平成28年度数学特別講究
Numerical Solution of Stochastic Differential Equations

伊藤克哉

平成 28 年 10 月 3 日

目 次

第1章　確率微分方程式の時間離散近似

1.1　確率論からの準備

定義 1.1.1 次のようにして確率過程の族を表す.

$$\mathbb{L}_T^2 := \{f : 確率過程\ |f_t(\omega)\ は可測で\ ||f||_{\mathbb{L}_t^2} := E[\int_0^T f_t^2 dt] < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_T^2 = \mathcal{L}_T^2(\mathcal{F}_t) := \{f \in \mathbb{L}_T^2 | f\ は\ (\mathcal{F}_t)\ 適合\ \}$$

まず有開閉区間 $t \in [0, T]$ 上定義された確率過程 f_t について確率積分を定義する.
　B_t を 1 次元の $(\mathcal{F}_t)$*Brown* 運動であるとする
$f = (f_t)$ は次のように表される階段過程であるとする.

$$f_t = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t),\ t \in [0, T]$$

(ただし,$\tilde{f}_j$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ 可測で有界な確率変数*)*
このとき, 確率過程 f の確率積分を,

$$M_t(f) \equiv \int_0^t f_s dB_s := \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j (B_{t\wedge t_j} - B_{t\wedge t_{j-1}})$$

として定める.

$$\mathcal{M}_T = \{(M_t) : 2\ 乗可積分な連続\ (\mathcal{F}_t) - マルチンゲール \mid M_0 = 0\ a.s.\}$$

という風に定義すると,$(M_t(f))_t \in \mathcal{M}_T$ である. また一般の可測な $(\mathcal{F}_t)-$ 適合な確率過程 f に対して,f^n という階段過程の列が存在して,$||f - f^{(n)}||_{\mathbb{L}_t^2} \to 0,\ n \to \infty$ とできる.
故に,f の確率積分を

$$\int_0^t f_s dB_s := \lim_{n\to\infty} M(f^{(n)})$$

によって定める. これは $\mathcal{M}_T$ の元として $f^{(n)}$ のとり方によらず一意的に定まる.
そしてこれを $[0, \infty)$ に拡張して確率積分を定義することもできる.
また同様にして次の確率過程の族を定める.

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) := \{f = (f_t)_{t\geq 0} : 確率過程\ |\forall T > 0 :\ (f_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}_T^2\}$$

定義 1.1.2 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間,$a(t, x), b(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を *Borel* 可測関数,
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ を増大情報系,B_t を 1 次元 $\mathcal{F}_t$-*Brown* 運動とする. いま, 確率過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ が次を満たすとき, **確率微分方程式 (stochastic differential equation)**

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t\ \ X_{t_0} = X_0 \tag{1.1.1}$$

の解であるという.
X は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $\mathcal{F}_t$ 適合かつ可測な $\mathbb{R}$ 値連続確率過程で,
(i)

$$a(t, X_t) \in L^1_{loc}([0,\infty)),\ b(t, X_t) \in L^2(\mathcal{F}_t)\ a.s.$$

(ii) 確率積分方程式

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s$$

を満たす.

次に確率微分方程式の解の一意性について述べる.

定義 1.1.3 $[t_0, T]$ 上の確率微分方程式が **pathwise unique** な解を持つとは,
任意の 2 組の解 $X_t, \tilde{X}_t$ が,

$$P\big(\sup_{t_0 \le t \le T} \big|X_t - \tilde{X}_t\big| > 0\big) = 0$$

を満たすということである.

定理 1.1.4 (解の一意性) $[t_0, T]$ 上の確率微分方程式

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t\ ,\ X_{t_0} = X_0$$

は次の 4 条件を満たすとき

$$\sup_{t_0 \le t \le T} E(|X_t|^2) < \infty$$

を満たすような *pathwise unique* な強解 X_t を $[t_0, T]$ 上持つ
$(A1)$ (可測性) $a(t,x), b(t,x)$ は $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ で L^2 可測.
$(A2)$(*Lipschitz* 条件) 次を満たす定数 $K > 0$ が存在する.

$$|a(t,x) - a(t,y)| \le K|x - y|$$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \le K|x - y|$$

$(A3)$ 次を満たす定数 $K > 0$ が存在する.

$$|a(t,x)|^2 \le K^2(1 + |x|^2)$$

$$|b(t,x)|^2 \le K^2(1 + |x|^2)$$

$(A4)$ X_{t_0} は $\mathcal{F}_{t_0}$ 可測で $E(|X_{t_0}|^2) < \infty$ を満たす.

1.2 確率微分方程式の数値解析

$X = \{X_t, t_0 \le t \le T\}$ を次の確率微分方程式を満たす伊藤過程とする.

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t\ \ X_{t_0} = X_0\ \ (t_0 \le t \le T) \tag{1.2.1}$$

方法 1.2.1 オイラー法 (Euler approximation) は,(1.2.1) をみたす伊藤過程と
区間 $[t_0, T]$ の時間離散化 $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < \cdots < \tau_N = T$ に対して,
次のような連続時間確率過程を確率微分方程式の近似解として与える.

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}),\ (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{1.2.2}$$

ただし,$Y_0 = X_0$ で,$Y_n = Y(\tau_n)$ と書いた.

またこのとき $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ で離散化の間隔を表し,$\delta = \max_n \Delta_n$ と表す.
多くの場合は $\tau_n = t_0 + n\delta$ で $\delta = \delta_n \equiv (T - t_0)/N$ であるような等間隔の離散化を考える.
実際に計算する際には, 決定論的な *Euler* 法との違いはランダムな増加項があるということである.

$$\Delta W_n = W_{\tau_{n+1} - W_{\tau_n}}$$

として定義すると,*Brown* 運動の性質により,ΔW_n は期待値 0, 分散 Δ_n である正規乱数である.
また

$$f = f(\tau_n, Y_n)$$

という略記を使えば,

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n$$

という風に書くことができる.

ここで近似方法の誤差評価について考える.

定義 1.2.2 X_t を確率微分方程式の解として,Y_t をその近似解とする.
この近似方法の時刻 T での**絶対誤差** ϵ は次で定義される.

$$\epsilon = E(|X_T - Y_T|)$$

また実際に絶対誤差を数値計算する場合は,N 回シミュレーションを行い, その k 回目の軌道を $X_{T,k}, Y_{T,k}$ とおくと,

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |X_{T,k} - Y_{T,k}|$$

として推定する事ができる. さらに信頼区間を推定する場合には, N 回のシミュレーションを M 組行い,j 組の k 回目の軌道を $X_{T,k,j}, Y_{T,k,j}$ とおき,

$$\hat{\epsilon}_j = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |X_{T,k,j} - Y_{T,k,j}|$$

と定めることによって, 期待値, 分散はそれぞれ,

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \hat{\epsilon}_j$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M} (\hat{\epsilon}_j - \hat{\epsilon})^2$$

として推定することができる. ここで t 検定を行うことにより, 信頼区間を推定できる.

定義 1.2.3 $\hat{\epsilon}$ を絶対誤差の推定値とする.
ここで $\epsilon_{sys} = E(\hat{\epsilon}) = \epsilon$ を **systematic error**, さらに $\epsilon_{stat} = \hat{\epsilon} - \epsilon_{sys}$ を **statistical error** と呼ぶ.

次に常微分方程式のとき同様に収束性と適合性の関係について述べる.

定義 1.2.4 X_t を確率微分方程式の解として, 最大幅が δ の近似解を Y_t^δ とする.
このとき,Y^δ がオーダー $\gamma > 0$ で**強収束**する *(converges strongly with order γ)* とは

$$\exists C > 0,\ \exists \delta_0 > 0\ s.t. \forall \delta \in (0, \delta_0):\ E(|X_T - Y^\delta(T)|) \leq C\delta^\gamma$$

とできることである.

以下, 確率微分方程式に付随する情報増大系を $\mathcal{F}_t\ t \geq 0$ をおく.

定義 1.2.5 最大幅が δ の近似解 Y^δ が **strongly consistent** であるとは,
次を満たすような, 非負の関数 $c = c(\delta)$ が存在することである.

$$\lim_{\delta \downarrow 0} c(\delta) = 0$$

かつ

$$E\Big(\Big|E(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(\tau_n, Y_n^\delta)\Big|^2\Big) \leq c(\delta)$$

$$E(\frac{1}{\Delta_n}|Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta|\mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y_n^\delta)\Delta W_n|^2) \leq c(\delta)$$

定理 1.2.6 解の一意性 (1.1.4) の仮定 *A1-A4* を満たすような自励系確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t\ ,\ X_{t_0} = X_0$$

を考える. このとき *strongly consistent* な等間隔の近似解 Y^δ は解 X_t に強収束する.

>証明

$0 \leq t \leq T$ として

$$Z(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} E(|Y_{n_s}^\delta - X_s|^2)$$

とおく. ここで証明すべきは,

$$Z(t) \leq C(\delta + c(\delta))$$

である. 実際, それを証明すれば,Lyapunov の不等式によって,

$$E(|Y^\delta(T) - X_T|) \leq \sqrt{Z(T)} \leq \sqrt{C(\delta + c(\delta))}$$

とできるので強収束することがわかる.
まず $Z(t)$ の式に定義から明らかな次の 2 式を代入する.

$$X_s = X_0 + \int_0^s a(X_r)dr + \int_0^s b(X_r)dW_r$$

$$Y^\delta_{n_s} - X_0 = Y^\delta_{n_s} - Y_0 = \sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n)$$

これにより,

$$Z(t) = \sup_{0\le s\le t} E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n) - \int_0^s a(X_r)dr - \int_0^s b(X_r)dW_r\big|^2\big)$$

を得る. 更にこれに対して, まず最初の $\sum$ の項を

$$\sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n) = \sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n + E(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - E(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n|\mathcal{F}_{\tau_n}))$$

という風に項を追加する. また 2 つの積分の項を

$$\int_0^{\tau_{n_s}} a(Y^\delta_{n_r})dr - \sum_{n=0}^{n_s-1} a(Y^\delta_n)\Delta_n \ge 0$$

$$\int_0^{\tau_{n_s}} b(Y^\delta_{n_r})dW_r - \sum_{n=0}^{n_s-1} b(Y^\delta_n)\Delta_n \ge 0$$

という正の式を加えることによって上から評価する. さらに期待値を各項に分解することによって,

$$Z(t) \le C_1 \sup_{0\le s\le t} E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(E(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(Y^\delta_n)\Delta_n)\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n - E(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y^\delta_n)\Delta W_n)\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(a(Y^\delta_{n_r}) - a(X_r))dr\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(b(Y^\delta_{n_r}) - b(X_r))dW_r\big|^2\big)$$

$$+E\big(\big|\int_{\tau_{n_s}}^s a(X_r)dr\big|^2\big) + E\big(\big|\int_{\tau_{n_s}}^s b(X_r)dX_r\big|^2\big)$$

ここで第一項については

$$E\big(\big|\sum_{n=0}^{n_s-1}(E(Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(Y^\delta_n)\Delta_n)\big|^2\big) \le T\delta \sum_{n=0}^{n_s-1} E\big(\big|E(\frac{Y^\delta_{n+1} - Y^\delta_n}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n}) - a(Y^\delta_n)\big|^2\big)$$

次の積分の項は以下のようにして評価する.

$$\begin{aligned}
E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(a(Y^\delta_{n_r}) - a(X_r))dr\big|^2\big) &\le E\big(\int_0^{\tau_{n_s}} 1^2 dr \times \int_0^{\tau_{n_s}} \big|(a(Y^\delta_{n_r}) - a(X_r))\big|^2 dr\big) && (1.2.3)\\
&\le TE\big(\int_0^{\tau_{n_s}} K^2|Y^\delta_{n_r} - X_r|^2 dr\big) && (1.2.4)\\
&\le TE\big(K^2\int_0^{\tau_{n_s}} Z(r)dr\big) && (1.2.5)\\
&\le TK^2\int_0^{\tau_{n_s}} Z(r)dr && (1.2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\big(\big|\int_0^{\tau_{n_s}}(b(Y^\delta_{n_r}) - b(X_r))dW_r\big|^2\big) &\le \int_0^{\tau_{n_s}} E\big(\big|b(Y^\delta_{n_r}) - b(X_r)\big|^2\big)dr && (1.2.7)\\
&\le \int_0^{\tau_{n_s}} E\big(K^2|Y^\delta_{n_r} - X_r|^2\big)dr && (1.2.8)\\
&\le K^2\int_0^{\tau_{n_s}} Z(r)dr && (1.2.9)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\big(\Big|\int_{\tau_{n_s}}^{s} a(X_r)dr\Big|^2\big) &\leq E\big(T\int_{\tau_{n_s}}^{s} \big|a(X_r)\big|^2 dr\big) & (1.2.10)\\
&\leq E\big(T\int_{\tau_{n_s}}^{s} K^2(1+|X_r|^2)dr\big) & (1.2.11)\\
&\leq TK^2\int_{\tau_{n_s}}^{s} E(1+|X_r|^2)dr & (1.2.12)\\
&\leq TK^2\int_{\tau_{n_s}}^{s} (1+C_2)dr & (1.2.13)\\
&\leq TK^2(1+C_2)\delta & (1.2.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\big(\Big|\int_{\tau_{n_s}}^{s} b(X_r)dX_r\Big|^2\big) &\leq \int_{\tau_{n_s}}^{s} E\big(b(X_r)^2\big)dr & (1.2.15)\\
&\leq \int_{\tau_{n_s}}^{s} K^2E\big(1+|X_r|^2\big)dr & (1.2.16)\\
&\leq K^2\int_{\tau_{n_s}}^{s} (1+C_2)dr & (1.2.17)\\
&\leq K^2(1+C_2)\delta & (1.2.18)
\end{aligned}
$$

という風にそれぞれ評価ができる. 故に

$$
Z(t) \leq C_3\int_0^t Z(r)dr + C_4(\delta + c(\delta))
$$

とできて,Gronwall の不等式から

$$
Z(t) \leq C_5(\delta + c(\delta))
$$

となり証明を終える.

□

ここで $\mathcal{C}_P^l$ とは,$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ という l 回連続微分可能でかつその偏微分は polynomial growth なものであったことを思い出す.

定義 1.2.7 X_t を確率微分方程式の解として, 最大幅が δ の一般時間離散近似による近似解を Y^δ とする. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_P^{2(\beta+1)}$ というテスト関数の集合とする.
このとき,Y^δ がオーダー $\beta > 0$ で**弱収束**する *(converges weakly with order β at T)* とは,

$$
\forall g \in \mathcal{C}\ \exists C > 0,\ \exists \delta_0 > 0\ s.t. \forall\delta \in (0, \delta_0):\ \ |E(g(X_T)) - E(g(Y^\delta(T)))| \leq C\delta^\beta
$$

となることである.

例えば,$\mathcal{C}$ には全ての多項式が属しているので, これは全てのモーメントが収束して同じになるということを含意している.

定義 1.2.8 最大幅が δ の近似解 Y^δ が **weakly consistent** であるとは,
次を満たすような, 非負の関数 $c = c(\delta)$ が存在することである.

$$
\lim_{\delta\downarrow 0} c(\delta) = 0
$$

かつ

$$E\Big(\Big|E(\frac{Y^\delta_{n+1}-Y^\delta_n}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n})-a(\tau_n,Y^\delta_n)\Big|^2\Big)\le c(\delta)$$

$$E(|E(\frac{1}{\Delta_n}(Y^\delta_{n+1}-Y^\delta_n)^2|\mathcal{F}_{\tau_n})-b(\tau_n,Y^\delta_n)^2|^2)\le c(\delta)$$

定理 1.2.9 次の自励系確率微分方程式

$$dX_t=a(X_t)dt+b(X_t)dW_t\ ,\ X_{t_0}=X_0$$

の $a(x),b(x)$ が 4 回連続微分可能で,*polynomial growth* であり, その微分は一様有界であるとする. Y^δ を *weakly consistent* で等間隔 δ の時間離散化による近似解であるとし,

$$E(\max_n|Y^\delta_n|^{2q})\le K(1+E(|X_0|^{2q})),\ \ q=1,2,\cdots,$$

$$E(\frac{1}{\Delta_n}|Y_{n+1}-Y_{n+1}|^6)\le c(\delta)\ \ n=1,2,\cdots,$$

を満たすとする. このとき,Y^δ は X_t に弱収束する.

>証明 まず

$$u(s,x)=E(g(X_T)|X_s=x)$$

という関数は

$$\frac{\partial u}{\partial s}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$
$$u(T,x)=g(x)$$

という偏微分方程式の解である.
ここで,$X^{s,x}$ によって時刻 s に x を出発する伊藤過程を表すとする. つまり,

$$X^{s,x}_t=x+\int_s^t a(X^{s,x}_r)dr+\int_s^t b(X^{s,x}_r)dW_r$$

ということである. ここで伊藤の公式を用いると,

$$E(u(\tau_{n+1},X^{\tau_n,x}_{\tau_{n+1}}-u(\tau_n,x)|\mathcal{F}_{\tau_n})=0$$

であることが分かる.

$$H_\delta=|E(g(Y^\delta(T)))-E(g(X_T))|$$

と定義してこれらを評価することを考える. まず, 上の式から

$$H_\delta = |E(u(T,Y^\delta(T)-u(0,Y^\delta_0))| \quad (1.2.19)$$
$$= \Big|E\Big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\{u(\tau_{n+1},Y^\delta_{n+1})-u(\tau_n,Y^\delta_n)\}\Big)\Big| \quad (1.2.20)$$

そして, これに伊藤の公式から導かれた u の公式を用いると,

$$H_\delta=\Big|E\Big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\{u(\tau_{n+1},Y^\delta_{n+1})-u(\tau_n,Y^\delta_n)\}-\{u(\tau_{n+1},X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}})-u(\tau_n,X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_n}))\}\Big)\Big|$$

$$=\Big|E\Big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\{u(\tau_{n+1},Y^\delta_{n+1})-u(\tau_n,Y^\delta_n)\}-\{u(\tau_{n+1},X^{\tau_n,Y_n}_{\tau_{n+1}})-u(\tau_{n+1},Y_n))\}\Big)\Big|$$

という風に変形できる. ここで,u を x についてテイラー展開すると,

$$=\big|E\big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\big[\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_{n+1},Y_n)\{(Y_{n+1}-Y_n)-(X_{\tau_{n+1}}^{\tau_n,Y_n}-Y_n)\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_{n+1},Y_n)\{(Y_{n+1}-Y_n)^2-(X_{\tau_{n+1}}^{\tau_n,Y_n}-Y_n)^2\}+R(Y_{n+1})-R(X_{\tau_{n+1}}^{\tau_n,Y_n})\big]\big)\big|$$

という風に展開できる. ここで各項について評価すると,

$$\big|E\big(\sum_{n=0}^{n_T-1}\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_{n+1},Y_n)\{(Y_{n+1}-Y_n)-(X_{\tau_{n+1}}^{\tau_n,Y_n}-Y_n)\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \big|\sum_{n=0}^{n_T-1}E\big(|\frac{\partial u}{\partial x}||E((Y_{n+1}-Y_n)-(X_{\tau_{n+1}}^{\tau_n,Y_n}-Y_n)|\mathcal{F}_{\tau_n})|\big) && (1.2.21)\\
&\leq \big|\sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n E\big(|\frac{\partial u}{\partial x}||E(\frac{Y_{n+1}-Y_n}{\Delta_n}-a(\tau_n,Y_n)|\mathcal{F}_{\tau_n})|\big) && (1.2.22)\\
&\leq \big|\sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n E\big(|\frac{\partial u}{\partial x}|^2\big)^{1/2}E\big(|E(\frac{Y_{n+1}-Y_n}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n})-a(\tau_n,Y_n)|^2\big)^{1/2} && (1.2.23)\\
&\leq TK\sqrt{c(\delta)} && (1.2.24)
\end{aligned}$$

次の項を評価すると

$$\big|\sum_{n=0}^{n_T-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_{n+1},Y_n)\{(Y_{n+1}-Y_n)^2-(X_{\tau_{n+1}}^{\tau_n,Y_n}-Y_n)^2\}\big|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n E\big(\frac{1}{2}|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}||E(\frac{(Y_{n+1}-Y_n)^2}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n})-b(\tau_n,Y_n)^2|\big) && (1.2.25)\\
&\leq \sum_{n=0}^{n_T-1}\Delta_n\frac{1}{2}|E(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2)E(|E(\frac{(Y_{n+1}-Y_n)^2}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{\tau_n})-b(\tau_n,Y_n)^2|^2) && (1.2.26)\\
&\leq TK\sqrt{c(\delta)} && (1.2.27)
\end{aligned}$$

最後の剰余項は $K\Delta_n^{3/2}$ で押さえきれているので,

$$\lim_{\delta\downarrow 0}H_\delta=\lim_{\delta\downarrow 0}TK\sqrt{c(\delta)}=0$$

とできて, たしかに弱収束する.

□

定義 1.2.10 $Y^\delta,\tilde{Y}^\delta$ はそれぞれ $Y_0,\tilde{Y}_0$ に対する近似解を表すとする.
時間離散近似がある確率微分方程式に対して**確率論的に安定 (stochastically numerically stable)** であるとは, 任意の有開閉区間 $[t_0,T]$ と $\delta_0>0$ と $\epsilon>0$ が存在して,

$$\forall\delta\in(0,\delta_0):\lim_{|Y_0-\tilde{Y}_0|\to 0}\sup_{t_0\leq t\leq T}P(|Y_{n_t}^\delta-\tilde{Y}_{n_t}^\delta|\geq\epsilon)=0$$

とできることである.
また単に, 時間離散近似法が確率論的に安定であるとは, 任意の収束する確率微分方程式に対して安定であることである.

定義 1.2.11 時間離散近似がある確率微分方程式に対して**漸近的に安定 (asymptotically numerically stable)** であるとは,$\delta_a > 0$ と $\epsilon > 0$ が存在して,

$$\forall\delta \in (0, \delta_a) : \lim_{|Y_0 - \tilde{Y}_0| \to 0} \lim_{T \to \infty} P(\sup_{t_0 \le t \le T} |Y^{\delta}_{n_t} - \tilde{Y}^{\delta}_{n_t}| \ge \epsilon) = 0$$

とできることである.(ただし,$Y^{\delta}, \tilde{Y}^{\delta}$ はそれぞれ $Y_0, \tilde{Y}_0$ に対する近似解である.)

定義 1.2.12 確率微分方程式の近似法の**絶対安定領域**とは次のような左半平面内の領域 R である.
$\lambda\Delta \in R \Leftrightarrow$

$$dX_t = \lambda X_t dt + dW_t$$

という複素確率微分方程式を考え, 間隔 Δ の離散化に対する数値解 Y^{Δ}_n が任意の初期値 X_0 に対して

$$\lim_{n \to \infty} Y^{\Delta}_n = 0$$

を満たす
また決定論的微分方程式の場合と同様に絶対安定領域が左平面内全体であるとき,**A 安定 (A-stable)** という.