損害保険数理

伊藤

November 6, 2015

Contents

危険理論とは何か

危険理論とは

確率過程の考え方を使って保険会社の収支がマイナスに転じる"破産確率"を計算するもの.

まずは保険会社の収支がどのような確率過程に従っているかを調べよう.

クレーム件数過程

クレーム件数過程 N_t が満たすべき条件

- 時刻 0 での発生件数は 0
- $(s,t]$ と $(u,v]$ の期間で発生するクレーム件数は独立.
- $(0,s]$ と $(t,s+t]$ で発生するクレーム件数は独立.
- 微小時間内に 2 件以上クレームは発生しない.
- t 時間でクレーム発生は λt のポアソン分布にしたがう.

これを数式で表すと.

- $N_0 = 0$
- $0 \le s < t \le u < v$ のとき,$N_t - N_s$ と $N_v - N_u$ は独立.
- $N_{s+t} - N_t$ と N_s は独立.
- $P(N_{s+t} - N_s \le 2) = o(t)$
- $P(N_{s+t} - N_s = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

このような状況を指して N_t はポアソン過程に従っているという.

クレーム総額過程

ではクレーム総額 S_t はどんな過程に従うか.

クレーム総額過程 S_t

- 時刻 t までのクレーム件数 N_t はポアソン過程.
- 個々のクレーム額 $X_1, X_2, \cdots$ は同じ分布に従う確率変数.
- N_t と $X_1, X_2, \cdots$ は互いに独立.
- このとき $S_t = X_1 + \cdots + X_{N_t}$ は複合ポアソン過程に従うという.

サープラス過程

保険会社の収支 (収入から支出を引いて溜まっていったもの) を
サープラスといって U_t で表す. これを S_t を用いて表してみよう.

サープラス過程 U_t

- $[0,t]$ での保険料収入は ct
- 単位時間での保険料 $c=(1+\theta)\lambda\mu$
  λ は件数の期待値.μ はクレーム額の期待値.θ は安全割合と呼ばれる.
- このとき $U_t=U_0+ct-S_t$ という過程に従う

これをルンドベリモデルという.

破産確率

破産とはサープラス U_t が 0 より小さくなることである.
$[0, v]$ で破産しない確率は $P(\min_{0 \le t \le v} U_t \ge 0)$ であるので,

破産確率 ε

- **初期サープラス U_0 の会社が $[0, v]$ で破産する確率 $\varepsilon(U_0, v)$ は**

$$\varepsilon(U_0, v) = 1 - P(\min_{0 \le t \le v} U_t \ge 0)$$

- **初期サープラス U_0 の会社が破産する確率 $\varepsilon(U_0)$ は**

$$\varepsilon(U_0) = \lim_{v \to \infty} \varepsilon(U_0, v)$$

- **破産する時刻を $T = \min\{t | U_t < 0\}$ とおくと,**

$$\varepsilon(U_0, v) = P(T \le v), \varepsilon(U_0) = P(T \le \infty)$$

マルチンゲール

破産確率のルンドベリの定理を導くためにマルチンゲールを導入する.

マルチンゲール

離散確率過程 N_t $(t = 0, 1, 2, \cdots)$ がマルチンゲールであるとは,

$$E(N_{t+1}|N_1, \cdots, N_t) = N_t$$

が成り立つことである. つまり,$t+1$ での期待値は N_t にのみ影響される.

マルチンゲール

T がマルチンゲールの停止時刻であるとは
事象 $\{T \leq t\}$ が $N_1, \cdots, N_t$ にのみ依存することをいう.

たとえば, 最初の持ち点が 5 で, コインを投げて表がでれば $+1$ 点, 裏がでれば -1 点というゲームはマルチンゲールであり,
T を最初に持ち点が 0 になる時刻とすれば,$T \leq t$ は $N_1, \cdot, N_t$ にのみ依存するので停止時刻.

マルチンゲールの任意停止定理

マルチンゲールの任意停止定理

マルチンゲールの停止時刻での値は N_0 にのみよる. つまり,

$$E(N_T) = E(N_0)$$

マルチンゲールの任意停止定理を用いて, 破産確率を計算する.
X_i を独立かつ同一の分布に従う確率変数の列とすると,

$$M_t = \frac{\exp(\tau \sum_{i=1}^{t} X_i)}{E(\exp(\tau \sum_{i=1}^{t} X_i)}$$

はマルチンゲールである.

ルンドベリの定理の導出

$$M_t = \frac{\exp(\tau \sum_{i=1}^t X_i)}{E(\exp(\tau \sum_{i=1}^t X_i))}$$

に対して,$E(\exp(\tau \sum_{i=1}^t X_i) = 1$ **となるような** $\tau = -r$ **を選ぶ**.
また,$z = U_0, X_i = c - W_i, W_i$ **は** i **における支払総額**. **とすると**,

$$M'_t = \exp(\tau(z + \sum_{i=1}^t X_i)) = \exp(-r(U_0 + ct - S_t)) = \exp(-rU_t)$$

となってこれもマルチンゲール. **ここで** T **を破産時刻として**, **マルチンゲールの任意停止定理を用いると**,

$$E(\exp(-rU_T)) = E(\exp(-rU_0))$$

より,$E(\exp(-rU_T)|T < \infty)\underline{P(T < \infty)} = \exp(-rU_0)$ **が得られる**.

ルンドベリの定理

各期間 i での支払い保険金 W_i が独立で同一の分布に従うとき, 破産確率は,

$$\varepsilon(U_0) = \frac{\exp(-rU_0)}{E(\exp(-rU_T)|T < \infty)}$$

U_0 は期首サープラスであり,r は調整係数と呼ばれる.
特に

$$\varepsilon(U_0) \le \exp(-rU_0)$$

が成り立ち, これをルンドベリの不等式という.

ルンドベリモデルについて

調整係数は $1+(1+\theta)\mu R = E(\exp(RX))$ **の解であるが**, **近似的に**,

$$1+(1+\theta)\mu R = E(e^{RX}) \fallingdotseq E(1+RX+\frac{R^2X^2}{2!}) = 1+E(X)R+\frac{E(X^2)}{2}R^2$$

として以下を得る

$$R = \frac{2\theta\mu}{E(X^2)}$$

$\varepsilon(U_0) \leq \exp(-RU_0)$ **であったので**,
$U_0 \to$ **大ならば破産確率** $\to$ **小**. **調整係数** $R \to$ **大ならば破産確率** $\to$ **小**.

ルンドベリモデルについて

連続時間型モデル

各クレーム額の分布を $F(X)$ とする.
$G(u,y)$ を初期サープラス u で破産直後の欠損額が最大 y となる確率とする.

$$G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^y (1 - F(x))dx$$

$$\varepsilon(0) = \lim_{y\to\infty} G(0,y) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}$$

再保険とは

再保険

再保険とは，ある保険会社が危険を分散したり，収益を追求したりするために，自己の保有する保険責任の一部または全部を他の最保険会社に移転し，再保険会社がそれを引き受けるする保険．
簡単に言うと「保険の保険」

出再保険会社 $\rightarrow$(再保険料)$\rightarrow$ 受再保険会社．
出再保険会社 $\leftarrow$(再保険金)$\leftarrow$ 受再保険会社

再保険の形態

比例再保険

契約に払った全ての保険金に対して一定の割合の再保険金がつく.
再保険金の分散が最小になる.

ELC 再保険

ある契約が一定の損害額を超えた場合にその超過分の再保険金がつく.
Excess of Loss Cover.

ストップロス再保険

全ての契約の累積損失が一定の値を超えた場合にその超過分の再保険金がつく.
保有保険金 (=対象外) の分散が最小になる.

再保険料

再保険では純保険料はネット再保険料．営業保険料はグロス再保険料と言う．

ネット再保険料

$$
\begin{aligned}
\text{ネット再保険保険料} &= \text{受再保険会社が負担する保険金の期待値} \\
&= \text{出再保険会社が回収する保険金の期待値}
\end{aligned}
$$

比例再保険のネット再保険料

元受け保険料 P, 出再割合 α のとき

$$\text{出再保険料 } P_\alpha = \alpha P$$

再保険料の算出

ELC 再保険

各保険金は X. エクセスポイント m. クレーム件数期待値 λ のとき.

$$P_m = \lambda \int_m^\infty (x - m) dF_X(x)$$

ストップロス再保険

クレーム総額 S. エクセスポイント d とする. 回収再保険金

$$I_d = S - d \ (x > d \text{ のときのみ})$$

$$P_d = E(I_d) = \int_d^\infty (x - d) dF_S(x)$$

リスク評価の数理

リスク評価とは次の 3 つからなる.

- 極値理論 $\cdots$ 極稀に発生する巨大な損失に関して
- リスクの統合 $\cdots$ 複数のリスクを保有する際の合算
- リスク尺度 $\cdots$ リスクを表す確率変数 X に対する尺度 $\rho(X)$

極値理論

最初の極値理論は以下の様な 2 つのモデルからなる

- **最大ブロックモデル** $\cdots$ **同一の分布に従う** $X_1, \cdots, X_n$ **の** $\max(X_1, \cdots, X_n)$ **について**
- **閾値超過モデル** $\cdots$ **ある閾値を超過標本に関するモデル**.

最大ブロックモデル.

Fisher-Tippett の定理

$X_1, \cdots, X_n$ を互いに独立で同一な分布に従う確率変数列とする.
$M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ に大して, ある定数 c_n, d_n が存在して

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \to H$$

ただし,H はフレシュ分布・ワイブル分布・グンベル分布のいずれかである.

極値分布

フレシェ分布・ワイブル分布・グンベル分布

フレシェ分布

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}) & (x > 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

ワイブル分布

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) & (x \geq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

グンベル分布

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$$

MDA

ある分布 F に従う列に対して,c_n, d_n **が存在して**,H **に収束するとき**, F **は** H **の最大値吸引域に属すると言って**,$F \in MDA(H)$ **と書く**.

最大値吸引域

それぞれの極値分布の最大値吸引域に属する分布は以下のようなものである

- フレシェ分布 $\cdots$ パレート分布, コーシー分布, t 分布, F 分布, フレシェ分布
- ワイブル分布 $\cdots$ ベータ分布, 一様分布, ワイブル分布
- リスク尺度 $\cdots$ 指数分布, 正規分布, 対数正規分布, ガンマ分布, 標準ワイブル分布, グンベル分布

閾値超過モデル

超過分布

X を確率変数.F を分布とするこのとき

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

を閾値 u の超過分布関数という. また

$$e(u) = E(X - u | X > u)$$

を平均超過関数という.

超過分布関数に対して以下の様なことが成り立つ.

Pickands-Balkema-de Haan

$F \in MDA(H_\xi)$ と以下は同値.

$$\exists \beta(u) \ : \ \lim_{u \to \infty} \sup_x |F_u(x) - G_{xi,\beta(u)}(x)| = 0$$

ただし,G は一般化パレート分布であり,

$$G_{\xi,\beta(u)}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} \ (\xi \neq 0) \\ 1 - \exp(-x/\beta) \ (\xi = 0) \end{cases}$$

と表される.

リスクの統合とコピュラ

多くのリクスを同時に抱えている場合について，それらのリスクを統合した一つの分布を求める際にコピュラが便利である．

Sklar の定理

F を N 次元分布として,$F_1, \cdots, F_N$ をその周辺分布とする．このとき，次を満たすコピュラ C が一意的に存在する．

$$F(x_1, \cdots, x_N) = C(F_1(x_1), \cdots, F_N(x_N))$$

つまりこのコピュラとは F と $F_1, \cdots, F_N$ の関係を表すための関数であり，実際には様々なコピュラの中から一番現実にマッチしているコピュラを選んで，その関係をみる．

リスク尺度

ある確率変数 X に対してリスク尺度 (準備しておくべき金額)$\rho(X)$ を求める.

Value at Risk

X の信頼水準 α の $Value\ at\ Risk\ VaR_\alpha(X)$ とは

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in R | F_X(x) \geq \alpha\}$$

であり,X というリスクに大して,$VaR_\alpha(X)$ を準備したとき破産する確率は $1 - \alpha$ となる.

Expected Shortfall

X の信頼水準 α の期待ショートフォール $ES_\alpha(X)$ とは

$$ES_\alpha(X) = E[\max(X - VaR_\alpha(X), 0)]$$

であり,X というリスクに大して,$VaR_\alpha(X)$ を準備したとき破産額の期待値である.

コヒーレントリスク尺度

リスク尺度が満たすべき公理を 4 つ上げる.

- $\rho(X+c) = \rho(X) + c$
- $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$
- $\rho(cX) = c\rho(X)$

これらを満たすリスク尺度をコヒーレントリスク尺度という.

特に 1 つめの公理は $\rho(X - \rho(X)) = 0$ **がいえる.**