0.1 面倒な計算

定理 1 (解の一意性) $[t_0,T]$ 上の確率微分方程式

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dW_t\ ,\ X_{t_0} = X_0$$

は次の 4 条件を満たすとき

$$\sup_{t_0\le t\le T} E(|X_t|^2) < \infty$$

を満たすような *pathwise unique* な強解 X_t を $[t_0,T]$ 上持つ
$(A1)$ *(可測性)* $a(t,x), b(t,x)$ は $[t_0,T]\times\mathbb{R}$ で L^2 可測.
$(A2)$*(Lipschitz 条件)* 次を満たす定数 $K>0$ が存在する.

$$|a(t,x)-a(t,y)| \le K|x-y|$$

$$|b(t,x)-b(t,y)| \le K|x-y|$$

$(A3)$ 次を満たす定数 $K>0$ が存在する.

$$|a(t,x)|^2 \le K^2(1+|x|^2)$$

$$|b(t,x)|^2 \le K^2(1+|x|^2)$$

$(A4)$ X_{t_0} は $\mathcal{F}_{t_0}$ 可測で $E(|X_{t_0}|^2)<\infty$ を満たす.

定義 2 X_t を確率微分方程式の解として, 最大幅が δ の近似解を Y_t^δ とする.
このとき,Y^δ がオーダー $\gamma>0$ で**強収束**する *(converges strongly with order γ)* とは

$$\exists C>0,\ \exists\delta_0>0\ s.t.\forall\delta\in(0,\delta_0):\ E(|X_T - Y^\delta(T)|) \le C\delta^\gamma$$

とできることである.

定義 3 最大幅が δ の近似解 Y^δ が **strongly consistent** であるとは,
次を満たすような, 非負の関数 $c=c(\delta)$ が存在することである.

$$\lim_{\delta\downarrow 0} c(\delta) = 0$$

かつ

$$E\Big(\Big|E(\frac{Y^\delta_{n+1}-Y^\delta_n}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(\tau_n, Y^\delta_n)\Big|^2\Big) \le c(\delta)$$

$$E(\frac{1}{\Delta_n}|Y^\delta_{n+1}-Y^\delta_n - E(Y^\delta_{n+1}-Y^\delta_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n,Y^\delta_n)\Delta W_n|^2) \le c(\delta)$$

定理 4 解の一意性 *(0.1.1)* の仮定 *A1-A4* を満たすような自励系確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t\ ,\ X_{t_0} = X_0$$

を考える. このとき *strongly consistent* な等間隔の近似解 Y^δ は解 X_t に強収束する.

>証明

$0 \leq t \leq T$ として

$$Z(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} E(|Y^{\delta}_{n_s} - X_s|^2)$$

とおく. ここで証明すべきは,

$$Z(t) \leq C(\delta + c(\delta))$$

である. 実際, それを証明すれば,Lyapunov の不等式によって,

$$E(|Y^{\delta}(T) - X_T|) \leq \sqrt{Z(T)} \leq \sqrt{C(\delta + c(\delta))}$$

とできるので強収束することがわかる.

まず $Z(t)$ の式に定義から明らかな次の 2 式を代入する.

$$X_s = X_0 + \int_0^s a(X_r)dr + \int_0^s b(X_r)dW_r$$

$$Y^{\delta}_{n_s} - X_0 = Y^{\delta}_{n_s} - Y_0 = \sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n)$$

これにより,

$$Z(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n) - \int_0^s a(X_r)dr - \int_0^s b(X_r)dW_r\big|^2\big)$$

を得る. 更にこれに対して, まず最初の $\sum$ の項を

$$\sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n) = \sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n + E(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - E(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n|\mathcal{F}_{\tau_n}))$$

という風に項を追加する. また 2 つの積分の項を

$$\int_0^{\tau_{n_s}} a(Y^{\delta}_{n_r})dr - \sum_{n=0}^{n_s-1} a(Y^{\delta}_n)\Delta_n \geq 0$$

$$\int_0^{\tau_{n_s}} b(Y^{\delta}_{n_r})dW_r - \sum_{n=0}^{n_s-1} b(Y^{\delta}_n)\Delta W_n \geq 0$$

という正の式を加えることによって上から評価する. さらに期待値を各項に分解することによって,

$$Z(t) \leq C_1 \sup_{0 \leq s \leq t} E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(E(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(Y^{\delta}_n)\Delta_n)\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n - E(Y^{\delta}_{n+1} - Y^{\delta}_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y^{\delta}_n)\Delta W_n)\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(a(Y^{\delta}_{n_r}) - a(X_r))dr\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(b(Y^{\delta}_{n_r}) - b(X_r))dW_r\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\int_{\tau_{n_s}}^s a(X_r)dr\big|^2\big) + E\big(\big|\int_{\tau_{n_s}}^s b(X_r)dX_r\big|^2\big)$$

ここで第一項については

$$E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(Y_n^\delta)\Delta_n)\big|^2\big) \leq T\delta\sum_{n=0}^{n_s-1}E\big(\big|E(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(Y_n^\delta)\big|^2\big)$$

次の積分の項は以下のようにして評価する.

$$\begin{aligned} E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(a(Y_{n_r}^\delta) - a(X_r))dr\big|^2\big) &\leq E\big(\int_0^{\tau_{n_s}}1^2dr \times \int_0^{\tau_{n_s}}\big|(a(Y_{n_r}^\delta) - a(X_r))\big|^2dr\big) &(1)\\ &\leq TE\big(\int_0^{\tau_{n_s}}K^2|Y_{n_r}^\delta - X_r|^2dr\big) &(2)\\ &\leq TE\big(K^2\int_0^{\tau_{n_s}}Z(r)dr\big) &(3)\\ &\leq TK^2\int_0^{\tau_{n_s}}Z(r)dr &(4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(b(Y_{n_r}^\delta) - b(X_r))dW_r\big|^2\big) &\leq \int_0^{\tau_{n_s}}E\big(\big|b(Y_{n_r}^\delta) - b(X_r)\big|^2\big)dr &(5)\\ &\leq \int_0^{\tau_{n_s}}E\big(K^2|Y_{n_r}^\delta - X_r|^2\big)dr &(6)\\ &\leq K^2\int_0^{\tau_{n_s}}Z(r)dr &(7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\big(\big|\int_{\tau_{n_s}}^s a(X_r)dr\big|^2\big) &\leq E\big(T\int_{\tau_{n_s}}^s\big|a(X_r)\big|^2dr\big) &(8)\\ &\leq E\big(T\int_{\tau_{n_s}}^s K^2(1+|X_r|^2)dr\big) &(9)\\ &\leq TK^2\int_{\tau_{n_s}}^s E(1+|X_r|^2)dr &(10)\\ &\leq TK^2\int_{\tau_{n_s}}^s(1+C_2)dr &(11)\\ &\leq TK^2(1+C_2)\delta &(12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\big(\big|\int_{\tau_{n_s}}^s b(X_r)dX_r\big|^2\big) &\leq \int_{\tau_{n_s}}^s E\big(b(X_r)^2\big)dr &(13)\\ &\leq \int_{\tau_{n_s}}^s K^2E\big(1+|X_r|^2\big)dr &(14)\\ &\leq K^2\int_{\tau_{n_s}}^s(1+C_2)dr &(15)\\ &\leq K^2(1+C_2)\delta &(16)\end{aligned}$$

という風にそれぞれ評価ができる. 故に

$$Z(t) \leq C_3\int_0^t Z(r)dr + C_4(\delta + c(\delta))$$

とできて,Gronwall の不等式から

$$Z(t) \leq C_5(\delta + c(\delta))$$

となり証明を終える. □

ここで $\mathcal{C}_P^l$ とは,$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ という l 回連続微分可能でかつその偏微分は polynomial growth なものであったことを思い出す.

定義 5 X_t を確率微分方程式の解として, 最大幅が δ の一般時間離散近似による近似解を Y^δ とする.
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_P^{2(\beta+1)}$ というテスト関数の集合とする.
このとき,Y^δ がオーダー $\beta > 0$ で**弱収束**する *(converges weakly with order β at T)* とは,

$$\forall g \in \mathcal{C}\ \exists C > 0,\ \exists \delta_0 > 0\ s.t. \forall \delta \in (0, \delta_0):\ \ |E(g(X_T)) - E(g(Y^\delta(T)))| \le C\delta^\beta$$

となることである.

例えば,$\mathcal{C}$ には全ての多項式が属しているので, これは全てのモーメントが収束して同じになるということを含意している.

定義 6 最大幅が δ の近似解 Y^δ が **weakly consistent** であるとは,
次を満たすような, 非負の関数 $c = c(\delta)$ が存在することである.

$$\lim_{\delta \downarrow 0} c(\delta) = 0$$

かつ

$$E\big(\big|E(\frac{Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(\tau_n, Y^\delta_n)\big|^2\big) \le c(\delta)$$
$$E(|E(\frac{1}{\Delta_n}(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n)^2|\mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y^\delta_n)^2|^2) \le c(\delta)$$

定理 7 次の自励系確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t\ ,\ X_{t_0} = X_0$$

の $a(x), b(x)$ が 4 回連続微分可能で,*polynomial growth* であり, その微分は一様有界であるとする.
Y^δ を *weakly consistent* で等間隔 δ の時間離散化による近似解であるとし,

$$E(\max_n |Y^\delta_n|^{2q}) \le K(1 + E(|X_0|^{2q})),\ \ q = 1, 2, \cdots,$$

$$E(\frac{1}{\Delta_n}|Y_{n+1} - Y_{n+1}|^6) \le c(\delta)\ \ n = 1, 2, \cdots,$$

を満たすとする. このとき,Y^δ は X_t に弱収束する.

>証明 まず

$$u(s, x) = E(g(X_T)|X_s = x)$$

という関数は

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
$$u(T, x) = g(x)$$

という偏微分方程式の解である.
ここで,$X^{s,x}$ によって時刻 s に x を出発する伊藤過程を表すとする. つまり,

$$X^{s,x}_t = x + \int_s^t a(X^{s,x}_r)dr + \int_s^t b(X^{s,x}_r)dW_r$$

ということである. ここで伊藤の公式を用いると,

$$E(u(\tau_{n+1}, X^{\tau_n,x}_{\tau_{n+1}} - u(\tau_n, x)|\mathcal{F}_{\tau_n}) = 0$$

であることが分かる.

$$H_\delta = |E(g(Y^\delta(T))) - E(g(X_T))|$$

と定義してこれらを評価することを考える. まず, 上の式から

$$\begin{aligned} H_\delta &= |E(u(T, Y^\delta(T) - u(0, Y^\delta_0))| & (17) \\ &= \big|E\big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\{u(\tau_{n+1}, Y^\delta_{n+1}) - u(\tau_n, Y^\delta_n)\}\big)\big| & (18) \end{aligned}$$

そして, これに伊藤の公式から導かれた u の公式を用いると,

$$H_\delta = \big|E\big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\{u(\tau_{n+1}, Y^\delta_{n+1}) - u(\tau_n, Y^\delta_n)\} - \{u(\tau_{n+1}, X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}}) - u(\tau_n, X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_n}))\}\big)\big|$$

$$= \big|E\big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\{u(\tau_{n+1}, Y^\delta_{n+1}) - u(\tau_n, Y^\delta_n)\} - \{u(\tau_{n+1}, X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}}) - u(\tau_{n+1}, Y_n))\}\big)\big|$$

という風に変形できる. ここで,u を x についてテイラー展開すると,

$$= \big|E\big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\big[\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_{n+1}, Y_n)\{(Y_{n+1} - Y_n) - (X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}} - Y_n)\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_{n+1}, Y_n)\{(Y_{n+1} - Y_n)^2 - (X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}} - Y_n)^2\} + R(Y_{n+1}) - R(X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}})\big]\big)\big|$$

という風に展開できる. ここで各項について評価すると,

$$\big|E\big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_{n+1}, Y_n)\{(Y_{n+1} - Y_n) - (X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}} - Y_n)\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \big|\sum_{n=0}^{n_T-1}E\big(|\frac{\partial u}{\partial x}||E((Y_{n+1} - Y_n) - (X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}} - Y_n)|\mathcal{F}_{\tau_n})|\big) & (19) \\ &\leq \big|\sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n E\big(|\frac{\partial u}{\partial x}||E(\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\Delta_n} - a(\tau_n, Y_n)|\mathcal{F}_{\tau_n})|\big) & (20) \\ &\leq \big|\sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n E\big(|\frac{\partial u}{\partial x}|^2\big)^{1/2} E\big(|E(\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(\tau_n, Y_n)|^2\big)^{1/2} & (21) \\ &\leq TK\sqrt{c(\delta)} & (22) \end{aligned}$$

次の項を評価すると

$$|\sum_{n=0}^{n_T-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_{n+1}, Y_n)\{(Y_{n+1} - Y_n)^2 - (X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}} - Y_n)^2\}|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n E\big(\frac{1}{2}|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}||E(\frac{(Y_{n+1} - Y_n)^2}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y_n)^2|\big) & (23) \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n\frac{1}{2}|E(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2)E(|E(\frac{(Y_{n+1} - Y_n)^2}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y_n)^2|^2) & (24) \\ &\leq TK\sqrt{c(\delta)} & (25) \end{aligned}$$

最後の剰余項は $K\Delta_n^{3/2}$ で押さえきれているので,

$$\lim_{\delta\downarrow 0} H_\delta = \lim_{\delta\downarrow 0} TK\sqrt{c(\delta)} = 0$$

とできて, たしかに弱収束する. □