Chapter.9 確率微分方程式の離散時間近似

伊藤克哉

東京大学

2016/10/03

講義ノート　スライド　コードは
https://github.com/KatsuyaITO/NSofSDE

1. 確率論からの入門
2. 確率微分方程式の数値解析
3. 近似解の実装

情報増大系と適合

以下では $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ という確率空間を考える.

定義 1.1

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ が**情報増大系**であるとは,

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} : sub\sigma\text{-}alg \text{ かつ } 0 \leq s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_s$$

となることである.

また d 次元確率過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ が情報増大系 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ に対して**適合 (adapted)** しているとは, $\forall t \geq 0 \ : \ X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ が $\mathcal{F}_t$ 可測であるということである.

Brown 運動

定義 1.2

確率過程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ が実数値 *Brown* 運動であるとは, 次を満たすことである.

(i) $B_0 = 0$ *a.s.*

(ii) $\forall \omega \in \Omega : B_t(\omega)$ は連続である.

(iii) $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ という任意の細分に対して,$\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_i$ は互いに独立で $N(0, t_i - t_{i-1})$ に従う.

マルチンゲール

定義 1.3

右連続な確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-マルチンゲールであるとは, 次を満たすことである.

(i) $\forall t \geq 0 : \ E[|X_t|] < \infty$

(ii) X は $(\mathcal{F}_t)_t$ 適合である.

(iii) $0 \leq \forall s \leq t : \ E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *a.s.* である.

伊藤積分

定義 1.4 (伊藤積分)

次のようにして確率過程の族を表す.

$$\mathbb{L}_T^2 := \{f : \text{確率過程} \,|\, f_t(\omega) \text{ は可測で } ||f||_{\mathbb{L}_T^2} := E[\int_0^T f_t^2 dt] < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_T^2 = \mathcal{L}_T^2(\mathcal{F}_t) := \{f \in \mathbb{L}_T^2 | f \text{ は } (\mathcal{F}_t) \text{ 適合 }\}$$

伊藤積分の続き

$f = (f_t)$ は次のように表される階段過程であるとする.

$$f_t = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t), \ \ t \in [0, T]$$

(ただし,$\tilde{f}_j$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ 可測で有界な確率変数)
このとき, 確率過程 f の確率積分を,

$$M_t(f) \equiv \int_0^t f_s dB_s := \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j (B_{t \wedge t_j} - B_{t \wedge t_{j-1}})$$

として定める.

また一般の可測な $(\mathcal{F}_t)-$ 適合な確率過程 f に対して,f^n という階段過程の列が存在して,$||f - f^{(n)}||_{\mathbb{L}^2_T} \to 0, \ n \to \infty$ とできる.
故に,f の確率積分を

$$\int_0^t f_s dB_s := \lim_{n\to\infty} M(f^{(n)})$$

によって定める. これは $\mathcal{M}_T$ の元として $f^{(n)}$ のとり方によらず一意的に定まる.
そしてこれを $[0, \infty)$ に拡張して確率積分を定義することもできる.
また同様にして次の確率過程の族を定める.

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) := \{f = (f_t)_{t\geq 0} : \text{確率過程} \ |\forall T > 0 : \ (f_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2_T\}$$

伊藤積分の性質

定理 1.5

確率積分 $M_t(f) = \int_0^t f_s dB_s$ は次をみたす.

(1)

$$M_t(f) \text{ は } \mathcal{F}_t \text{マルチンゲールである.}$$

(2)

$$E(M_t(f)) = 0$$

(3)

$$E(M_t(f)^2) = \int_0^T E(f(t,-)^2)dt$$

(4)

$$M_t(af + bg) = aM_t(f) + bM_t(g) \ a.s.$$

確率微分方程式

定義 1.6

確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が次を満たすとき, **確率微分方程式 (stochastic differential equation)**

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad X_{t_0} = X_0 \tag{1.1}$$

の解であるという.

X は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $\mathcal{F}_t$ 適合かつ可測な $\mathbb{R}$ 値連続確率過程で,

(i)

$$a(t, X_t) \in L^1_{loc}([0, \infty)), \; b(t, X_t) \in L^2(\mathcal{F}_t) \; a.s.$$

(ii) 確率積分方程式

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s$$

を満たす.

解の一意性

定義 1.7

$[t_0, T]$ 上の確率微分方程式が **pathwise unique** な解を持つとは，任意の 2 組の解 $X_t, \tilde{X}_t$ が，

$$P\left(\sup_{t_0 \le t \le T} \left|X_t - \tilde{X}_t\right| > 0\right) = 0$$

を満たすということである．

定理 1.8 (解の一意性)

$[t_0, T]$ 上の確率微分方程式

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \ , \ X_{t_0} = X_0$$

は次の 4 条件を満たすとき

$$\sup_{t_0 \le t \le T} E(|X_t|^2) < \infty$$

を満たすような *pathwise unique* な強解 X_t を $[t_0, T]$ 上持つ

$(A1)$ (可測性) $a(t,x), b(t,x)$ は $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ で L^2 可測.
$(A2)$(Lipschitz 条件) 次を満たす定数 $K > 0$ が存在する.

$$|a(t,x) - a(t,y)| \leq K|x-y|$$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|$$

$(A3)$ 次を満たす定数 $K > 0$ が存在する.

$$|a(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$$

$$|b(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$$

$(A4)$ X_{t_0} は $\mathcal{F}_{t_0}$ 可測で $E(|X_{t_0}|^2) < \infty$ を満たす.

定理 1.9 (伊藤の公式)

$U : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^2 級であるとする.
X_t は次の確率微分方程式の解であるとする.

$$dX_t = e(t, \omega)dt + f(t, \omega)dW_t(\omega)$$

このとき,$Y_t = U(t, X_t)$ は

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \{\frac{\partial U}{\partial t}(u, X_u) + e_u \frac{\partial U}{\partial x}(u, X_u) + \frac{1}{2} f_u^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(u, X_u)\} du$$

$$+ \int_s^t f_u \frac{\partial U}{\partial x}(u, X_u) dW_u$$

を *almost surely* に満たす

```
class Process:
    def show(self):
        plt.plot(self.show_x,self.show_y)
    def at(self,t):
        if t in self.dic:
            return self.dic[t]
        else:
            return self.show_y[
                np.searchsorted(self.show_x, t)]
```

```
class Wiener(Process):
    def __init__(self, start, end,n):
        t = list(np.linspace(start,end,n+1))
        w =[0]
        sigma = math.sqrt(t[1]-t[0])
        for tn in t[:-1]:
            w.append(w[-1]+
                      np.random.normal(0,sigma))
        self.start = start
        self.end = end
        self.t = t
        self.w = w
        self.dic =  dict(zip(t,w))
        self.show_x =  t
        self.show_y = w
```

```python
class Solution(Process):
    def __init__(self,t,f,w):
        self.x = [f(tn,w) for tn in t]
        self.f = f
        self.w = w
        self.t = t
        self.dic = dict(zip(t,self.x))
        self.show_x =  t
        self.show_y = self.x
```

```
class Euler_Maruyama(Process):
    def __init__(self,a,b,x0,w,delta):
        t = list(np.arange(w.start,w.end+delta,delta))
        y =[x0]
        l = len(t)

        for i in range(l-1):
            y.append(y[-1]
                     +a(t[i],y[-1])*(t[i+1]-t[i])
                     +b(t[i],y[-1])*(w.at(t[i+1])-w.at

        self.t = t
        self.w = w
        self.a = a
        self.b = b
        self.x0 = x0
        self.delta = delta
```

PC-Exercise-9.2.1

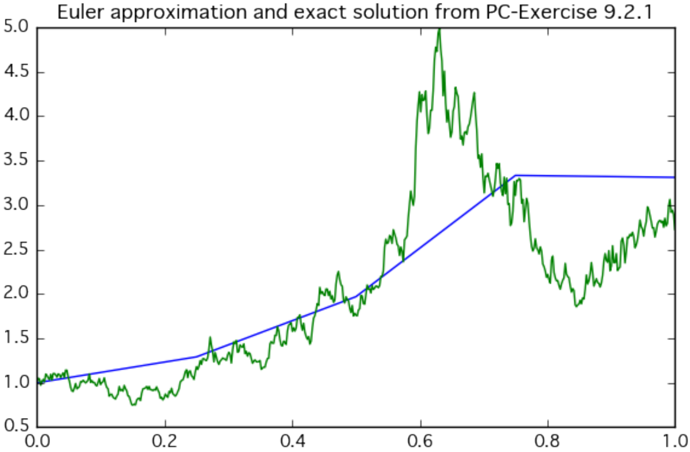
区間 $[0,1]$ に於いて等間隔 $\Delta = 2^{-2}$ のオイラー近似を作成し,$dX_t = 1.5X_t dt + 1.0X_t dW_t,\ X_0 = 1.0$ という確率微分方程式を近似せよ.

```
a921 = lambda t,x: 1.5*x
b921 = lambda t,x: 1.0*x
delta921 = 2**(-2)
x0_921 = 1.0
t0_921 = 0
t1_921 = 1

sol921 = lambda t,w: math.exp(t+w.at(t))

W = Wiener(t0_921,t1_921,2**9)
Y = Euler_Maruyama(a921,b921,x0_921,W,delta921)
X = Solution(W.t,sol921,W)

plt.title("Euler approximation and exact solution from
Y.show()
X.show()
plt.show()
plt.close()
```


Euler approximation and exact solution from PC-Exercise 9.2.1
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

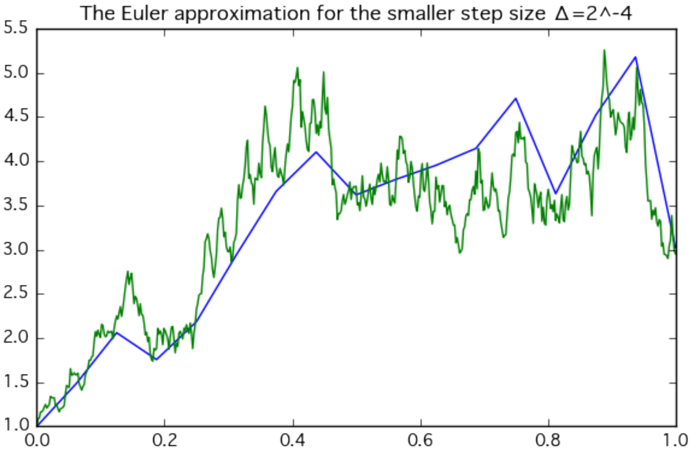
PC-Exercise 9.2.2

PC-Exercise 9.2.1 を間隔を $\Delta = 2^{-4}$ にして繰り返せ.

```
delta922 = 2**(-4)
W = Wiener(t0_921,t1_921,2**9)
Y = Euler_Maruyama(a921,b921,x0_921,W,delta922)
X = Solution(W.t,sol921,W)

plt.title("The Euler approximation for the step size

Y.show()
X.show()
plt.show()
plt.close()
```


The Euler approximation for the smaller step size Δ=2^-4
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

PC-Exercise 9.3.1

$$dX_t = 1.5X_t dt + 1.0X_t dW_t,\ X_0 = 1.0$$

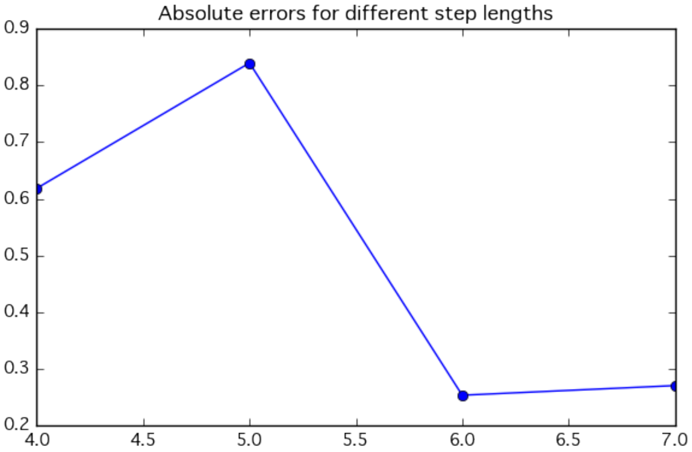
という $[0, 1]$ 上の伊藤過程に対して $\Delta = 2^{-4}$ の等間隔のオイラー近似を $N = 25$ 回繰り返し, 統計的誤差 $\hat{\epsilon}$ を計算せよ. これを $\Delta = 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$ についても繰り返し Δ と $\hat{\epsilon}$ の関係を示せ.

```
N931 = 100
Deltas = [2**(-4),2**(-5),2**(-6),2**(-7)]
LogDeltas = [4,5,6,7]
epsilons = []
for delta in Deltas:
    eps = []

    for i in range(N931):
        W = Wiener(t0_921,t1_921,2**9)
        Y = Euler_Maruyama(a921,b921,x0_921,W,delta)
        X = Solution(W.t,sol921,W)
        eps.append(math.fabs(X.at(1) - Y.at(1)))

    epsilons.append(np.mean(eps))

plt.title("Absolute errors for different step lengths"
plt.plot(LogDeltas,epsilons,"-o")
plt.show()
```


Absolute errors for different step lengths
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
6.5
7.0

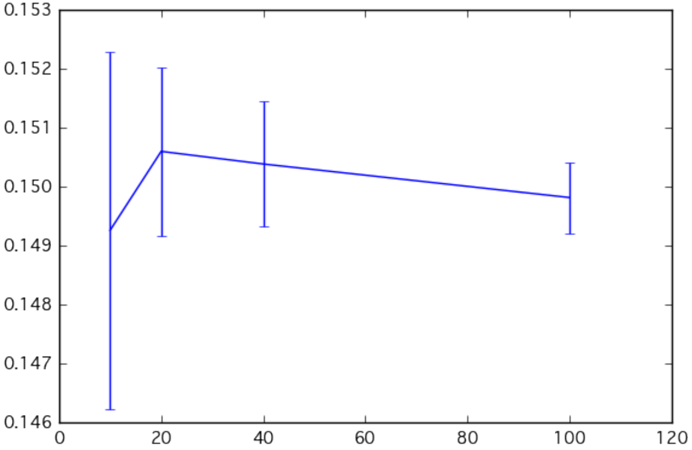
PC-Exercise 9.3.3

$$dX_t = 1.5X_t dt + 0.1X_t dW_t, \; X_0 = 1.0$$

という $[0,1]$ 上の伊藤過程に対して $\Delta = 2^{-4}$ の等間隔のオイラー近似を $N = 25$ 回繰り返し, 更にこれを $M = 10$ 組繰り返すことによって, 絶対誤差 ϵ の 90 これを $M = 20, 40$ and 100 についても繰り返し Δ と ϵ の信頼区間との関係を示せ.

```
Ms = [10,20,40,100]
N  = 100
b933 = lambda t,x: 0.1*x
sol933 = lambda t,w: math.exp(1.495*t+0.1*w.at(t))

all_eps =[]
all_deltaeps =[]
for M in  Ms:
    print(M)
    epsilons =[]
    for i in range(M):
        eps = []
        for j in range(N):
            W = Wiener(t0_921,t1_921,2**9)
            Y = Euler_Maruyama(a921,b933,x0_921,W,delt
            eps.append(math.fabs(sol933(1,W) - Y.at(1)
        epsilons.append(np.mean(eps))
    all_eps.append(np.mean(epsilons))
```


0.153
0.152
0.151
0.150
0.149
0.148
0.147
0.146
0
20
40
60
80
100
120

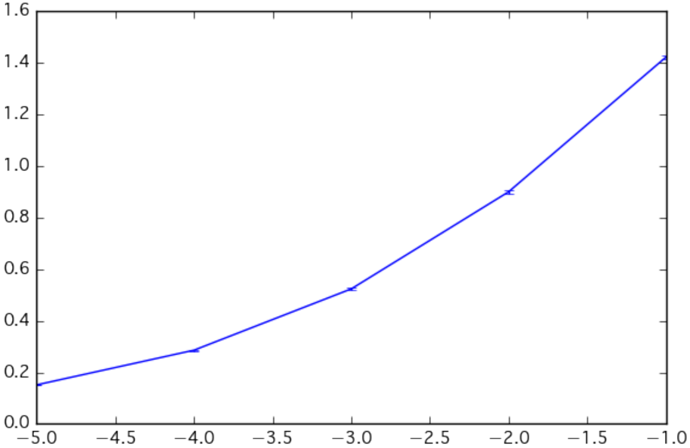
PC-Exercise 9.3.4

$$dX_t = 1.5X_t dt + 0.1X_t dW_t, \ \ X_0 = 1.0$$

という $[0, 1]$ 上の伊藤過程に対して $\Delta = 2^{-2}$ の等間隔のオイラー近似を $N = 25$ 回繰り返し, 更にこれを $M = 100$ 組繰り返すことによって, 絶対誤差 ϵ の 90 %信頼区間を図示せよ. これを,$\Delta. = 2^{-5}, 2^{-6}$ and 2^{-7} についても繰り返し Δ と ϵ の関係を示せ.

```
Deltas = [2**(-1),2**(-2),2**(-3),2**(-4),2**(-5)]
LogDeltas = [-1,-2,-3,-4,-5]
N  = 100
M = 20

all_eps =[]
all_deltaeps =[]
for delta in  Deltas:
    print(delta)
    epsilons =[]
    for i in range(M):
        eps = []
        for j in range(N):
            W = Wiener(t0_921,t1_921,2**10)
            Y = Euler_Maruyama(a921,b933,x0_921,W,delt
            eps.append(math.fabs(sol933(1,W) - Y.at(1)
        epsilons.append(np.mean(eps))
    all_eps.append(np.mean(epsilons))
```

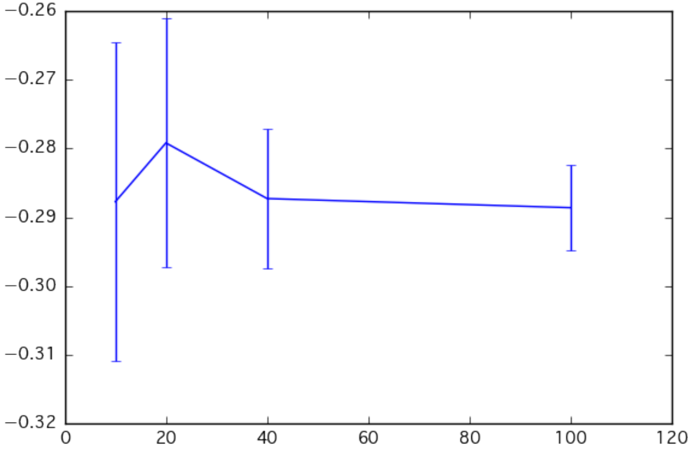

1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−5.0
−4.5
−4.0
−3.5
−3.0
−2.5
−2.0
−1.5
−1.0

PC-Exercise 9.4.1

$dX_t = 1.5X_t dt + 0.1X_t dW_t,\ X_0 = 1.0$ という $[0,1]$ 上の伊藤過程に対して $\Delta = 2^{-4}$ の等間隔のオイラー近似を $N = 100$ 回繰り返し, 更にこれを $M = 20, 40, 100$ 組繰り返すことによって, 平均の誤差 μ の 90 %信頼区間を図示せよ.

```
Ms = [10,20,40,100]
N  = 100
delta = 2**(-4)
mus =[]
delta_mu =[]

for M in  Ms:
    print(M)
    mu_j =[]
    for i in range(M):
        Y_t_j = []
        for j in range(N):
            W = Wiener(t0_921,t1_921,2**9)
            Y = Euler_Maruyama(a921,b933,x0_921,W,delt
            Y_t_j.append(Y.at(1))
        mu_j.append(np.mean(Y_t_j)-math.exp(1.5))
    mus.append(np.mean(mu_j))
    delta_mu.append(stats.t.ppf(1-(1-0.9)/2, M-1) *ma
```

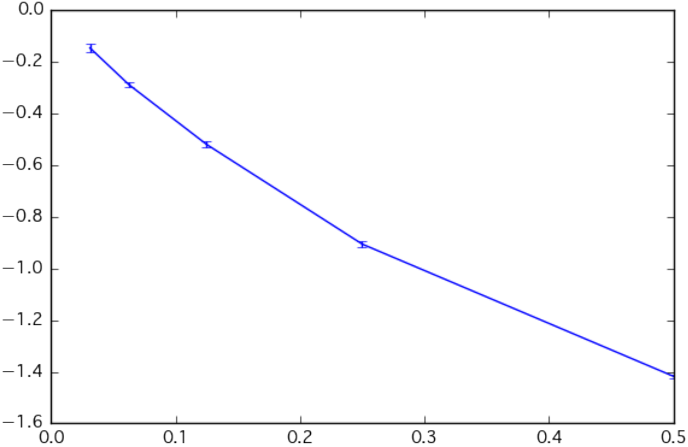

−0.26
−0.27
−0.28
−0.29
−0.30
−0.31
−0.32
0
20
40
60
80
100
120

$dX_t = 1.5X_t dt + 0.1X_t dW_t,\ X_0 = 1.0$ という $[0,1]$ 上の伊藤過程に対して, $M = 20, N = 100$ として,$\Delta = 2^{-3}, \cdots, 2^{-5}$ に対して μ の信頼区間を示せ.

```
Deltas = [2**(-1),2**(-2),2**(-3),2**(-4),2**(-5)]
LogDeltas = [-1,-2,-3,-4,-5]
N  = 100
M = 20

mus =[]
delta_mu =[]

for delta in  Deltas:
    print(M)
    mu_j =[]
    for i in range(M):
        Y_t_j = []
        for j in range(N):
            W = Wiener(t0_921,t1_921,2**9)
            Y = Euler_Maruyama(a921,b933,x0_921,W,delt
            Y_t_j.append(Y.at(1))
        mu_j.append(np.mean(Y_t_j)-math.exp(1.5))
```


0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
−1.2
−1.4
−1.6
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

PC-Exercise9.8.2

$$dX_t = 5X_t dt + dW_t,\ X_0 = 1.0$$

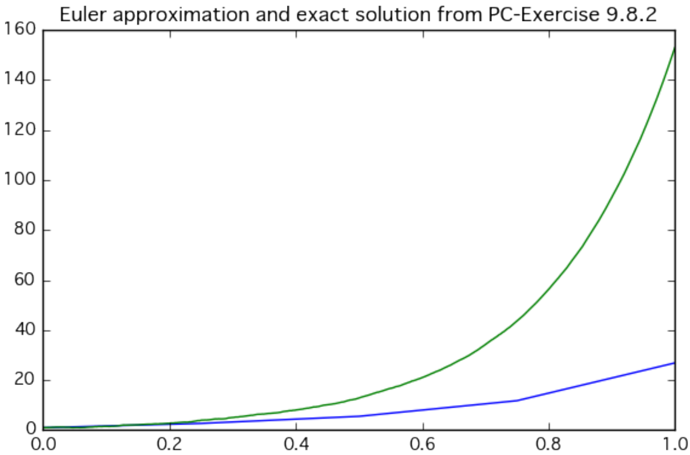
という $[0, 1]$ 上の伊藤過程に対して $\Delta = 2^{-4}$ の等間隔のオイラー近似をせよ.

```
a982 = lambda t,x: 5*x
b982 = lambda t,x: 1
delta982 = 2**(-4)
x0_921 = 1.0
t0_921 = 0
t1_921 = 1

sol921 = lambda t,w: math.exp(t+w.at(t))

W = Wiener(t0_921,t1_921,2**10)
Y = Euler_Maruyama(a982,b982,x0_921,W,delta921)
X = Euler_Maruyama(a982,b982,x0_921,W,2**(-10))

plt.title("Euler approximation and exact solution from
Y.show()
X.show()
plt.show()
plt.close()
```


Euler approximation and exact solution from PC-Exercise 9.8.2
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

PC-Exercise9.8.3

$$dX_t = -5X_t dt + dW_t,\ X_0 = 1.0$$

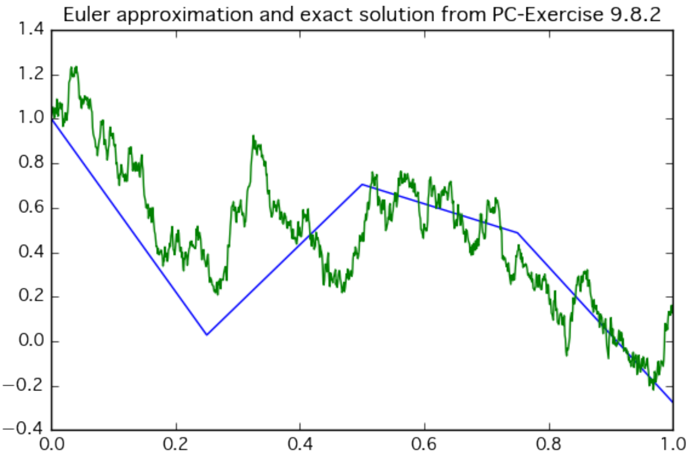
という $[0,1]$ 上の伊藤過程に対して $\Delta = 2^{-4}$ の等間隔のオイラー近似をせよ.

```
a982 = lambda t,x: -5*x
b982 = lambda t,x: 1
delta982 = 2**(-4)
x0_921 = 1.0
t0_921 = 0
t1_921 = 1

sol921 = lambda t,w: math.exp(t+w.at(t))

W = Wiener(t0_921,t1_921,2**10)
Y = Euler_Maruyama(a982,b982,x0_921,W,delta921)
X = Euler_Maruyama(a982,b982,x0_921,W,2**(-10))

plt.title("Euler approximation and exact solution from
Y.show()
X.show()
plt.show()
plt.close()
```


Euler approximation and exact solution from PC-Exercise 9.8.2
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0