωτεινότητα όπως για παράδειγμα γωνίες, κενά ή τρύπες. Στην συνέχεια εντοπίζει πιο σύνθετες γεωμετρίες όπως ευθείες ή καμπύλες γραμμές και τέλος προσδιορίζει πιο ολοκληρωμένες δομές τρισδιάστατων αντικειμένων. Το ίδιο ακριβώς γίνεται και στην παραπάνω περίπτωση με το ψηφίο. Εντοπίζουμε αρχικά οτι το μοτίβο του ψηφίου 1 είναι πολύ κοντά σε αυτά των ψηφίων εφτά και τέσσερα αλλά σε καμιά περίπτωση δεν θα λέγαμε οτι έχει τρομερές ομοιότητες με αυτό του δύο ή του οχτώ για παράδειγμα.

Το παραπάνω παράδειγμα είναι ένα πολύ απλό δείγμα του τρόπου με τον οποίο ο ανθρώπινος εγκέφαλος προσπαθεί με κάθε τρόπο να ελαχιστοποιήσει τις παραμέτρους που πρέπει να εκτιμήσει. Φυσικά αν αναλογιστούμε ένα ρεαλιστικό περίπλοκο πρόβλημα της καθημερινότητάς μας θα δούμε οτι απαιτούνται πολύ πιο σύνθετοι υπολογισμοί και θα πρέπει να συνδιάσουμε ένα πλήθος απο παραμέτρους ώστε τελικά να καταλήξουμε στο τελικό συμπέρασμα για κάποια απόφαση. Σε κάθε περίπτωση όμως γίνεται τεράστια συμπίεση της αρχικής πληροφορίας μέσω τεχνικών μείωσης διαστάσεων ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι παράμετροι που πρέπει να υπολογιστούν και προφανώς να επιταχυνθεί η διαδικασία εξαγωγής της τελικής μας απόφασης.

Το γεγονός αυτό και δεδομένου οτι το όραμα της επιστημονικής κοινότητας των μηχανικών που ασχολούνται με την μηχανική μάθηση και την εξόρυξη γνώσης είναι να δημιουργηθεί ένα μοντέλο αντίστοιχο με αυτό του ανθρώπινου εγκεφάλου δεν θα μπορούσε να τους αφήσει αδιάφορους ώστε να μελετήσουν και να αναπτύξουν αντίστοιχους αλγορίθμους με σκοπό να εφαρμοστούν σε μοντέλα εξόρυξης γνώσης.

1.2.1 Μάθηση με επίβλεψη - χωρίς επίβλεψη - με ημιεπίβλεψη

Ένα πολύ εύλογο ερώτημα το οποίο προκύπτει απο την παραπάνω ανάλυση είναι πως ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει μάθει και τελικώς έχει αποθηκεύσει το σύνολο αυτών των μοντέλων για τον

κάθε αριθμό ή για οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο ή μοτίβο μπορεί να αναγνωρίσει με τόσο μεγάλη ταχύτητα και ευκολία. Η απάντηση είναι προφανώς η συνεχής εκπαίδευση και η διαρκής υπενθύμιση των συγκεκριμένων προτύπων.

Πιο συγκεκριμένα ο άνθρωπος απο την μέρα που αρχίζει να αλληλεπιδρά με το περιβάλλον παίρνει διάφορα ερεθίσματα τα οποία καιρό με τον καιρό μαθαίνει να τα ταξινομεί κατάλληλα και να τα χρησιμοποιεί όποτε ξαναεμφανιστούν μπροστά του. Τα ερεθίσματα αυτά είναι είτε εικόνες, είτε ήχοι είτε ερεθίσματα τα οποία μπορεί να προέρχονται απο τις υπόλοιπες αισθήσεις του.

Ο τρόπος με τον οποίο καταφέρνουμε να συγκρατούμε και να μπορούμε να διαχειριστούμε ανα πάσα στιγμή τον τεράστιο όγκο πληροφοριών που βρίσκονται καταχωρημένες στον εγκέφαλό μας είναι ένας συνδιασμός τεχνικών μάθησης και συνεχούς εκπαίδευσης. Οι τεχνικές αυτές στον χώρο της τεχνητής νοημοσύνης αναφέρονται ως τεχνικές μάθησης με επίβλεψη, χωρίς επίβλεψη και με ημιεπίβλεψη. Θα μπορούσε κάποιος αρχικά να υποστηρίξει ότι ο ανθρώπινος εκγέφαλος χρησιμοποιεί κατεξοχήν τεχνικές μάθησης χωρίς επίβλεψη διότι μπορεί να μαθαίνει μόνος του νέα πράγματα. Είναι όμως πραγματικά αυτό το οποίο συμβαίνει· Η απάντηση είναι μάλλον όχι, και αυτό διότι απο την πολύ νεαρή του υλικία ο καθένας μας έχει γύρω του ανθρώπους οι οποίοι προσπαθούν συνεχώς να μας μεταφέρουν γνώση και να μας μάθουν τι βρίσκεται γύρω μας και πως να αλληλεπιδρούμε μεταξύ του. Παρ΄όλα αυτά μετά απο κάποιο σημείο ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποκτά δυνατότητες με τις οποίες μπορεί αξιολογεί και να μαθαίνει μόνος του πολύ σύνθετα πράγματα αναλύοντάς τα σε απλούστερα προβλήματα τα οποία γνωρίζει ήδη πως να τα διαχειριστεί. Επίσης είναι στην φύση του ανθρώπου να εξερευνεί συνεχώς άγνωστα μονοπάτια και να αναζητεί απαντήσεις σε άγνωστα προβλήματα επιτυγχάνοντας αξιοθαύμαστα αποτελέσματα.

Απο τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο άνθρωπος χρησιμοποιεί τεχνικές ημιεπίβλεψης για την εκπαίδευση του εγκεφάλου του γεγονός το οποίο του δίνει την δυνατότητα να μπορεί να διαχειριστεί αλλά και να μάθει πολύ σύνθετα μοντέλα. Μέσα απο αυτή την διαδικασία είναι σε θέση με το πέρασμα του χρόνου να δημιουργήσει ένα τεράστιο και πανίσχυρο δίκτυο πληροφοριών, ταξινομημένο με τρόπο τον οποίο δεν μπορούμε ακόμα να εξηγήσουμε και να κατανοήσουμε. Με αυτό το μοντέλο είναι σε θέση ταχύτατα να αποφασίζει που βρίσκεται ο ευρύτερος χώρος της πληροφορίας που θέλει να αντλήσει και στην συνέχεια να αποφασίζει με τεράστια ακρίβεια και

ταχύτητα την τελική του απόφαση.

Το μοντέλο αυτό με το οποίο λειτουργεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι αν μη τι άλλο αξιοθαύμαστο και ανεξήγητο. Παρ΄όλα είναι πολύ δύσκολο να εφαρμοστεί στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης και αυτό διότι ακόμα δεν είμαστε σε θέση να δώσουμε εξηγήσεις για τον τρόπο λειτουργίας του. Το συνηθέστερο και πιο αποτελεσματικό μέχρι στιγμής μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται στην εξόρυξη γνώσης μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι αυτό της μάθησης με επίβλεψη. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό θα πρέπει αν συλλέξουμε ένα μεγάλο συνήθως όγκο δεδομένων τον οποίο να τροφοδοτήσουμε στην συνέχεια ως είσοδο στο σύστημά μας και με την κατάλληλη μεθοδολογία να το οδηγήσουμε να μάθει συγκεκριμένα μοντέλα τα οποία να μπορεί να χρησιμοποιήσει στην συνέχεια με σκοπό της εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος.

1.3 Μείωση της διάστασης των δεδομένων

Στην παραπάνω διαδικασία δεδομένου ότι στις περισσότερες περιπτώσεις έχουμε να αντιμετωπίσουμε πολύ σύνθετα υπολογιστικά προβλήματα ο αριθμός των παραμέτρων που πρέπει να υπολογιστούν είναι σε συγκεκριμένες εφαρμογές απαγορευτικά μεγάλος. Σε κάποιες εφαρμογές το πρόβλημα είναι θέμα χρόνου όπου πρέπει να γίνει μείωση των παραμέτρων ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος εξαγωγής συμπεράσματος. Σε άλλες είναι θέμα χώρου διότι ένας μεγάλος αριθμός πολυδιάστατων δεδομένων μπορεί να αποτελεί πρόβλημα σε συγκεκριμένες εφαρμογές. Τέλος υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες χρειαζόμαστε την μείωση των διαστάσεων ώστε να διώξουμε εντελώς παραμέτρους οι οποίες επιδρούν σαν θόρυβος και επηρεάζουν αρνητικά την εξαγωγή ορθού συμπεράσματος ταξινόμησης. Προφανώς σε πολλές πρακτικές εφαρμογές επικρατεί ένας συνδυασμός των παραπάνω προβλημάτων.

Αντικείμενο λοιπόν της εν λόγω διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση και η χρήση του αλγορίθμου Locally Linear Embeddings για την μείωση των διαστάσεων σε πρακτικά προβλήματα όπως η αναγνώριση ψηφίων αλλά και η ταξινόμηση ασθενών με βάση το αν πρόκειται να εμφανίζουν κάποιας μορφής καρκίνου ή όχι. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων είναι ιδιαίτερα ενθαρυντικά και δείχνουν σε όλες τις περιπτώσεις ότι η μείωση των διαστάσεων επιδρά δραματικά στην μείωση του

κόστους των υπολογισμών αλλά και στην αύξηση της σωστής πρόβλεψης λόγω απομάκρυνσης του θορύβου. Επίσης παρουσιάζονται δύο πρακτικές και ρεαλιστικές μέθοδοι εφαρμογής του αλγορίθμου σε πραγματικά προβλήματα απο τις οποίες η πρώτη έρχεται να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της πολύ μεγάλης μνήμης που απαιτεί η εκτέλεση του αλγορίθμου και η δεύτερη παρέχει την δυνατότητα για την ταξινόμηση των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή συμπεράσματος σε πραγματικό χρόνο.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό και θεωρητικό υπόβαθρο

2.1 Διανύσματα βάσης

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο δειγμάτων εισόδου με αντίστοιχο διάνυσμα $\mathbf{x}$ διάστασης $N \times 1$,

$$\mathbf{x}^T = \Big[x(0), \ldots, x(N-1)\Big]$$

Έστω επίσης ορθοκανονικό μητρώο A, τάξης $N \times N$. Τότε ορίζουμε το μετασχηματισμένο διάνυσμα $\mathbf{y}$ του $\mathbf{x}$ ώς

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^H \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^H \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N-1}^H \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{2.1.1}$$

Το H δηλώνει τον Hermitian τελεστή, δηλαδή τον μιγαδικό συζηγή του ανάστροφου. Απο τον ορισμό των ορθοκανονικών μητρώων έχουμε

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=0}^{N-1} y(i)\mathbf{a}_i \tag{2.1.2}$$

Οι στήλες του A, $\mathbf{a}_i = 0, 1, \ldots, N-1$ καλούνται *διανύσματα βάσης* του μετασχηματισμού. Τα στοιχεία $y(i)$ του $\mathbf{y}$ είναι οι προβολές του διανύσματος $\mathbf{x}$ σε αυτά τα διανύσματα βάσης. Λαμβάνοντας υπόψιν την ιδιότητα της ορθοκανονικότητας μπορούμε να επαληθεύσουμε την παραπάνω διατύπωση υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{a}_j$. Έχουμε:

$$\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle \equiv \mathbf{a}_j^H \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \delta_{ij} = y(j) \tag{2.1.3}$$

2.1.1 Διάνυσμα εικόνας

Άν πάρουμε για παράδειγμα μια εικόνα, το σύνολο των δειγμάτων εισόδου είναι μια δυδιάστατη ακολουθία $X(i,j), i,j = 0, 1, \ldots, N-1$, η οποία ορίζει ένα μητρώο Q, τάξεως $N \times N$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να μετατρέψουμε την είσοδο αυτή σε ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ διάστασης N^2 διατάσσοντας για παράδειγμα τις γραμμές του μητρώου την μία μετά την άλλη έχοντας τελικά

$$\mathbf{x}^T = \Big[X(0,0), \ldots, X(0,N-1), \ldots, X(N-1,0), \ldots, X(N-1,N-1) \Big] \tag{2.1.4}$$

Με αυτό τον μετασχηματισμό όμως ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται για τον πολλαπλασιασμό ενός τετραγωνικού μητρώου τάξεως $N \times N$ με ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ διαστάσεων $N^2 \times 1$, είναι της τάξης $\mathcal{O}(N^4)$ μέγεθος απαγορευτικό για τις περισσότερες ρεαλιστικές εφαρμογές.

2.1.2 Ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα

Το παραπάνω εμπόδιο μπορεί να ξεπεραστεί αν μετασχηματίσουμε το μητρώο Q μέσω ενός συνόλου *μητρώων βάσης*. Έστω λοιπόν U και V ορθοκανονικά μητρώα διάστασης $N \times N$. Ορίζουμε τότε το μετασχηματισμένο μητρώο Y του X ως

$$Y = U^H X V \tag{2.1.5}$$

ή

$$X = U Y V^H \tag{2.1.6}$$

Μέσω αυτού του μετασχηματισμού ο αριθμός των πράξεων μειώνεται σε $\mathcal{O}(N^3)$. Πιο αναλυτικά η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να γραφεί ως

$$Q = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} Y(i,j) \mathbf{u}_i \nu_j^H \tag{2.1.7}$$

όπου $\mathbf{u}_i$ είναι τα διανύσματα στήλης του Υ και ν_j τα διανύσματα στήλης του $\check{}$. Η παραπάνω εξίσωση είναι ένα ανάπτυγμα του μητρώου Ξ ως προς τις $N \times 2$ εικόνες βάσης. Τέλος κάθε ένα απο τα γινόμενα $\mathbf{u}_i \nu_j$ είναι ένα μητρώο $N \times N$

$$\mathbf{u}_i \nu_j = \begin{bmatrix} u_{i0}\nu_{j0}^* & \dots & u_{i0}\nu_{jN-1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{iN-1}\nu_{j0}^* & \dots & u_{iN-1}\nu_{jN-1}^* \end{bmatrix} \tag{2.1.8}$$

Στην περίπτωση κατα την οποία το Ψ είναι διαγώνιο τότε έχουμε

$$Q = \sum_{i=0}^{N-1} Y(i,i)\mathbf{u}_i\nu_i^H \tag{2.1.9}$$

με αποτέλεσμα το πλήθος των μητρώων-εικόνων βάσης μειώνεται σε N. Τέλος έπειτα απο μερικές πράξεις και τροποποιήσεις μπορούμε να ορίσουμε κάθε στοιχείο (i,j) του μετασχηματισμένου μητρώου ως τον πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου του X με τον συζυγή του αντίστοιχου στοιχείου του A_{ij} και αθροίζοντας όλα τα γινόμενα. Δηλαδή

$$\langle A, B\rangle = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} A(m,n)^* B(m,n) \tag{2.1.10}$$

και τελικά

$$Y(i,j) = \langle A_{i,j}, X\rangle \tag{2.1.11}$$

2.2 Ο μετασχηματισμός Karhunen-Loeve - PCA

Ο μετασχηματισμός Karhunen-Loeve αξιοποιεί την στατιστική πληροφορία που περιγράφει τα δεδομένα και ο υπολογισμός του μητρώου γίνεται χωρίς επίβλεψη. Ας υποθέσουμε και πάλι ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ το οποίο αποτελείται απο τα δείγματα μια εικόνας τα οποία έχουν διαταχθεί λεξικογραφικά όπως περιγράφτηκε παραπάνω. Πρέπει να επισυμανθεί στο σημείο αυτό η επιθυμητή ιδιότητα των εξαχθέντων χαρακτηριστικών να είναι αμοιβαίως ασυσχέτιστα και αυτό για την αποφυγή πλεονάζουσας πληροφορίας. Η πιο συνηθισμένη συνθήκη για την γέννηση τέτοιου είδους χαρακτηριστικών είναι η μέση τιμή των δεδομένων να έχει μηδενική τιμή. Δηλαδή θέλουμε την

ιδιότητα

$$E[y(i)y(j)] = 0, i \neq j \tag{2.2.1}$$

Έστω

$$\mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \tag{2.2.2}$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι $E[x] = 0$ αμέσως βλέπουμε ότι $E[y] = 0$ και

$$R_y = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] = E[A^T\mathbf{x}\mathbf{x}^TA] = A^TR_xA \tag{2.2.3}$$

Πρακτικά το R_x αντιπροσωπεύει μια μέση τιμή πάνω στο δοθέν σύνολο διανυσμάτων εκπαίδευσης. Επίσης είναι συμμτρικό μητρώο και επομένως τα ιδιοδιανύσματά του είναι αμοιβαίως ορθογώνια. Άρα έστω ότι επιλέγεται ένα μητρώο A με στήλες τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{a}_i, i = 0, 1, \ldots, N-1$ του R_x τότε το R_y είναι διαγώνιο.

$$R_y = A^TR_xA = \Lambda \tag{2.2.4}$$

Το Λ είναι διαγώνιο μητρώο με διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 0, 1, \ldots, N-1$ του R_x. Αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας είναι ένας μετασχηματισμός, ο μετασχηματισμός Karhunen-Loeve ο οποίος επιτυγχάνει τον αρχικό μας στόχο, δηλαδή την δημιουργία χαρακτηριστικών τα οποία είναι στατιστικώς ανεξάρτητα.

2.2.1 Προσέγγιση μέσου τετραγωνικού σφάλματος - MSE

Σε αυτή την υποενότητα θα αναλυθεί η διαδικασία με την οποία μπορούμε να οδηγηθούμε στην επιλογή κάποιων, έστω m το πλήθος, κυρίαρχων χαρακτηριστικών μέσω της προσέγγισης μέσου

τετραγνικού σφάλματος. Ας πάρουμε ξανά τις εξισώσεις (2.1.1) και (2.1.2) τότε έχουμε

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N-1} y(i)\mathbf{a}_i \quad \text{και} \quad y(i) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \tag{2.2.5}$$

Ορίζουμε λοιπόν τώρα ένα νέο διάνυσμα στον m-διάστατο υποχώρο

$$\widehat{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{N-1} y(i)\mathbf{a}_i \tag{2.2.6}$$

στο οποίο προφανώς εμπλέκονται μόνο m απο τα διανύσματα βάσης. Με τον παραπάνω τρόπο δηλαδή ορίζεται η προβολή του $\mathbf{x}$ στον υποχώρο που ορίζουν τα ορθοκανονικά διανύσματα m τα οποία εμπλέκονται στην παραπάνω άθροιση.

Σκοπός μας λοιπόν στο σημείο αυτό είναι να προσεγγίσουμε με όσο το δυνατόν μικρότερο σφάλμα το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Η προσέγγισή μας είναι το διάνυσμα $\widehat{\mathbf{x}}$ και θα προκύψει χρησιμοποιώντας την εξίσωση ελαχιστοποίησης μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Έχουμε λοιπόν την εξίσωση

$$E[\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2] = E\left[\| \textstyle\sum_{i=m}^{N-1} y(i)\mathbf{a}_i\|^2\right] \tag{2.2.7}$$

Απο την παραπάνω εξίσωση στόχος μας τώρα είναι να επιλέξουμε τα ιδιοδιανύσματα τα οποία οδηγούν στο ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Λαμβάνοντας υπόψιν την ορθοκανονικότητα των ιδιοδιανυσμάτων και την παραπάνω εξίσωση καταλήγουμε ότι

$$E\left[\| \textstyle\sum_{i=m}^{N-1} y(i)\mathbf{a}_i\|^2\right] = E\left[\textstyle\sum_i \sum_j (y(i)\mathbf{a}_i^T)(y(j)\mathbf{a}_j)\right] = \tag{2.2.8}$$

$$= \sum_{i=m}^{N-1} E[y^2(i)] = \sum_{i=m}^{N-1} \mathbf{a}_i^T E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{a}_i \tag{2.2.9}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό των ιδιοδιανυσμάτων προκύπτει τελικά ότι

$$E[\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}\|^2]=\sum_{i=m}^{N-1}\mathbf{a}_i^T\lambda_i\mathbf{a}_i=\sum_{i=m}^{N-1}\lambda_i \tag{2.2.10}$$

Αν επομένων στην παραπάνω εξίσωση επιλέξουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις m ιδιοτιμές του μητρώου συσχέτισης τότε το σφάλμα της εξίσωσης ελαχιστοποιείται και μάλιστα ισούτε με το άθροισμα των N-m μικρότερων ιδιοτιμών. Επιπλέον έχει αποδειχθεί ότι αυτό είναι το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε σύγκριση με οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση του $\mathbf{x}$ απο ένα m-διάστατο διάνυσμα. Για τον λόγο αυτό ο μετασχηματισμός Karhunen-Loeve είναι επίσης γνωστός ως *Ανάλυση κυρίων συνιστωσών* Principal component analysis-PCA.

2.2.2 Συνολική Διασπορά

Έστω $\mathbf{y}$ το μετασχηματισμένο κατα **KL** διάνυσμα του $\mathbf{x}$ και $E[x]=0$. Τότε απο τον αντίστοιχο ορισμό της διασποράς έχουμε ότι $\sigma^2_{y(i)}\equiv E[y^2(i)]=\lambda_i$. Δηλαδή έχουμε ότι οι διασπορές του μητρώου συσχέτισης εισόδου είναι ίσες με τις διασπορές των μετασχηματισμένων χαρακτηριστικών. Επομένως επιλεγοντας εκείνα τα χαρακτηριστικά $y(i)=\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}$ που αντιστοιχούν στις m μεγαλύτερες ιδιοτιμές οδηγούμαστε σε μεγιστοποίηση της αθροιστικής διασποράς $\sum_i\lambda_i$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι με αυτή την μεθολογία που ακολουθήσαμε, τα m χαρακτηριστικά που έχουν επιλεχθεί διατηρούν το μεγαλύτερο μέρος απο την συνολική διασπορά που σχετίζεται με τις αρχικές τυχαίες ματαβλητές $x(i)$.

2.3 Μείωση της διάστασης

Απο την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι η μέθοδος PCA επιτυγχάνει τον *γραμμικό μετασχηματισμό* ενός χώρου υψηλής διάστασης σε έναν χαμηλής διάστασης του οποίου μάλιστα τα στοιχεία είναι στατιστικώς ασυσχέτιστα. Έχοντας υποθέσει ότι $E[x]=0$ και επίσης ότι οι N-m μικρότερες ιδιοτιμές του μητρώου συσχέτισης είναι μηδέν τότε απο την εξίσωση (2.2.10) συνεπάγεται ότι $\mathbf{x}=\widehat{\mathbf{x}}$. Δηλαδή έχουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ του αρχικού χώρου διάστασης N βρίσκεται σε έναν m-διάστατο υποχώρο του αρχικού και μάλιστα μπορούμε να το προσδιορίσουμε μέσω του

διανύσματος $\widehat{\mathbf{x}}$ με πολύ καλή προσέγγιση. Το γεγονός αυτό εισάγει την έννοια της *εγγενούς διάστασης* (intrinsic dimensionality). Τέλος στην περίπτωση της εγγενούς διάστασης μπορούμε να πούμε ό,τι το Ξ μπορεί να περιγραφεί απο m ελεύθερες παραμέτρους.

2.4 Ανάλυση στην βάση των ιδιαζουσών τιμών (SVD)

Η ανάλυση ενός μητρώου με βάση τις ιδιάζουσες τιμές είναι μια απο τις πιο κομψές και ισχυρές μεθόδους γραμμικής άλγεβρας η οποία έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς για την μείωση του βαθμού και της διάστασης σε προβλήματα αναγνώρισης προτύπων και σε εφαρμογές ανάκτησης πληροφορίας.

Δοθέντως ενός μητρώου X, τάξης $l \times n$, βαθμού r με $r \leq \min\{\text{l,n}\}$ υπάρχουν ορθοκανονικά μητρώα U και V, τάξης $l \times l$ και $n \times n$ αντίστοιχα ώστε

$$X = U \begin{bmatrix} \Lambda^{\frac{1}{2}} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & 0 \end{bmatrix} V^H \quad \text{ή} \quad Y = \begin{bmatrix} \Lambda^{\frac{1}{2}} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & 0 \end{bmatrix} = U^H X V \tag{2.4.1}$$

όπου $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ είναι το $r \times r$ διαγώνιο μητρώο με στοιχεία $\sqrt{\lambda_i}$ με λ_i οι μη μηδενικές ιδιοτιμές που σχετίζονται με το μητρώο $X^H X$. Με $\mathcal{O}$ συμβολίζουμε το μητρώο μηδενικών τιμών. Απο τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι υπάρχουν μητρώα U και V που μετασχηματίζουν το X στην διαγώνια δομή του Y. Αν $\mathbf{u}_i$,ν_i είναι τα διανύσματα στήλης των μητρώων U και V αντίστοιχα τότε η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$X = [u_0, u_1, \ldots, u_{r-1},] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_0} & & & \\ & \sqrt{\lambda_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_{r-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_0^H \\ \nu_1^H \\ \vdots \\ \nu_{r-1}^H \end{bmatrix} \tag{2.4.2}$$

ή

$$X = \sum_{i=0}^{r-1} \sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i \nu_i^H = U_r \Lambda^{\frac{1}{2}} V_r^H \tag{2.4.3}$$

όπου U_r δηλώνει το $l \times r$ μητρώο που αποτελείται απο τις r πρώτες στήλες του U και V_r το $r \times n$ μητρώο που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τις πρώτες r στήλες του V. Επίσης $\mathbf{u}_i$,ν_i είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές των μητρώων XX^H και X^HX αντίστοιχα. Οι ιδιοτιμές λ_i είναι γνωστές ως *ιδιάζουσες τιμές* (σινγυλαρ αλυες) του X και το ανάπτυγμα της παραπάνω εξίσωσης ως *ανάλυση με βάση τις ιδιάζουσες τιμές* (singular value decomposition - SVD) του X.

2.4.1 Μείωση της διάστασης μέσω SVD

Η μέθοδος SVD έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς για την μείωση της διάστασης του χώρου χαρακτηριστικών σε ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών αναγνώρισης προτύπων. Έστω οτι έχουμε την προσέγγιση χαμηλού βαθμού (low rank approximation) $\hat{X}$ του X. Αποδεικνύεται μέσω ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ότι αν η παραπάνω προσέγγιση σχηματίζεται απο την άθροιση των k μεγαλύτερων ιδιοτιμών τότε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης είναι το ελάχιστο. Μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος SVD οδηγεί στο ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα και επομένων το $\hat{X}$ είναι η καλύτερη *προσέγγιση βαθμού* k του X. Η προσέγγιση αυτή δίνεται απο τον τύπο

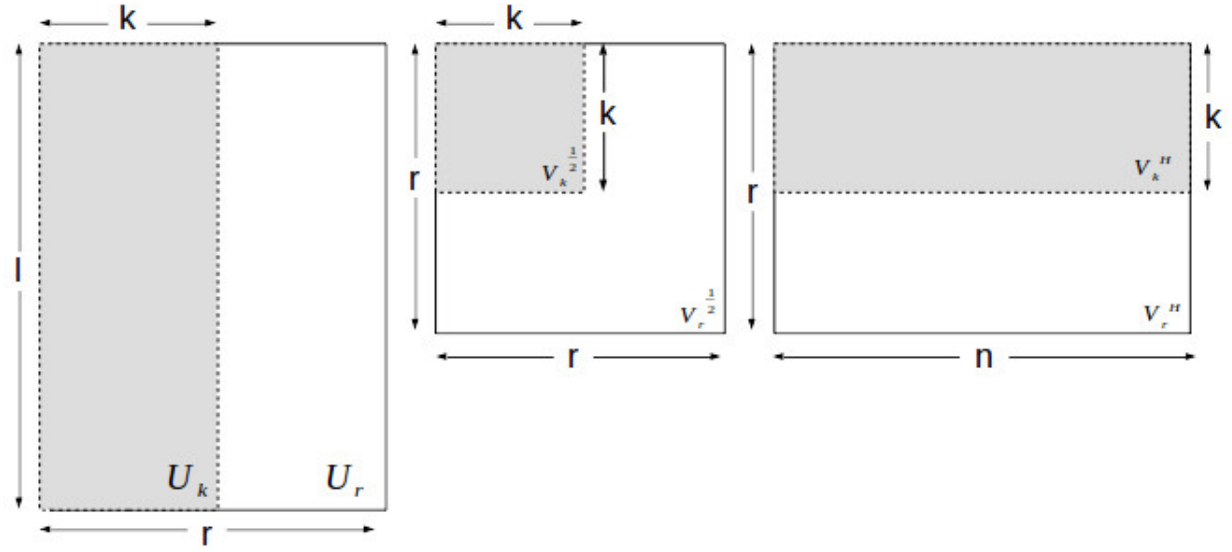
$$X \simeq \hat{X} = \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{\lambda_i}\mathbf{u}_i\nu_i^H, \quad k \leq r$$

$$= [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_0}\nu_0^H \\ \sqrt{\lambda_1}\nu_1^H \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_{k-1}}\nu_{k-1}^H \end{bmatrix} = U_k[\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1},] \tag{2.4.4}$$

όπου το μητρώο U_k αποτελείται απο τις k πρώτες στήλες του U και τα k-διάστατα διανύσματα $\mathbf{a}_i, i = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τα διανύσματα στήλες της $k \times n$ μήτρας του γινομένου $\Lambda^{\frac{1}{2}}V_k^H$ όπου το μητρώο V_k^H αποτελείται απο τις k πρώτες γραμμές του V^H και $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ είναι διαγώνιο μητρώο με

στοιχεία τις τατραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων k ιδιαζουσών τιμών.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται γραφικά ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητή η παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 2.1: Διαγραμματική αναπαράσταση των γινομένων των μητρών που χρησιμοποιούνται στην μέθοδο SVD. Στην προσέγγιση του X απο το $\hat{X}$, εμπλέκονται οι πρώτες k στήλες του U_r και οι πρώτες k γραμμές του V_r^H.

Απο την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το l-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{x}_i$ προσεγγίζεται απο το k-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{a}_i$ που βρίσκεται στον υποχώρο που ορίζουν τα $\mathbf{u}_i, i = 0, 1, \ldots, k-1$ (το $\mathbf{a}_i$ είναι στην ουσία η προβολή του $\mathbf{x}_i$ στον υποχώρο αυτόν). Επίσης, λόγω της ορθοκανονικότητας των στηλών $\mathbf{u}_i, i = 0, 1, \ldots, k-1$ του U_k βλέπουμε ότι

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \simeq \|U_k(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)\| = \|\sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{u}_m(a_i(m) - a_j(m))\| = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n-1 \quad (2.4.5)$$

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι χρησιμοποιώντας την προηγούμενη προβολή και υποθέτωντας ότι η προσέγγιση είναι ικανοποιητική, η Ευκλείδια απόσταση μεταξύ $\mathbf{x}_i$ και $\mathbf{x}_j$ στον υψηλής διάστασης l-διάστατο χώρο διατηρείται (κατά προσέγγιση) κατά την προβολή στον χαμηλότερης διάστασης k-διάστατο χώρο.

2.4.2 Πρακτική εφαρμογή

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ένα απλό παράδειγμα μέσω του οποίου μπορεί να γίνει αντιληπτή η πρακτική εφαρμογή των παραπάνω. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα σύνολο n προτύπων, όπου το καθένα αναπαρίσταται απο ένα l-διάστατο διάνυσμα χαρακτηριστικών. Τότε, δοθέντως ενός άγνωστου προτύπου στόχος μας είναι να αναζητήσουμε στο σύνολο των γνωστών προτύπων που έχουμε ώστε νε βρούμε αυτό το οποίο παρουσιάζει την μεγαλύτερη ομοιότητα με το άγνωστο για το οποίο θέλουμε να καταλήξουμε σε κάποιο συγκεκριμένο συμπέρασμα. Η διαδικασία αυτή είναι εφικτή υπολογίζοντας την Ευκλείδια απόσταση μεταξύ του άγνωστου προτύπου με όλα τα γνωστά και επιλέγοντας τελικά το ζευγάρι με την μικρότερη απόσταση, δηλαδή αυτό με την μεγαλύτερη ομοιότητα.

Σε περιπτώσεις όπου τόσο ο αριθμός των διαστάσεων όσο και ο αριθμός των δειγμάτων είναι μεγάλος τότε η παραπάνω διαδικασία μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα. Προκειμένου λοιπόν να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μπορούμε να ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία που αναλύσαμε ώστε να μειώσουμε τις διαστάσεις του προβλήματός μας. Η διαδικασία έχει ως εξής: Αρχικά σχηματίζουμε το μητρώο δεδομένων X, διάστασης $l \times n$ με στήλες τα n διανύσματα χαρακτηριστικών. Εκτελούμε την μεθοδολογία SVD στο X και αναπαριστούμε κάθε διάνυσμα χαρακτηριστικών $\mathbf{x}_i$ με την χαμηλότερης διάστασης προβολή του, $\mathbf{a}_i$. Το άγνωστο διάνυσμα προβάλλεται στον υποχώρο που ορίζουν οι στήλες του U_k και εκτελούνται οι υπολογισμοί των Ευκλείδιων αποστάσεων στον k-διάστατο χώρο. Επειδή οι Ευκλείδιες αποστάσεις διατηρούνται κατά προσέγγιση, είναι εφικτό να αποφασίσουμε τους κοντινότερους γείτονες των διανυσμάτων εργαζόμενοι στον χώρο χαμηλότερης διάστασης. Σε περιπτώσεις για τις οποίες έχουμε $k \ll l$ επιτυγχάνεται σημαντική εξοικονόμηση στους υπολογισμούς.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι η μεθοδολογία SVD είναι πολύ αποτελεσματική τεχνική μείωσης της διάστασης σε περιπτώσεις όπου τα δεδομένα μπορούν να περιγραφούν επαρκώς μέσω του μητρώου συνδιασποράς, για παράδειγμα περιπτώσεις όταν ακολουθούν κατανομές παρόμοιες με την Gaussian κατανομή.

Κεφάλαιο 3

Αλγόριθμοι μείωσης διαστάσεων

3.1 Αλγόριθμοι για γραμμική μείωση διαστάσεων

3.1.1 PCA

3.1.2 MDS

3.2 Αλγόιθμοι για μη γραμμική μείωση διαστάσεων

3.2.1 ISOMAP

3.2.2 Laplassian Eigenmaps

3.2.3 LLE

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση του αλγορίθμου Locally Linear Embeddings

4.1 Βήμα-1: Εύρεση του πίνακα γειτνίασης

4.2 Βήμα-2: Κατασκευή του Laplacian

4.3 Βήμα-3: Επίλυση του προβλήματος εύρεσης ιδιτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

4.4 Βήμα-4: Επιλογή των τελικών διαστάσεων

Κεφάλαιο 5

Πειράματα

5.1 Σετ δεδομένων

5.2 Σχεδιασμός και οργάνωση των πειραμάτων

5.3 Αποτελέσματα

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6.1 Συμπεράσματα για τα πειράματα

6.2 Συμπεράσματα για τον αλγόριθμο Locally Linear Embeddings

6.3 Συμπεράσματα για την μείωση διαστάσεων σε αφαρμογές μηχανικής μάθησης και εξόρυξης γνώσης