Limiti

~ by Katsu Curry

Continuità

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = e \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad \forall a>1, \forall b>0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{[\log(x)]^a}{x^b} = 0 \quad \forall a>0, \forall b>0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \qquad \lim_{x\to 0^+} x\log x = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Punti dei limiti

1. Punto isolato di $A \longrightarrow A \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{x_0\}$
2. Punto di accumulazione per $A \longrightarrow A \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
3. Punto interno ad A

Teoremi algebrici

Dati $f,g : A \to \mathbb{R}$, x_0 pto di acc. di A, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$

Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \ell_1+\ell_2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \ell_1\cdot \ell_2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \ell_1/\ell_2$$

Dati $A,B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A\to\mathbb{R}$, $y: B\to\mathbb{R}$, $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ con x_0 pto di acc. per A, y_0 pto di acc. per B t.c. $\exists\, \varepsilon>0$ per cui $f(x)\neq y_0$ per ogni $x\in A\cap(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ e $\lim_{x\to y_0} g(x) = \ell$ allora:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$$

Dati $f,g : A\to\mathbb{R}$, $\exists\,\varepsilon>0$ t.c. $f(x)>0$ $\forall x\in A\cap(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$. Allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \ell_1^{\ell_2}$$

Confronto a 2

Se $f(x) \leq g(x)$

1) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

2) se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

3) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ allora $\ell_1 \leq \ell_2$

Confronto a 3

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Continuità

una funzione é continua in x_0 se

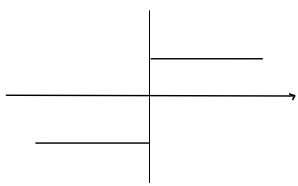
1. x_0 é un punto isolato
2. x_0 é un punto di accumulazione e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. $f(x)$ é continua su $A \subseteq \mathbb{R}$ se é continua $\forall x_0 \in A$.

Punti di discontinuità

Discontinuità di prima specie (salto)

Esistono finiti i due limiti sinistro e destro, ma non sono uguali.

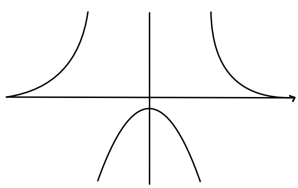
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ entrambi finiti



Discontinuità di seconda specie

Almeno uno dei 2 limiti, sinistro o destro, é infinito oppure non esiste.

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases} \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases}$



Discontinuità di terza specie (eliminabile)

I due limiti sinistro e destro esistono finiti e sono uguali tra loro, ma non coincidono con la valutazione della funzione nel punto (a patto che $x_0 \in Dom(f)$)

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono finiti e $\neq f(x_0)$

oppure

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono finiti e $x_0 \notin Dom(f)$