~ by Katsu Curry

Serie numeriche

Come studiare una serie?

1. Teoremi algebrici
2. Condizione necessaria per la convergenza
3. Serie note

↳ Telescopiche $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+k})$

↳ geometriche $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$
→ diverge a $+\infty$ se $a \geq 1$
→ converge a $\frac{1}{1-a}$ se $-1 < a < 1$
→ indeterminata se $a \leq -1$

↳ armoniche generalizzate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\alpha > 0$
→ converge se $\alpha > 1$
→ diverge se $\alpha \leq 1$

↳ armoniche logaritmiche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$
→ converge se $\alpha > 1$
→ diverge se $\alpha \leq 1$

4. Casi noti

↳ a_n def.^{nte} ≤ 0 ⟶ trasf. in def.^{nte} ≥ 0
↳ a_n def.^{nte} ≥ 0 ⟶ condizione necessaria per la convergenza
⟶ criterio del rapporto / radice
⟶ conf. / conf. asintotico
⟶ Cauchy
↳ a_n segno variabile → convergenza assoluta
↳ a_n segno alterno → convergenza assoluta
→ Liebnitz

a_n def.^{nte} ≥ 0

criterio della radice

Sia a_n def.^{nte} ≥ 0 se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora

- $\ell < 1$ $\sum a_n$ converge
- $\ell > 1$ $\sum a_n$ diverge a $+\infty$
- $\ell = 1$ FAIL

criterio del rapporto

Sia a_n def^{nte} ≥ 0. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora

- $\ell < 1$ $\sum a_n$ converge
- $\ell > 1$ $\sum a_n$ diverge a $+\infty$
- $\ell = 1$ FAIL

criterio del confronto asintotico

Dati $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ def.^{nte}, se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty) \quad [\ell \neq 0, \ell \neq +\infty]$$

Allora $\sum a_n$, $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento

Cauchy

Sia a_n def.^{nte} ≥ 0 e crescente, allora $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere.

Segno variabile

$\sum |a_n|$ converge $\longrightarrow$ $\sum a_n$ converge

$\sum |a_n|$ diverge a $+\infty$ $\longrightarrow$ FAIL

Segno alterno

Criterio di Liebniz

$\sum (-1)^n \alpha_n$

1. $\alpha_n \geq 0$
2. α_n decrescente def.^{nte}
3. $\alpha_n \longrightarrow 0$

Allora la serie converge