グレブナー基底と代数多様体

伊藤克哉@WeLoveBuddha

December 11, 2015

目次

- 谷村大先輩と荒田大先輩の煽りを受けてこの教室に。
- グレブナー基底に興味はあったが知識は 0。
- 代数幾何の知識は僅かにあった。

6 学期はじめの目標

- グレブナー基底と代数幾何の関わりを見たい。
- 具体的な代数多様体を愛でたい。

今学期読んだ本

Cox, David A, Little, John, O'Shea, Donal 著の Ideals, Varieties, and Algorithms (邦題:グレブナー基底と代数多様体) を主に読んだ. その他この本で参照されている論文などを読んだ. グレブナー基底についてはそんなに書いてないけど代数幾何 (古典論) を勉強するにはとても良い本だった.

グレブナー基底とは

$R = K[X_1, \cdots, X_n]$ という多項式と $I \subset R$ イデアルを考える.
$g \in I$ であることの判定法を与えるのがグレブナー基底.

定理

$\{f_1, \cdots, f_n\}$ を I のグレブナー基底とする
$g \in I \Leftrightarrow g$ を $\{f_1, \cdots, f_n\}$ で割った余りが 0

Computer Algebra System

コンピューター上で数式を処理するためのソフトを Computer Algebra System という. グレブナー基底を計算するのにも必要.

名前	ライセンス	特徴
Mathematica	学生$140	代表格
Maxima	Free	Mathematica に引けをとらない
Axiom	Free	代数もできる
Macaulay2	Free	代数幾何に強い
Sympy	Free	Python ベースで書きやすい

- 初め：Cox.et.al の「グレブナー基底と代数多様体」を読む
- その後：Cox「素イデアルを判定するアルゴリズムがあるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Python で実装をしようとする。
- arχiv 「グレブナー基底を使ってコホモロジーが計算できるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Macaulay2 で実装しようとする。
- 実装は辛い。

6 学期中の私

- 初め：Cox.et.al の「グレブナー基底と代数多様体」を読む
- その後：Cox「素イデアルを判定するアルゴリズムがあるよ」
- → 論文をあさり Python で実装をしようとする。
- arχiv 「グレブナー基底を使ってコホモロジーが計算できるよ」
- → 論文をあさり Macaulay2 で実装しようとする。
- 実装は辛い。

- 初め：Cox.et.al の「グレブナー基底と代数多様体」を読む
- その後：Cox「素イデアルを判定するアルゴリズムがあるよ」
- → 論文をあさり Python で実装をしようとする。
- arχiv 「グレブナー基底を使ってコホモロジーが計算できるよ」
- → 論文をあさり Macaulay2 で実装しようとする。
- 実装は辛い。

6 学期中の私

- 初め：Cox.et.al の「グレブナー基底と代数多様体」を読む
- その後：Cox「素イデアルを判定するアルゴリズムがあるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Python で実装をしようとする。
- arχiv 「グレブナー基底を使ってコホモロジーが計算できるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Macaulay2 で実装しようとする。
- 実装は辛い。

6 学期中の私

- 初め：Cox.et.al の「グレブナー基底と代数多様体」を読む
- その後：Cox「素イデアルを判定するアルゴリズムがあるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Python で実装をしようとする。
- arχiv 「グレブナー基底を使ってコホモロジーが計算できるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Macaulay2 で実装しようとする。
- 実装は辛い。

6 学期中の私

- 初め：Cox.et.al の「グレブナー基底と代数多様体」を読む
- その後：Cox「素イデアルを判定するアルゴリズムがあるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Python で実装をしようとする。
- arχiv 「グレブナー基底を使ってコホモロジーが計算できるよ」
- $\rightarrow$ 論文をあさり Macaulay2 で実装しようとする。
- **実装は辛い。**

結果 1:グレブナー基底に関する知見を得た

- グレブナー基底のキーとなる性質は最初に述べた
- 可換環:準素分解・素イデアルの判定
- 代数幾何:次元の計算・コホモロジーの計算
- 暗号理論:多変数公開鍵暗号

結果 2:準素分解のアルゴリズムをしった

- Gianni, P.; Trager, B.; Zacharias, G.: Gröbner Bases and Primary Decomposition of Polynomial Ideals. J. Symb. Comp. 6, 149–167 (1988).
- Shimoyama, T.; Yokoyama, K.: Localization and Primary Decomposition of Polynomial ideals. J. Symb. Comp. 22, 247–277 (1996).

などのアルゴリズムを勉強した. 実装は出来なかった.

まとめ

- グレブナー基底はすごい.
- 代数幾何は楽しい.

今後

- 論文はたくさん書かれているけど実装はされてない。
- SymPy を完成させたい。
- 実装力がほしい。

おまけ

問題

$x^2+y^2=16, x^3+y^3=44$ という条件下で $x+y$ の値を求めよ.

という問題をグレブナー基底を使って解いてみる.
$I=\langle x^2+y^2=16, x^3+y^3=44, s-(x+y)\rangle$ の生成元を求める
その生成元で s だけで生成されているものを見れば $x+y$ の値が求まる.

```
i1 : R=RR[x,y,s]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : I=ideal(x^2+y^2-16,x^3+y^3-44,s-(x+y))
              2    2         3    3
o2 = ideal (x  + y  - 16, x  + y  - 44, - x - y + s)
o2 : Ideal of R

i3 : gens gb I
o3 = | x+y-s y2-ys+.5s2-8 s3-48s+88 |
              1       3
o3 : Matrix R  <--- R
```

より $s^3 - 48s + 88 = (s-2)(s^2 + 2s - 44) = 0$ を解くと $x + y = 2$