Semilinear SPDEs

Katsuya ITO

2016/12/12

目次

1.半線形SPDEの例

本章に於いては,**半線形SPDE(semilinear SPDE)**を考える.

例えば,

$$du = \Delta u\, dt + dW(t, \boldsymbol{x})$$

という線形の確率熱方程式に対して,

$$du = \left[\Delta u + f(u)\right] dt + G(u)\, dW(t, \boldsymbol{x})$$

という更に一般化したSPDEを考えるのである.

半線形SPDEの例

(1)　Allen-Cahn 方程式: 相分離過程を表す方程式

$$du = \left[\varepsilon\,\Delta u + u - u^3\right] dt + \sigma\, dW(t)$$

(2)　Nagumo 方程式: 神経細胞の活性電位モデル

$$du = \left[\varepsilon\, u_{xx} + u(1-u)(u-\alpha)\right] dt + \sigma u(u-1)\, dW(t)$$

(3)　流体の方程式

$$du = \left[\varepsilon\,\Delta u - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u\right] dt + \sigma\, dW(t)$$

2.Q-Wiener過程と伊藤積分

U:可分Hilbert空間上のQ-Wiener過程を定めたい.

まずHilbert空間上の正規分布を定める.

Def.4.38 X:random variable on real Hilbert space U が Gaussian であるとは.

$\forall u \in U : \langle X, u \rangle$ がreal Gaussian random variableになることである.

このとき,Xのcovarianceはtrace class(次のスライド参照)となるのであった.

ただしXのcovarianceは $\langle \mathcal{C}u, v \rangle = Cov(\langle X, u \rangle, \langle X, v \rangle)$

ゆえに, $\mu = E[X]$ とおいて,この過程を $N(\mu, \mathcal{C})$ と表す.

2.Q-Wiener過程と伊藤積分

U:可分Hilbert空間としてU上のQ-Wiener過程を定めたい.(Qがcovarianceになる)

$Q : U \to U$ 線形連続作用素とする.

Qがtrace classであるとは(Def.1.79)

・non-negative definite : $\forall u \in U : \langle u, Qu \rangle \geq 0$

・symmetric $\forall u, v \in U : \langle u, Qv \rangle = \langle Qu, v \rangle$

・Trace L is finite $$Tr\, L = \sum_{j=1}^{\infty} \langle L\phi_j, \phi_j \rangle < \infty$$

2.Q-Wiener過程と伊藤積分

Def.10.6 $\{W(t) : t \geq 0\}$:U値のstochastic processがQ-Wiener過程であるとは

1. $W(0) = 0$ almost surely
2. $\forall \omega \in \Omega : W(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to U$ は連続関数
3. $W(t)$ は $\mathcal{F}_t$-adapted であり, $W(t) - W(s) \quad (t > s)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立
4. $W(t) - W(s) \sim N(0, (t-s)Q)$

をみたすことである.

2.Q-Wiener過程と伊藤積分

Theorem 10.7 (Q-Wiener過程のBrown運動による展開)

Q:trace classとする.Wが Q-Wiener過程であることと

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j}\, \chi_j\, \beta_j(t), \qquad a.s.,$$

という風に, $L^2(\Omega, U)$ で収束する級数で表されることと同値である.

ただし, β_j : $\mathcal{F}_t$- Brownian motion , iid であり,

$\{\chi_j, q_j\}$ はQの直交する固有関数と固有値の組である.

Theorem 10.7 (Q-Wiener過程のBrown運動による展開)の 証明

[証明] ⇒ W:Q-Wiener過程とする.Qの固有値はnon-zeroであるとしてよい.

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle W(t), \chi_j \rangle_U \chi_j$$

という風に,固有値によって展開されるので,

$$\beta_j(t) := \frac{1}{\sqrt{q_j}} \langle W(t), \chi_j \rangle_U$$

というおくことによって,まず,下のように展開することができる.

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j}\, \chi_j\, \beta_j(t), \qquad a.s.,$$

βの性質を確認する

Theorem 10.7 (Q-Wiener過程のBrown運動による展開)の 証明

$\beta_j = 0\ a.s.,\ \beta_j : \mathcal{F}_t$ -adaptedは明らかである.

$\beta_j(t) - \beta_j(s) = \frac{1}{\sqrt{q_j}} \langle W(t) - W(s), \chi_j \rangle_U$ は $\mathcal{F}_s$ と独立である.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\big(\beta_j(t) - \beta_j(s), \beta_k(t) - \beta_k(s)\big) &= \frac{1}{\sqrt{q_j q_k}} \mathbb{E}\left[\langle W(t) - W(s), \chi_j \rangle_U \langle W(t) - W(s), \chi_k \rangle_U\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{q_j q_k}} \langle (t-s) Q \chi_j, \chi_k \rangle_U = (t-s)\,\delta_{jk}.
\end{aligned}$$

であるので,βはiidなBrown運動であることがわかった,

Theorem 10.7 (Q-Wiener過程のBrown運動による展開)の 証明

[証明] $\Leftarrow$ $W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j}\,\chi_j\,\beta_j(t), \qquad a.s.,$:する.(Q-Wienerであることを示す)

まずはL2収束性を示すために,Cauchy列であることを示す.

$W^J(t) := \sum_{j=1}^{J} \sqrt{q_j}\,\chi_j \beta_j(t)$ として部分列を取る.J>Mとして,

$$\|W^J(t) - W^M(t)\|_U^2 = \sum_{j=M+1}^{J} q_j \beta_j(t)^2$$

がなりたつ.両辺の期待値をとって,QがTrace Classであることを使うと収束する.

$$\mathbb{E}\left[\|W^J(t) - W^M(t)\|_U^2\right] = \sum_{j=M+1}^{J} q_j\,\mathbb{E}[\beta_j(t)^2] = t \sum_{j=M+1}^{J} q_j.$$

Theorem 10.7 (Q-Wiener過程のBrown運動による展開)の 証明

これがQ-Wiener過程であることは,各部分和で考えれば明らかであるので,

$L^2(\Omega, C([0,T],U))$ で収束することを示す.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\|W^J(t)-W^M(t)\|_U^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\sum_{j=M+1}^{J} q_j\,\beta_j(t)^2\right] \\
&\le \sum_{j=M+1}^{J} q_j\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\beta_j(t)^2\right] \\
&\le C(T)\sum_{j=M+1}^{J} q_j \to 0 \qquad \text{as } M, J\to\infty.
\end{aligned}
$$

Q-Wiener過程の例: $U = L^2(0,a)$

Ex. $\mathcal{D}(A^{r/2}) \simeq H^r_{per}(0,a)$ であったことを思い出す.

ただし, $Au = u - u_{xx},\ \mathcal{D}(A) = H^2_{per}(0,a)$

$Q \in \mathcal{L}(U)$ をAと同じ固有関数 ϕ_j を持つようなものとして,固有値を

$$q_j = \begin{cases} \ell^{-(2r+1+\epsilon)}, & j = 2\ell + 1 \text{ or } j = 2\ell \\ 0, & j = 1. \end{cases}$$

という様に定めると,以下を満たして, $H^r_{per}(0,a)$ のQ-Wiener過程となる

$$\mathbb{E}\left[\|W(t)\|^2_{r/2}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^r\, q_j\, \mathbb{E}[\beta_j(t)^2] < \infty$$

Q-Wiener過程の近似

Q-Wiener過程の部分列は以下のようにして近似できる.

$$W^J(t_{n+1}) - W^J(t_n) = \sqrt{\Delta t_{\mathrm{ref}}} \sum_{j=1}^{J} \sqrt{q_j}\, \chi_j\, \xi_j^n$$

ただし, $\Delta t_{\mathrm{ref}} = T/N_{\mathrm{ref}}$ であり, $\xi_j^n \sim \mathrm{N}(0,1)$ である.

Cylindrical Wiener過程

Q=Iの場合に定義できるように,定義を拡張する.

Def. U:可分Hilbert空間とする.W(t)がcylindrical Wiener過程であるとは,

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \beta_j(t),$$

として表されることである.ただし, $U \hookrightarrow U_1$ がHilbert-Schmitになるように

他のHilbert空間に埋め込まれているとき, $L^2(\Omega, U_1)$ 収束する.

i.e. $\|\iota\|_{HS} = (\sum_{j=1}^{\infty} \|\iota\phi_j\|_{U_1}^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ が成り立っていれば良い.

Q-Wiener過程による伊藤積分

Qに対して, $U_0 := \{Q^{1/2}u : u \in U\}$ として,定義し

$$L_0^2 = \{B : U_0 \to H \mid \|B\|_{L_2^2} < \infty\}$$

$$\|B\|_{L_0^2} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|BQ^{1/2}\chi_j\|^2\right)^{1/2} = \|BQ^{1/2}\|_{\mathrm{HS}(U,H)}$$

という,Banach 空間を定義する.この空間上で伊藤積分を定義する.

Q-Wiener過程による伊藤積分

B:predictable , L_0^2-valued processとする.このとき,Bの積分を

$$\int_0^t B(s)\,dW(s) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t B(s)\sqrt{q_j}\,\chi_j\,d\beta_j(s)$$

によって定義する.

Q-Wiener過程による伊藤積分

Theorem. B:predictable , L_0^2-valued processで次を満たすとする.

$$\int_0^T \mathbb{E}\left[\|B(s)\|_{L_0^2}^2\right] ds < \infty.$$

このとき,Q-Wiener過程によって伊藤積分を定義することができ,

$$\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t B(s)\, dW(s)\right\|^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[\|B(s)\|_{L_0^2}^2\right] ds.$$

というIto isometryが成り立つ.更にこの積分はPredictableになる.

Theoremの証明

まず $L^2(\Omega, H)$ でwell-defであることを証明する.

$$
\begin{aligned}
\|I(t)\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t B(s)\sqrt{q_j}\,\chi_j\, d\beta_j(s) \right\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t B(s)\sqrt{q_j}\,\chi_j\, d\beta_j(s), \phi_k \right\rangle^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle B(s)\sqrt{q_j}\,\chi_j, \phi_k \rangle\, d\beta_j(s) \right)^2
\end{aligned}
$$

Theoremの証明

$$\mathbb{E}\left[\|I(t)\|^2\right] = \sum_{j,k,\ell=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t \langle B(s)\sqrt{q_j}\,\chi_j, \phi_k\rangle\, d\beta_j(s) \int_0^t \langle B(s)\sqrt{q_\ell}\,\chi_\ell, \phi_k\rangle\, d\beta_\ell(s)\right]$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_0^t \mathbb{E}\left[\langle B(s)\sqrt{q_j}\chi_j, \phi_k\rangle^2\right] ds.$$

(iid of BM, Ito-Isometry)

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_0^t \mathbb{E}\left[\langle B(s)Q^{1/2}\chi_j, \phi_k\rangle^2\right] ds$$

(def of Q and eigen-functions)

$$= \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{j,k=1}^{\infty} \langle B(s)Q^{1/2}\chi_j, \phi_k\rangle^2\right] ds.$$

Theoremの証明

$$\mathbb{E}\left[\|I(t)\|^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{j,k=1}^{\infty} \langle B(s)Q^{1/2}\chi_j, \phi_k \rangle^2\right] ds.$$

$$= \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \|B(s)Q^{1/2}\chi_j\|^2\right] ds :$$

$$= \int_0^t \mathbb{E}\left[\|B(s)\|_{L_0^2}^2\right] ds$$

によって,仮定からwell-def性が示された.

3.Hilbert空間上の半線形発展方程式

以下 $$du = \left[-Au + f(u)\right] dt + G(u)\, dW(t), \quad u(0) = u_0,$$

という形の半線形発展方程式について考える.ただし,

H:Hilbert空間として, $u_0 \in H$

-Aは半群を生成するようにとる.f,GはGlobal Lipschitzであるとする.

WはQ-Wiener過程またはCylindrical Wiener過程であるとする.

ここで3種類の解を定義する.

強解・弱解・軟解

u(t):H-valued processがstrong solutionであるとは,次を満たすことであり

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \left[-Au(s) + f(u(s)) \right] ds + \int_0^t G(u(s))\, dW(s), \qquad \forall t \in [0,T].$$

また,weak solution であるとは,

$$\begin{aligned}\langle u(t), v \rangle = \langle u_0, v \rangle &+ \int_0^t \left[-\langle u(s), Av \rangle + \langle f(u(s)), v \rangle \right] ds \\ &+ \int_0^t \langle G(u(s))\, dW(s), v \rangle, \qquad \forall t \in [0,T],\ v \in \mathcal{D}(A),\end{aligned}$$

を満たすことである.

強解･弱解･軟解

またuがmild solutionであるとは,

$$u(t) = \mathrm{e}^{-tA}u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(u(s))\,ds + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} G(u(s))\,dW(s),$$

を満たすことであり,ただし,exp(-tA)は次のように定義される.

$$\mathrm{e}^{-tA}u := \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_j t}\langle u, \phi_j\rangle \phi_j.$$

軟解の存在と一意性

Theorem. A,f,gを上の仮定を満たすものとする.また $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, H)$:する.

この時,[0,T]上で軟解が一意的に存在し,次を満たす.

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega,H)} \le K_T \left(1 + \|u_0\|_{L^2(\Omega,H)}\right)$$

[**Proof**] $\mathcal{H}_{2,T}$ を $\|u\|_{\mathcal{H}_{2,T}} := \sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega,H)}$ というノルムが入った,

H上のpredictable processがなすBanach空間とする.

解の存在と一意性は,次の作用素にcontraction mapping thmを使うことでできる.

証明(軟解の存在と一意性)

$$(\mathcal{J}u)(t) := \mathrm{e}^{-tA}u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(u(s))\,ds + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} G(u(s))\,dW(s).$$

predictableであることは,伊藤積分がpredictableであることから従うので,評価する

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(u(s))\,ds \right\|_{L^2(\Omega,H)} &\le \int_0^t \left\| \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(u(s)) \right\|_{L^2(\Omega,H)} ds \\
&\le \int_0^t \left\| f(u(s)) \right\|_{L^2(\Omega,H)} ds && \text{(Ex.10.7)} \\
&\le \int_0^t L\left(1 + \|u(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\right) ds. && \text{(f:Lipschitz)}
\end{aligned}$$

証明(軟解の存在と一意性)

Ito-isometryによって,

$$\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} G(u(s))\, dW(s)\right\|_{L^2(\Omega,H)}^2 = \int_0^t \mathbb{E}\left[\|A^{(1-\zeta)/2}\mathrm{e}^{-(t-s)A}A^{(\zeta-1)/2}G(u(s))\|_{L_0^2}^2\right] ds$$

$$\leq \int_0^t \|A^{(1-\zeta)/2}\mathrm{e}^{-(t-s)A}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 ds\, L^2\left(1+\sup_{0\leq s\leq t}\|u(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\right)^2.$$

(Ex.10.7 とG:Lipschitz)

$$\leq K\frac{T^{\zeta/2}}{\zeta^{1/2}} L\left(1+\sup_{0\leq s\leq T}\|u(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\right)$$

Ex.10.8に $\beta = (1-\zeta)/2,\ 0<\zeta<1$

ζが他の値のときも,Ex.10.8から従う.以上により,写像のwell-def性が確かめられた.

証明(軟解の存在と一意性)

次に,Contraction Mapping Thmを使うため,

$$\|\mathfrak{J}u_1(t) - \mathfrak{J}u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega,H)} \leq 2t\int_0^t L^2\|u_1(s) - u_2(s)\|^2_{L^2(\Omega,H)}\,ds + 2K^2\frac{t^\zeta}{\zeta}L^2\|u_1 - u_2\|^2_{\mathcal{H}_{2,T}}$$

$$\leq 2\left(T^2 + K^2\frac{T^\zeta}{\zeta}\right)L^2\|u_1 - u_2\|^2_{\mathcal{H}_{2,T}}$$

という風に,Contraction Mapping を使う.

解の評価は,上のuの評価に,Gronwallの不等式を使うとでる.

regularity in time

Thm. 軟解が一意的に存在する上の仮定に加えて　$u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{D}(A))$

$$T > 0,\ \epsilon \in (0, \zeta),\ \theta_1 = \min\{\zeta/2 - \epsilon, 1/2\}$$

を仮定すると,

$$\|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^2(\Omega, H)} \leq K_{RT}(t_2 - t_1)^{\theta_1}, \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

さらに

$$\zeta \in [1, 2],\ \theta_2 = \zeta/2 - \epsilon$$

のとき,

$$\left\| u(t_2) - u(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} G(u(s))\, dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, H)} \leq K_{RT2}(t_2 - t_1)^{\theta_2}.$$

regularity in timeの証明

[Proof]　$u(t_2) - u(t_1) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$, を以下のように分解する.

$$\mathrm{I} := \left(e^{-t_2 A} - e^{-t_1 A}\right) u_0,$$

$$\mathrm{II} := \int_0^{t_2} e^{-(t_2 - s)A} f(u(s))\, ds - \int_0^{t_1} e^{-(t_1 - s)A} f(u(s))\, ds,$$

$$\mathrm{III} := \int_0^{t_2} e^{-(t_2 - s)A} G(u(s))\, dW(s) - \int_0^{t_1} e^{-(t_1 - s)A} G(u(s))\, dW(s).$$

さらに　$\mathrm{III} = \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2$ を以下のように分解する.

$$\mathrm{III}_1 := \int_0^{t_1} \left(e^{-(t_2 - s)A} - e^{-(t_1 - s)A}\right) G(u(s))\, dW(s),$$

$$\mathrm{III}_2 := \int_{t_1}^{t_2} e^{-(t_2 - s)A} G(u(s))\, dW(s).$$

regularity in timeの証明

まずIII1の評価をする.(Ito isometry , Gの仮定を用いて)

$$\mathbb{E}\left[\|\mathrm{III}_1\|^2\right] = \int_0^{t_1} \mathbb{E}\left[\|(\mathrm{e}^{-(t_2-s)A} - \mathrm{e}^{-(t_1-s)A})\, G(u(s))\|_{L_0^2}^2\right] ds$$

$$= \int_0^{t_1} \mathbb{E}\left[\|A^{(1-\zeta)/2}\, (\mathrm{e}^{-(t_2-s)A} - \mathrm{e}^{-(t_1-s)A})\, A^{(\zeta-1)/2} G(u(s))\|_{L_0^2}^2\right] ds.$$

$$\leq \int_0^{t_1} \|A^{(1-\zeta)/2} (\mathrm{e}^{-(t_2-s)A} - \mathrm{e}^{-(t_1-s)A})\|_{\mathcal{L}(H)}^2 ds$$

$$\times L^2 \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t_1} \|u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}\right)^2.$$

regularity in timeの証明

expとAを変形して,Cauchy-Schwarzをつかうと,Ex.10.8が使えて

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} \|(\mathrm{e}^{-(t_2-s)A} - \mathrm{e}^{-(t_1-s)A})A^{(1-\zeta)/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 ds \\
&\quad = \int_0^{t_1} \|A^{1/2-\epsilon}\mathrm{e}^{-(t_1-s)A} A^{-\zeta/2+\epsilon}(I - \mathrm{e}^{-(t_2-t_1)A})\|_{\mathcal{L}(H)}^2 ds \\
&\quad \le \int_0^{t_1} \|A^{1/2-\epsilon}\mathrm{e}^{-(t_1-s)A}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|A^{-\zeta/2+\epsilon}(I - \mathrm{e}^{-(t_2-t_1)A})\|_{\mathcal{L}(H)}^2 ds. \\
&\quad \le \left(K_1^2 \frac{t_1^{2\epsilon}}{\epsilon}\right)(K_2^2 (t_2 - t_1)^{\zeta-2\epsilon})
\end{aligned}
$$

よって, $$\|\mathrm{III}_1\|_{L^2(\Omega,H)} = \mathbb{E}\left[\|\mathrm{III}_1\|^2\right]^{1/2} \le C_1 (t_2 - t_1)^{\zeta/2-\epsilon}\left(1 + \sup_{0\le s\le T}\|u(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\right).$$

regularity in timeの証明

次に,III2の評価をする.同様にIto-Isometryを使い,Ex10.9を使えるようにすると,

$$\mathbb{E}\left[\|\mathrm{III}_2\|^2\right] = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}\left[\|A^{(1-\zeta)/2}\mathrm{e}^{-(t_2-s)A}A^{(\zeta-1)/2}G(u(s))\|_{L_0^2}^2\right] ds$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \|A^{(1-\zeta)/2}\mathrm{e}^{-(t_2-s)A}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \, ds \, L^2\left(1 + \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} \|u(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\right)^2.$$

$$\leq C_2(t_2 - t_1)^{\zeta/2}\left(1 + \sup_{0 \leq s \leq T} \|u(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\right)$$

ゆえに,

$$\|\mathrm{III}\|_{L^2(\Omega,H)} \leq \|\mathrm{III}_1\|_{L^2(\Omega,H)} + \|\mathrm{III}_2\|_{L^2(\Omega,H)}$$

$$\leq C_{\mathrm{III}}(t_2 - t_1)^{\theta_1}\left(1 + \|u_0\|_{L^2(\Omega,H)}\right)$$

regularity in timeの証明

2つ目の結果を示すことは,これを以下により修正することによってできる.

$$\mathrm{III}_2' := \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{e}^{-A(t_2-s)} - I)\, G(u(s))\, dW(s)$$

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{III}_2'\|_{L^2(\Omega,H)}^2 &\le \int_0^t \|A^{(1-\zeta)/2}(\mathrm{e}^{-A(t_2-s)} - I)\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|A^{(\zeta-1)/2} G(u(s))\|_{L_0^2}^2\, ds \\
&\le \int_{t_1}^{t_2} K_3 |t_2 - s|^{\zeta-1}\, ds\, L^2 \Big(1 + \sup_{t_1 \le s \le t_2} \|u(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\Big)^2.
\end{aligned}$$

ただし,最後の不等式は次の評価を用いた. $\|A^\alpha \mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(H)} \le K\, t^{-\alpha}, \qquad t > 0.$

Additive noiseのとき

Thm.加えて $G(u) = \sigma I$ を仮定する. このとき,

$$u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{D}(A)) \Rightarrow \ u(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{D}(A^{\zeta/2}))$$

Proof.同様に, u(t)を I,II,IIIに分解する.

$$\mathrm{I} := \mathrm{e}^{-tA} u_0, \quad \mathrm{II} := \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(u(s))\, ds, \quad \mathrm{III} := \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} \sigma\, dW(s).$$

IIIを評価する.

$$\mathbb{E}\left[\|\mathrm{III}\|_{\zeta/2}^2\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} \sigma\, dW(s)\right\|_{\zeta/2}^2\right] = \sigma^2 \int_0^t \|A^{\zeta/2} \mathrm{e}^{-(t-s)A}\|_{L_0^2}^2\, ds.$$

Additive noiseのときの証明

今 $$\mathbb{E}\left[\|\mathrm{III}\|_{\zeta/2}^2\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\sigma\, dW(s)\right\|_{\zeta/2}^2\right] = \sigma^2 \int_0^t \|A^{\zeta/2}\mathrm{e}^{-(t-s)A}\|_{L_0^2}^2\, ds.$$

の最後の辺を評価する.

$$\begin{aligned}\int_0^t \|A^{\zeta/2}\mathrm{e}^{-(t-s)A}\|_{L_0^2}^2\, ds &= \int_0^t \|A^{(\zeta-1)/2}A^{1/2}\mathrm{e}^{-(t-s)A}\|_{L_0^2}^2\, ds \\ &\le \|A^{(\zeta-1)/2}\|_{L_0^2}^2 \int_0^t \|A^{1/2}\mathrm{e}^{-(t-s)A}\|_{\mathcal{L}(H)}^2\, ds\end{aligned}$$

これは,Ex.10.8とAに対する仮定によって有限であるので,ok.

有限差分法

PDEのとき

$$u_t = \varepsilon u_{xx} + f(u), \qquad u(0,x) = u_0(x),$$

を $x_j = jh$ という離散化した点で近似する.

$$u_{xx}(t,x_j) = \frac{u(t,x_{j+1}) - 2u(t,x_j) + u(t,x_{j-1})}{h^2} + r_j(t),$$

より,以下を計算すればよい.

$$\frac{d}{dt}u(t,x_j) = \varepsilon\left(\frac{u(t,x_{j+1}) - 2u(t,x_j) + u(t,x_{j-1})}{h^2}\right) + f(u(t,x_j)) + r_j(t)$$

有限差分法

よって,これをベクトルでまとめることによって,次の近似法を得る.

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\varepsilon \, \mathrm{A}^{\mathrm{D}} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{r}(t),$$

ただし,

$$A^{\mathrm{D}} := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

有限差分法

これをSPDEに当てはめると.

$$du_J = \left[-\varepsilon A^{\mathrm{D}} u_J + f(u_J)\right] dt + \sigma\, dW_J(t),$$

となる.これにsemi-implict Euler-Maruyamaを用いると,

$$u_{J,n+1} = \left(I + \Delta t\, \varepsilon A^{\mathrm{D}}\right)^{-1} \left[u_{J,n} + f(u_{J,n})\Delta t + \sigma\, \Delta W_n\right]$$

ただし, $t_n = n\Delta t$ として,離散化して, $u_{J,n}$ $u_J(t_n)$ 近似である.

Galerkin法と半陰的Euler法

$\widetilde{V} \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ を有限次元部分空間として， $\widetilde{P}: H \to \widetilde{V}$ 直交射影とする.

$$\langle \tilde{u}(t), v \rangle = \langle \tilde{u}_0, v \rangle + \int_0^t \left[-a(\tilde{u}(s), v) + \langle f(\tilde{u}(s)), v \rangle \right] ds$$
$$+ \left\langle \int_0^t G(\tilde{u}(s))\, dW(s), v \right\rangle, \qquad t \in [0,T],\ v \in \widetilde{V}$$

これをTest functionを選んで,射影すると,次のようにGalerkin近似が得られる.

Galerkin法と半陰的Euler法

$$d\tilde{u} = \left[-\widetilde{A}\,\tilde{u} + \widetilde{P}\,f(\tilde{u})\right] dt + \widetilde{P}\,G(\tilde{u})\,dW(t),$$

ただし, $\langle \widetilde{A}w, v \rangle = a(w,v), \qquad \forall w, v \in \widetilde{V}$

であり, $a(u,v) := \langle u, v \rangle_{1/2}$ と定義したのであった.

ここで,同様にsemi-implicit Eulerを使うと. 以下のように近似できる.

$$\tilde{u}_{n+1} = (I + \Delta t\,\widetilde{A})^{-1}(\tilde{u}_n + \widetilde{P}\,f(\tilde{u}_n)\,\Delta t + \widetilde{P}\,G(\tilde{u}_n)\,\Delta W_n)$$

$$\tilde{u}_{n+1} = (I + \Delta t\,\widetilde{A})^{-1}\left(\tilde{u}_n + \widetilde{P}\,f(\tilde{u}_n)\,\Delta t + \widetilde{P}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{G}(s;\tilde{u}_n)\,dW(s)\right)$$

Galerkin法と半陰的Euler法

Def. G をある $\zeta \in (0,2]$ に対して,Lipschitz条件を満たしているとする.

$\mathcal{G} : \mathbb{R}^+ \times H \to L_0^2$ がGを良く近似しているとは, 次の2つを満たすこと.

$$\|\mathcal{G}(s;u_1) - \mathcal{G}(s;u_2)\|_{L_0^2} \le L\|u_1 - u_2\|, \qquad \forall s > 0,\ u_1,u_2 \in H,$$

$$\|\widetilde{P}(G(u(s)) - \mathcal{G}(s;u(t_k)))\|_{L^2(\Omega,L_0^2)} \le K_{\mathcal{G}}(|s - t_k|^\theta + \delta^\zeta),$$

$$t_k \le s < t_{k+1}$$

Galerkin法と半陰的Euler法

Thm. 次の4条件を満たす時,Galerkin法は次のオーダーで収束する.

(1)軟解が一意的に存在する条件をみたす.

(2) $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{D}(A))$

(3) 次を満たすδを取る. $\|(\widetilde{A}^{-1} - A^{-1})f\| \leq C\,\delta^2 \|f\|, \qquad \forall f \in H$

$$\|v\| \leq C\delta^{-2}\|A^{-1}v\|, \qquad \forall v \in \widetilde{V}.$$

(4) $\mathcal{G} : \mathbb{R}^+ \times H \to L_0^2$ はあるθについてGを良く近似している.

$\theta_1 := \min\{\zeta/2 - \epsilon, 1/2\}$ とおく.

Galerkin近似と半陰的Euler法

Thm.(続き)

$\zeta \in [1, 2]$ のとき.

$$\max_{0 \le t_n \le T} \| u(t_n) - \tilde{u}_n \|_{L^2(\Omega, H)} \le K(\Delta t^{\theta_1} + \delta^{\zeta} \Delta t^{-\epsilon} + \Delta t^{\theta}).$$

$\zeta \in (0, 2]$ のとき.

$$\max_{0 \le t_n \le T} \| u(t_n) - \tilde{u}_n \|_{L^2(\Omega, H)} \le K(\Delta t^{\theta_1} + \Delta t^{\theta}),$$