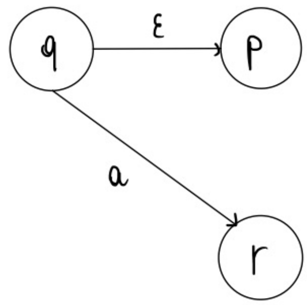
ε-NFA

by KatzuCurry

Sono NFA (automi a stati finiti non deterministici) in cui in più consentiamo di fare le ε-transizioni.
Sono delle transizioni per cui se un automa si trova in un certo stato q, allora l'automa può passare da q allo stato p senza consumare il simbolo.
Ci sono quindi 2 opzioni:
- Dallo stato q si può andare allo stato p senza consumare nessun simbolo;
- Dallo stato q si può andare allo stato a consumando il simbolo a.



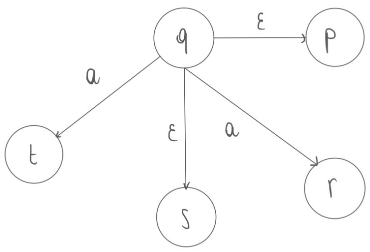
Cosa possono fare gli ε-NFA?
- Accettano linguaggi regolari;
- Ci dovrà essere una trasformazione da ε-NFA a DFA equivalente.

Definizione

Un ε-NFA è una quintupla E= (Q, Σ, δ, q_0, F) dove:
Q è l'insieme degli stati;
- Σ è l'alfabeto dei simboli in ingresso;
- δ è la funzione di transizione degli stati;
- q_0 è lo stato iniziale;
- F è l'insieme degli stati accettanti (o finali).

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$

ESEMPIO

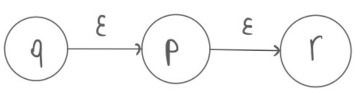


$\delta(q, \varepsilon) = \{p, s\}$ $\delta(q, a) = \{r, t\}$

algoritmo di eclose : transizione da NFA a ε-NFA

ECLOSE(q) = insieme degli stati raggiungibili a partire da q tramite ε-transizioni (ε-mosse), ovvero senza consumare simboli della stringa di input (= q + tutti gli stati raggiungibili seguendo le ε-transizioni).
Dominio di ECLOSE Q → 2^Q

ESEMPIO



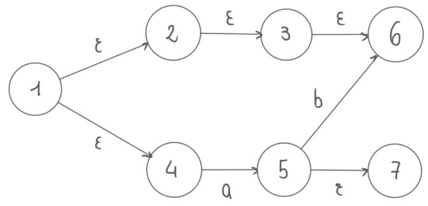
$ECLOSE(q) = \{q, p, r\}$

Definizione formale di ECLOSE (per induzione)

Base $q \in ECLOSE(q)$

Passo se $p \in ECLOSE(q)$ ed esiste una transizione $p \xrightarrow{\varepsilon} r$, allora $r \in ECLOSE(q)$

ESEMPIO



ECLOSE(1) = {1, 2, 3, 6, 4}

ECLOSE(2) = {2, 3, 6}

ECLOSE(3) = {3, 6}

ECLOSE(4) = {4}

ECLOSE(5) = {5, 7}

ECLOSE(6) = {6}

ECLOSE(7) = {7}

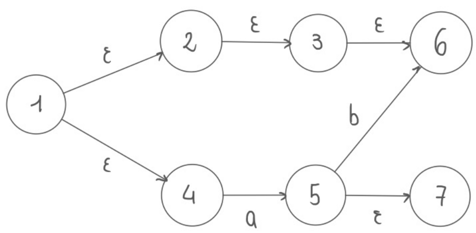
L'ECLOSE può essere definito per un singolo stato o per più stati.

ECLOSE $Q \to 2^Q$

ECLOSE $2^Q \to 2^Q$

$ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(Q)$

ESEMPIO



$ECLOSE(\{3,4,5\}) = ECLOSE(3) \cup ECLOSE(4) \cup ECLOSE(5) =$

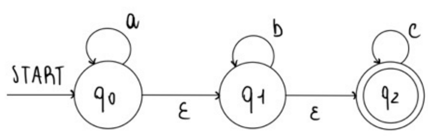
$= \{3,6\} \cup \{4\} \cup \{5,7\} =$

$= \{3, 6, 4, 5, 7\}$

$ECLOSE(\phi) = \phi$

ESEMPIO : ε-NFA → DFA equivalente

ε-NFA



L(E) è denotato dall'espressione regolare $a^* b^* c^*$

DFA (transizione pigra)

$ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

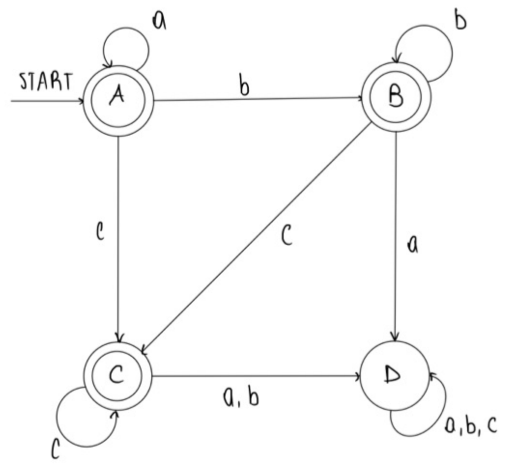
$ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}$

$ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$

<u>NFA</u> : $\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$

<u>ε-NFA</u> : $\delta_D(S, a) = ECLOSE\left(\bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)\right)$

	a	b	c
→ ECLOSE(q_0) * $\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
* ECLOSE(q_1) $\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
* ECLOSE(q_2) $\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



$a^* b^* c^*$

$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, a) = ECLOSE(\delta_N(q_0, a) \cup \delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a)) = ECLOSE(\{q_0\} \cup \emptyset \cup \emptyset) = ECLOSE(\{q_0\}) = ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, b) = ECLOSE(\delta_N(q_0, b) \cup \delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b)) = ECLOSE(\emptyset \cup \{q_1\} \cup \emptyset) = ECLOSE(\{q_1\}) = ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}$

$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, c) = ECLOSE(\delta_N(q_0, c) \cup \delta_N(q_1, c) \cup \delta_N(q_2, c)) = ECLOSE(\emptyset \cup \emptyset \cup \{q_2\}) = ECLOSE(\{q_2\}) = ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$

$\delta_D(\{q_1, q_2\}, a) = ECLOSE(\delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a)) = ECLOSE(\emptyset \cup \emptyset) = ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

$\delta_D(\{q_1, q_2\}, b) = ECLOSE(\delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b)) = ECLOSE(\{q_1\} \cup \emptyset) = ECLOSE(\{q_1\}) = ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}$

$\delta_D(\{q_1, q_2\}, c) = ECLOSE(\delta_N(q_1, c) \cup \delta_N(q_2, c)) = ECLOSE(\emptyset \cup \{q_2\}) = ECLOSE(\{q_2\}) = ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$

$\delta_D(\{q_2\}, a) = ECLOSE(\delta_N(q_2, a)) = ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

$\delta_D(\{q_2\}, b) = ECLOSE(\delta_N(q_2, b)) = ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

$\delta_D(\{q_2\}, c) = ECLOSE(\delta_N(q_2, c)) = ECLOSE(\{q_2\}) = ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$

$\hat{\delta}$ per gli ε-NFA

Dato un $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ $\quad \delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \longrightarrow 2^Q$

esempio $\delta(q, a) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$
$\delta(q, \varepsilon) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

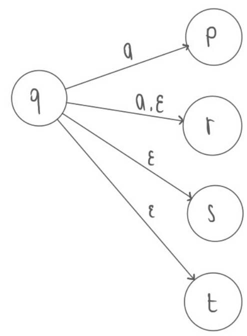
<u>Che cosa può fare questo automa?</u>

Questo automa può scegliere in maniera <u>non deterministica</u> tra i due casi della delta. Scegliendo tra uno oppure l'altro, cambia l'insieme di stati in cui finisce.
Se decide in maniera non deterministica di scegliere la strada con ε (ε-mossa quando viene eseguita. La ε-transizione è la delta con la epsilon), non consuma nulla della stringa in input. In un arco può essere sia con ε sia con un simbolo.

ESEMPIO

$\delta(q, a) = \{p, r\}$

$\delta(q, \varepsilon) = \{r, s, t\}$



$\hat{\delta}(q, w)$ = insieme degli stati raggiungibili da q consumando la stringa w = {p1, p2, ..., pk}.

Quali tipi di linguaggi accetta?

Accettano solo i linguaggi regolari. Sembra più potente, ma non lo è, perchè un ε-NFA può essere trasformato in DFA.

definizione formale (semplice)

Base: se $|w| = 0$, allora $w = \varepsilon$

$$\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, \varepsilon) = ECLOSE(q)$$

Passo: se $|w| > 0$, allora $w = ax$ con $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$

Posto $ECLOSE(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$ e $\{r_1, \dots, r_m\} = ECLOSE\left(\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)\right)$

allora vale: $\hat{\delta}(q, ax) = \bigcup_{j=1}^{m} \hat{\delta}(r_j, x)$.

Versione passo 2: se $|w| > 0$, allora $w = ax$, con $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$. Posto

$P = ECLOSE(q)$
$S = \delta(P, a)$
$R = ECLOSE(S)$

allora vale: $\hat{\delta}(q, ax) = \hat{\delta}(R, x)$

$$\hat{\delta}(q, ax) = \hat{\delta}(ECLOSE(\delta(ECLOSE(q), a)), x)$$

$$\hat{\delta}(q, ax) = \hat{\delta}(ECLOSE(\delta(ECLOSE(s), a)), x)$$

definizione formale (difficile)

Base: se $|w| = 0$, allora $w = \varepsilon$

$$\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, \varepsilon) = ECLOSE(q)$$

Passo: se $|w| > 0$, allora $w = xa$ con $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$. Posto:

$P = \hat{\delta}(q, x)$
$R = \delta(P, a)$

allora vale: $\hat{\delta}(q, w) = ECLOSE(R)$

OSS: $ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(q)$

Se si cancellano le due ECLOSE, si riottiene il delta cappuccio delle NFA. Un NFA è infatti ε-NFA senza le ε-transizioni.

$\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$

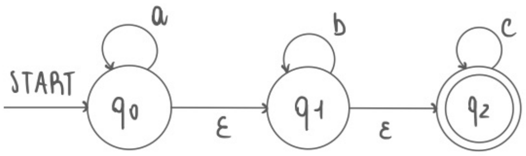
$\hat{\delta}(S, w) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}(q, w)$

$ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

$\delta(\emptyset, a) = \emptyset \quad \forall a \in \Sigma$

$\hat{\delta}(\emptyset, a) = \emptyset \quad \forall a \in \Sigma^*$

ESEMPIO



$\hat{\delta}(q, aabc)$

$P = ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
$S = \delta(P, a) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0\} \cup \phi \cup \phi = \{q_0\}$
$R = ECLOSE(S) = ECLOSE(\{q_0\}) = ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\hat{\delta}(q, aabc) = \hat{\delta}(R, abc) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, abc)$

$P = ECLOSE(\{q_0, q_1, q_2\}) = ECLOSE(q_0) \cup ECLOSE(q_1) \cup ECLOSE(q_2) = \{q_0, q_1, q_2\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}$
$S = \delta(\{q_0, q_1, q_2\}, a) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0\}$
$R = ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, abc) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, bc)$

$P = ECLOSE(\{q_0, q_1, q_2\}) = ECLOSE(q_0) \cup ECLOSE(q_1) \cup ECLOSE(q_2) = \{q_0, q_1, q_2\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}$
$S = \delta(\{q_0, q_1, q_2\}, b) = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b) = \{q_1\}$
$R = ECLOSE(S) = ECLOSE(\{q_1\}) = ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}$

$\hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, bc) = \hat{\delta}(\{q_1, q_2\}, c)$

$P = ECLOSE(\{q_1, q_2\}) = ECLOSE(q_1) \cup ECLOSE(q_2) = \{q_1, q_2\} \cup \{q_2\} = \{q_1, q_2\}$
$S = \delta(\{q_1, q_2\}, c) = \delta(q_1, c) \cup \delta(q_2, c) = \{q_2\}$
$R = ECLOSE(S) = ECLOSE(\{q_2\}) = ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$

$\hat{\delta}(\{q_1, q_2\}, c) = \hat{\delta}(\{q_2\}, \varepsilon) = ECLOSE(\{q_2\}) = ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$

algoritmo di trasformazione ε-NFA $\longrightarrow$ DFA

<u>Definizione</u> Dato un -NFA $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ costruiamo un DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ equivalente ad E (cioè $L(D) = L(E)$).

- $Q = 2^{Q_E}$ inoltre tutti gli stati raggiungibili del DFA corrispondono a insiemi S di stati del -NFA che sono -chiusi, cioè ECLOSE(S) = S;
- $q_D = ECLOSE(q_0)$;
- $F_D = \{ S \in Q \mid S \cap F \neq \varnothing \}$
- δ_D

  $\forall a \in \Sigma$ e $\forall S = \{p_1, \dots, p_k\} \in Q_D$, $\delta_D(S, a)$ si ottiene

  - calcolando $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{r_1, \dots, r_m\}$
  - ponendo $\delta_D(S, a) = ECLOSE(\{r_1, \dots, r_m\})$