Limiti

~ by Katsu Curry

Continuità

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad \forall a > 1, \forall b > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{[\log(x)]^a}{x^b} = 0 \quad \forall a > 0, \forall b > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad \lim_{x \to 0^+} x \log x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Punti dei limiti

1. Punto isolato di A $\longrightarrow$ $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0\}$
2. Punto di accumulazione per A $\longrightarrow$ $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
3. Punto interno ad A

Teoremi algebrici

Dati $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 pto di acc. di A, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \ell_1 + \ell_2$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) / g(x) = \ell_1 / \ell_2$$

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $y : B \to \mathbb{R}$, $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ con x_0 pto di acc. per A, y_0 pto di acc. per B t.c. $\exists \varepsilon > 0$ per cui $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ e $\lim_{x \to y_0} g(x) = \ell$ allora:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$$

Dati $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) > 0$ $\forall x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \ell_1^{\ell_2}$$

Confronto a 2

Se $f(x) \leq g(x)$

1) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
2) se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
3) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ allora $\ell_1 \leq \ell_2$

Confronto a 3

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

continuità

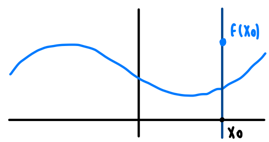
una funzione é continua in x_0 se

1. x_0 é un punto isolato
2. x_0 é un punto di accumulazione e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. $f(x)$ é continua su $A \subseteq \mathbb{R}$ se é continua $\forall x_0 \in A$.

Tipi di discontinuità

1. Discontinuità eliminabile

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$



2. Discontinuità di salto

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$ e $\ell_1 \neq \ell_2 \in \mathbb{R}$