複素解析学 2

伊藤克哉 05-150504

2015 年 5 月 22 日

1 鏡像の原理

$\Omega \subset \mathbb{C}$:領域とする。
$\Omega_\pm := \{z \in \Omega | \pm \Im z > 0\}$, $\overline{\Omega}_+ := \{\overline{z} | z \in \Omega_+\}$ とおく。

定義 1. $\overline{\Omega}_+ = \Omega_-$ が成り立つとき、Ω は $\mathbb{R}$ に関して対称であるという。

定理 2. $\Omega : \mathbb{R}$ に関して対称な領域。$I = \Omega \cap \mathbb{R}$ とおく。
$f : \Omega_+ \cup I \to \mathbb{C}$ 連続関数 が Ω_+ 上で正則かつ I 上で $\mathbb{R}$ 値をとるならば、
f は Ω 上の正則関数に解析接続できる。

証明 3. 実際にこのような f を構成する。

$$\hat{f} = \begin{cases} f(z) & (z \in \Omega_+ \cup I) \\ \overline{f(\overline{z})} & (z \in \Omega_-) \end{cases}$$

とおくと、$\hat{f}$ は Ω 上で連続であるので、$\hat{f}$ が正則であることを示す。
ただし、$\Omega_+ \cup \Omega_-$ での正則性は明らかであるので、I 上正則を言う。
モレラの定理より、Ω 内の任意の閉三角形 T に対して、$\int_{\partial T} \hat{f}(z)dz = 0$ を示せば良い。
$T \subset \Omega_+$ または $T \subset \Omega_-$ ならば Cauchy の積分定理より 0 となる。
$T \cup I \neq \emptyset$ のとき、$T_\pm := T \cup \Omega_\pm$ とおく。

$$\int_{\partial T} \hat{f} dz = \int_{\partial T_+} \hat{f} dz + \int_{\partial T_-} \hat{f} dz$$

ここで、

$$T_{\pm\epsilon} = \left\{ z \in T_\pm \;\middle|\; |\Im z| \geq \epsilon \right\}$$

とおく。
$T_{\pm\epsilon} \subset \Omega_\pm$ だが、f は連続であるので、

$$\int_{\partial T} \hat{f}(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\int_{\partial T_{+\epsilon}} \hat{f} dz + \int_{\partial T_{-\epsilon}} \hat{f} dz \Big) = 0$$

■

$S^1 = \partial\Delta$ に関する反転を $z^* = \frac{1}{\overline{z}}$ で表す。

$$\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

は上半平面 H を Δ に写す。

命題 4. z と $\overline{z}$ が $\mathbb{R}$ に関して対称。$\Leftrightarrow$ $\phi(z)$ と $\phi(\overline{z})$ が S^1 に関して反転。

証明 5.

$$\phi(z)\overline{\phi(\overline{z})} \quad = \frac{z-i}{z+i}\frac{\overline{\overline{z}-i}}{\overline{z}+i} = \frac{z-i}{z+i}\frac{z+i}{z-i} = 1 \therefore \phi(\overline{z}) = \phi(z)^*$$

■

定義 6.
領域 Ω が S^1 に関して対称 $\Leftrightarrow \Omega = \Omega^* := \{z^* | \, z \in \Omega\}$
$\Omega_+ := \Omega \cap \Delta$, $\Omega_- := \Omega \cap [\Delta]^c$, $I := \Omega \cap S$ とおく。

系 7.
Ω が S^1 に関して対称な領域、f を $\Omega_+ \cup I \to \mathbb{C}$ という連続写像で Ω_+ 上で正則とする。
また $f(I) \subset \mathbb{R}$ または $f(I) \subset S^1$ をみたしている。
このとき、f は Ω 上に解析接続できる。

証明 8.
$f(I) \subset \mathbb{R}$ のとき
$f \circ \phi$ は鏡像の原理の仮定を満たす。$f \circ \phi$ の解析接続と ϕ^{-1} を合成すれば良い
$f(I) \subset S^1$ のとき
$\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ は鏡像の原理の仮定を満たす。あとは同様で良い。

■

より一般に、実解析的曲線に関する鏡像が定義できる。
$\gamma : (a,b) \to \mathbb{C}$ は各 $t_0 \in (a,b)$ に対して t_0 を中心とするべき級数展開、

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-t_0)^i \quad (|t-t_0| < r_{t_0})$$

を持つとする。さらに $\gamma\,'(t) \neq 0$ を仮定する。
いま、

$$\gamma(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-t_0)^i \quad (|z-t_0| < r_{t_0})$$

として、γ を $\Delta(t_0, r_{t_0})$ にまで正則に拡張する。
$\gamma\,'(t_0) \neq 0$ より、r_{t_0} を必要に応じて小さく取り直せば、$\gamma : \Delta(t_0, r_{t_0}) \to \gamma(\Delta(t_0, r_{t_0}))$ は双正則である。
$\forall w \in V$ に対して、 $w^* := \gamma(\overline{\gamma^{-1}(w)})$ で w の γ に関する鏡像のを定義する。
w が γ に十分近いとき、この定義はべき級数の中心 t_0 の取り方によらない。
S^1 に関する反転のときと全く同様の証明で鏡像の原理が示せる。

定理 9. Ω を実解析的な境界を持つ単連結領域とする。
つまり、$\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$ 実解析的かつ単射かつ γ '$\neq 0$ であるものの像。
このとき、$f : \Delta \to \Omega$ 双正則写像は,$[\Delta]$ の近傍で定義された双正則写像に拡張できる。