まえがき

数学科喫茶ますらぼにお越し頂き誠にありがとうございます. そうなんです,「喫茶」になったんです. 別に喫茶要素をメインにするつもりはなくて, おまけでつけただけのお粗末なものですが, コーヒー・紅茶・ジュースなどありますので是非ゆっくりしていってください.

今回で, 我々数学科 2015 年度進学の 4 年生が主体となって開催する「ますらぼ」は 3 回目にして, 最後になります. 来年からは, 僕たちの後輩たちが引き継いで, 更に良いますらぼを開催してくれるだろうと期待しています.

この冊子 $e^{\pi i}sode$ もついに第 4 号になりまして, トータルで見ると当企画も 4 年目になります. 我々が最後に何か冊子を作るとなったときに, やはり数学の面白さを皆さんに伝えたいという気持ちが涌いてきてしまって, あまり難しい内容は触れずに皆さんに楽しんでもらえるような冊子を作ろうと頑張りました. しかし, 数学の楽しさを伝えるのは難しく, やはり自分たちが面白いと思うような数学について書くと小難しい内容になってしまうので, とても悲しいですね.

なぜ僕はこんなにも数学が好きなんだろうと思って考えたことがあるのですが, 数学にはいうなれば, お城を自分の力で 0 から作っていくような楽しみがあると思いました. もしかしたら, エベレスト級のとても高い山に登っていくような楽しみかもしれません. 数学科の授業は, わざわざ複素数を最初から定義したり, グラフがつながっているとは何なんだ, とか足し算って何なんだとか, そのレベルのことから始まります. 最初は靄がかかっていて, 上に何があるのかも分からない, お城の石垣から作っていくような, 海抜 0 メートルからエベレストに挑戦するような苦しみが有ります. しかし, それを何年も続けていくと少しづつ世界が開けてきて, 今まで見えなかった世界が見えてくるようになります. 数学を続ける中で, こんなことがあったんだよ!こんなにきれいな風景が見えたんだよ!というみんなの感動の記録がこの $e^{\pi i}sode$ なのかもしれません. お城を 0 から作り上げる苦しみも楽しさも, 自分で体験してみないと分からないので, この冊子が皆さんに伝わりにくい内容になってしまったのはそのせいかもしれません.

最後の冊子が皆さん全員に自信を持って薦めれるものにならなかったのはとても悔しいことなのですが, もしよかったら読んでみてください. 読めなかったら, 本棚の隅っこにでも置いてください, 薄いです. もしかしたら何時か分かる日が来るかもしれません. もしくは, 身の回りの数学が好きそうな人にでも渡してみてください. そんな人もいなさそうだったら, 煮るなり焼くなり好きにしてください.

(発行責任者 伊藤より)

目　次

ネイピア数e・微分方程式・半群 (伊藤)

Part1. ネイピア数eについて

Part1 のはじめに

〜「私のことは嫌いでも、eのことは嫌いにならないでください！」〜
国民的アイドルグループ EXP271 のとあるセンターの言葉

$e^{\pi i}sode$(えぴそーど) という名前の冊子を先輩たちから私達が受け継いでから, はや 1 年半が経ちましたが, 未だに「$e^{\pi i}sode$?これはなんて読むの?」と聞かれることも多いです. 上記のような発言から察するに,$e^{\pi i}$ にこめられた意味も理解されていないでしょう. そこで改めて,**e** という数字について色々とお話をしたいと思います.

e という数字は**ネイピア数**と呼ばれ, 日本語では自然対数の底とも呼ばれたりします. 数なのでちゃんと値があって,$e = 2.71828182845904523536028747135 2\cdots$ という永遠につづく小数として表されます. ネイピア数という名前は, この数を初めて発表したジョン・ネイピア (John Napier) という数学者にちなんでつけられました. ネイピアがこの数を考案した 1618 年というのは, 日本で言うと 1615 年は大阪夏の陣で徳川家康[1] と豊臣秀頼が合戦を繰り広げていた年ですし, ヨーロッパではまだ魔女狩りが勃発していたような時代です. 万有引力の法則を発見したアイザック・ニュートンはまだ生まれてもいませんし, ビブン, セキブンという概念・言葉すら生まれていません. 何が言いたいかと言いますと,「e は数学だけの世界に出てくる小難しい数ではなく, 古くから人類と共にあった誰でも理解できるような身近なもの」ということです.

ということで, 出来るだけ皆さんに分かりやすい様に e についてお話をしたいと思います. もし本当は身近なはずの e がこの冊子を読んで, また遠くに感じられてしまったらそれは,e が悪いのではなく, 私が悪いのです.

身近なe

〜「借りた金は忘れるな。貸した金は忘れろ。」〜
田中角栄

e は身近なところから発生します. とりあえず結論だけ先に述べて解説に移ります.

連続的に複利で利息を支払うような年利率 1 の銀行が存在するとき, この銀行の実質的な年利率は e となる.

という形で e は身近に発生します. ここでキーとなる**金利**という概念です. 金利は現代人にとってある意味遠い世界にあるものかもしれないので一度説明しておきます. 例えば, あなたが銀行にいくらかのお金を預けているとします.[2] そうすると, 銀行は「私達の所にお金を預けてくれてありがとう」と言って年に何度か少しだけあなたの口座にお金を振り込んでおいてくれます. これを**利子**と言います.[3] ここで**金利 (利率)** という概念が発生します. 金利とは,「あなたが銀行に預けているお金」と「利子」の比率を金利と言います. 数式で書くと

$$\text{預金額} \times \text{金利} = \text{利子}$$

---

[1] すごくどうでも良い話ですが, 徳川家康を知らないと日本では非常識人呼ばわりされますが, ネイピア数 e を知らない人に対して非常識だ!という石を投げる人はそこまでいないでしょう. 残念です.

[2] ここで預けているという言葉を使うと, まるで厳重な鍵付きの金庫やロッカーにお金を置いてきたように聞こえますが, そのようなことはありません. 銀行も企業とは言え, その銀行の中にいるのは人間ですので, あなたのお友達の山田さんの家のタンスに「お金〜〜万円預けるね. なくしたら承知しないよ.」と言ってお金を置いてきたのと, 解釈によっては変わりはないのです.

[3] 今の日本の銀行の通常預金の金利は 0.001 % ぐらいです. つまり,100 万円預けて置くと年に 10 円ほどもらえる事になります.

となります.[4]

ここからは, 簡単のために全て年利率を **1 %**の場合にのみ限定して話をすすめましょう.
もし, この世に年率 1 %を謳う銀行がいくつかあったとしましょう. これらは, 皆同じに見えますが, 実は違う可能性があります. それは **年に何回利子が払われるかが分かっていない** ということです. 例えば,

100 万円につき, 年に一度だけ,1 万円の利息がもらえる.

という銀行と,

100 万円につき, 年に 2 度,5 千円づつ利息がもらえる

という銀行は 1 年というスパンで見れば, おなじ年利率 1 %の銀行です. しかし, ここで違ってくるのが**複利**という考え方です.

(ここに複利の図を入れたい) 複利とは, 今までもらった利息を預金額に繰り入れて, 利息を払ってくれる方式です. 例えば,100 万円を (利息年 1 回払いの) 年利息 1 %の銀行に 4 年間預けておくと

$$
\begin{aligned}
100\text{ 万円} \times 1\,\% + 100\text{ 万円} &= 101\text{ 万円} \\
101\text{ 万円} \times 1\,\% + 101\text{ 万円} &= 102.01\text{ 万円} \\
102.01\text{ 万円} \times 1\,\% + 102.01\text{ 万円} &= 103.0301\text{ 万円} \\
103.0301\text{ 万円} \times 1\,\% + 103.0301\text{ 万円} &= 104.0604\text{ 万円}
\end{aligned}
$$

というように雪だるま式にお金が増えていきます. 最初に考えた 1 年間の利払回数が違う場合についても同様のことがいえます.

100 万円につき, 年に 2 度,5 千円づつ利息がもらえる

は,

$1\,\% \div 2 = 0.5\,\%$づつ半年に 1 回お金が増える

ということになります. そして, いくらになるかとか言いますと,

$$
\begin{aligned}
100\text{ 万円} \times 0.5\,\% + 100\text{ 万円} &= 100.5\text{ 万円 (=半年後の預金残高)} \\
100.5\text{ 万円} \times 0.5\,\% + 100.5\text{ 万円} &= 101.0025\text{ 万円 (=1 年後の預金残高)}
\end{aligned}
$$

という風に 101 万円よりも, わずか 0.025 万円だけ増えました. つまり違う利息額となったわけです.
では, 更に細かくわけて,1 ヶ月に 1 回. 年 12 回の利息が受け取れる銀行があったとしましょう. この場合は

$1/12 \fallingdotseq 0.083\,\%$づつ 1 ヶ月に 1 回お金が増える

ここで, 今までのように 12 回計算をしても良いのですが, 少し落ち着いて見てみると,
例えば 100 万円が 1 %増えるとその後どうなるかと言うのは,

$$
100\text{ 万円} \times 1\,\% + 100\text{ 万円} = 100\text{ 万円} \times (1 + 0.01) = 101\text{ 万円}
$$

という式で計算できるということがわかります. また, これを 2 回払いの式に応用すると

[4] ここまでの内容は, できれば読まなくても知っているぐらいのレベルであって欲しいです.

$$100\,\text{万円} \times (1+0.005) \times (1+0.005) = 101.0025\,\text{万円}$$

という風になります. 同様に,12回払いの場合も

$$100\,\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{12}) \times \cdots \times (1+\frac{0.01}{12}) = 100\,\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{12})^{12} = 101.004596089$$

という結果が得られます.[5] また数字に着目すると, 利息12回払いのときのほうがやはり僅かにお金は多くなっています.

では, もっとお金を増やしたい!!ということで,1日に1回利息が振り込まれるような銀行を考えてみるとどうでしょうか,

$$100\,\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{365})^{365} = 101.005003\,\text{万円}$$

となってやはり, いままでよりも僅かに増えています. では, この**利払い回数をどんどん増やしていくと億万長者になれるのでは!!!**[6] と思ってしまうわけです. 例えば, 年に10000回利払いがされるような銀行があったとしたら

$$100\,\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{10000})^{10000} = 101.005016\,\text{万円}$$

となりますが, よく見てみると, そこまで増えていません. どうやら上限があるようです. そしてこの上限が e なのです. ここで

$$e^{0.01} = (2.71828182845904523536028747135 2\cdots)^{0.01} = 1.01005016708$$

という数値と見比べて見ましょう [7]. そうすると, 実は100万円 $\times e^{0.01} = 101.005016708$ 万円は今まで出てきた数字に非常に近い数字になっています.

つまり, 経験的に,

年利率1%の銀行の利払い回数をどんどん大きくしていくと,1年トータルでみたときには $e^{0.01}$ という利率に近づく.

ということがわかります. これを高校数学の言葉で,$e^{0.01}$ **に収束する**と言います. こうして,e という数字が簡単な金利計算から出て来るということがわかりました. この利率は, その瞬間瞬間に利息が発生し, それが預金に繰り入れられているという意味で**連続複利**と言われます.

ここで, 一連の議論の結果をまとめて,e という数を改めて定義すると

$$e := \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

という風になります.

表1　利率がeに収束していく

利払い回数	実際の年利率
1回	1 %
2回	1.0025 %
12回	1.004596089 %
365回	1.005003 %
⋮	⋮
無限回	$e^{0.01}$ 倍 = 1.005016708 %増加

[5] 電卓で計算する場合は 1.00083333× ＝＝＝＝ ··· と＝ボタンを連打すると計算できます

[6] 少し関連した話として,**72の法則**と言うものが有ります. これは,6 %複利でお金を運用すると約12年で2倍になる,8 %複利でお金を運用すると約9年で2倍になるというように複利の%数と二倍になるまでの年数の積がおおよそ72になっているという法則です

[7] 流石にこれを普通の電卓で計算すわけにはいきませんので, 関数電卓で計算するかGoogleで「e^0.01」と検索してみてください

まとめ〜e は本当に身近なのか〜

〜「A bird in the hand is worth two in the bush.」〜
(手に持っている 1 羽の鳥は、まだ手にしていない茂みの中の 2 羽の鳥と同じ価値があるということわざ)。

利払い回数をどんどん大きくしていくと, やがては e に近づくということがわかりましたが, 実際にそんなに何度も利払いが行われることなんてあるのだろうかと思う方もいらっしゃると思います. しかし,1 つ言えることは,$e^{\text{利率}}$ は 1 日複利とほとんど差はないということです. そして,e という数字の計算上の便利さから, 金融などの分野では e を使った利率計算が行われています. そのことについて触れて, この記事を終えたいと思います.

どうして, 金融機関では e を使う必要があるのかというと, まず一つには e を使った利率計算が, 数学的に相性が良いということがあります.
例えば, 最初の年に 12 回の利払い 1 %, 次の年に 6 回の利払い 2 %, そのまた次の年に 10 回の利払い 3 %の利率でお金を運用したときに, その利息の計算は

$$(1+\frac{0.01}{12})^{12}\times(1+\frac{0.02}{6})^{6}\times(1+\frac{0.03}{10})^{10}$$

となり, いちいち全てを計算する必要があります. また, 数学的に見てもこの式は複雑です. しかし, すべて連続複利であるとみなすと,

$$e^{0.01}\times e^{0.02}\times e^{0.03}=e^{0.01+0.02+0.03}$$

という風にシンプルな式にすることが出来ます.[8] またこの記事では述べませんが, この e の何々乗という数字はとても微分積分などの数学的な操作と相性が良いです.

最後に, そもそも全てのお金を銀行に預けているわけでもないのに, なぜ金融機関がこのようなことをしないといけないのかということについて考えてみましょう. これは, **今手にもっている 100 万円と 来年の 100 万円は当価値ではない**ということに由来しています. なぜならば, 今の 100 万円を仮に銀行に預けたとしたら,100 万円プラス利子がついているからです. このようにして, 金融機関では毎年のようにお金の出入りがありますから, それを一度全て現在の価値に換算して計算する必要があります.

「と言っても, 今時超低金利だし関係ないんじゃないの」と思う方もいらっしゃるかもしれません. しかし, 例えば生命保険や年金は非常に長期のお金の出入りがあります. よってその積み重ねは大きく, 少しでも金利が動いただけで, 保険料や年金の掛金に大きな影響を影響をあたえることがあるのです.[9] 故に,(e を用いて) その会社のお金の出入りを管理していくことは非常に重要です.[10] またこれは,e が使われているほんの一例にすぎず, 数学が絡む殆どの分野で e が使われているということを最後に注意しておきたいと思います.

Part2.e と微分方程式の話〜解こう!微分方程式!〜

Part2 のはじめに

e という数は

$$e:=\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

---

[8] 全く関係がない話ですが, 僕がお気に入りの問題として,「e^{π} に最も近い整数を電卓なしで計算せよ」という高校数学の問題が有ります. 暇な方はやってみてください. もっと関係のない話として,π^{e}, e^{e}, π^{π} は全て有理数かすら分かっていませんが,e^{π} は超越数であることが分かっています.

[9] 例えば, 前年度のゼロ金利政策が日本銀行によって発表されたとき, 多くの積立式の保険商品が販売をやめざるを得なくなったという事実からも分かると思われます

[10] 1 つお詫びをしなければならないのは,e を用いた現在価値計算が行われるのはどちらかと言うと, 数学色の濃い金融派生商品などの分野で, 本文中で例として挙げた保険会社や年金などでは, 一応「利力」という名前でもって認識はされていますが, 少々数学との相性が悪くても, 普通の複利計算でゴリ押ししてまうところがあります.

という形で定義されるのでした. この e についての最も大事な性質は次のものです.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

これは微分積分学の言葉ですが,e^x **という関数は, 微分しても変わらないということ**です. 世の中にはたくさんの関数が有りますが, **微分して変わらない関数は** e^x **だけ** [11] です. つまり, 微分積分という概念が生まれる前にできた e ですが, それは微分積分学の中心にあるものであり, とても微分や積分と相性が良いわけです. この記事では, その e と微分積分, 微分方程式の関わりについて紹介します. 微分方程式というのは「微分」と「方程式」という険しい言葉が2つも並んだものですが, とても有用であり, 世の中の物理現象などの多くは微分方程式で記述されるぐらいに重要な概念です. この記事では, まず e と微分の関係について述べ, その後微分方程式について基本的なことを説明し, 最後に幾つか実際に微分方程式を解くということをします.

微分方程式について

e 再考

定義.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

として $e \in \mathbb{R}$ を定義する.

定理.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

この証明は, 高校数学の教科書に譲ることとしましょう.[12]

定理.

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x),\ f(0) = 1$$

を満たすような微分可能な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はただ一つだけ存在する.[13]

微分方程式入門

ここで, この2つの定理を合わせると, 次のような考察ができます. まず, e^x は $\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$ と $f(0) = 1$ を満たしています. かつ. このような関数は唯一つしかありません. よって,$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$ と $f(0) = 1$ を満たせば, 直ちにその $f(x) = e^x$ ということが導かれます.

ここで, **微分方程式**というものについてすこし紹介します.

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x),\ f(0) = 1$$

という式を見てみると, 左には微分が入っています. このように微分演算が入っているような方程式を**微分方程式**と言います.

ある微分方程式を満たすような, 関数を見つけることを**微分方程式を解く**と言います.

そして, $f(0) = 1$ というのは, 最初の条件を指定しているのです. このような条件を**微分方程式の初期条件**と言います.

つまり, 我々が今したこと用語でまとめると,

$\frac{d}{dx}f(x) = f(x),\ f(0) = 1$ という初期条件の課された微分方程式解くと $f(x) = e^x$ が得られた.

---

[11] この主張は厳密に言うと正しくないのですが, 後で厳密に述べるので許して下さい

[12] 正しいことを書きたいという数学科生としてのプライドのようなものが私に証明を書かせませんでした.

[13] 数学科4年生の大澤くん作詞の歌に「ただひとつ. 示すは難し.」という歌詞があります. 一意性を示すことの難しさを歌った歌です. 詳しくは係まで.

ということです.

一意性について

ある微分方程式の解が一意的に存在するとは, 唯一つしかその微分方程式に対して解が存在しないということです. 数式で書くと,f, g という関数が微分方程式の解ならば,$f = g$ ということです.
ここで「そんな一意性なんて考えて何になるんだ」と思う方がいらっしゃるかもしれませんが, 一意性は微分方程式にとってとても大事な概念です. 次のような例を考えてみましょう.

例. 物理を習ったことがある人ならばピンとくるかもしれませんが, ある地点 O からボールを初速度 v_0 で投げると, ボールは次のような微分方程式で定義される軌道を描いて運動します.

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -m\boldsymbol{g}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{x}_0 = 0$$

ここで, この微分方程式に一意性がなかったらどうなるでしょうか.
つまり異なる解が幾つかあるわけです. つまり, **全く同じ条件で同じ場所から同じボールを投げても, そのボールがどのような軌道を描くかは予測できない**という状態が発生するわけです. これに関する未解決問題として.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \nu\Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t)\\ \nabla\cdot u &= 0\\ u(x,0) &= u_0(x),\ (x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0)\end{aligned}$$

という微分方程式で定義されるナビエ-ストークス方程式という物があります. この方程式は気体や液体の中での運動を記述する流体力学の基本的な方程式ですが, この方程式の解の滑らかさや解の存在や一意性については知られていません. そして, この未解決問題を解くと **100 万ドル**がクレイ数学研究所から貰えます. もし, ナビエ・ストークス方程式の解が一意的でなかったり滑らかでなかったりすると, 同じ条件で飛行機を飛ばしても同じように飛んでくれなかったり, 滑らかに移動してくれないつまりカクカクに移動するという状況が考えられます.

一方で一意性は, 微分方程式を解くという立場においてはとても便利だったりします. なぜならば, もし一意性が保証されていたならば,1 つでも解を見つけてしまえば, それ以外に解を探す必要はなくおしまいなわけです. 今回の e^x という微分方程式でも一意性により, これ以外は無いことがわかりました.[14)]

微分方程式を解こう!

前置きが長くなりましたが, これから幾つかの微分方程式を解いてみましょう.

例.

$$\frac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 1$$

これは解けることを祈っています.y という未知の関数を数式できちんと書いてあげれば微分方程式を解けたことになります.
そうですね,$y = e^x$ となります.

例.

$$\frac{dy}{dx} = y$$

今度は初期条件がなくなっています. 実はこのときは, 微分方程式の解は一意的に存在しません.

14) 高校数学でも少しだけ微分方程式について教えられましたが, この一意性について言及しないがゆえに, とりあえず解けてしまったが本当にこれだけか分からないということに私は陥りました.

実際, $y = Ce^x,\ C$ は定数とすると, これは微分方程式の解になっています.
ここで厳密にではないですが, 有用な解き方を書きます.

$$\frac{1}{y}dy = dx$$

と微分を分数の様に見て移行します. そして両辺を積分します.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int dx$$

故に, これらの積分を実際に計算して,

$$\log y = x + c$$

$$y = e^{x+c} = Ce^x$$

という風に解を得ることが出来ました.

例.

$$\frac{dy}{dx} = 2y,\ y(0) = 1$$

今度は y に係数があります. ここで,

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

という理系の高校 3 年生だけが習う公式を紹介しておきます. 例えば,

$$\frac{d}{dx}(5x+2)^2 = 2(5x+2) * 5 = 10(5x+2)$$

ただし,$f(x) = x^2,\ g(x) = 5x+2,\ f'(x) = 2x,\ f'(g(x)) = 2(5x+2),\ g'(x) = 5$ でした. ここで,$y = e^{2x}$ を微分してみます.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{2x} = e^{2x} * 2 = 2e^{2x} = 2y$$

ただし,$f(x) = e^x,\ g(x) = 2x,\ f'(x) = e^x,\ f'(g(x)) = e^{2x}\ g'(x) = 2$ でした. となり, 解になっています. 初期条件も満たしています.
高校 3 年生の内容を引用しましたが. とりあえず,a を定数として,e^{ax} を微分すると,

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

と a だけ前に出てきて,$\frac{dy}{dx} = ay$ の解になっていることを覚えておいてください.

例.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

今度は 2 回微分する用になっています. これは, ここで試しに $y = e^x$ を入れてみると,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x - 5e^x + 6e^x = 2e^x$$

となって 0 にはなってくれませんが, 当たらずといえども遠からずという感じですね. 今度は $y = e^{2x}$ を入れてみます.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \frac{d}{dx}(2e^{2x}) - 5 \cdot 2e^{2x} + 6e^{2x} = (4 - 10 + 6)e^{2x} = 0$$

といって,0 になってくれました. また,$y = e^{3x}$ を入れてみます.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0$$

またしても解になってくれました. 一方で,$y = e^{2x} + e^{3x}$ や $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$ なども解になっています. 実際,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = (4 - 10 + 6)e^{2x} + (9 - 15 + 6)e^{3x} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 3(4 - 10 + 6)e^{2x} - 2(9 - 15 + 6)e^{3x} = 0$$

どうやら $ae^{2x} + be^{3x}$ は全部解になってくれています. 一方で全ての解はこれだけで表されるのでしょうか. 少し不安が残ります. この記事はこの方程式の解が,$ae^{2x} + be^{3x}$ で表されることを示して終わります.

まず事実として,

定理.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

は初期値について 2 つ条件を与えると, 解が一意的に存在する

ということを認めます.

証明 ここで,z という関数が微分方程式の解になったとします. この z が,$ae^{2x} + be^{3x}$ で表されることを証明します $z(0) = z_0, z(1) = z_1$ とおきます. そして,

$$\begin{cases} z_0 = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \\ z_1 = e^2 \cdot \alpha + e^3 \cdot \beta \end{cases}$$

という連立方程式を解いて α, β を求めます. そうして,$y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ とおくと,

$$\begin{aligned} y(0) &= \alpha e^{2\cdot 0} + \beta e^{3\cdot 0} = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = z_0 \\ y(1) &= \alpha e^{2\cdot 1} + \beta e^{3\cdot 1} = e^2 \cdot \alpha + e^3 \cdot \beta = z_1 \end{aligned}$$

となり, これは初期値 $y(0) = z_0, y(1) = z_1$ を満たすような微分方程式の解になります. よって, 事実として認めた解の一意性から,$y = z$ となり全ての解は $y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ として表されることが証明されました. □

まとめ

このようにして,e は微分積分学の中でも基本的な存在であり,e を使うと色々な微分方程式を示すことが出来ました. 微分方程式によって, 物体や波や電気や音などの運動を記述することができるので, とても有用です. そして, 高校数学ではあまり触れられませんが**解の一意性**というのは, 数学的にも実際微分方程式を解く上でも重要であることを示しました. そして最後に出てきた, 微分方程式について 1 つ数学的に触れておきたい事がありますが,

$$f, g \text{ が微分方程式の解} \Rightarrow \alpha f + \beta g \text{ も微分方程式の解.(ただし} \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

が成り立っているような, 微分方程式を**線形微分方程式**と言います. この線形という性質はとても重要な性質で数学のどこにでも現れるので覚えておいてください. 最後に, さらなる応用として, 微分方程式を形式的に,

$$dy = 2xdx$$

のように書くことが出来ます. これは,x が dx(少し) だけ増えると,y は $dy = 2xdx$ だけ増えることを示しています. これは, 最初の状態を決めると解の一意性より, 全ての挙動が決まってしまいますが, そこにある程度のランダムさを加えた**確率微分方程式**という物があります. 例えば.

$$df_t = af_t dt + bf_t dW_t$$

というのは, ブラック・ショールズ方程式という有名な方程式ですが, これは,t が dt だけ増えると,f_t は確実に,$af_t dt$ だけ増え, またさらに bf_t の分散を持って増減します.(つまり, 増える可能性もありますし, 減る可能性もあります.) このように, ある程度の動きは決定されているが, 一方でランダムさをも抱えているようなモデルを表現することができ, 非常に多くの現実世界の現象を記述することができます.15) 例えば, このブラック・ショールズ方程式を考案した, マイロン・ショールズにはノーベル賞が授与されました.16) 例えば, 確率微分方程式は, 経済の分野においては, 株式や金融派生商品や債権などの価格を予想することや, 更には物理学や生物学などにランダムさを扱う多くの分野にも応用がされています.

Part3.e と微分方程式と半群の話

Part3 のはじめに

前の e と微分方程式の話では, 微分方程式を解く際に,e が重要であることを述べました. ここで, 基本的な解析学や線形代数の知識がある大学 1 年生や 2 年生向けに, 更に微分方程式を一般化した形について考え, そこにも e が現れることを紹介し,e が普遍的で便利な存在であることを述べたいと思います. 世の中にはたくさんの微分方程式がありますが, それを一般化した形で

$$\frac{du}{dt} = Au$$
$$u(0) = u_0$$

という風に書いてしまいましょう.u は我々が求めたい関数,A は u に何らかの変換 (例えば, 数を足す, かける, 微分するなど) を施すものです.
つまり,2 つの式で定義される微分方程式を解くということ解釈すると,

よくわからない関数 u があってそれを解析したい.
u の最初の値と,u が瞬間瞬間にどのように変化していくかは, 分かっているので,u の全体像を求めて欲しい.

これは, 例えば物体や光や音や熱などがどのように動いていくかを調べたい物理ではよくあることで, それぞれの場合に対して微分方程式があります. ここで数学がしたいことは, 問題をすごく一般化したわけですが

u という関数にはどのぐらいの性質を認めてよいのか,A という変換にもどのぐらいのの性質を認めてよいのか.

ということになります. より一般的で広い範囲の u,A を使えるような理論を構築すれば, それだけ多くの問題を同時に解決することが出来ます. この記事では,u をバナッハ空間という空間に属するもの,A を線形作用素という変換に限定して構築された**関数解析**の理論について触れます.

15) 例えば, この会社の株価はこれから伸びる!といったときに, 一直線を描いて伸びていくわけではなく, 少しランダムさを含んでギザギザかたちで上昇していくことが想像出来ます

16) フィッシャー・ブラックはその時には他界していました

関数解析と半群

バナッハ空間

定義. X がバナッハ空間であるとは, 完備なノルム空間であることである.

いきなり空間に対して2つの性質を仮定しましたが, どのようなことなのでしょうか, 詳しく見てみましょう.

定義. X が K 線形空間であるとは,$u, v \in X$ に対して足し算 $u + v \in X$ と,$u \in X, k \in K$ に対して, スカラー倍 $ku \in X$ が定まっていて,
$u, v, w \in X$,$k, l \in K$ に対して,(ベクトルと同様の) 次のような性質を満たしているものである.[17]
$(u + v) + w = u + (v + w), u + v = v + u, u + 0 = u, u + (-u) = 0,$
$k(u + v) = ku + kv, (k + l)u = ku + lu, (kl)u = k(lu), 1u = u$

ここでたくさんの式が出てきましたが,K というのは, 実数 $\mathbb{R}$ や複素数 $\mathbb{C}$ について考えてもらって構いません. そして,X という線形空間は, 所謂高校数学のベクトル空間です. 高校数学のベクトルは矢印であり, 矢印を足すことやスカラー倍することが許されていました. そして, ベクトルに対しては長さが定まっていたので, それを今から定めます.

定義. 線形空間 X 上で定義された $\mathbb{R}$ に値を取る関数 $\|,\| : X \to \mathbb{R}$ がノルムであるとは次の3つの性質が成り立つことである.
(1) 正値性: 全ての $u \in X$ に対して $\|u\| \geq 0$ が成り立つ.
(2) スカラー倍に対する同次性: 全ての $u \in X$ と $k \in K$ に対して $\|ku\| = |k|\|u\|$ が成り立つ.
(3) 三角不等式: 全ての $u, v \in X$ に対して,$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ が成り立つ.
また, ノルムが1つ指定された線形空間のことを**ノルム空間**という.

これも長さにとって当然成り立って欲しい性質を述べただけとなりました. そして, バナッハ空間の1つ目の性質**ノルム空間**とは, 長さが定義された空間ということでした.
続いて完備性について, 触れてみましょう.

定義. ノルム空間 X の元の列,x_n $(n = 1, 2, \dots)$ がコーシー列であるとは次を満たすことである.

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \ (n, m \to \infty)$$

である.

つまり, ある点列[18]の間の距離がどんどん小さくなっているというが, コーシー列であるということの定義です.[19]
ある数列が収束しているとき, これはコーシー列になりますが, 逆に**一般にコーシー列は収束列ではありません**. 例えば,$\mathbb{Q}$ という有理数全体の空間を考えて,$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots$ という風に π にどんどん近づいて行くような数列を考えます. この数列の間はどんどん0へと近づいていきますが, その収束先の π は有理数ではないため, 収束先はありません. よって, この数列は収束列ではないのです[20].

定義. ノルム空間 X が**完備**であるとは任意のコーシー列が収束する先があるということである.

つまり, バナッハ空間の2つ目の性質はコーシー列のようなちゃんとした数列は, ちゃんと収束する先があるような空間を考えたいということです.[21]

---

[17] 線形代数を知っている人に対しては冗長であるので, 詳しくは説明するべきではないし, 線形代数を知らない人に対しても雰囲気だけを知ってもらいたいので厳密に書くことはしません.
[18] 高校数学でいうところの数列であるが, ここで列をなしているものは空間上の点であるので, 点列という
[19] コーシー列の詳しい話については, この *episode* の前多さんの記事割り算再考にも書いてありますが, もう一度触れてみます.
[20] これは空間を $\mathbb{Q}$ で考えたからであり, もちろん $\mathbb{R}$ という実数の空間で考えるとこの数列は収束します
[21] 僕もコーシー列のようにちゃんとした数列なので収束先がほしい

線形作用素

次に $\frac{du}{dt} = Au$ の A がどのようなものであるかを考えます.

定義. X, Y を線形空間として, 写像 $A : X \to Y$ が $\mathcal{D}(A)$ 上で定義された線形作用素であるとは.
$\mathcal{D}(A)$ は X の部分空間であり, この $\mathcal{D}(A)$ 上で A が線形性を満たしていることである.

定義. A を X から Y への線形作用素とするとき, ある M が存在して,

$$\|Au\| \leq M\|u\| \ (u \in \mathcal{D}(A))$$

が成り立つとき,A は有界であるという.

ここで, $\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \to Y \text{ 線形作用素 } | \mathcal{D}(A) = X, A \text{ は有界 } \}$ とおく. とすると, この空間には次のようなノルムを入れることができる.

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$$

こうすると,$\|Au\| \leq \|A\|\|u\|$ が成り立つ. 実は Y がバナッハ空間であるとき,$\mathcal{L}(X, Y)$ もバナッハ空間となる.

半群

一般に半群といえば, 集合 S と演算 $*$ の組で, 全ての元 $a, b, c \in S$ に対して結合律 $a * (b * c) = (a * b) * c$ が成り立っているようなものを指しますが, 今回はバナッハ空間における半群を次のような考えます.

定義. X をバナッハ空間,$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を X 上の線形作用素の族とする. この時,$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ が半群であるとは,
(1) $t \geq 0$ に対して $T(t) \in \mathcal{L}(X)$
(2) $T(0) = I$
(3) $t, s \geq 0$ に対して $T(t) \cdot T(s) = T(t + s)$

半群の例を見ておきましょう

例. $X = L^p(0, \infty)$ として,$t \geq 0$ に対して

$$(T(t)u)(x) := u(t + x) \ (x > 0, \ u \in X)$$

という風に関数を t だけ横にずらすような作用素 $T(t)$ は半群をなします.

ここで半群の重要な性質について定義します.

定義. $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ が (C_0) 半群であるとは, 任意の $a \in X$ に対して,t の関数 $T(t)a : [0, \infty) \to X$ が連続であることである.

定理. X をバナッハ空間として,$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を (C_0) 半群とすると, 次のような $M \geq 1$ と β が存在して,

$$\|T(t)\| \leq Me^{\beta t} \ (t \geq 0)$$

定義. $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を半群とすると, この半群の生成作用素 A を次のように定義する.

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X | \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)u - u}{h} \text{が存在する } \}$$

$$Au := \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)u - u}{h}$$

定理. A を (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ の生成作用素とすると A は閉作用素であり,次のような性質が成り立つ.
$a \in \mathcal{D}(A)$ とすると,$T(t)a \in \mathcal{D}(A)$ $(t > 0)$ であり,

$$T(t)Aa = AT(t)a \ (t \geq 0)$$

$$\frac{d}{dt}T(t)a = T(t)Aa = AT(t)a \ (t > 0)$$

さらに $\mathcal{D}(A)$ は X で稠密である.

そして, 実は (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ は実は $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ という形で書けることが明らかになります.

定理. (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 半群と生成作用素 A は一対一対応する

証明 まず,(C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ と $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ の生成作用素がどちらも A だったと仮定する.
このとき,$t_0 > 0$ と $a \in \mathcal{D}(A)$ を任意にとって $w(t) = T(t_0 - t)S(t)a$ $(0 \leq t \leq t_0)$ と定めます. そうすると $\frac{dw}{dt} = 0$ が計算によりわかり,$w(0) = w(t_0)$ であることがわかります. よって,$T(t_0)a = S(t_0)a$ がわかり, $\mathcal{D}(A)$ は X で稠密であることと,$T(t_0), S(t_0)$ は有界であるので,$T(t_0) = S(t_0)$ となります.
よって, 生成作用素により (C_0) 半群は一意に定まることがわかりました.
次に

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

として定めると, これは (C_0) 半群であり, その生成作用素は A であることを示します. まず $\|T(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{t^n}{n!} A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n \leq e^{t\|A\|}$ となってこれは有界です. そして, 項別微分することによって $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ が得られ, 特に $\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)u - u}{h} = Au$ です.
その他の $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ が半群であるという性質は一般の e の議論によって分かります. □

半群と微分方程式

色々と定義が長くなってしまいましたが, 我々がそもそも考えたかった問題に立ち返って見ましょう.
X をバナッハ空間として,A を作用素とします. このときに次のような抽象的な微分方程式を解きたかったのです.

$$\frac{du}{dt} = Au \ (t > 0)$$

$$u(0) = a$$

ただし,u は $u : [0, \infty) \to X$ で C^1 級のものを考えています. ここで次のような定理が成り立ちます.

定理. A が (C_0) 半群を生成して, かつ $a \in \mathcal{D}(A)$ ならば,$u(t) = e^{tA}a$ が上の微分方程式の一意の解となる.

さらにここでは紹介しませんが,A が解析半群という特別な半群を生成するとき, 更に強い次のような定理が成り立ちます.

定理. さらに A が解析半群を生成していれば, 任意の初期値 $a \in X$ に対して,$u(t) = e^{tA}a$ が上の微分方程式の一意の解となる.

つまり,A がある性質を満たしてくれれば, 一瞬にしてこの微分方程式は解けてしまうのです. では, どのような条件をみたすときに A は (C_0) 半群を生成してくれたり, 解析半群を生成してくれたり, するのでしょうかそれについては次のような定理が有用です.

定理 (吉田-Hille の定理)**.** A が縮小 (C_0) 半群を生成することと次の 2 条件は同値である.

(1) A の定義域は X で稠密であり,A は閉作用素である.

(2) $\{\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ であり,

$$\lambda\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1 \ (\lambda > 0)$$

円周率 π がひょこっと現れる話 (山本)

はじめに

e, π, i の中で唯一義務教育までで習う数，それが円周率 π です．$3.14159\cdots$ という並びは皆さんも人生で一度は見たことがあるでしょう．「円周率」の名の通り，π という数字は「円周の長さを直径で割ったもの」として定義される，図形由来の数です．円の面積を求めるときだったり，大学受験では回転体の体積を求めるときだったりに現れることが多いですね．今日はこのように図形的な側面の強い円周率 π が数学のひょんな所にひょこっと現れる話をしたいと思います．

(Caution：当文章においては，「大体どのような感じか」を理解していただくことを重要視するために，積分と無限和の順序を注意なしに交換する箇所が何か所かございます．あらかじめご了承ください．)

1. 三角関数と Fourier 級数展開

「π と関係する関数」と言われて，真っ先に思い浮かぶものは何でしょうか？高校までの範囲でくくると，おそらく三角関数を連想する人が一番多いのではないでしょうか．そこで，最初はこの三角関数についてお話しようと思います．

まず三角関数，特に $\sin\theta$ や $\cos\theta$ のグラフの形を思い出してみましょう．これらのグラフは「正弦波」と呼ばれる綺麗な形の波になっています．これは，音叉を叩いたときの音の波形などに現れます．また，$\sin\theta$ や $\cos\theta$ は

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

なる関係を満たしていました．これは θ がちょうど 2π 増えたときの関数の値が元のものと同じであること，すなわち 2π が関数の周期になっていることを意味します．より一般に，関数 $f(x)$ に対して $f(x + 2\pi) = f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は 2π を周期として持つといいます．これに沿えば，正の整数 n に対して，$\sin(n\theta), \cos(n\theta)$ もまた 2π を周期として持つことが分かります．

このように，2π を周期に持つ関数の簡単な例として三角関数が挙げられます．これらは比較的簡単な形をしており，解析もしやすいです．さて実際には周期 2π の関数はこれだけではないわけで，音や振動を解析する際には単純な正弦波の形をしていないものを対象とする場合がほとんどです．そのような場合の関数はどのように扱うのがいいでしょうか？

大学 1 年で習う Taylor 展開は，関数をある点の付近で多項式により近似するものでした．これに倣うと，「一般の関数をより簡単な関数の和で近似する」ことを考えるのがいいかもしれません．

18〜19 世紀の数学者 Fourier は，「すべての周期関数は，同じ周期を持つ無限個の三角関数の和で表される」という主張をしました．この主張は元々熱伝導に関する問題を解く際に用られたものであり，主張を認めればその問題の解にたどり着くことができたのでした．Fourier によるこの大胆な主張は，真偽が定かでなかったために数学界に議論を巻き起こしましたが，結果的には「大体」正しい主張であったことが後に分かります．主張がどこまで正しいのか・また正しいとして，その無限和の収束やふるまいは良いものか？という当時の問いは，その後の解析学，ひいては数学そのものを大きく発展させたと言われています．

さて，Fourier 級数展開の具体的な主張を見てみましょう．

$f(x)$ を「性質の良い」周期 2π の関数とする．このとき，

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{1}$$

となるような実数 a_n, b_n(n は自然数) が存在する．

ここで，「性質の良い」というのは，例えば「定義域全体で微分可能で，さらに導関数も連続」などが相当します．上に出てきた各係数 a_n, b_n は，大雑把には次のように計算されます．まず a_0 については，(1) の両辺を x について 0 から 2π まで積分して

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)dx &= \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\, dx \\ &= 2\pi a_0 + 0 = 2\pi a_0\end{aligned}$$

すなわち

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

を得ます．正の整数 m に対する a_m については，次の公式

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx) &= \begin{cases}\pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m)\end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx) &= 0\end{aligned}$$

を使えば，次のように計算できます．(1) の両辺に $\cos mx$ をかけ，それを x について 0 から 2π まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(mx)f(x)dx &= \int_0^{2\pi} \cos(mx) \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} a_0 \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos(mx)\,(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\, dx \\ &= \pi a_m\end{aligned}$$

を得ます．すなわち，$m \geq 1$ に対して

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(mx)f(x)dx$$

となります．同様にして，b_m も

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(mx)f(x)dx$$

と計算できることになります．これで，係数が計算できました．

それでは，とある関数を実際に三角関数の無限和で表してみましょう．

周期 2π の関数 $f(x)$ を，$0 \leq x \leq 2\pi$ において $f(x) = -x(x - 2\pi)$ となるように定めます．これは $x = 2\pi n$(n は整数) において微分可能ではありませんが，先に述べた「性質の良い」関数の 1 つです．これを認めれば，積分計算により a_0, a_n, b_n を求めてやることで $f(x)$ を三角関数に表すことが出来ます．実際に計算してみると (部分積分を使えば高校生にもできる計算ですので，やってみてください),

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{3}\pi^2 \\ a_n &= -\frac{4}{n^2} \\ b_n &= 0\end{aligned}$$

となるので，結局

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(mx)$$

と表すことができました．

さて，上式に $x = 0$ を代入してみましょう．すると

$$0 = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

となり，適当に整理すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

となりました．これはすなわち，「自然数の二乗の逆数の和が $\pi^2/6$ になる」ということを意味しています．左辺は整数に関する基本的な級数になっているわけですが，その値として π がひょこっと現れるという不思議な公式が出来てしまいました．この級数は「Basel 級数」と呼ばれています．

他にも，Fourier 級数展開を使うと導ける級数は色々あります．関数を色々変えてみて，様々な公式を作ってみるのも興味深いかと思います．

ζ 関数，Γ 関数と関数等式

前章において，自然数の二乗の逆数の和の値に π が現れることを見ました．では，「二乗」が「n 乗」，あるいは実数「s 乗」と変わった場合の値はどうなるのでしょうか？

そこで，1 より大きい実数 s に対して，$\zeta(s)$(ゼータ) という関数を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

により定義します．ここで「1 より大きい実数」と言ったのは，1 以下の実数では定義式の級数が発散してしまうことを考慮してのことです．この ζ 関数の定義式から，前章の Basel 級数は $\zeta(2)$ に相当します．実は，正の偶数 n に対して，$\zeta(n)$ は π^n と有理数の積の形をしていることが知られています．

「正の偶数」という規則正しい数値を代入すると π に関係する値を返す ζ 関数ですが，この関数まわりで π が出てくるのは，関数に何かしらの値を代入するときだけではありません．

それを説明するために，$\zeta(s)$ とは別の関数として，$s > 0$ なる実数に対して $\Gamma(s)$(ガンマ) という関数を

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$

により定義します．$\cdots$ いきなり積分の式が出てきてしまいましたが，これがどのような関数なのか説明します．部分積分を行えば，$s > 0$ なる実数 s に対して

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^s dt \\ &= \Big[-e^{-t}t^s\Big]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-t})(st^{s-1})dt \\ &= 0 + s\int_0^{\infty} e^{-t}t^s dt = s\Gamma(s)\end{aligned}$$

となることが分かります．この $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ のように，ある種の関数が満たしている等式のことを「関数等式」といいます．また，とくに

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$$

となるので，上の関数等式と合わせれば，数学的帰納法により全ての正の整数 n に対して

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

となることが分かります．つまり，Γ 関数とは「正の整数でしか定義されなかった階乗の定義域を拡張したもの」ということになります．ある意味で整数論由来の関数というわけですね．

さて，Γ 関数は階乗の定義域を拡張したものと述べました．しかし，この関数は更に「ほとんどの複素数」にまで定義域を拡張することができます．高校までの数学では，関数といえば定義域は実数のものがほとんどだったかと思いますが，大学での数学では定義域を複素数にすることもしばしばあります．

例えば，$y = x^2$ という関数は定義域を複素数としても「自然に」定義できますし，$y = 1/x$ という関数は定義域を「0 以外の複素数」としてもやはり「自然に」定義できます．指数関数 e^x についても，e^x を Taylor 展開して

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

という関数として考えれば，やはり複素数全体に定義域を「自然に」拡張することができるでしょう．これらと同様にして，Γ 関数も「自然な方法により」，定義域を「ほとんどの複素数」とする関数にすることができます．具体的には，「複素数全体のうち，0 以下の整数を除いたもの」全体を定義域とすることができます．

Γ 関数についての話が長くなりましたが，ようやく ζ 関数の話に戻ります．Γ 関数同様，ζ 関数も「自然な方法で」定義域を拡張することができます．さらに，この ζ 関数の現れる関数等式を得ることもできます．ここまで出てきた関数を組み合わせて

$$\Lambda(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

という関数を定めます．(ただし，複素数 s に関して，$\pi^s = e^{s \log \pi}$ と定めると，これは定義域が実数の場合の拡張になっています．) このとき，この関数について

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$$

という関数等式を得ることができます．この等式はすなわち，「$\Lambda(s)$ は点 $s = 1/2$ に関して対称な関数であること」を意味する，かなり簡潔かつ綺麗な式になっていることが分かるかと思います．Γ 関数，ζ 関数といういわば「整数論由来の」関数における簡素な関数等式を導くという方向からも，π が現れてくるわけです．ちなみに，先ほど定義域を広げることが出来るといった ζ 関数ですが，関数等式を用いることにより，負の偶数 n に対して $\zeta(s) = 0$ となることが分かります．それ以外で $\zeta(s) = 0$ となるような複素数 s はどのような分布の仕方をしているか？という問いは「Riemann 予想」と呼ばれ，最初に提唱されてから 150 年以上経った今でも未解決です．

3.Ramanujan と π

先の章で，無限和による π の公式 (Basel 級数) を 1 つ見ました．他にはどのような公式があるのでしょう？そこで，突然ながらこの公式をご覧ください．

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(4^n n!)^4 99^{4n}}$$

$\cdots$ なかなかに面妖な格好をしています．この公式を見出したのは「インドの魔術師」という異名を持つ，Ramanujan という数学者です．Ramanujan 本人はこの公式を証明したわけでなく，実際に証明されたのは提唱されてから 50 年以上経ったころのことだそうです．にもかかわらず，このようにかなり複雑な公式を Ramanujan はいきなり発見したのですから驚きです．これ以外にも，Ramanujan は π に関していくつかの公式を発見しています．

また，Ramanujan は π に関する公式以外にも様々なことをやっています．例えば，次の関数をご覧ください．

$$\Delta(q) = q(1-q)^{24}(1-q^2)^{24}\cdots = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

これは Ramanujan の Δ(デルタ) 関数と呼ばれるものです．Δ 関数を q に関して「展開」すると，

$$\Delta(q) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots$$

のようになります．これは q に関する多項式のようなもの (正式にはべき級数といいます) になっているわけですが，これの q^n における係数を $\tau(n)$ とおきます．すなわち：

$$\Delta(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

です．この関数 τ を「Ramanujan の τ(タウ) 関数」といいます．また，$\Delta(q)$ の定義式の q として $q = e^{2\pi iz}$ を代入することができ，そうすると

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi inz}$$

は虚部が正である複素数全体を定義域とする関数となります．Δ および今作った F は，次の性質を満たします．(3 つ目の性質を証明することは若干難しいです．)

- $\Delta(q)$ は q に関するべき級数
- $F(z+1) = F(z)$
- $F(-1/z) = z^{12}F(z)$

この性質により，F および Δ は「重さ 12 の保形型式」であるといいます．さらに，

- $\Delta(0) = 0$

が成り立つことにより，F および Δ は「重さ 12 のカスプ型式」であるといいます．保形型式・カスプ型式は整数論的にも歴史のある関数です．さて，実際に $\tau(n)$ を計算してみると，こんな感じになります．(計算力に自信のある人は試してみてください．)

$$\tau(1) = 1, \tau(2) = -24, \tau(3) = 252, \tau(4) = -1472$$
$$\tau(5) = 4830, \tau(6) = -6048, \tau(7) = -16744, \tau(8) = 84480$$
$$\tau(9) = -113643, \tau(10) = -115920, \tau(11) = 534612, \tau(12) = -370944$$

これらの数字を見て何か気付くことはあるでしょうか？もし即答できたら，あなたも Ramanujan になれるかもしれない！？

実際のところ，Ramanujan はおおよそ次のようなことに気付きました：

- 互いに素な整数 n, m に対し $\tau(n)\tau(m) = \tau(nm)$
- 素数 p，正の整数 n に対し $\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1})$

n, m を小さめの数字にして確認してみると，

$$\tau(4) = -1472 = (-24)^2 - 2^{11}\cdot 1 = \tau(2)\tau(2) - 2^{11}\tau(1)$$
$$\tau(6) = -6048 = -24\cdot 252 = \tau(2)\tau(3)$$

となり，なるほど確かにそうなっているように思えます．そしてこの考察は的中していたことが後に証明されました．Ramanujan の洞察力の凄まじさを思い知らされます．

さて，前章で Riemann 予想について少しだけ触れましたが，ζ 関数を考察する一つの方法として，ζ 関数を単体で見るのではなく，何らかの関数のクラスの 1 つであると見てやるというものがあります．そのような「関数のクラス」として，保形型式から得られる「保形 L 関数」というものがあります．今回は，Δ 関数から保形 L 関数を作り，その中でやはりひょっこり π が登場することを見たいと思います．

といっても定義自体は簡単で，保形 L 関数 $L_\Delta(s)$ は

$$L_\Delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

により，実部が十分大きい複素数 s で定義することができます．ζ 関数の定義式を少し変えただけですね．そうなるとやはり，ζ 関数と似た性質を持つことが期待されます．

ここで突然ですが

$$\Lambda(s) = \int_0^\infty F(iy) y^{s-1} dy$$

という値を考えてみます．$F(iy)$ が $y \to \infty$ で「非常に速く」0 に収束すること，および先に挙げた F の性質から $F(i/y) = y^{12} F(iy)$ となることを使えば，$\Lambda(s)$ は全ての複素数 s で値を持つことが分かります．また，

$$F(iy) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-2\pi y n}$$

だったことを思い出せば，$\Lambda(s)$ は次のように計算できます：

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \int_0^\infty F(iy) y^{s-1} dy \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-2\pi y n} \right) y^{s-1} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_0^\infty e^{-2\pi y n} y^{s-1} dy\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{-2\pi y n} y^{s-1} dy$$

において，変数変換 $t = 2\pi n y$ により，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2\pi y n} y^{s-1} dy &= (2\pi n)^{-s} \int_0^\infty e^t t^{s-1} dy \\ &= (2\pi)^{-s} \times \Gamma(s) \times n^{-s}\end{aligned}$$

となります．よって，

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) (2\pi)^{-s} \Gamma(s) n^{-s} \\ &= (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L_\Delta(s)\end{aligned}$$

となっていることが分かります．よく分からない積分の式から $L_\Delta(s)$ が現れ，また再び π がひょこっと出てきました．$\Lambda(s)$ が全ての複素数に対して定義できていたことから，

$$L_\Delta(s) = (2\pi)^s \Lambda(s) / \Gamma(s)$$

により $L_\Delta(s)$ の定義域を複素数全体に拡張することができます．これが，$\Lambda(s)$ なるものを考えた理由の 1 つです．$\Lambda(s)$ を考えた理由はもう 1 つあります．$\Lambda(s)$ の定義式にある y について，$t = 1/y$ と積分変換すると，

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= -\int_\infty^0 F(i/t)t^{-(s-1)}\frac{dt}{t^2}\\ &= \int_0^\infty t^{12}F(it)t^{-(s+1)}dt\\ &= \int_0^\infty F(it)t^{(12-s)-1}dt\\ &= \Lambda(12-s)\end{aligned}$$

となることが分かります．これにより，L_Δ に関する関数等式

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_\Delta(s) = (2\pi)^{12-s}\Gamma(12-s)L_\Delta(12-s)$$

が導かれました．ζ 関数のとき同様，底を π の何乗かとする指数関数を掛け合わせることによって，かなり綺麗な形の関数等式を得ることができました．

おわりに

今回は π が「ひょこっと」現れる話ということで，図形的な概念でないところから π が出現するというものをいくつか挙げてみました．(後半はかなり解析的整数論の話になってしまいましたが (汗)) 今回挙げたもの以外でも π が現れるところは色々ありますし，また π でなくても，全く関係がないと思われていた分野に別概念がいきなり現れるということはしばしばあります．皆さんも，興味があればそういったものを探してみてはいかがでしょうか？

第一回　数学科意識調査！

　数学科の人ってなに考えてるかわからない。数学のことしか考えてないの？そんなことを、よく言われてしまいます。
そこで、今回は数学科の B3・B4、計 18 人にアンケートをとり、数学科に通う学生の生態を探りました。読み物程度に眺めてみてください。

数学をやりたいと思ったのは？

　まずは、数学をやりたいと思ったきっかけをインタビュー。18 人中、8 人が「中学のころ」、5 人が「高校のころ」と答え、全体の 3/4 を占めました。やはり、『数学』という科目の出会いが、運命を大きく変えたのでしょう。
数学オリンピックとか部活（数学研究会）でのゼミとか（ペンネーム：simplicial object）や、**ポアンカレ予想のドキュメンタリーを見て（普遍性）**など、学生時代からすすんだ数学の一端に触れていた人が、ここ数学科には多く集まっています。
中には、「小学校以前」から数学を志していた人も！**小学生の時にあたしンちに因数分解という単語が出てきて, 調べてみたら面白かった. 小 6 にやたらと塾の先生がこの問題は微積を使うと解けるというので, インターネットで調べてみると面白かった.（後藤夢乃）**ということでまずは数学が好きになり、さらに**高校生のときに物理の先生と一緒に群論環論の本をよんでいて面白かった.（後藤夢乃）**ということで現代数学にハマっていったと、熱く語ってくれました。
しかし、東大の特徴として「2 年生の冬に学部・学科といった進路を決める」というものがあるので、当然大学生になってから数学に目覚めた人もいます。中には**昔から数学が好きだった事と、医学部での勉強に嫌気がさして（zatamura）**ということで、別の大学からこの東大理学部数学科に移ってきた人も！降年（希望の学科に行くため、1 年留年すること）して、数学科を目指す人も少なくありません。そんな熱意を持った人があつまっているのです。

数学をやっててよかったことは？

「サインコサインや、ビブンセキブンなんて、いつ使うの？」数学はしばしば「生きてて役に立たない」と思われがちです。そこで数学科の学生に、数学ができて（数学をやってて）よかったと思うことを聞いてみました。
自分の頭の中をいかに人に伝えるかをとても考えるようになりました。（花屋のワルガキ）というのが、とても印象的な回答でした。難しいことを難しく伝えるよりも、難しいものを噛み砕いて伝える方が何倍もエネルギーを使います。数学科でゼミなんかをやってると、こういったことはしょっちゅう鍛えられるのです。**論理的に物事を考えられるようになったこと（いぬい）**という回答もありましたが、このような力はたとえば就活でも活きてきます。
しかし大部分を占めるのは、**綺麗な証明や定理に出会って感動できる（GAP）**や、**単純に生涯ハマれるような趣味ができたこと。（ごま）**、**数学に関して真剣に議論できる友達が出来た**といった、数学の世界にどっぷりハマっているからこそ得られる喜びです。話題が尽きたら適当な数学概念を説明することで会話が弾む（マスク）、**等しいことと同型なこと違う概念だと気がつき、またそれに敏感になれた（こばけん）**というのは、既に学部生ながら研究者の風格があります。中には**特に無し（zetamura）**と断言してくれた人も。数学の世界には、数学を志す者にしかわからないよろこびが待っているのです。
最後に、**研究室に時間的に拘束されない**とか**多少面倒な説明書も楽々読めます**といったライフスタイルに関わるものもあったと報告しておきます。中でも、これは羨ましいと思う人も多いのでは…？
中高生の頃は、数学を教えてほしいと女の子に囲まれた。その内の 1 人が今の彼女です＞＿＜（髭）

数学以外のことを考えているときは？

数学以外のことを考えているときは、どんなことを考えていますか？いくつかの選択肢を付けて聞いてみました。(複数選択可）**眠い（12 人）**というのが最多でした。大学生の性ですね。数学科の午前中の授業開始時刻は 9 時 15 分と、他の学科よりもやや遅いものの、それでも眠いものは眠いんです！仕方ない！
お腹すいた（10 人）お酒が欲しい（7 人）彼女欲しい（7 人）が後に続いて、三大欲求に正直だなあと思いました。**バイト行かなきゃ（6 人）サークル行かなきゃ（4 人）**という風に他に打ち込んでるものがある人も。バイトだと知り合いには塾・家庭教師だけでなく、喫茶店で働いてる人もいます。サークルは音楽系（特にオーケストラ）が多い印象です。
アニメ観たい（5 人）は期待を裏切らないですね。学部生のフリースペース、学部生室には、アニメの原作になっている漫画（けいおん、キルミーベイベーや、聲の形まで）が揃っています。また。数学以外の勉強を楽しんでたり、**だいたいプログラミング（Ziphil）**という人もいます。さらに自由回答欄では筋肉をつけたい人が 2 人ほどいました。数学の問題も、筋肉ですべてを解決したいものです。

数学の魅力って？

数学科の意識調査なのだから、せっかくなので数学の話もしましょう。専門にしたいことと、その魅力を語ってもらいました。**視覚数理科学、応用なので役に立つ（淘汰）**という意見がありますが、これは筆者の私の専門も関わるところです。応用数理に近いような解析系は、数学科の中でも魅力を語りやすいと言われています。**色々な分野 (解析学確率論応用数理など) の知識を活かすことができる. 色々な分野 (経済物理等) に活かすことができる.** と答えてくれた人がいますが、数学科の有力な就職先の一つに経済分野があります。「数学ならだれにも負けない」という学生が、求められているのです。
解析を離れたところでは、**ホモトピー論、素朴なのに数学の言語って感じだ（simplicial object）代数幾何 代数の人とも幾何の人とも話ができて楽しいです（たつろー）**と答えてくれました。中でも、数論（整数まわりの研究）をやろうとしている人は熱く語ってくれています。**数論 数の美しさを感じる（zetamura）保形関数論：いい感じの関数が数論的情報を持ってくるのが神秘的（ばんほーてん）**といった風に。整数論は「数学の女王」と言われる分野ですが、熱意を持った研究者たちが女王に謁見すべく力を注いでいます。
数学の根幹を探ろうとする人も。**集合論; ZFC を越えた先に広がる世界を見ることができる（GAP）**詳しくは『公理的集合論』『ラッセルのパラドックス』で調べてもらうのがよいのですが、我々が数学を扱うときに基本となる『集合』。これが何かを表す公理系が『ZFC』(ツェルメロ＝フレンケルの公理系に選択公理を加えたもの）だと言われています（現在これが使われているというだけで、もしかしたら覆されるかもしれない…)。ここで語るのはあまりに難しいので、ぜひ「ますらぼ」のブースにいる人に聞いてみてください。

さいごに・おまけ

ここまで読んでいただきありがとうございました。数学科の人はこんなこと考えてるんだよ、こわくないんだよ、ということがお伝えできてればいいなと思います。最後に、「無人島にひとつだけ何か持っていけるとしたら、どんな数学書を持っていきますか？ 」という質問をしてみました。こんなふざけた質問に真面目に答えてくれる数学科のみんながとてもすきです。
幾何からは **categorical homotopy theory, 位相幾何学, 離散幾何学講義**。解析・応用系からは **complex analysis ルディンの Real and complex analysisLambda Calculus with Types**。集合論だと **Kunen の集合論,Handbook of Set Theory (Volume 3)**。代数幾何が人気で、**ハーツホーンの代数幾何学,EGA(代数幾何原論)** がかなり票を集めていました。

もちろんちゃんと無人島に行くことを考えて、**食べられる数学書**,**EGA(燃料と食料として良さそう)**,**EGA…野生動物を殴る**,**解析系。解析系の式を砂浜に書き殴りたいですね。**というロマンある回答が見られました。最後の一人の回答は**持って行かない**…そりゃあそうだな。

数学科で勉強すること (仮)(大澤)

代数

はじめに

　中学高校では代数というと、「数字だったものが文字に変わり、それらの計算を考える」という意味にとられることが多いでしょう。
$2+3=5$ だったものが $2a+3a=5a$ に置き換わる。人によってはとりとめのない変化だと感じる人もいるでしょう。数学科の代数ではどのようなことが起きるかというと、「数字の一般化」だけでなく、「集合の一般化」「演算の一般化」が行われていきます。
数字が文字に変わったとはいえ、中学高校の頃はそいつらの正体は所詮 “実数” の中のお話だったし、“足し算” や “掛け算” というのもよく知っているものでした。これらを一般化していくとどうなっちゃうの？といったお話を、これからしていこうと思います。
(ちなみに、“実数” ってなんだろう、“自然数” って「1 とか 2 みたいなやつら」じゃ定義にならないよね、ということを考えるのも立派な数学ですよ！！)

群とは

　群 (ぐん) というのは、演算が入った集合に、最低限のルールを加えたものです。
最低限のルールさえあれば、別に集合の中身は実数じゃなくてもいいし、演算も足し算や掛け算じゃなくても構いません。変な話、「ペンとアッポーでアッポーペン、ペンとパイナッポーでパイナッポーペン」みたいな計算規則でもよいのです。
必要最低限の規則とは、「計算が集合の中で完結してること」、「結合法則が成り立っていること」、それから大事なのが「単位元と逆元の存在」です。例えば掛け算なら、どんな数でも 1 という数を掛け合わせれば結果は変わらないですよね。このように計算結果を変えないものを『単位元』といいます。また、0 以外の数には逆数と呼ばれるものがあって、$3 \times 1/3 = 1$ という風に計算結果を 1 にすることができますよね。これが『逆元』です。このとき、「0 を除く実数は掛け算に関して群をなす」といいます。
掛け算じゃ面白くないので、別の例を考えます。「瀧くん、三葉ちゃん、奥寺先輩」の 3 人がいるとします。瀧君と三葉ちゃんが入れ替わることを (瀧、三葉) と書くことにします。さらに瀧君が入った三葉ちゃんと奥寺先輩が入れ替われば、瀧君に三葉ちゃんが、三葉ちゃんに奥寺先輩が、奥寺先輩に瀧君が入ることになります。この 3 人が順繰り入れ替わっている状況を、(瀧、三葉) と (三葉、奥寺先輩) の掛け算だと考えます。この入れ替わりの計算は、群をなします。「入れ替わらないこと」が単位元であり、また例えば (瀧、三葉) を 2 回やれば元に戻るので逆元もあります。この群を『対称群』といいます。
人数が増えても任意の入れ替わりは、このように二人の入れ替わりを繰り返せば実現できます。これが「あみだくじ」の原理です。あみだくじがどんな入れ替わりも再現してくれるのは、この対称群のおかげなのです
ということで、いろんな集合、いろんな演算を無限に思いつくことができるのですが、たとえば「瀧くん、三葉ちゃん、奥寺先輩の入れ替わり」と「オバマ、クリントン、トランプ 3 人の入れ替わり」は、集合の元は違いますが実質的に同じですよね。もっと詳しく言うと、2 つの群の間に演算を保つような 1 対 1 対応 (写像) があるとき、2 つの群は実質的に同じものであり、『群同型』であるといいます。群同型なものをまとめて扱うとき、たとえば元の数が 100 個の群は何種類あるか考える、という問題が思い浮かぶでしょう。

環・体とは

　群で多少はっちゃけすぎたので、環・体は真面目にやります。
環・体には2つの演算が登場します。それぞれ、「足し算のような役割」と「掛け算のような役割」を果たします。これらにそれぞれ最低限の規則を与えて(例えば“足し算”の方は群の性質に加えて交換法則も必要だが、“掛け算”の方は逆元が必要ない)、分配法則が成り立つようにしたものを環(かん)といいます。さらに、“掛け算”にも交換法則が成り立ち、“割り算”もできるようにしたものを体(たい)といいます。
環になってくると、より“数字”に近いものを扱うようになります。整数や、$a+b\sqrt{2}$といった形の集合は環。有理数、実数、複素数のようなものは体になります。

　体の“割り算”は完全に割り切ることになるのですが、環で“割り算”を扱うときは“商”“余り”を考えることになります。
高校数学で、整式の割り算を扱ったと思います。あれも“商”“余り”を考える整数のような扱い方をしましたが、じゃあ正式にも“素数”のようなものはあるのか。また、さっき挙げた$a+b\sqrt{2}$という集合は“素因数分解”できるのか。こういった概念を一般化するのが環の醍醐味です。
数字や多項式といったイメージしやすいものから、解析の世界に現れる作用素環というものまで、環の種類は様々です。群ほど自由度はありませんが、あらゆる場面に現れます。

体の上の線形空間

　といっても、群や環はかなり抽象的な数学で、数学が得意な学生であっても初めは戸惑う人の方が多いです。これらは数学科では、3年生の授業で扱います。
抽象数学の入り口として、理系の1,2年生は線形空間というものを扱います。高校数学でおなじみ『ベクトル』を扱うことになるのですが、ベクトル = 矢印 というイメージからは離れてもらうことになります。ここでは、以下のような性質を満たせばベクトルということになります。

Kを体とするとき、VがK上のベクトル空間であるとは、任意のKの元a,bと任意のVの元u,v,wに対して

$$(u+v)+w=u+(v+w)$$

$$u+v=v+u$$

$$\text{ある } 0\in V \text{ が存在して任意の } v \text{ に対して } v+0=v$$

$$\text{任意の } v\in V \text{ に対して } (-v)\in V \text{ が存在して } v+(-v)=0$$

$$a(u+v)=au+av$$

$$(a+b)v=av+bv$$

$$a(bv)=(ab)v$$

$$1\in K(K\text{ の単位元})\text{ としたとき } 1v=v$$

をみたすことである。

　これは矢印だけでなく、例えばax^2+bx+cといった多項式も、a,b,cを体の元とすればベクトルになります。
例えば空間のベクトルであれば、線形独立な3つの矢印を使ってすべての矢印を表現できますが、さっきのような多項式の話でも例えばx^2,x,1に適当な数字をかけて足し合わせることですべての二次以下の多項式を表現できます。つ

まり、二次以下の多項式をすべて集めた集合は、ベクトル空間であるということができるのです。
引き続き多項式のベクトル空間を考えます。x^2 を微分すると $2x$,x を微分すると 1 になりますが、これは二次以下の多項式の空間を一次以下の空間に移すことになります。このようにベクトル空間同士の写像を考えることになるのですが、これは行列を使って表されます (今の高校生は習わないようですが)。行列は数を 2 行 2 列、3 行 3 列…などと並べたものなのですが、写像の性質を調べたいときに行列を使って話を進めることになります。行列の基本的な扱い方は 1 年生で学習します。
このようにベクトル空間を扱う学習を「線形代数」というのですが、数学科に内定が決まった 2 年生の後半まで続きます。そのころになってくると、ベクトル空間の間の写像を集めて、新しい空間として考える『双対空間』、2 つのベクトル空間の "積" のようなものを考える『テンソル積』といったように、理解に時間がかかるような題材を扱うことになります。線形代数は大学数学の入り口だと言われることが多いですが、数学科でやる線形代数はかなり手ごわく、そのぶん極めれば抽象数学の魅力がたっぷり詰まっていると言えるでしょう。

幾何

はじめに

　幾何というと図形問題。高校数学まではその一言で片づけられる気がします。
初等幾何学の中にも実は様々な種類があるのですが、おそらく馴染みがあるのはユークリッド幾何学と座標幾何学だと思います。ユークリッド幾何学とは、いわゆる直感的な平面・空間の上で図形の性質を調べるものです (えらく曖昧な定義ですが)。直線はどこまでも伸ばせるし、平行線はいつまでも交わらず並行であり続ける。こういった「現実で当たり前なこと」を公理として確立し、そのうえで定理を導いていくものです。
また図形を座標の上に乗せれば解析幾何学になります。図形を定式化し、解析の立場から図形を調べていくのですが、高校の範囲ではユークリッド幾何を座標に乗せるという作業にとどまっています。
ユークリッド幾何があれば、非ユークリッド幾何もあります。たとえば平行線をユークリッド平面でなく球面上に引いた場合、それらは交わってしまうでしょう (地球上の経線が北極・南極で交わっているように)。曲線や曲面の上で幾何学を考える場合、曲率という概念が大事になってきます。曲率とはその名の通り「曲がり具合」で、たとえば半径 r の円周の曲率は $1/r$ です。この概念は、大学 2 年の数学で『ベクトル解析』という分野を扱う中で現れます。
これらがすべて初等幾何学と呼ばれているものなのですが、数学科に進学するとそれに対して『現代幾何学』というものを扱うようになります。3 年生の必修科目「幾何学 1」で、現代数学の一つの大きなトピック『多様体』を扱うのですが、それを扱うためにはまた準備が要ります。

位相の導入

　数学の世界で位相というと、"phase" と "topology" という 2 つの単語がヒットします。三角関数を扱うときに出てくる位相という言葉は phase の方ですが、現代幾何学を扱うのに必要なのは topology(トポロジー) です。トポロジーという言葉は、「進んだ数学のよくわからない概念」として世間では独り歩きしているとことがあります。「トポロジーという概念の中では、ドーナツとコーヒーカップは同じ図形だ」とか、「やわらかい幾何学」と呼ばれるとか、インパクトの強いフレーズを耳にすることはあるでしょうが、その実態は結局わからない、という人も多いのではないでしょうか。
ある集合を考えます。元がいくつも (無限個かもしれない) 入った容器です。それぞれの元がバラバラ、無関係であれば話はそこで終わりなのですが、その元どうしで互いに関係があった場合、位相を入れられるチャンスです。たとえば、実数の集合では、2 つの実数を取り出せばこれらの "距離" を測ることができます。この "距離" やら "極限" やらの概念を組み合わせて、"連続" という概念を生み出すことができます。この "距離" "極限" "連続" という概念を一般化するのが位相の果たす役割だと思ってください。

もう少しだけ詳しく言うために、まずは『開集合』をいうものを思い出してください。実数上の開集合と言えば、たとえば $(0,2)$ みたいな端っこを含まない区間が挙げられます (もっと厳密な定義はあるのですがここでは割愛)。『位相』にきっかけは、実数とは限らない集合に対して、「こういうものは “開集合” だよ！」と宣言すること。その宣言のうち、厳密に書いたときに以下を満たす「質が良い」ものを位相と言います。

集合 X が O を開集合系とする位相空間であるとは、

$$\emptyset \in O \text{かつ} X \in O$$

$$\forall A, B \in O \Rightarrow A \cap B \in O$$

$$\forall \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in O$$

をみたすことである。

噛み砕くと、「空集合と全体集合は “開集合” だよ」「“開集合” がふたつあれば、その共通部分は “開集合” だよ」「有限個でも無限個でもよいので、“開集合” の和集合をとれば “開集合” だよ」というルールをみたす宣言をすれば、それが位相になります。

あんまりおもしろくない例を挙げると、「空集合と全体集合だけが開集合だよ！」「部分集合は全部開集合だよ！」という宣言から、位相空間がつくられます。このような位相をそれぞれ『密着位相』『離散位相』といいます。もうすこし非自明な例を挙げると、$X = \{1,2,3\}$ という集合に「$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, X,$ の 5 つだけが開集合だ！」という宣言をすれば位相空間になります。元が 3 つだけの X という空間でも、位相の入れ方は 29 通りあります。

このような位相空間の中では、『連続写像』というのが「写像でうつされた結果が開集合なら、元の集合も開集合である」という言葉で特徴づけられます。皆よく知っている距離の入った空間では、この連続性も皆よく知っている “連続” につながることが証明できます。さらに 2 つの位相空間の間に、逆写像も含めて両方向に連続な 1 対 1 写像があるとき、2 つの位相空間は『位相同型』『同相』であるといい、同じように扱います。これが、「ドーナツとコーヒーカップは同じ図形だ」というフレーズの所以なのです。

長くなったのでこのぐらいにしておくのですが、このトポロジーの知識に代数的な手法を加えれば、『ホモトピー』『ホモロジー』と呼ばれる概念になります。1900 年前後に、ポアンカレという数学者 (ポアンカレ予想で有名ですね) が導入した概念で、数学科では 3 年の後半以降に学習する難解な理論です。

多様体

位相という概念を準備すれば、多様体を定義することができます。しかし多様体の定義はかなりゴツいので、詳しいことは専門書にお任せして、ふわっと理解してもらうための説明にとどめます。

多様体の考え方は、球面をはじめとした非ユークリッドのグニャグニャ歪んだ空間上の幾何を、なんとかユークリッドな座標上の計算で片づけられないか、という考え方が元になっています。地球を平面地図で再現することを考えるのがイメージしやすいでしょう。1 枚の紙に地図をまとめようとすると、縮尺が極端に違う箇所が生まれてしまいあまりいい地図とは言えません。計算しようとしてもかなり不正確になるでしょう。これをどのように避けるかというと、地球 (球面) をいくつかの開集合に分割して、それぞれに対して別々の平面地図を与えてやろうという考え方です。M を位相空間とするとき、M の開集合 U から m 次元ユークリッド空間の開集合 V への同相写像

$$\phi : U \to V$$

を『局所座標系』と呼びます。U 上に局所座標系が定義されていることを (U, ϕ) という対で表し、m 次元座標近傍と呼びます。歪んだ図形上のすべての点を、この座標近傍を使ってユークリッド座標たちの上で話を進められれば、だいたい解決です。

ただいくつか条件を追加しなければならなくて、ひとつは M は位相空間は位相空間でも『ハウスドルフ空間』と呼ば

れるものでなければなりません。ハウスドルフ空間とは、「異なる位置にある点がその点を含む開集合によって分離できる」空間のことを指します。n 次元の座標空間はハウスドルフなので、「そこそこ性格のいい位相空間」を表現するための言い回しのひとつだと思ってもらって構いません。更にもうひとつ、座標近傍を作る際に位相空間を開集合たちで分割するときに、開集合同士の "ダブり" が存在すると思うのですが、ダブってる集合の間に連続だったり、微分可能で滑らかな写像が存在していることが大事です。これが滑らかであれば、特に『可微分多様体』と呼ばれ、3 年生の多様体論では無限回微分可能なときを考えることが多いです。
3 年生の前期の授業「幾何学 1」では、多様体を定義していくつか例を挙げた後、『逆写像定理』『員関数定理』と呼ばれる重要な定理を学びます。これらはベクトル解析の授業でも扱うのですが、多様体というより一般的な空間を扱うことになるので主張文も変わってきます。さらに、座標平面上の関数であれば「接線」、座標空間上の関数であれば「接平面」を考えましたが、もっと一般的に『接空間』にあたる概念を導入します。また、これもベクトル解析でも扱うのですが、多様体上の『ベクトル場』を導入します。ベクトル場は簡単なものなら電磁気を学習している中に出てきますが、これもより一般的に使えるように定義を考えていきます。
ぐにゃぐにゃした空間を相手にするので、当然イメージに頼るのは難しく、座標にうつすという行為を正しく理解する必要があります。しかしこれを理解すればさらに奥深い幾何の世界に潜入することができ、未知の世界がまっていることでしょう。

解析

はじめに

高校生までの解析学では､初等関数と呼ばれる基本的な関数だけを 扱ってきました。$x^n, e^x, \log x, \sin x, \arcsin x$,etc... や、及びその合成関数を興味の対象として、収束や極限、とくに微分積分を利用して性質を調べてきました。
しかしそもそも関数とは何だったかというと､「ある変数 x に対して出力 y を対応させるルール」というだけのルールだったので、例えば入力する変数は実数だけでなく複素数やいくつかの実数の組み合わせも考えられます。
さらに、出力の規則もたとえば

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ は有理数}) \\ 0 & (x\text{ は無理数}) \end{cases}$$

という、すべての点で不連続な関数が考えられます。さらに

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)\ (0 < a < 1, b\text{ は正の奇数整数})$$

とおけば、連続関数にもかかわらずほとんどの点で微分不可能であるような関数が出来上がります (ワイエルシュトラス関数)。このような "病的な関数" も解析学の範疇として考えなければなりません。
大学に入学してしばらくは、収束、極限、微分積分に関するをもっと厳密に証明していきます。極限を扱う際に現れるのが、有名な $\epsilon - \delta$ **論法**です。東大では昨年、「$\epsilon - \delta$ 論法は人類の常識ですよ??」というコピペが生まれました。なので詳しく知りたい人は、駒場祭を歩いている東大生を捕まえて聞いてみてください。

もうひとつ、数学科に進学する前に学ぶ解析の大きなトピックとしては、微分方程式があります。これは例えば

$$y'' + 5y' + 6y = x^2$$

のような式を満たす関数 $y = f(x)$ を探し出すものです。必修というわけではありませんが、理学部はもちろん工学部でも頻繁に使うので理系学生の多くが履修します。微分方程式を個別に対処していく方法ももちろんやりますが、数

学科志望の生徒はむしろ、もっと一般的な微分方程式を考えたくなると思います。たとえば $y' = g(x, y)$ なる形の微分方程式に対して、

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

が、任意の y_1, y_2 に対してある定数 K が存在して成立しているとき、**リプシッツ条件**を満たしているといい、解となる関数の一意性が保障されます。このような話を好むか好まないかで、進学する学部も変わってくるのでしょう。また、この微分方程式が多変数になった偏微分方程式になれば、これは 3 年の数学科の授業で学ぶ発展的な分野になります。

ルベーグ積分

先ほど、有理数で 1 をとり無理数で 0 をとる関数を考えましたが、こういった関数の積分はどうやって行うのでしょうか。これは、縦に長い短冊をいっぱい作って面積を求めるリーマン積分では求めるのが難しいです。
このようなときに役に立つのが、より多くの関数を積分できる**ルベーグ積分**です。ですがこのルベーグ積分を扱う際に準備が必要なのが、**測度**と呼ばれる概念です。数学科のルベーグ積分の講義の半分くらいは、この測度に関する定理の証明になっています。
測度というのは、面積、体積といった大きさに関する概念を一般化したものです。集合 X の部分集合族 A があった時に、その大きさを測る関数を考えるのですが、次のような性質を満たしているものとします。
$\emptyset$ を空集合、$E_1, E_2, E_3, \ldots$ をどの二つも互いに共通部分を持たない A に属する集合の列としたとき、

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu(\cup_i E_i) = \sum_{i=1} \mu(E_i)$$

を満たす関数 μ を測度と呼び、A の元を可測集合、測度が定義された空間を測度空間と呼びます。
測度というのはいろんな集合にたくさんの種類定義できるのですが、ここでは実数上に**ルベーグ測度**と呼ばれるものを考えます。2 次元なら面積、3 次元なら体積にあたるものとほぼ考えてもらっても構わないのですが、きちんと定義することによって、様々な性質が明らかになります。集合論の知識も合わせて考えると、実数という詰まった集合の中で、たとえば 1,2 みたいな有限集合や、整数の集合のようなスカスカの集合、さらに有理数の集合でさえも、測度はすべて 0 になってしまうのです。
勘のいい人は気づいたのかもしれませんが、ルベーグ積分というのはこのように可測集合上で、可測関数と呼ばれるもの (よほどヤバい定義をしなければ大概の関数は可測です) の積分 v を考えます。つまりざっくり言うと、関数の値にその値をとる集合の測度を掛け算して積分値を考えます。つまり冒頭に出てきた関数は、値 1 をとる有理数の集合は測度 0 であるため、あの関数の計算結果はどう頑張っても 0 になってしまいます。
このように新しい積分を定義することによって、今まで扱えなかった関数を扱うことができます。そこでこれ以降の解析では、関数を集めた関数空間を考えて、性格のいい関数、悪い関数というのを考えていきます。具体的には、負の無限大から正の無限大まで積分しても発散しない・無限回微分できてなめらか・そもそも関数の値が 0 以外を取る部分が限られている (コンパクト台)…といったものが “性格のいい関数” と呼ばれています。ちなみに筆者の研究の話になるのですが、『関数空間』というからにはベクトル空間のように正規直交な基底を考えることができるのではないか、と思って、特に先ほどのような性格のいい正規直交基底は作れないか、と考える研究をしています。性格のいい関数をつかえば、その線形結合で関数を再現することができ、さらに係数の計算もかなり楽になります。

複素関数

解析分野でもうひとつ扱うトピックが、複素関数です。定義域も値も複素数になるような関数を考えるのですが、

数学科では必修で 1 年間かけてその世界に足を踏み入れます。
まず、複素関数の微分を考えます。微分可能な複素関数は**正則関数**といい、正則関数であれば **Cauchy-Riemann 方程式**という関係式が成り立ちます。$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ とおくとき、

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

が Cauchy-Riemann 方程式です。
正則関数は 1 回微分できる関数として定義されているのですが、複素関数の世界では 1 回微分できれば無限回微分できるという不思議な性質が成り立っています。このように正則関数の世界では、複素関数は非常に美しい定理が多く成り立っています。複素関数の微分を考えれば、当然積分も考えます。複素平面上の積分は、座標平面上の関数のように線積分を考えるのですが、次の定理が成り立っています。

D を区分的 C^1 級境界をもつ有界領域、f を D とその境界を含む開集合上で定義された正則関数とすると、

$$\int_{\partial D} f(z)dz=0$$

が成り立つ。これを **Cauchy** の積分定理という。

つまりある領域で正則な関数は、周回積分すると計算結果が 0 になってしまうのです。さらに、正則でないような点を含んでいるような積分を実行する例として、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

これを **Cauchy の積分表示**といいます。
さらにこれを発展させた留数定理というのもあります。これらの積分に関する定理は、複素積分のみならず実数上の積分でも活用できます。たとえば、

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

というものが求まります。さらにもうひとつ美しい定理として、**一致の定理**が挙げられます。2 つの正則関数 f,g があって、これらが集積点 (孤立していない点) をもつ集合上で一致しているとき、これらの関数はまるまるすべての区間で一致するというものです。つまり、ほんの少しの長さの線、ほんの少しの面積の領域で正則な関数が一致していれば、これらは広い広い複素平面の多くで一致してしまう、というものです。更にそれを発展させて、f が限られた集合でしか定義されていなくても、先のように集積点をもつ集合上で一致する関数 g をもう一つ考えれば、f は g と同じくらいまで拡張できるということです。これが**解析接続**というものです。解析接続の詳しいことは、複素関数の後半の授業で本格的に扱います。
また、逆関数も含めて両方向に正則な**双正則写像**を考えれば、複素関数の美しい世界はさらに広がります。任意の単連結な領域はその任意の点 z_0 に対し、原点まわり半径 1 にうつし合う双正則写像 f で

$$f(z_0)=0,f'(z_0)>0$$

が成り立つものが存在する、という **Riemann の写像定理**と呼ばれるものもあります。やがてその話は、関数を集めた関数族の話へつながっていきます。複素関数論は難解な理論だと言われていますが、結果は非常に美しいものが多いです。

割り算再考 (前多)

小学校以来習ってきた割り算の概念をもう一度考えてみると，実は数学の概念に繋がっているとがわかります．高校生にでもわかるよう配慮して書いたつもりですが，*がついている項目は大学 1,2 年を想定して，**がついている項目は大学 3,4 年を想定して書いています．

割り算とは

始まりは小学生の問題です．

問題 6 人を 2 人ずつのチームにわけました．この時，何チームできるでしょう．

式 $6 \div 2 = 3.$　　　答え 3 チーム．

懐かしいですね．また，足し算の答えを「和」と言うように割り算の答えは，「商」と言うんでした．ちなみに $\div$ という記号はアメリカ，日本，イギリスぐらいしか使われておらず，標準的には 6/3 とスラッシュを使いますので，今回もこれ以降は / で書きます．

さて，今回注目したいのは，式ではなく図です．

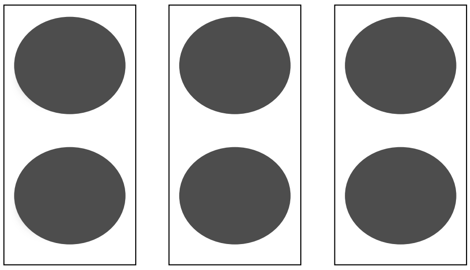


図 1 : 3 つのチーム分け

小学校以来習ってきた割り算というのは，「たくさんあるものを，均等にチーム分けした時のチーム数を求める演算」だと考えることができます．このイメージを元に，「集合の割り算」を定義してみましょう．

商集合

とはいえ，集合が与えられたとき，いきなり割り算するというのはできません．「チーム分け」するには何が必要かを考えてみましょう．なお，大学以降では，集合の要素のことを「元 (げん)」というので，これ以降の記事では，要素を元と書くことにします．

同値関係

チーム分けするためのアイディアは，「同じチームに属する条件」を与えることです．「同じチームに属している条件」を「同値関係」と言います．「同値関係」は，以下に定義されるような 3 つの条件を満たす必要があります．

Definition 0.0.0.1 (同値関係). 集合 X に対し，同値関係 $\sim$ とは，以下の 3 つの条件を満たす集合の元の間の関係をいう．

(1) (反射律) 全ての $x \in X$ に対し，$x \sim x$.

(2) (対称律) $x \sim y$ を満たす全ての $x, y \in X$ に対し，$y \sim x$

(3) (推移律) $x \sim y$,$y \sim z$ を満たす全ての $x, y, z \in X$ に対し，$x \sim z$

一見，難しそうな定義ですが，よく読めば大したことは言っていません．1つ目の条件は，どんな奴でも自分自身とは同じチーム，2つ目の条件は，チームメートは逆からみてもチームメート，3つ目の条件は，チームメートのチームメートはチームメートだと言うことです（当然成り立ってほしい条件ですよね).

例をいくつかあげてみましょう．

例. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ において，元の関係 $\sim$ を

$$n \sim m \Leftrightarrow n - m \text{ は } 2 \text{ で割り切れる}$$

と定めると，これは同値関係です．実際，どんな数 n についても，$n - n = 0$ は 2 で割り切れますし，$n - m$ が 2 で割り切れるなら $m - n$ も 2 で割り切れます．さらに，$n - m, m - l$ が 2 で割り切れるなら $n - l$ も 2 で割り切れます．今は「2」で割り切れるとしましたが，他の自然数でも上のように定めれば同値関係になることは同様に示せます．

例. 実数の集合 $\mathbb{R}$ において，$\leq$ ($<$ または $=$) で定められる元の関係

$$x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$$

は同値関係ではありません. どんな実数 x に対しても $x \leq x$ ですし，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ ですから，反射律と推移律は満たしますが，対称律を満たしません．実際，$x \leq y$ だからと言って，$y \leq x$ とは限らないからです．

同値関係があるとき，同じチームに属している奴らを集めてきたものを，同値類と言います．例えば，$x \in X$ と同値関係にある X の元全体 (x が入っているチーム) を，$[x]$ で書くことにします．

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

すると，集合を「チーム分け」する，つまり集合の割り算を定めることができます．

商集合の定義

さて，同値関係が定まると集合の割り算を定義できます．

Definition 0.0.0.2 (商集合). 集合 X とその上の同値関係 $\sim$ に対し，商集合 $X/\sim$ を以下で定める．

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

例で感覚を掴みましょう．

例.
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とします．このとき，X に，同値関係 $\sim$ を，

$$n \sim m \Leftrightarrow n - m \text{ が } 2 \text{ で割り切れる}$$

と定めます．このとき，商集合 $X/\sim$ は何になるでしょうか．例えば，1 の同値類 (1 の入っているチーム) は，$[1] = \{1, 3, 5\}$, 0 の同値類は，$[0] = \{0, 2, 4, 6\}$ となります．これ以外のチームはありませんから，

$$X/\sim = \{[0], [1]\} = \{\{0, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$$

であるとわかります．まさに偶数と奇数への「チーム分け」ですよね．$\{0, 1\}$ はチームの代表メンバーであり，数学

用語でも「完全代表系」と言います．しかし，わり算とはいえ，必ずしも 1 つ 1 つのチームの元の数は一致しないことには注意しましょう．

様々な商集合の例

合同式

まずは，上の概念をそのまま延長して自然数の集合 $\mathbb{N}$ に対して，同値関係 $\sim$ を以下で定めてみます．

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ が } 4 \text{ で割り切れる}$$

この同値関係で割った集合 $\mathbb{N}/\sim$ は，4 で割ったあまりでのチーム分けになります．

$$\mathbb{N}/\sim = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

これを図にすると以下のようになります．自然数全体を 4 つのチームに分けてしまったのがよくわかると思います．

12	13	...	
8	9	10	11
4	5	6	7
0	1	2	3
−4	−3	−2	−1
	...	−6	−5

図 2：4 で割ったあまりでチーム分け

合同式を思い出してみましょう．

$$1 \equiv 5 \mod 4$$

などという表記を見たことがあるかもしれませんが，これは，1 と 5 が上で定めた同値関係，すなわち $1 \sim 5$ を示しているに他なりません．さらに，もともと $\mathbb{N}$ に定まっている足し算，掛け算はそのまま $\mathbb{N}/\sim$ に遺伝します．つまり，

$$[a] + [b] = [a + b] \qquad [a] \times [b] = [a \times b]$$

が成り立つということです．これを使えば, 例えば

$$[15^{30}] = [15]^{30} = [3]^{30} = [3^2]^{15} = [1]^{15} = [1]$$

となり，15^{30} がチーム 1 に属する (すなわち，4 でわると 1 あまる) ことがすぐ確かめられます．

ベクトル

今までは数字を使っていましたが，集合にしたおかげで，もっと概念的なものについても商集合を考えることができます．高校で習うベクトルも，商集合として考えてみましょう．E を平面 (もしくは空間) の有向線分 (向きを持った線分，つまり矢印) 全体からなる集合とします．このとき，E 上の同値関係を，

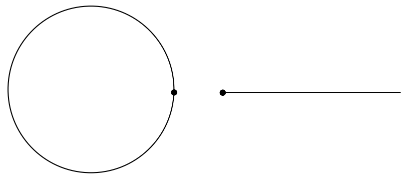
$$v \sim w \Leftrightarrow v \text{ と } w \text{ は平行移動で重なる}$$

と定めます (同値関係になっていることはチェックしてみてください)．このとき，$E/\sim$ がまさに平面全体のベクト

ルを集めた集合になります．この商集合の一つ一つの元は「平行移動で重なったら同じベクトルを集めたチーム」になりますが，この中で原点を始点として持つものを「代表」とすれば，終点の「座標」で全てのチームが表せます．これこそがベクトルの「成分表示」なのです．

空間の貼り合わせ

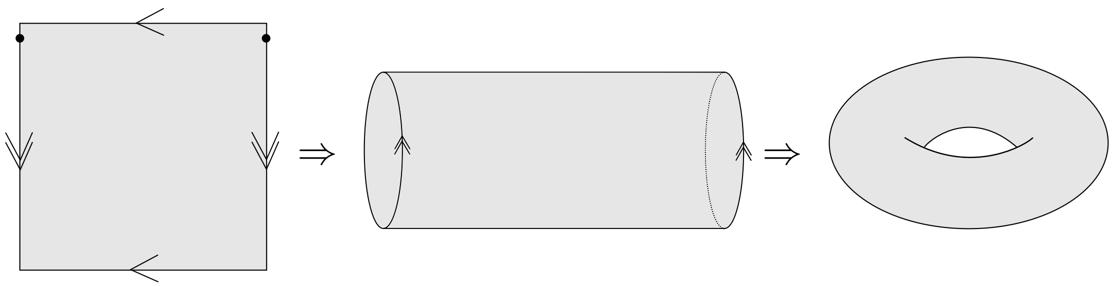
ベクトルの例からもわかるように，あるものたち (ベクトルの場合は平行移動したもの) を**「おんなじものと見たい」「同一視したい」**という気持ちがあるときは，商集合が使われます．数学においては図形同士を，のりで貼り合わせたいというシーンに多々遭遇しますが，これをキチンと定式化するのも商集合の大事な役割です．例えば，下の円と直線を黒点の部分で貼り合わせてみましょう．



このとき，二つの図形の点の集まりを一つの集合 X だと考え，A を 2 つの黒点からなる集合として，以下のような同値関係を定めます（同値関係になっていることはすぐ確かめられます).

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A \text{ または } x = y$$

つまり，A に入っていない点たちは，その点 1 点からなるチームに，A に入っている点たちはまとめて一つのチームにしてしまいます．そうすれば，チーム全体の集合 $X/\sim$ は，まさに，二つの図形を貼り付けたものになっていることがわかります．このような貼り付けにより作られる図形の一つをみてみましょう．正方形の辺を貼り付けて立体を作るということを考えてみます．図の黒点同士のように,左側の辺と右側の辺，上と下も同様に，同じ方向に貼り付けると，右のように浮き輪の形の図形が出来上がります．これは (2 次元) トーラスといい，数学の様々な場面に登場します．



ちなみに，貼り付けかたを一つだけ逆にすればクラインの壺，二つとも逆にすると二次元射影空間と呼ばれる図形になります (想像できますか?).
二次元球面 (地球の表面) は地球上の地図を貼り合わせて構成できますし，多くの図形は貼り合わせによって構成が可能です．大雑把に言って，このように直線や平面などまっすぐな空間を貼り合わせて作られる図形のことを数学では多様体と呼び，古くから研究されてきた対象です．

商ベクトル空間*

ここで扱う例は，大学 1 年生で習うベクトル空間の概念なので，知らない人は飛ばしてもらって結構です．

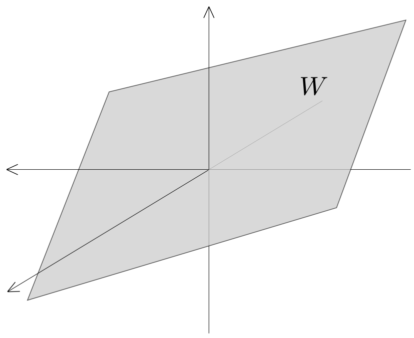
ここまでの概念がわかってしまえば，大学 1 年生の線形代数での 1 つの難所である商空間は簡単に定義できます．

Definition 0.0.0.3. ベクトル空間 V と部分空間 W に対し，V 上の同値関係を，

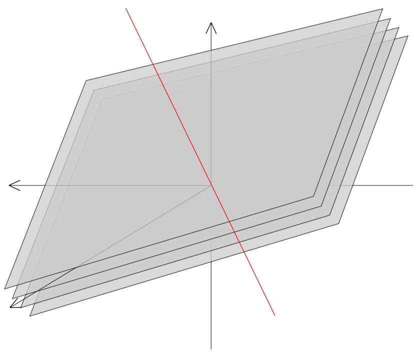
$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

と定義する．$V/\sim$ を，部分空間 W による V の商空間といい，V/W で表す．

これだとイメージしにくいかもしれませんが，v_1 の同値類 $[v_1]$ は $v_1 + w$ $(w \in W)$ と書けるものな訳ですから，W の元だけずれているものは全て同じチームなのです．絵で描けば，以下のようになります．まず，部分空間とは，原点を通るまっすぐな空間ですから，V と W の図は以下のようになります．



この空間 W 全てが同じチームとなりますので，チームは以下のようにならんでいることがわかります．つまり，商空間とは，この 1 枚 1 枚のチームの全体となるのです．完全代表系は，W と原点のみにおいて交わる直線と平面たちの交点となります（完全代表系の取り方は無限通りあります)．つまり，商空間 V/W はこの直線と同一視できるのです．スカラー倍や足し算については合同式のときと同じく商集合に遺伝することが示せるので，V/W もベクトル空間となることがわかります．イメージとしては，商空間 V/W は V を図の直線に向かって潰した空間ということになります．潰した時，W は原点に潰れるわけですから，V において，W の成分を全て 0 と同一視したものだとも言えます．



数の構成

さて，ここからは応用編です．唐突ですが，「整数，有理数，実数とは何か」と聞かれたとき，何て答えるでしょうか．「え，そりゃあ，-1 とか分数とかでしょ？」とか答えられても，あくまでそれは例にすぎません．「自然数の集合 $\mathbb{N}$ と足し算，掛け算しか知らない」と仮定して，整数の集合 $\mathbb{Z}$ や有理数の集合 $\mathbb{Q}$，実数の集合 $\mathbb{R}$ を自然数のみを用いて構成してみることにします．(今回は，自然数の存在は暗に認めています．公理的集合論の立場では自然数は無限公理を満たす最小の集合として存在を保証しているのですが，今回は解説しないことにします．)[22]

[22] 以下の話の厳密な証明が知りたい場合，[1] を参照してください．

自然数から整数

さて，自然数から整数を構成することを考えてみましょう．一番簡単なアイディアは，プラスパートとマイナスパートの自然数を作るということです．(a, b) と書いたとき，1 つめの項はプラス，2 つ目の項はマイナスに当たると考えてみましょう．例えば，$(2, 0)$ を 2 に当たる数として，$(0, 3)$ を -3 に当たる数として定めるわけです．そして，2 つの数の足し算を $(2, 0) + (0, 3) = (2, 3)$ と定めます．$(2, 3)$ はプラスパートとマイナスパートがそれぞれ 2, 3 ですから，-1 を表していると考えます．これで一見，うまくいったかのように見えますが，これだと $(2, 3)$ と $(0, 1)$ が同じ数字を表しているため，”ダブり”が生じています．$(2, 3)$ と $(0, 1)$ を同じものと見たい，同一視したい．こんな時こそ商集合の出番です．

Definition 0.0.0.4 (整数). 自然数を二つ並べた集合 $\mathbb{N}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ を考え，$\mathbb{N}^2$ 上に同値関係

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

と定め，この同値関係による商集合 $\mathbb{N}/\sim$ を整数 $\mathbb{Z}$ と定める．さらに，$\mathbb{Z}$ 上の加法と乗法を，

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + b, c + d)] \qquad [(a, b)] \times [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$$

と定める [23]

例えば，$2 + 1 = 3 + 0$ ですから，$[(2, 3)] = [(0, 1)]$ だとわかります．掛け算はちょっと技巧的ですが，これでうまくいっていることがわかります．例えば，正の数同士は，$[(n, 0)] \times [(m, 0)] = [(nm, 0)]$ と，今までと全く同じ演算であることがわかります．また，$[(n, 0)] \times [(0, m)] = [(0, nm)]$ や，$[(0, n)] \times [(0, m)] = [(nm, 0)]$ などから，プラスかけるマイナスがマイナス，マイナスかけるマイナスがプラスであることも説明できます．
最後に，$[(x, 0)]$ を x とかき，$[(0, x)]$ を $-x$ を書くことにすれば，今まで使っていた表記と合致します．

整数から有理数

さて，今度は有理数を構成してみましょう．さっきのアイディアをそのまま借用して，分母パートと分子パートを並べて書いてみることにします．つまり，(a, b) と書いたとき，$\dfrac{a}{b}$ を表すとしてみます．しかし，分数というのは，小学校以来，約分しても同じ，だったわけですから，例えば $(2, 4)$ と $(1, 2)$ は同じものであってほしいわけです．そこで，商集合を使って同一視してみます．

Definition 0.0.0.5 (有理数). $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ 上に同値関係

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

と定め，この同値関係による商集合 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})/\sim$ を有理数 $\mathbb{Q}$ と定める．さらに，$\mathbb{Q}$ 上の加法と乗法を，

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)] \qquad [(a, b)] \times [(c, d)] = [(ac, bd)]$$

と定める [24]．

---

[23] 本当は，これで矛盾なく定まっていることをチェックしなければいけません．つまり，$(a, b) \sim (a', b')$ のとき，

$$(a + c, b + d) \sim (a' + c, b' + d) \qquad (ac + bd, ad + bc) \sim (a'c + b'd, a'd + b'c)$$

であることを示す必要があります．もしこうでなければ，足し算や掛け算の結果が，チームの代表メンバーの選び方によって違う結果になってしまい，矛盾してしまうからです．一つ目だけチェックすれば，$a + b' = a' + b$ より $(a + c) + (b' + d) = (a' + c) + (b + d)$ ですからうまくいっています (二つ目もチェックしてみましょう)．このようにうまく定まっていることを，数学では，well-defined と言います．

[24] これも well-defined であることをチェックする必要があります．示してみてください．

$\sim$の同値関係は，外項と内項の積が等しい，つまり，$a:b=c:d$を表していますから，同じ分数を1チームにまとめていることがわかります．
さて，定義から，$[(1,1)]$はどんな数とかけても相手を変えない，自然数の"1" に当たる数だとわかります．また，$[(0,1)]$は，どんな数とかけても$[(0,1)]$になり，どんな数と足し算しても相手を変えない，自然数の"0" に当たる数だとわかります．
また，

$$[(a,b)]\times[(b,a)]=[(ab,ab)]=[(1,1)]$$

ですから，$[(a,b)]$に，$[(b,a)]$をかけると1になることがわかります．ということは，

$$[(c,d)]=[(a,b)]\times([(b,a)]\times[(c,d)])$$

ですから，

$$[(c,d)]/[(a,b)]=[(b,a)]\times[(c,d)]$$

となり，小学校以来やってきた，分数の割り算は分母と分子をひっくり返してかけるということも正当化できます．
最後に，(a,b)を$\dfrac{a}{b}$と書く[25]ことにすれば，今まで使っていた表記と合致します．

有理数から実数

さて，最後に実数を作ってみましょう．これはかなり困難です．実数の構成には，代表的なものでDedekint cutによるものと，有理数の完備化の二つがあるのですが，今回は有理数の完備化を解説したいと思います．

Definition 0.0.0.6 (Cauchy列). 数列$\{a_n\}$がCauchy列であるとは，以下のことを言う．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ such that } n,m>N\Rightarrow|a_n-a_m|<\varepsilon$$

一見ギョッとするような定義ですが，簡単に言えば，コーシー列とは，「二項間の差がどんどん小さくなっていくような数列」のことです．さて，ここで，次のような問題を考えて見ましょう．

Cauchy列は収束するでしょうか？

答えは，実数列なら○，有理数列なら×です．数学用語でこの性質を「完備性」と言います．有理数は完備ではないのです．例えば，有理数で$\sqrt{2}$に近づくような数列を考えてみれば，もちろん二項の差は縮まっていきますが，肝心の収束先の$\sqrt{2}$が有理数ではないですから，「有理数の中では」収束しません．このことに着目して，有理数から実数を作ります．具体的には，

$\sqrt{2}$に収束する有理数列を$\sqrt{2}$だと定義する

です．数列と$\sqrt{2}$を同じと見るなんてかなり気持ち悪いですが，一応定義はできるわけです．とはいっても，$\sqrt{2}$に収束する有理数列はいっぱいあります．そこで，商集合の考え方を使って，$\sqrt{2}$に収束する数列を1チームにしてしまえば良いのです．

Definition 0.0.0.7 (実数). $\mathcal{C}$を有理数のCauchy列全体からなる集合とし，$\mathcal{C}$上の同値関係を，

$$\{a_n\}\sim\{b_n\}\Leftrightarrow\forall\varepsilon\ \exists N \text{ such that } n>N\Rightarrow|a_n-b_n|<\varepsilon$$

[25] ちなみに，$\dfrac{a}{b}$は日本語では「b分のa」と読みますが，英語では逆で，"a over b" と読みます．

と定め[26)]，この同値関係による商集合 $\mathcal{C}/\sim$ を実数 $\mathbb{R}$ と定める．さらに，$\mathbb{R}$ 上の加法と乗法を，

$$[\{a_n\}] + [\{b_n\}] = [\{a_n + b_n\}] \qquad [\{a_n\}] \times [\{b_n\}] = [\{a_n b_n\}]$$

と定める．[27)]

上のように定めれば $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ であれば，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が同じ値に近づいていくことがわかります．本当は，$\mathbb{R}$ が満たすべきたくさんの性質をここから示さなければいけないのですが，今回の主題はそこではないので，詳しくは参考文献を見てみてください．

このように，存在が当たり前だと思っていた整数や有理数や実数，そしてそのたくさんの性質は，商集合のアイディアに支えられているのです．[28)]

応用**

最後に，少しだけ応用をみてみます．

等質空間

群構造をもつ可微分多様体で群の積演算 $(a,b) \mapsto ab$ と逆演算 $a \mapsto a^{-1}$ が可微分であるものを Lie 群と言います (群と多様体のあいのこです)．例えば，一般線形群 $GL(n,\mathbb{R})$ や特殊線形群 $SL(n,\mathbb{R})$, 特殊直交群 $SO(n)$ などは Lie 群になっています．

さて，Lie 群 G がある多様体 M に推移的に作用していることを考えてみましょう．推移的，というのは全ての点同士がある Lie 群の元の作用で写りあえるという意味です．全射群準同型 $G \to \mathrm{Diff(M)}$ があると言ってもいいです．例えば，球面 S^n, 上半平面 H には，

$$\begin{aligned} SO(n+1) &\to \mathrm{Diff}(S^n) &\qquad& A \mapsto (p \mapsto Ap) \\ SL(2,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Diff}(H) && \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \end{aligned}$$

のように，Lie 群が推移的に作用しています．この時，ある一点 p の群作用による行き先（軌道）は，推移的であるという仮定から全体を覆うわけですが，作用させても動かない G の元があるかもしれません．これを集めたもの，

$$H = \{g \in G \mid gp = p\}$$

を G の一点 p の固定部分群と言います (定義より閉部分群になります)．この H たちをチームにして, 点 p と同一視すれば，作用させている空間との 1 対 1 対応ができます．すなわち，

$$G/H \simeq M \qquad [g] \mapsto gp$$

となるわけです．

ここで，左辺の G/H とは，G を，$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in H$ という同値関係で割ったもので,G の部分群 H による商群と呼ばれます．特に，Lie 群をその中の閉部分群で割った商群 G/H には多様体構造が定まることが知られており，上の同型は微分同相であることが示せます．

このように，Lie 群が推移的に作用している多様体は，必ず Lie 群の商の形で書くことができます．このような多様

---

26) これが同値関係であることは非自明ですが，ここでは省略します．

27) これが well-defined であることも非自明ですが，ここでは省略します．

28) 実は複素数も，商集合を用いて $k[X]/(X^2+1)$ などと定義できるのですが，今回は紙面の関係上，省略します．

体を等質空間と言います．

例 (球面)．$SO(n+1)$ の作用による球面 S^n 上のある 1 点 $(0,0,0,\cdots,0,1)$ の固定部分群は，

$$\left\{ \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, A \in SO(n) \right\} \simeq SO(n)$$

よって，$S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$ となります．

例 (上半平面)．$SL(2)$ の作用による上半平面 H 上のある 1 点 i $(=\sqrt{-1})$ の固定部分群は，

$$\frac{ai+b}{ci+d} = i \Leftrightarrow a = d,\ b = -c$$

より，

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \,\middle|\, a = d, b = -c \right\} \simeq SO(2)$$

よって，$H \simeq SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ となります．H は複素多様体ですが，実 Lie 群の商でかけます．

この表示の一つのメリットは，ある 1 点に定めた幾何構造を全体に写すことにあります．G/H の形で書いた場合，当然，原点の同値類 $[e]$ があります．これについて

補題． G/H を等質空間とする．集合として，次の同型がある．

$$(\bigotimes^r T_{[e]}M \otimes \bigotimes^s T^*_{[e]}M)^H \simeq (\Gamma(M, \bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M))^G$$

ただし，左は，$\mathrm{Ad}(H)$ 不変なテンソルの元，右辺は M からベクトル束への左作用の微分 L_{G*} 不変な切断である．

表示は仰々しいですが，例えば，$r=1, s=0$ とすれば，H 不変な接空間のベクトルと，G 不変なベクトル場が 1 対 1 に対応していることがわかりますし，$r=0, s=2$ とすれば，H 不変な接空間上の内積と，G 不変な計量，H 不変な複素構造と G 不変な概複素構造が 1 対 1 に対応することがわかります．
他にも，等質空間上では測地線を Lie 代数から Lie 群への指数写像でかけたり，曲率テンソルが，Lie 括弧でかなりシンプルにかけたりなど，計算できる具体例を豊富に提供してくれます．

Clifford-Klein 形

Riemann の一意化定理の一般化である，Klein-Poincaré-Koebe の一意化定理より，Riemann 面の普遍被覆は，上半空間 H，複素数 $\mathbb{C}$, 複素射影空間 $\mathbb{P}^1$ のいずれかに正則同値になります．また，特に，種数が 2 以上のコンパクト Riemann 面は，上半平面を，Fuchs 群と呼ばれる Aut(H) の離散部分群 Γ で割って作られます．H 自体は上で見たように $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ とかけますから，コンパクト Riemann 面は，$\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ という $SL(2,\mathbb{R})$ を 2 回割ったものとして書くことができます．一般に，G/H に固有不連続かつ自由に作用する G の離散部分群 Γ が存在すれば，等質空間 G/H をさらに割った $\Gamma\backslash G/H$ を考えられます．これを Clifford-Klein 形といい，等質空間より豊富な例を含む広いクラスとして，現在も研究されています．

終わりに

たくさんの例を「割り算」というテーマでざっくばらんに解説してみました．何を隠そう，この集合の割り算という概念を理解するのに僕自身苦労したので，あえて書いて見ました．数学というと，「イメージではなく，論理的にのみ考える学問」と考えられがちな気がします．論理ももちろん大事ですが，決して論理だけではなく，むしろ，「イメー

ジをいかに数式という形で正確に伝えられるか」というモチベーションで研究が進むことも多いと思います．高校や大学で難しい概念に出会ったときは，ただ定義を眺めるだけではなく，様々な例を見ながら，どういう気持ちで概念が生まれているのかを考えて見るといいと思います．

参考文献

[1] 数の構成　自然数から複素数まで http://mathematics-pdf.com/pdf/construction_of_numbers.pdf
[2] S.Helgason.Differetntail Geometory and Symmetric Spacees.AMS Chelsea Publishing,2001
[3] 佐武一郎. 線型代数学．裳華房，数学選書 1,1974
[4] 松坂和夫．集合・位相入門．岩波書店，1968
[5] 小林俊行．数学の最先端 21 世紀への挑戦.vol1.Springer,2001

ベルヌーイ数小噺 (荒田)

前半は高校生程度の知識で読める。後半は複素関数の知識が必要となる。

0.1　自然数のべき乗の和

自然数のべき乗の和は、次のように n の多項式で書ける。高校では次の 3 つを学ぶはずだ：

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

では、4 乗の和や 5 乗の和を表す公式はどうなるか？もっと言うと、自然数 p について k^p の和を表す一般的な式はあるか？

先に答えを述べると、自然数の p 乗の和（以後これを、ここだけの記号で $s_p(n)$ とおく）は n についての $p+1$ 次の多項式であり、有理数の数列 B_k $(k=0,1,2,\dots)$ を使って次のように書ける：

$$s_p(n)=\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}(-1)^kB_kn^{p+1-k}$$

この B_k はベルヌーイ数 (Bernoulli numbers) と呼ばれる数列で、最初の数項は次のようになる：

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\dots$$

ベルヌーイ数は次の初項と漸化式によって計算できる：

$$B_0=1,$$
$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$$

ベルヌーイ数は文献によって符号が若干違っていたり、奇数番目を飛ばしていたりするので、文献ごとに定義を確認するようにしたい。

0.1.1　自然数のべき乗の和の公式の導出

まず、 p が自然数のとき、 $s_p(n)$ は n についての $p+1$ 次の多項式である [29)]。そこで、 n^{p+1-k} の係数を a_k とおき、

$$s_p(n)=a_0n^{p+1}+a_1n^p+\cdots+a_pn+a_{p+1}=\sum_{k=0}^{p+1}a_kn^{p+1-k}$$

---

29) 証明のやり方はいくつかあるが、詳細は割愛する。一つのやり方としては、

$$(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=(p+1)k^p+\cdots+(p+1)k+1$$

を $k=1,\dots,n$ について辺ごとに足すというものがある。別のやり方を 0.3 で与える。

と書く。

さて、 $s_p(n)$ は次の 2 つの式を満たす：

$$s_p(0) = 0, \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}.\ s_p(n) - s_p(n-1) = n^p. \tag{3}$$

逆に、これらの式を満たす多項式があれば、その多項式は $s_p(n)$ と一致する。

ちなみに、$s_p(n)$ が多項式であることに留意すれば、2 番目の式を多項式としての等式

$$s_p(x) - s_p(x-1) = x^p$$

としても同じことになる。

式 2 と式 3 から、係数 a_k に対する何らかの条件が得られるはずである。まず、式 2 からは $a_{p+1} = 0$ がわかる。

式 3 については、左辺を a_i によって表すと

$$\begin{aligned}
s_p(n) - s_p(n-1) &= \sum_{i=0}^{p+1} a_i n^{p+1-i} - \sum_{i=0}^{p+1} a_i (n-1)^{p+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} a_i n^{p+1-i} - \sum_{i=0}^{p+1} a_i \sum_{j=0}^{p+1-i} \binom{p+1-i}{j} (-1)^j n^{p+1-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} a_i n^{p+1-i} - \sum_{m=0}^{p+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{p+1-k}{m-k} (-1)^{m-k} a_l n^{p+1-m} \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k \right) n^{p+1-i}
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$ は二項係数である [30]。

つまり、式 3 を a_i の言葉で書けば、

$$n^p = \sum_{i=1}^{p+1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k \right) n^{p+1-i}$$

となる。この両辺の n^{p+1-i} の係数を比較することにより、

$$\begin{aligned}
1 &= (p+1)a_0 && (i = 1) \\
0 &= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k && (1 < i \le p+1)
\end{aligned} \tag{4}$$

を得る。式 4 を変形すると

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k \\
&= (-1)^{i-1} \frac{(p+1)!}{i!(p+1-k)!} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{k!(p+1-k)!}{(p+1)!} (-1)^k a_k \\
&= (-1)^{i-1} \binom{p+1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} (-1)^k a_k \Big/ \binom{p+1}{k}
\end{aligned}$$

となり、結局 $1 < i \le p+1$ について

[30] 高校では ${}_nC_k$ というような記号で書くかもしれない。

$$0 = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} (-1)^k a_k \bigg/ \binom{p+1}{k}$$

を得る。ここで、やや天下り的[31)]だが、新たに記号 B_k を導入して a_k を

$$a_k = \frac{(-1)^k}{p+1}\binom{p+1}{k} B_k \qquad (0 \le k \le p) \tag{5}$$

と置くことにする。すると、B_k は

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ 0 &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \qquad (1 \le m) \end{aligned} \tag{6}$$

を満たす。式 6 を B_m に関して解くと

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k \qquad (1 \le m)$$

という漸化式が得られる。この初項と漸化式は p に依存しないので、 B_k は p によらない数列である。この B_k こそが、冒頭に書いたベルヌーイ数である。

結局、$s_p(n)$ は、ベルヌーイ数によって

$$s_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^k B_k n^{p+1-k} \tag{7}$$

と書ける。

0.1.2　べき乗和の公式の性質

以下、 $s_p(x)$ の多項式としての性質をいくつか見ていく。

定理 1. $p \ge 1$ のとき、$s_p(-x) = (-1)^{p+1} s_p(x-1)$.

証明.　自然数 n を任意に取ったとき、

$$\begin{aligned} s_p(0) - s_p(-n) &= \sum_{k=-n+1}^{0} (s_p(k) - s_p(k-1)) \\ &= \sum_{k=-n+1}^{0} k^p = 0^p + (-1)^p + (-2)^p + \cdots + (-n+1)^p \\ &= (-1)^p s_p(n-1) \end{aligned}$$

より、

$$s_p(-n) = (-1)^{p+1} s_p(n-1)$$

が成り立つ。この等式は全ての自然数 n について成り立つので、 $s_p(-x)$ と $(-1)^{p+1} s_p(x-1)$ は多項式として等しい。(この証明は $0^p = 0$ となることに依存しているので、 $p = 0$ の時は成り立たない)　□

[31)] 理由や出どころを隠して式や定義をどこからともなく持ってくることを「天下り的」である、という。例えば、α が方程式の解だと知っている人が「方程式に α を代入したら成立するから解の 1 つは α だ！」という議論をした場合、これは天下り的である。本文中の用例では、筆者の心の中には「このように B_k を定義すれば漸化式が綺麗になるし、世間でいうベルヌーイ数の定義と一致する」という気持ちがあるわけだが、それを本文に書いていないので「天下り的」である。

系 2. p が 2 以上の偶数のとき、$s_p\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. 特に、$s_p(x)$ は p が 2 以上の偶数のとき $2x+1$ で割り切れる。

定理 3 (Faulhaber)**.** p が奇数のとき、 $s_p(x)$ は $s_1(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ の多項式として書ける。

p が 2 以上の偶数のとき、 $\frac{s_p(x)}{x+1/2}$ は $s_1(x)$ の多項式として書ける。

証明. p が奇数の場合は、定理 1 および、後に述べる補題 4 より従う。

p が 2 以上の偶数のときは、 $s_p(x)$ は $2x+1$ で割り切れる（系 2）ので、 $\frac{s_p(x)}{x+1/2}$ は多項式である。$f(x)=\frac{s_p(x)}{x+1/2}$ と置いたときに $f(-x)=f(x-1)$ が成り立つことを示して、補題 4 を使えば良い。 □

補題 4. 多項式 $f(x)$ が $f(-x)=f(x-1)$ を満たすならば、 $f(x)$ は $s_1(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ の多項式として書ける。

証明. $\mathbf{Q}[x]$ の部分集合 V を $V=\{f\in\mathbf{Q}[x]\mid f(-x)=f(x-1)\}$ により定める。定理 1 より、 s_p は V の元である。V の元は全て $s_1(x)$ の多項式として書けることを、 V の元 f の次数に関する帰納法で示す。

$\deg f=0$ の場合は OK。$\deg f=1$ の場合は $f(-x)=f(x-1)$ とはなり得ないので考える必要はない。

$\deg f\geq 2$ の場合。写像 $F\colon V\to V$ を

$$Ff(x):=\frac{f(x)-f(0)}{x(x+1)/2}$$

により定める。多項式 $f(x)-f(0)$ は $x(x+1)$ で割り切れるので、 Ff は多項式である。$Ff\in V$ は

$$Ff(-x)=\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)(-x+1)/2}=\frac{f(x-1)-f(0)}{x(x-1)/2}=Ff(x-1)$$

とわかる。定義より、 $\deg Ff<\deg f$ なので、帰納法の仮定より、 Ff は s_1 の多項式として書ける。

$$f(x)=f(0)+\frac{x(x+1)}{2}Ff(x)$$

より、f も s_1 の多項式である。 □

例. $S=x(x+1)/2$ とおくと、

$$\begin{aligned}s_3(x)&=S^2,\\ s_4(x)&=\frac{(2x+1)(6S^2-S)}{15},\\ s_5(x)&=\frac{S^2(4S-1)}{3}.\end{aligned}$$

定理 5. $p\geq 1$ のとき、 $s_p(x)-x^p/2$ は、 p に応じて偶関数または奇関数となる。具体的には、

$$s_p(-x)-\frac{(-x)^p}{2}=(-1)^{p+1}\left(s_p(x)-\frac{x^p}{2}\right).$$

証明. 定理 1 および $s_p(x)=s_p(x-1)+x^p$ を使う。 □

0.1.3　ベルヌーイ数の性質

定理 6. $k\geq 1$ のとき, $B_{2k+1}=0$. つまり、奇数番目のベルヌーイ数は、 B_1 を除くと 0 である。

証明. 定理 5 と 式 7 を見比べるとわかる。 □

定理 7. $n\geq 2$ のとき、

$$B_{2n}=-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2(n-k)}B_{2k}.$$

証明は後回しにする。

系 8. $n \geq 1$ のとき、$(-1)^{n-1}B_{2n} > 0$.

証明．帰納法で示す。$n = 1$ のときは $B_2 = 1/6$ より成り立つ。

$n \geq 2$ の場合。n 未満で成り立つと仮定すると、定理 7 より、

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-1}B_{2n} &= -\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2(n-k)}B_{2k} \\
&= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}\underbrace{(-1)^{n-k-1}B_{2(n-k)}}_{>0}\underbrace{(-1)^{k-1}B_{2k}}_{>0} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

0.2　ベルヌーイ数の母関数

数列を係数に持つ（形式的）べき級数を、その数列の母関数と呼ぶ。母関数は、数列の性質を調べるのに便利である。ベルヌーイ数の場合は、数列の各項を $n!$ で割ったものの母関数（指数型母関数）を考える：

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}. \tag{8}$$

この母関数によってベルヌーイ数を定義することも多い。もちろん、この定義と先に示した漸化式による定義は等価である。

式 8 を複素関数のテイラー展開として見た場合、左辺の関数の原点に最も近い特異点は $z = \pm 2\pi i$ であるため、右辺の級数の収束半径は 2π である。

母関数を使ってベルヌーイ数の性質を一つ二つ示してみよう：

定理 *6* の別証明（方針）．$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ が偶関数であることを確かめる。 □

定理 *7* の証明．$g(z) := \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ とおくと、

$$g(z) - zg'(z) = g(z)^2 - \frac{z^2}{4}$$

が成り立つ。この等式に $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ を当てはめて両辺を比較すると、$n \geq 2$ のとき

$$(1-2n)B_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}B_{2(n-k)}B_{2k}$$

を得る。 □

0.2.1　余接関数（コタンジェント）のローラン展開と正接関数（タンジェント）のテイラー展開

ベルヌーイ数の母関数を使うと、余接関数 $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ のローラン展開を書き下せる。cot を指数関数で書いた時に分母に $e^{\text{ほにゃらら}} - 1$ の形が現れるのがポイントである。

$$
\begin{aligned}
\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}} &= \frac{i(e^{2iz}+1)}{e^{2iz}-1} \\
&= i\left(1+\frac{1}{iz}\frac{2iz}{e^{2iz}-1}\right) \\
&= i+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2iz)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\frac{z^{2k-1}}{(2k)!}.
\end{aligned}
$$

さらに、正接関数 $\tan z$ のテイラー展開もベルヌーイ数を使って書き下すことができる。三角関数の倍角の公式より、$\tan z$ は cot を使って次のように書ける：

$$
\tan z = \cot z - 2\cot 2z.
$$

これを使うと、

$$
\begin{aligned}
\tan z &= \left(\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\frac{z^{2k-1}}{(2k)!}\right) - 2\left(\frac{1}{2z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\frac{(2z)^{2k-1}}{(2k)!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} 2^{2k}(2^{2k}-1) B_{2k}\frac{z^{2k-1}}{(2k)!}
\end{aligned}
$$

となる。簡単だね。

0.2.2　リーマンのゼータ関数の特殊値

1 より大きい実数 s について、ゼータ関数 $\zeta(s)$ を次のように定める。

$$
\zeta(s) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots \tag{9}
$$

平方数の逆数の和、すなわち $\zeta(2)$ が π を使って次のように書けることは有名だろう：

$$
\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots
$$

一般に、ゼータ関数の正の偶数における値は次のようにベルヌーイ数を使って表される：

$$
\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}B_{2k}}{2\cdot(2k)!}(2\pi)^{2k} \quad (k \geq 2)
$$

実部が 1 より大きい複素数 s については、式 9 の級数によって $\zeta(s)$ が定まる。しかし、うまいこと解析接続してやると、$\zeta(s)$ を複素平面から 1 を除いた領域 $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ で定義することができる。このとき、負の整数の値はベルヌーイ数を使って表すことができる。

$$
\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \quad (k \geq 1)
$$

特に、 k が偶数の場合は $\zeta(-k)=0$ となる。つまり、負の偶数は ζ の零点である。

ζ の零点は便宜上「自明な零点」と「非自明な零点」に分類され、負の偶数は前者、皆さんの大好きなリーマン予想で問題になっているのは後者である。

0.3　おまけ：スターリング数

次のような記号を導入する[32]：

$$x^{\overline{n}} := x(x+1)\cdots(x+n-1),$$
$$x^{\underline{n}} := x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

自然数 n と k について、第1種スターリング数 $\left[n \atop k \right]$ と第2種スターリング数 $\left\{ n \atop k \right\}$ を次の関係式により定める。

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \qquad x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k,$$
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

スターリング数は次の漸化式によって計算できる：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \qquad \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

$x^{\overline{n}}$ や $x^{\underline{n}}$ には次のような関係式があり、階差や総和に関して形を保つ[33]：

$$x^{\overline{n}} - (x-1)^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}, \qquad (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$

特に、

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$$

が成り立つ。

そこで、k^p を一旦 $k^{\overline{m}}$ の和として書いてやれば、総和の公式を直接的に与えることができそうである。

$$\begin{aligned} s_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{p} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{p-m} k^{\overline{m}} \\ &= \sum_{m=0}^{p} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{p-m} \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{p} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} \frac{(-1)^{p-m}}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} n^k \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \left(\sum_{m=k-1}^{p} \frac{(-1)^{p-m}}{m+1} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} \right) n^k. \end{aligned}$$

この方法を使えば、 $s_p(n)$ が n についての $p+1$ 次の多項式であることが直接わかる。

$s_p(n)$ をベルヌーイ数を使って表した式（式 7）と、スターリング数を使って表した式を比較すると、

$$\frac{1}{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k B_k = \sum_{m=p-k}^{p} \frac{(-1)^{p-m}}{m+1} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 \\ p+1-k \end{bmatrix} \quad (0 \le k \le p)$$

---

[32] 言うまでもないが階乗の一般化となっている。超幾何関数の係数を書くのに使われたりする。$(x)_n$ という記号が使われる場合もある。
[33] x^n が微分や積分に関して形を保つのと似ている。

を得る。特に $k=p$ とおけば、スターリング数とベルヌーイ数の関係として

$$B_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{m+1} \left\{ {k \atop m} \right\} \left[{m+1 \atop 1} \right] = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \left\{ {k \atop m} \right\}$$

を得る。ただし、$\left[{m+1 \atop 1} \right] = m!$ を使った。

0.4　おまけ：数表

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1, & &B_1 = -\frac{1}{2}, & & & & \\
&B_2 = \frac{1}{6}, & &B_4 = -\frac{1}{30}, & &B_6 = \frac{1}{42}, & &B_8 = -\frac{1}{30}, \\
&B_{10} = \frac{5}{66}, & &B_{12} = -\frac{691}{2730}, & &B_{14} = \frac{7}{6}, & &B_{16} = -\frac{3617}{510}, \\
&B_{18} = \frac{43867}{798}, & &B_{20} = -\frac{174611}{330}, & &B_{22} = \frac{854513}{138}, & &B_{24} = -\frac{236364091}{2730}, \\
&B_{26} = \frac{8553103}{6}, & &B_{28} = -\frac{23749461029}{870}, & &B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}, & &B_{32} = -\frac{7709321041217}{510},
\end{aligned}$$

以下については、$S = n(n+1)/2$ とおく。

$$\begin{aligned}
s_0(n) &= n, & & \\
s_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n & &= S, \\
s_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n & &= \frac{(2n+1)S}{3}, \\
s_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 & &= S^2, \\
s_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n & &= \frac{(2n+1)S(6S-1)}{15}, \\
s_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 & &= \frac{S^2(4S-1)}{3}, \\
s_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n & &= \frac{(2n+1)S(12S^2-6S+1)}{21}.
\end{aligned}$$

参考文献

[1]　荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信『ベルヌーイ数とゼータ関数』牧野書店, 2001 年

$e^{\pi i}sode$ **Vol.3.5**

2015年11月21日発行

著　者・・・・・東京大学理学部数学科有志

発行人・・・・・伊藤克哉