まえがき

本日は「数学科展示　ますらぼ」にご来場いただき誠にありがとうございます。本企画は2年前に数学科2013年度進学の先輩方(現在多くの方が修士1年生となっています)が始めたもので、それを私達数学科2015年度進学(現在学部3年生)が引き継いだものです。つまり「ますらぼ」という企画名や「$e^{\pi i}sode$（えぴそーど)」という冊子の名前こそ受け継いでいますし、先輩方からご協力・ご指導は頂いていますが、運営している人間はガラッと変わった企画となっています。数学科や「ますらぼ」という名前に泥を塗らないように頑張りたいと思います。

東京大学理学部数学科・大学院数理科学研究科は駒場キャンパスにある学科・研究科です。数学科には東大中の数学を愛する天才・秀才たち約45名が集まります。私達が日々勉強・研究を行う”数理科学研究棟”（別名数理病棟）では、個性豊かな数学を愛する人達が飛んだりはねたり踊ったりしています。院試にじゃがいもを持ってくる人やインターネット上で女子大生と仮定しても矛盾しない発言を繰り返す人や院試の合格発表から逃げるために山にこもる人やいつも裸足で大学に来る人や友人の誕生日をすべて暗記している人や美術や音楽や経済学などの才能もある山岳ガイドや自称女子小学生などがいます。（もちろん普通な人もたくさんいて多種多様な学科ですが、みな数学が好きという共通点によってまとまりを持っています。）みんなとても面白い人ばかりでここに書いていたらきりがありません。私はこの学科が大好きです。この大好きな学科のありのままの姿を伝えたくて、駒場から本郷まで井の頭線と銀座線と丸ノ内線を乗り継いでやって来ました。

そんな私の大好きな数学科が有志で作り上げたこの冊子 $e^{\pi i}sode$（えぴそーど）も今回でvol.3となりました。vol.1では岡潔やブルバキ、ワイエルシュトラスなどの数学者の伝記、vol.2では古田教授へのインタビューや数学科・大学院数理科学研究科の学生へのアンケートや4年生のセミナーの紹介などをしました。vol.3では、数学的なバックグラインドを持つ方だけでなく数学好きの高校生や一般の方などにも読んでもらえるような記事をたくさん揃えました。普段数学に慣れ親しんでいない方には、数式がたくさん並んでいてびっくりしてしまうかもしれませんが、じっくり読んでいただければと思います。

もし本企画・冊子を通じて数学に興味を持っていただければ、私達にとってこれほどまでに嬉しい事はありません。図書館や大きな書店に行って数学書を手に入れれば家にいながらさらに広い数学の世界を旅する事ができます。東大数学科に興味を持ったという場合は高校生や大学生向けに説明会を開いていますので是非参加してみてください。(伊藤克哉)

目　次

積分の歩み（山本）

高校数学の花形でもある「微分積分」は, 解析学という大きな一分野の基本的な操作となっています. しかしながら, これらが現在の解析学においてどのように利用されているか, それに至るまでには数百年に渡る紆余曲折がありました. そこで今回は, 特に「積分」という操作について, 歴史の中でどのような道を辿ってきたのか, それを大雑把に概観してみたいと思います.

§1. 積分のはじまりから微分との関係性まで

区分求積法

そもそも積分というものは, もともと図形の面積を求める目的で生まれた操作です. 面積を求めたい図形を, 既に面積をよく知っている図形 (長方形, 三角形など) で近似していき, その近似した図形の面積の和を考えることで, 元の図形の面積の近似値を考えます. 図形による近似の精度が上がるほど, 面積の近似値も元の面積の値に限りなく「近づいていく」ことが期待できます. このとき「近づいていく」値を図形の面積と定める. つまり, 知っている図形によって面積を近似し, 極限まで近似することにより面積を得る操作として, 積分という概念は誕生しました.

さて, 面積を求めたい図形として, 「閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ のグラフ, x 軸, そして 2 直線 $x = a, b$ で囲まれる部分」というものを考えてみましょう. a, b の値は何でも同じような議論になるので, $a = 0, b = 1$ としておきます. 面積の近似法としては色々なものが考えられるでしょう. その 1 つとして, 次に紹介する「区分求積法」というものがあります. 高校数学でも最後の方に出てくるものですね.

定理 (区分求積法)

閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された実数値連続関数 $y = f(x)$ のグラフ, x 軸, 2 直線 $x = 0, 1$ で囲まれる部分の符号付き面積 S は, $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ で表される.

ここで, 「符号付き面積」というものは, x 軸より上の部分は正のまま, x 軸より下の部分は負の面積を持つとしたものです.

さて, この区分求積法がどのようなことを言っているのか説明します. まず, 閉区間 $[0, 1]$ を n 等分します. 次に, 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $f(x)$ の区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ における振る舞いを, グラフの右の端点 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ により近似します. そうすると n 個の長方形により図形が近似されます. 左から k 番目の長方形の面積は $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ です. これら n 個の長方形の面積の総和を取ったのち, n を ∞ に持っていく極限を行ったものが上の区分求積法です.

高校数学では「積分は微分の逆演算」として積分が定義されますが, 実際の歴史ではむしろ, 高校数学の最後の方に出てくる, この「区分求積法」の方が積分の定義に近いことをしていたというわけです.

微分積分学の基本定理

積分は「図形の面積を求める」ための操作として定義されたということをみました．この定義において, 微分というものは一切出てきません．しかし高校数学で「積分は微分の逆演算」として定義されるように, 微分と積分は密接な関係を持っています．では, 積分が微分と結びついたのはいつごろでしょうか？ それは Newton や Leibniz が微分法を作り上げた 17 世紀ごろにさかのぼります．彼らはそれぞれ独自に, 積分と微分の次のような関係性を見出しました．

定理 (微分積分学の基本定理)

a, b を, $a < b$ となる実定数, また x_0 を $t \in (a, b)$ を満たす実変数とする．閉区間 $[a, b]$ 上で定義された実数値連続関数 $y = f(x)$ のグラフ, x 軸, 2 直線 $x = a, t$ により囲まれる部分の符号付き面積を $S(t)$ とおくと, $S(t)$ は t で微分可能で,

$$\frac{dS}{dt}(t) = f(t)$$

が成り立つ．

Leibniz, Newton らによるこの結果は, それまでまったく関係ないと思われていた微分学・積分学を統合するとても強力な定理であり, 今日では「微分積分学の基本定理」と呼ばれています．高校数学ではかなり簡単に説明されていますが, 歴史的にはこの結論にたどり着くまでにかなり長い時間がかかっていたわけです．この定理が見つかるまで, 積分学は近似の仕方等かなり技巧的な議論を要していたのですが, この定理により原始関数を求められさえすれば面積を求められることが分かり, 議論が大幅に簡潔になりました．

さて, 彼らはこの定理を次のように証明しました．

$t \in (a, b)$ とします．また, $t < t + h < b$ となる h を考えます．ここで, $S(t+h) - S(t)$ の値を不等式評価してみましょう．$S(t+h) - S(t)$ の値は, $y = f(x)$, x 軸, 2 直線 $x = t, t+h$ により囲まれる部分の符号付き面積と考えられます．ですから, $[t, t+h]$ における f の“最大値”を $M(h)$, “最小値”を $m(h)$ とおくと,

$$\begin{aligned} m(h) \cdot h \leq\ & S(t+h) - S(t) \leq M(h) \cdot h \\ m(h) \leq\ & \tfrac{S(t+h)-S(t)}{h} \leq M(h) \end{aligned}$$

が成り立ちます．さて, 最大値 $M(h)$, 最小値 $m(h)$ について, h が 0 に「限りなく近づく」につれ, ともに $f(t)$ に「限りなく近づく」はずです．つまり,

$$\lim_{h \to +0} M(h) = \lim_{h \to +0} m(h) = f(t)$$

が成り立つはずです．したがって, 上の不等式と合わせれば, はさみうちの原理により,

$$\lim_{h \to +0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = f(t)$$

が分かります．これと同様に, $a < t + h < t$ となる h を考えれば

$$\lim_{h \to -0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = f(t)$$

が分かりますから, これらを合わせて

$$\frac{dS}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = f(t)$$

が成り立ちます．これで定理が証明されました．

これでめでたしめでたし, と言いたいところですが, よく見るとこの証明には曖昧な部分がいくつかあることが分かります．特に「近づいていく」とはどういうことか, その概念が非常にフワフワしています．これは「関数の連続性」という概念に関わってきます．彼らはこれを「無限小」という概念によって説明しようとしましたが, 無限小の厳密な定式化は (当時において) 得られませんでした．この定理の証明, そして積分という操作, それらの厳密化はいつごろ, どのように行われたのでしょうか？ 次の節では, それを見てみようと思います．

§2. 厳密化の流れ - Riemann 積分

極限, 連続性の定式化 (ε-δ 論法)

まず, 実数や極限, 関数の連続性といったものを厳密化しようとする流れが起こったのは 18〜19 世紀ごろのことです．この流れにより, 「限りなく近づく」といった表現, 関数の連続性という概念は次のように定式化されました．

定義 (関数の極限, 関数の連続性)

1. 実数値関数 $f(x)$ について, 「x が a に近づくとき, $f(x)$ が実数 α に限りなく近づく」とは, 「正数 ε を 1 つ固定したとき, 『$|x-a| < \delta (< h)$ を満たす, $f(x)$ の定義域中の x をどう取っても, $|\alpha - f(x)| < \varepsilon$』が成り立つような正数 δ が存在する」ことである．このとき, α を $f(x)$ の $x = a$ における極限といい,
$$\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$$
と表す．
2. 実数値関数 $f(x)$ の定義域の点 a について,
$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$
が成り立つとき, $f(x)$ は $x = a$ において連続であるという．$f(x)$ の定義域中の全ての点において $f(x)$ が連続であるとき, 単に $f(x)$ は単に連続であるという．

これがいわゆる「ε-δ 論法」というものです．この条件がどういう意味なのか説明します．最初に固定する正数 ε は, 極限値 α との誤差に相当します．この ε に対して, $x = a$ との距離に相当する正数 δ を十分小さくとってやります.; これが「a に限りなく近づく」ということを意味します．そして, a との距離が δ より小さいような, そんな定義域中の点 x における $f(x)$ の値と, α の値との“誤差”が ε より小さくなる, ということを要請しているというわけです．

Riemann 積分の定義

こうして, 関数の極限や連続性が厳密に定式化されました．この流れの中で, 積分の厳密化, 区分求積法の一般化として考案されたものが, Riemann による積分の定式化, Riemann 積分です．どのような定式化がなされたのか, それを見てみます．以下, 閉区間 $[a, b]$ を定義域とする実数値関数 $f(x)$ を 1 つ固定します．$f(x)$ の連続性は仮定していないことに注意してください．

まず, Riemann 積分の概念に必要な準備をいくつか行います．

定義 (分割, 代表点)

1. $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$($n$ は自然数) となる $n+1$ 個の実数の組 $\Delta=t\{t_i\}_{i=0}^n$ を, 閉区間 $[a,b]$ の分割という．この Δ に対し, $t_i-t_{i-1}(i=1,2,\ldots,n)$ の最大値を Δ の分割の幅といい, $|\Delta|$ と表す.
2. n 個の実数の組 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ が $\Delta=\{t_i\}_{i=0}^n$ の代表点であるとは, 各 $i=1,2,\ldots,n$ に対して, $\xi_i\in[t_{i-1},t]$ となっていることをいう.

これにより, $y=f(x)$ のグラフ, x 軸, 2 直線 $x=a,b$ により“囲まれる”部分 の符号付き面積を, いくつかの長方形の面積により近似しようとする「Riemann 和」の概念を定義します.

定義 (Riemann 和)

$f(x)$ を上の通りとする．また, $\Delta=\{t_i\}_{i=0}^n$ を $[a,b]$ の分割, $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ を Δ の代表点とする．この f, Δ, $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ に対し,

$$S\left(f,\delta,\{\xi_i\}_{i=1}^n\right)=\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

を, 分割 Δ, 代表点 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ における f の Riemann 和という.

これは何をしているかというと, $i=1,2,\ldots,n$ について, 閉区間 $[t_{i-1},t_i]$ における f の振る舞いを $f\left(\xi_i\right)$ により近似し, 各長方形の面積 $f\left(\xi_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)$ の総和をとるということです．これは「有限個の長方形による近似」であるという点で区分求積法における近似と似ていますが, ところどころ違う点があります．区分求積法が「区間を等分割」し,「各区間の右端点など, 分割が決まれば自動的に決まる代表点」を用いるのに対し, Riemann 和による近似は「区間の分割が任意」かつ,「代表点の取り方も任意」です．この意味で, Riemann 和は区分求積法による近似の一般化となっています.

さて, この近似は, 閉区間 $[a,b]$ の分割が「十分細かくなる」と精度が上がっていくことが期待されます．しかし, これは一般には成り立ちません．先ほどの「連続関数」の概念と同様に,「閉区間の分割が細かくなると近似の精度が上がるような関数」というものを, 次のように定式化します.

定義 (Riemann 可積分関数, 定積分)

閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値関数 f が Riemann 可積分とは, ある実数値 S が存在して, 次のような性質が成り立つことをいう.
「正数 ε を 1 つ固定したとき,『$[a,b]$ の分割 Δ であって, その幅 $|\Delta|<\delta$ であるようなもの, および Δ の代表点 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ をどのように取っても, Riemann 和 $S\left(f,\delta,\{\xi_i\}_{i=1}^n\right)$ に対し, $\left|S-S\left(f,\delta,\{\xi_i\}_{i=1}^n\right)\right|<\varepsilon$』となるように正数 δ をとることができる」
また, このときの実数値 S を, f の $[a,b]$ における定積分といい, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と表す.

この定義はどういうことか説明します．まず近似の極限値 S を与えます．続いて, この S と Riemann 和との間に許される誤差 ε が与えられたとします．このとき, 正数 δ を小さくとることが「分割の幅を小さくする」, すなわち「分割を細かくする」ことに相当します．そして, このとき分割 Δ の幅 $|\Delta|$ が δ 未満ならば, Δ の代表点 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ をどのように取っても, その Riemann 和 $S\left(f,\delta,\{\xi_i\}_{i=1}^n\right)$ と S との誤差が ε 未満となるということを要請しているわけです．関数の連続性のときと似ていますね.

そして, この性質を満たしているような関数, Riemann 可積分関数のみ, その定積分の値を定めるということになります. では, Riemann 可積分関数とはどのようなものでしょうか？逆に, Riemann 可積分関数でないような関数とはどのようなものでしょうか？その例をいくつか考えてみましょう.

まず, Riemann 可積分関数の例をみてみます.

- 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 f は $[a,b]$ 上で Riemann 積分可能です. 証明は実数の性質などの準備がさらに必要になるので省略しますが, これにより先ほどの議論が正当化されたことになります.
- 閉区間 $[a,b]$ 上で有界な関数 f であって, そのうち連続でない点が有限個のみであるようなものは Riemann 積分可能です. なお, ここで「有界な関数」とは, 「ある十分大きな正数 M が存在して, $[a,b]$ のどんな点 x であっても $|f(x)| < M$ となる」ことをいいます.

一方, Riemann 可積分でない関数を見てみます.

- 閉区間 [a,b] 上で非有界な関数 $f(x)$ は Riemann 可積分ではありません. なお, 非有界であるとは, 「どんな正数 M に対しても, $|f(x)| > M$ となる $x \in [a,b]$ が存在する」ということです. この例としては, 例えば $[0,1]$ 上の関数 f であって, $f(0) = 0$, $x \in (0,1]$ なる x に対し $f(x) = 1/x$ となるようなものが該当します.
- 有界な関数であっても, 連続でない点全体の集合が「十分大きい」ような関数は Riemann 可積分ではありません. 例えば, $[0,1]$ 上の関数であって, $[0,1]$ 内の有理数において 1, 無理数において 0 となるような関数を考えると, これは $[0,1]$ のどの点においても不連続です. なお, この関数は非常に病的な振る舞いであるので, 作者にちなんで 「Dirichlet の関数」と呼ばれています.

上の例でも言及したとおり, 連続関数は Riemann 積分可能です. また, 以上の準備を踏まえると, Leibniz らの「微分積分学の基本定理」の証明も厳密に正当化することができます. こうして, 区分求積法から始まった積分の厳密な一般化, 定式化が正当に行われました.

Riemann 積分のデメリット

このようにして, 積分というものが厳密なものとして再定義されました. 実際, この積分の定義で十分実用的な分野も存在します. ところが, 解析学の発展に伴い, この積分の定義では関数の扱い方に若干の不自由が生じることが分かりました.

それは, 例えば関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を考えた場合に起こります. この関数列として, 「閉区間 $[0,1]$ において定義される Riemann 可積分関数」の列を取ったとします. さらに, その極限関数, すなわち定義域上の各 x に対して極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ として定まる関数 f, が存在するとしましょう. では, この極限関数 f は Riemann 可積分関数でしょうか？そう言い切りたい願望はありますが, 残念ながら答えは No です. つまり, 各関数が Riemann 可積分関数である列であっても, その極限関数は必ずしも Riemann 可積分とは限りません. 極限関数が Riemann 可積分となるような十分条件はいくつか見つかっていますが (例えば関数列が「よい収束 (一様収束)」をするなど), それを調べるのは大変なものが多いことが分かっています. つまり, Riemann 積分は極限操作に対してあまり良い振る舞いをしてくれないのです.

しかしながら, 極限操作は解析学においては基本的かつ重要な操作であり, それが容易に行えないというのは相当な不自由を強いられるようになります. これについて, 極限操作に関してよりよく振る舞うような関数の集合があるのではないだろうか？ その 1 つの答えとして, 積分の新たな定

義を与えたのがLebesgueです．このLebesgueにより与えられた定義が, 現代の解析学でもっとも普遍的といっても過言ではない積分の定義, Lebesgue積分です．以下では, Lebesgue積分がどのようなものなのか見ていきましょう．

§3. 積分の一般化 - Lebesgue積分

“大きさ”の公理化・一般化 (測度論)

Lebesgueが積分を再定義するために行った仕事としてまず挙げられるのが,「測度」という概念の導入です．これは, ある集合の部分集合の“大きさ”というものがどのようなものか, その概念を一般化するものです．この“大きさ”というのは, 実数直線 $\mathbb{R}$ でいうところの“長さ”, xy 平面 $\mathbb{R}^2$ でいうところの“面積”に相当します．

似たような概念に, 集合上の 2 点間の「距離」とはどのようなものかということを一般化した「距離空間」というものがあります．これは次のようなものです．

定義 (距離, 距離空間)

X を集合とする．X の 2 点 x, y に対して実数 $d(x,y)$ を返す関数 d が, 任意の $x, y, z \in X$ に対して

1. $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. (三角不等式) $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$

となるとき, d を X 上の距離関数, あるいは単に距離であるという．また, このとき集合 X と関数 d の組 (X,d) を距離空間という．

これはどういうことでしょうか．端的に述べると,「距離」とはどういう性質を持っているかを考えて, その性質を満たしているものは全部距離と言ってしまおう, ということです．極端なものを出すと, 集合 X の 2 点 x, y に対して実数 $d(x,y)$ を返す関数 d を

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

により定めると, これは上の性質を全て満たしているので, X 上の距離といえることになります．このように,「満たしていてほしい性質」を規定することによる定義の仕方を「公理的に定義する」などと言います．

これと同様にして, “大きさ”という概念を, 測度として公理的に定義してみましょう．以下, この節では xy 平面 $\mathbb{R}^2$ における部分集合の面積を思い浮かべながらお読みいただければ分かりよいかと思います．

まず, 測度というものを考える前段階として, 集合 X 上の「有限加法的測度」というものを考えます．そのために,「大きさがちゃんと測れるような X の部分集合」全体の集合 $\mathcal{F}$ と,「そのような部分集合の面積」を与える関数 m とはどのような性質を持っているか考えましょう．

まず $\mathcal{F}$ について,

- 全体の集合 X の大きさは測れてしかるべきでしょう．
- A の大きさが測れるなら, X から A をくり抜いた残り, 補集合 A^c の大きさも測れるはずです．

- A, B の大きさが測れるなら, A と B を合わせたものも測れるはずでしょう.

次に, 実際の“大きさ”の測り方について,

- “大きさ”は 0 以上の値でしょう. 平面 $\mathbb{R}^2$ の面積が ∞ であることを考えると, “大きさ”は「0 以上の実数か ∞」であることが望ましいと考えられます.
- 空集合 $\emptyset$ は全体集合 X の補集合だから“大きさ”が測れるはずですが, 空集合は「何もない」ことの象徴ですから, その“大きさ”は 0 であるでしょう.
- A, B の“大きさ”がはかれて, かつ A と B に共通部分がないとき, A と B を合わせた集合の“大きさ”は A,B の“大きさ”の和であるはずです.

以上を元に, 次のような定義をします.

定義 (有限加法族, 有限加法的測度)

X を集合とする.

1. 各要素が X の部分集合であるような集合 $\mathcal{F}$ が X 上の有限加法族であるとは, 次が成り立つことをいう：
   (1) $X \in \mathcal{F}$
   (2) $A \in \mathcal{F}$ ならば, $A^c \in \mathcal{F}$
   (3) $A, B \in \mathcal{F}$ ならば, $A \cup B \in \mathcal{F}$
2. X 上の有限加法族 $\mathcal{F}$ の要素 A に対し, 0 以上の実数または ∞ である値 $m(A)$ を与える関数 m が $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度であるとは, 次が成り立つことをいう：
   (1) $m(\emptyset) = 0$
   (2) (有限加法性) $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$ ならば, $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

これで“大きさ”というものが有限加法的測度として定式化されました. 長さや面積というものが実際にこれらの性質を満たしているだろうことは直感的にも理解できます. しかし, ここで Lebesgue はこの概念の拡張という一大飛躍を敢行します. それが次に定める「測度」という概念になります.

定義 (完全加法族, 測度)

X を集合とする.

1. 各要素が X の部分集合であるような集合 $\mathcal{M}$ が X 上の完全加法族であるとは, 次が成り立つことをいう：
   (1) $X \in \mathcal{M}$
   (2) $A \in \mathcal{M}$ ならば, $A^c \in \mathcal{M}$
   (3) $n = 1, 2, \ldots$ に対して $A_n \in \mathcal{M}$ ならば, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$
2. X 上の完全加法族 $\mathcal{M}$ の要素 A に対し, 0 以上の実数または ∞ である値 $\mu(A)$ を与える関数 μ が $\mathcal{M}$ 上の有限加法的測度であるとは, 次が成り立つことをいう：
   (1) $\mu(\emptyset) = 0$
   (2) (完全加法性)$n = 1, 2, \ldots$ に対して $A_n \in \mathcal{M}$ で, $n \neq m$ となるとき $A_n \cap A_m = \emptyset$ であるならば,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \left(= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)\right)$$

   またこのとき, 集合 X, 完全加法族 $\mathcal{M}$, 測度 μ の組 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間という.

なお, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とは,「ある自然数 n に対し $x \in A_n$ となっているような x 全体の集合」のことです. つまり, 測度というものは,

- “大きさ”の測れる集合を可算無限個 (自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と同じだけの“個数”) だけ持ってきたとき, それを全て合わせてできる集合の“大きさ”も測れて,
- それぞれの部分集合同士に共通部分がないとき, 合わせてできた集合の“大きさ”は元の集合の“大きさ”を可算無限回足し合わせたものに等しい

ことを要請していることになります. ですから, 完全加法族ならびに測度の定義は, 最後の条件がそれぞれ有限加法族, 有限加法的測度の強化版になっていることが分かります. (あるいは, $n \geq 3$ において $A_n = \emptyset$ とおいても分かります.) このように「有限個」から「可算無限個」に拡張した部分が, 極限との親和性を上げる決定的な役割を果たします.

さて, 測度をこのように定義しましたが, 有限加法的測度よりも条件が強くなっているので, 実数直線 $\mathbb{R}$ における「標準的な長さ」や, xy 平面 $\mathbb{R}^2$ における「標準的な面積」は測度になっているのか？という疑問が残ります. しかしそれは大丈夫で, (証明のためには更なる概念がいくつか必要なので省略しますが,) 例えば実数直線 $\mathbb{R}$ において, すべての開区間や閉区間, 半開区間を元に持つ完全加法族 $\mathcal{M}$ と, 閉区間 $[a, b]$ に対し $\mu([a, b]) = b - a$ となるような $\mathcal{M}$ 上の測度 μ は確かに存在します. そのような μ はいくつもありますが, その中で Lebesgue が作った測度のことを「1 次元 Lebesgue 測度」といいます. これは xy 平面 $\mathbb{R}^2$, xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ などでも同様です. また, Lebesgue 測度の定義域である完全加法族 $\mathcal{M}$ を「Lebesgue 可測集合」といいます.

$\mathbb{R}$ における Lebesgue 可測集合の例をいくつかみてみましょう. 先述のとおり, $\mathbb{R}$ の開区間, 閉区間, 半開区間はすべて Lebesgue 可測集合です. 特に 1 点集合 $\{a\}$ は $[a, a]$ とみなせて, Lebesgue 可測集合です. また, Lebesgue 可測集合の可算個の合併も Lebesgue 可測集合なので, R の可算部分集合 (例えば自然数全体の集合 $\mathbb{N}$, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$) はすべて Lebesgue 可測集合です. とくに有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ が Lebesgue 可測集合であるので, 無理数全体の集合 $\mathbb{Q}^c$ も

Lebesgue 可測集合になります.

Lebesgue 積分の定義

ここまで測度論の話をしてきましたが, これが Lebesgue 積分にどのように関わってくるのでしょうか？ 実は, Lebesgue 積分は, 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を定義域とし, 実数全体 (あるいは実数全体に $\pm\infty$ を加えた集合) を値にとりうる関数のうち, ある特殊な性質を満たす関数に対して定義される操作なのです.

では, 以上をもとに, いよいよ Lebesgue 積分を定義します. 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$, および $\mathcal{M}$ の元 E を 1 つ固定します.

まずは Lebesgue 積分が定義できるような関数である「可測関数」から定義していきます. そのために, さらにもう 1 段階, 「単関数」という関数の定義をはさみます.

定義 (単関数)

定義域 E 上の実数値関数 f が E 上の単関数であるとは, $f(x)$ の値が 0 以上の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ のどれかであって, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, X の部分集合

$$E_i = f^{-1}(\{a_i\}) = \{x \in E \mid f(x) = a_i\}$$

が $\mathcal{M}$ の元である $(E_i \in \mathcal{M})$ ことをいう.

1 次元 Lebesgue 測度空間としての $\mathbb{R}$ 上の単関数の簡単な例としては, 例えば $(0,1], (1,2], \cdots, (n-1, n]$ 上でそれぞれ 0 以上の実数 $a_1, \cdots, a_n$ を値に取り, それ以外では 0 となるような「階段のような」関数が挙げられます. 一見病的な例としては, $\mathcal{Q}$ 上で 1, $\mathcal{Q}^c$ 上で 0 となる関数 (Dirichlet の関数) が挙げられます.

この上で, 可測関数を定義します.

定義 (可測関数)

1. E を定義域とし, 各点 $x \in E$ に対し $f(x) \geq 0$ となるような実数値関数 f が E 上の正値可測関数であるとは, 次が成り立つことをいう：E 上の単関数の単調増大列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, すなわち各 $f_n(x)$ が単関数で, $x \in E, n \leq m$ ならば $f_n(x) \leq f_m(x)$ となるような列, であって, その列の極限関数が $f(x)$ であるような列が存在する.
2. E を定義域とする実数値函数 f が E 上の可測関数であるとは, 次が成り立つことをいう：f の“正の部分”f_+, “負の部分”f_- を, 各 $x \in E$ に対し,

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

として定めたとき, f_+, f_- が正値可測関数になっている.

なお, 上の f_+, f_- は後に出てくる Lebesgue 積分の定義でも用います.

可測関数の例を挙げてみます. 例えば, 単関数はそのまま可測関数です. 上で定義した正値可測関数 f について, $f_+(x) = f(x)$ は当然正値可測関数, $f_-(x) = \equiv 0$ は単関数だから正値可測関数です. したがって, 正値可測関数もまた可測関数であることが分かります. また, 1 次元 Lebesgue 測度空間の入った $\mathbb{R}$ 上の連続関数もまた可測関数であることが分かっています.

これで準備が整いました. E 上の可測関数 f に対し, その Lebesgue 積分 $\displaystyle\int_E f d\mu$ を考えます. 簡単のため, まず正値可測関数における Lebesgue 積分から考えます.

定義域 E の正値可測関数 f に対し, 極限関数を f とする単関数の単調増大列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ をとります. 各 $f_n(x)$ の取り得る値を $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,m_n}$ とおき, さらに各 $i = 1, 2, \ldots, m_n$ に対し, $E_{n,i} = \{x \in E \mid f(x) = a_{n,i}\}$ と定めます. このときの値

$$\sum_{i=1}^{m_n} a_i \mu\left(E_{n,i}\right)$$

は n について単調増加ですので, この値の $n \to \infty$ における極限は実数値か ∞ のどちらかです. この値の $n \to \infty$ における極限値を f の Lebesgue 積分, すなわち

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_i \mu\left(E_{n,i}\right)$$

と定めます. なお, この定め方には「単関数の単調増大列の取り方によるのではないか？」という疑問が残りますが, これは取り方によることなく, 全て同じ値になることが分かっています.

この操作は何をしているのでしょう？ 1 次元 Lebesgue 測度空間 $\mathbb{R}$ を例に説明します. 単関数により $f(x)$ を下から近似し, f により定まる部分集合の面積を下から近似します. 都合のいいことに, その値は n について単調増大であることが分かっているので, その $n \to \infty$ における極限をとることで面積を求めようとしているということになります.

以上を踏まえて, 一般の可測関数 f の Lebesgue 積分を次のように定めます.

定義 (Lebesgue 積分, Lebesgue 可積分関数)

定義域 E の可測関数 f について, 可測関数の定義同様に f_+, f_- を考える.

1. $\int_E f_+ d\mu, \inf_E f_- d\mu$ のうち, 少なくとも一方が実数であるとき, f は定積分をもつといい,

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$$

を f の E における定積分という. これは実数値か $\pm\infty$ のいずれかの値をとる.

2. さらに, $\displaystyle\int_E f d\mu$ が実数値となるとき, f は E 上の Lebesgue 可積分関数であるという.

さて, このように Lebesgue 積分を定義しましたが, これは既に定義されていた Riemann 積分とどのような関係があるのでしょうか？実は, 1 次元 Lebesgue 測度空間 $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ における Riemann 可積分関数 f は可測関数かつ Lebesgue 可積分関数であって, さらにその Lebesgue 積分は Riemann 積分と一致することが示されます. この意味で, Lebesgue 積分は Riemann 積分の拡張といえるでしょう.

Lebesgue 積分の恩恵

Lebesgue 積分を定義しましたが, これがどのような利点を持っているのでしょう？ いくつかありますが, まず思いつくこととしては, 1 次元 Lebesgue 測度空間 $\mathbb{R}$ における Riemann 積分の真の拡張になっているということがあります. すなわち, Lebesgue 可積分関数全体の集合は Riemann 可積分関数全体の集合を真に包含していて, しかも Riemann 可積分関数においては, その Riemann 積分と Lebesgue 積分が一致しているということです. Riemann 可積分でなく Lebesgue 可積分であるような関数としては, 先述の Dirichlet の関数を挙げられます.

また, Lebesgue 積分を導入するモチベーションの 1 つでもありましたが, 極限操作との親和性が高いことも利点として挙げられます. 例えば, Lebesgue 積分の定義において用いた「可測関数」と

いう概念について, 可測関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき, 極限関数 $f(x)$ もまた可測関数になることが分かります. また, Lebesgue 可積分関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は残念ながら一般には Lebesgue 可積分関数とは限りませんが, それが Lebesgue 可積分関数となる十分条件としては比較的簡単なものが見つかっています. 例えば, 次のような定理があります.

定理 (Lebesgue の優収束定理)

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を, 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ の可測集合 $E \in \mathcal{M}$ を定義域とする可測関数の列とする. すべての自然数 n および点 $x \in E$ に対し, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ となるような Lebesgue 可積分関数 $\varphi(x)$ が存在すれば, 極限関数 $f(x)$ も Lebesgue 可積分関数で, さらにその定積分について,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

が成り立つ.

さらに, Riemann 積分はあくまで $\mathbb{R}$(あるいは一般化して $\mathbb{R}^n$) 上の積分しか考えることができませんでしたが, Lebesgue 積分は測度の定まった空間上の可測関数であれば何でも積分することができます. これは“大きさ”というものを測度として一般化した結果です. この応用例として顕著なものとしては, 確率論をあげることができます. これは, 「事象」というものを「見本空間」と呼ばれる集合の部分集合族であるような完全加法族の元, 「ある事象のおこる確率」というものを測度としてみなすことで見本空間を測度空間とします. その上での Lebesgue 積分としては, 見本空間を定義域とする実数値可測関数 (確率関数) の積分などがあります.

このようにして, 単なる「図形の面積」という概念から離れて, 積分というものがより様々な状況に対応できるように抽象化・一般化されていきました.

§4. さいごに

現代数学までの「積分」という概念の変遷を見てきました. 数学の基本的な概念１つ取ってみても, その定式化には長い紆余曲折があったということがお分かりいただけたのではないでしょうか. １つの概念をより厳密に考察し, さらに元来の目的以外でも用いることが出来るような一般化・抽象化を行っていく. そういった数学の奥深さといったものを感じていただければ幸いです.

数理ファイナンス入門（菊地）

§1. はじめに

この記事では，数理ファイナンスという分野を紹介します．数理ファイナンスというとなんだか数学科らしくないではないかと思われる方もいらっしゃるかもしれませんが，現在では数学の中の応用数理の中の分野の一つとして認められています．数理ファイナンスでは，株価などの資産の値動きを確率的事象として捉えます．ここでは，主に数理ファイナンスのさきがけとなったBlack-Scholes モデルについて解説します．この業績で Scholes と Merton[1] は 1997 年のノーベル経済学賞を受賞しました．[2] 数学的な用語は最低限に抑えて解説をしたつもりです．

§2. 数理ファイナンスとは

数理ファイナンスはもともとデリバティブ（金融派生商品）の価格付けを目的に始まりました．

基本的な用語

- 危険資産：株式や債券などの不確実な出来事の影響で価格が決まる資産のこと．
- 安全資産：銀行預金のように確実な資産．
- デリバティブ[3] ：株式や債券，農産物や鉱石などを原資産とする派生商品．
- ポートフォリオ：投資家が保有している資産の組み合わせのこと．たとえば，A 社の株式 a 単位，銀行預金 b など．

例 ヨーロピアンオプション

ヨーロピアンオプションは 2 つのパラメータ満期日 T と行使価格 K によって特徴づけられます．満期日 T，行使価格 K のヨーロピアンコールオプションとは，満期日 T（現在時刻は $t=0$ とします．）にある危険資産 1 単位を行使価格 K で購入できる権利のことを言います．（権利なので，満期日に買わなくてはならないというわけではありません．）また，逆に満期日 T に行使価格 K である危険資産を 1 単位売ることができる権利のことをヨーロピアンプットオプションといいます．他にも，満期日以前のどのタイミングでも権利を行使できるアメリカンオプションなどデリバティブの種類はかなりたくさんありますが，今回はヨーロピアンコールオプションの適切な価格付けを考えます．まずは，ヨーロピアンコールオプションのペイオフ（購入者への支払い）について考えておきましょう．

時刻 $t(0 \leq t \leq T)$ における原資産の価格を $S(t)$ とします．合理的なヨーロピアンコールオプションの購入者は，

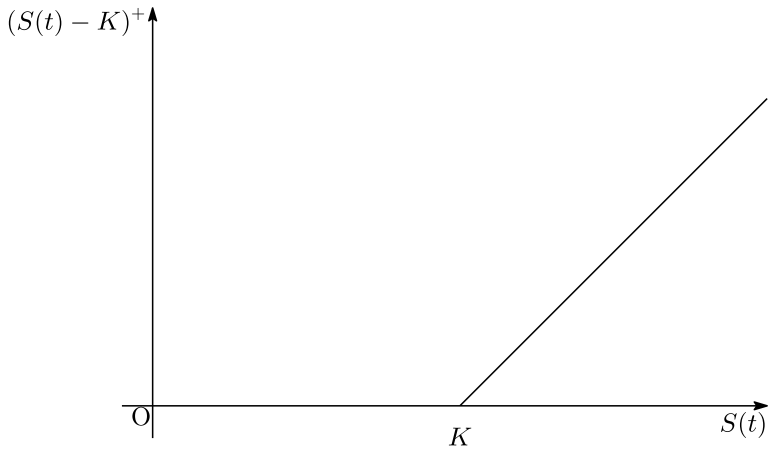
$$\begin{cases} S(t) > K \Longrightarrow \text{権利行使} \\ S(t) \leq K \Longrightarrow \text{権利破棄} \end{cases}$$

[1] Merton は誰かというと，Black と Scholes の議論を厳密に証明した人です．

[2] Black は 1995 年に亡くなってしまったのでノーベル賞は受賞していません．

[3] 実はデリバティブの考え方は自然なものです．例えば，http://www.shiruporuto.jp/finance/kinyu/deriv/に起源などに関する説明が載ってます．

となるように行動します．したがって，ペイオフは $(S(t)-K)^+$ となります．ただし，$(S(t)-K)^+ = \max\{S(t)-K,\ 0\}$ とします．グラフは次のようになります．



基本的な仮定

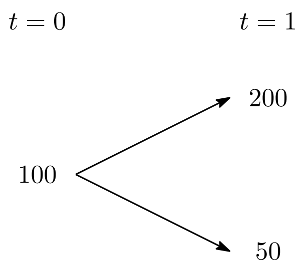
数学的なモデルを作るにあたって，以下のような仮定をします．

- 株式に配当はない．
- 任意の時刻で危険資産に価格が付いており，その価格で任意の実数単位での売買が可能．
- 空売り（保有していない資産を他者から借りてきて売る行為．当然，借りた資産は将来の適当な時点で返却しなければならない．）も可能．
- 任意の時刻で任意の実数金額の銀行預金，借り入れが可能．
- 預金金利と借り入れ金利は等しい．
- 手数料や税金は一切なし．

他にも，現実の世界との差を書くべきところがあるかもしれませんが，以降は理想的な市場であると考えてください．

§3. 価格づけとは？

ここでは，1 期間二項モデルと呼ばれる単純なモデルで価格付けはどのようにして行われるべきかを考えます．
ある株式を原資産とする満期日 $T=1$，行使価格 $K=125$ のヨーロピアンコールオプションについて考えます．二項モデルでは，時間は離散的なもの $(t=1,2,3,\cdots)$ として，各時点において株価は次の時点に移るときに 2 つの可能性のみを考えます．ここでは，原資産である株式の値動きは次のようになるとします．また，金利は $r=0.25$ とします．



この場合のペイオフは

$$\begin{cases} S(1) = 200 \Longrightarrow 75 \\ S(1) = 50 \Longrightarrow 0 \end{cases}$$

となります．このとき，次の投資戦略を考えます．

$t = 0$:

	現金	株式保有数
初期保有	30	0
銀行から 20 借り	+20	± 0
株式 0.5 単位買い	−50	+0.5
	0	0.5

$t = 1$:

$S(1) = 200$ のとき	現金	株式
$t = 0$ での保有	0	0.5
株式 0.5 単位売り	+100	−0.5
銀行に 25 返す	−25	±0
	75	0

$S(1) = 50$ のとき	現金	株式
$t = 0$ での保有	0	0.5
株式 0.5 単位売り	+25	−0.5
銀行に 25 返す	−25	±0
	0	0

この投資戦略のペイオフはヨーロピアンコールオプションと一致しています．このとき，この投資戦略はヨーロピアンコールオプションを複製すると言います．この複製にかかった費用は初期費用の 30 だけです．このとき，ヨーロピアンコールオプションの価格は 30 になることが次のような経済学的な議論によって確認できます．
実際，価格が 30 よりも高いとすると，ヨーロピアンコールオプションを売って，上と同じ投資戦略を，30 よりも低い場合は，ヨーロピアンコールオプションを買って，上と逆の投資戦略を取ると，それぞれ 30 との差額分の利益が確実に得られる．（これを裁定機会という．）このように複製費用と市場価格の間に乖離があるとすれば，市場の人たちはみな裁定機会を用いて利益をあげようとするので，需要と供給の関係によって，価格が 30 よりも高い場合は，価格が下がり，30 よりも低い場合は価格が上がる．また，均衡価格は 30 である．
このように経済学的に妥当な議論を加えることによって，適正な価格付けを以下のように定めることができます．[4]

デリバティブの市場価格は複製費用と一致する．また，この価格のことを裁定価格という．

以下，価格付けと言ったら，裁定価格を求めることを指すことにし，裁定価格は複製費用であるとします．

[4] 実際にはデリバティブがいつでも複製可能とは限りません．また，複製の方法もひと通りとは限りません．

§4. 確率論からの準備

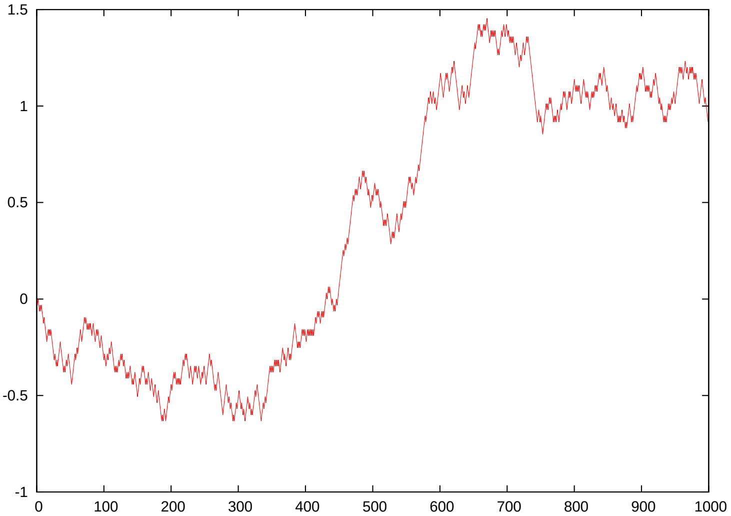
前節では二項モデルを用いて適正価格とはなにかを考えました．しかし，二項モデルはあまりにも現実世界との乖離が大きいです．したがって，これからは時間を連続（時間を実数にして考えるということです.）にとって考えることを考えます.[5)]

ブラウン運動

連続時間でランダムな動きを記述する最もスタンダードな方法は次にあげるブラウン運動を用いる方法です.
ブラウン運動 $W(t)$ とは，以下を満たすものです.[6)]

i) $W(0) = 0$.
ii) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ に対して，各増分 $W(t_{i+1}) - W(t)$ は互いに独立で平均 0, 分散 $t_{i+1} - t_i$ の正規分布に従う.

たとえば，ブラウン運動は次のような道を持ちます.



確率積分

確率積分とはブラウン運動に沿った積分のことです．つまり，被積分関数と微小時間におけるブラウン運動の差分をかけあわせたものを足しあげたものが確率積分です.[7)] これは数理ファイナンスで言うと，ある時刻から他の時刻までの利益を計算するときに使います．確率積分は次のように書かれます.

$$X = \int_0^T f(t)dW(t).$$

また，これは直感的な理解がしやすいように微分形で書かれることもあります.

---

5) もちろん，現実世界でも連続的に取引は行われているわけではありませんが，最近ではミリ秒単位で売買を繰り返す HFT(High Frequency Trade) が主流になっているようなので，近似として連続時間を考えることはそれほど的外れではありません.

6) 数学的に厳密な定義ではありません.

7) これはざっくりとした説明です．数学的に厳密に確率積分を構成するには確率論の知識が必要です.

$$dX = fdW.$$

伊藤の公式と伊藤過程

次は伊藤の公式と呼ばれているもので，通常の微積分で言うと合成関数の微分公式にあたります．

$$df(t, W(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt.$$

これは，形式的に左辺を Taylor 展開することによって，次のような規則であると考えることもできます．

$$\boxed{dWdW = dt,\ dtdW = dWdt = 0,\ dtdt = 0.}$$

また，次のような形を持つものを伊藤過程と言います．

$$dX(t) = \Delta(t)dW(t) + \theta(t)dt.$$

伊藤過程についての積分を次のように定義します．

$$\int_0^T \Gamma(t)dX(t) = \int_0^T \Gamma(t)\Delta(t)dW(t) + \int_0^T \Gamma(t)\theta(t)dt.$$

伊藤過程についても伊藤の公式が成り立ちます．

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dtdt + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}dtdX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dXdX \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta dW + \frac{\partial f}{\partial x}\theta dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta^2 dt. \end{aligned}$$

例 幾何ブラウン運動

定数 α と σ に対して，

$$X(t) = \int_0^t \sigma dW(s) + \int_0^t \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds$$

とおきます．また，定数 $S(0)$ と $f(x) = S(0)\exp x$ に対して

$$S(t) = f(X(t))$$

を幾何ブラウン運動と言います．実は，幾何ブラウン運動は 1 期間二項モデルを多期間にして，極限を取ると現れます．

伊藤の公式によって次が成り立ちます．

$$\begin{aligned} dS(t) &= df(X(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dXdX \\ &= S(t)dX(t) + \frac{1}{2}S(t)\sigma^2 dt \\ &= \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \end{aligned}$$

§5.Black-Scholes モデル

それではファイナンスの話題に戻りましょう．ここでは最もスタンダードな Black-Scholes モデルを考えます．このモデルは，1 種類の株式と 1 種類の銀行預金が存在する市場について分析します．$S(t)$ を時刻 t での株価とします．ここでは，$S(t)$ は幾何ブラウン運動に従うものとします．

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

また，金利は $r > 0$ とします．次に，$X(t)$ を時刻 t でのポートフォリオの価値とします．すると，$X(t)$ は次の確率微分方程式を満たします．

$$dX(t) = \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt$$

ただし，$\Delta(t)$ は時刻 t での株式保有数とします．この式は，右辺の第 1 項が株式への投資額，第 2 項が銀行預金の額の微小時間における差分を表しています．$dS(t)$ に幾何ブラウン運動を代入して計算を進めると，

$$dX(t) = rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t)$$

となります．ここで，$c(t,x)$ を時刻 t，株価 x でのヨーロピアンコールオプションの価格とします．すると，伊藤の公式より，

$$\begin{aligned} dc(t,S(t)) &= \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial c}{\partial x}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dSdS \\ &= \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial c}{\partial x}\left(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dt \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \alpha S(t)\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial c}{\partial x}dW \end{aligned}$$

となります．したがって，ポートフォリオ $X(t)$ でヨーロピアンコールオプションを複製するためには，

$$X(0) = c(0,S(0)),\ dX(t) = dc(t,S(t))$$

となれば良いので，dW の項を比較して

$$\Delta(t) = \frac{\partial c}{\partial x}(t,S(t)),$$

dt の項を比較して，

$$\begin{aligned} rX(t) &= rc(t,S(t)) \\ &= \frac{\partial c}{\partial t}(t,S(t)) + rS(t)\frac{\partial c}{\partial x}(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,S(t)) \end{aligned}$$

となります．最初の式は，株式保有数は右辺のようにすればよいということを示しています．これはデルタヘッジと呼ばれます．また，第 2 式から

$$rc(t,x) = \frac{\partial c}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial c}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x)$$

と適当な境界条件を満たす $c(t,x)$ を見つければ良いことが分かります．この偏微分方程式を Black-Scholes 方程式と言います．

§6.BS 方程式を解く

では，最後に Black-Scholes 方程式を解きましょう．まずは，$y = \log x$ と変数変換します．すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y},\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{aligned}$$

となります．また，$\tau = T - t$ とすると，

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \tau}$$

となります．これらの変数変換によって Black-Scholes 方程式は次のように変形できます．

$$-\frac{\partial c}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - rc = 0.$$

次に，

$$\begin{cases}\alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\\ \beta = -\frac{1}{8\sigma^2}(\sigma^2 + 2r)^2\end{cases}$$

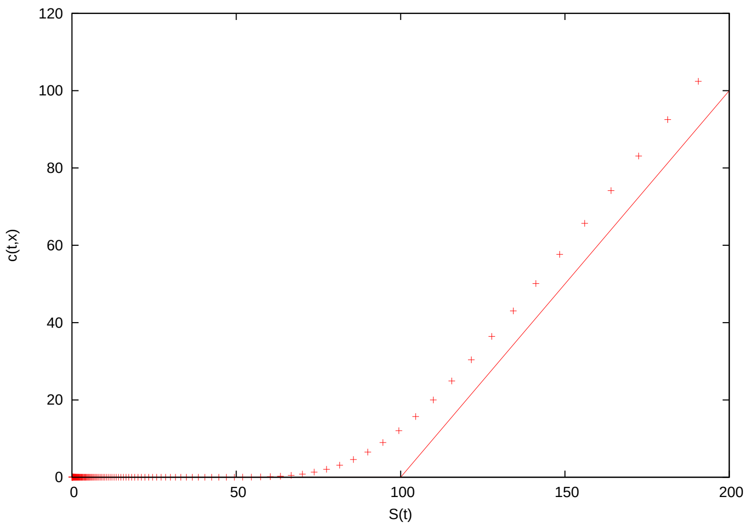
に対して，$c = \exp(\alpha y + \beta\tau)U$ とすると，

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

となります．ここで，τ を改めて $\frac{1}{2}\tau\sigma^2$ とすると，

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

となります．これは，熱伝導を記述する熱方程式というものになっています．このように変形して数値計算すると，$c(t, x)$ は次のような形になることが分かります．[8] ただし，実線はペイオフを表し，点が数値計算により得られたヨーロピアンコールオプションの価格を示しています．



[8] Black-Scholes 方程式は解析解を持ちますが，長くなるのでここでは省略します．

参考文献

[1] Steven E. Shreve,“Stochastic Caluculus for Finance II Continuous-Time Models” ,Springer
[2] 関根順,“数理ファイナンス”, 培風館

あなたにも（間違いが）分かるフェルマーの定理不完全証明（笠

§0. はじめに

厳密な論証のみを主張の根拠とする数学の分野においては，「トンデモ」というのは存在しないと思われがちだが，実はそうでは無い．

長年数学雑誌の編集に携わってきた亀井哲治郎氏によると，「フェルマーの定理」や「四色問題」といった有名な数学の問題を「解いた」という投書が後を絶たないのだという．当然それらの「証明」が数学雑誌に掲載されることはないため，彼らがいかなる誤りを犯していたのかは知るよしもない．しかし中には，そうした「証明」を出版にまでこぎつけたアマチュア数学者もいる．

この記事ではそうした例の一つを紹介する．

あるとき私は，東大駒場図書館の数学書の棚に，数論の教科書に交じって「あなたも解けるフェルマーの定理完全証明」という本が置かれているのを見つけた．

フェルマーの定理とは，$n \geq 3$ のとき方程式

$$a^n + b^n = c^n$$

は自然数解を持たないという主張である．

17 世紀の数学者フェルマーが本の余白にこの式を書き込んで以後，三百年以上もの間，多くの数学者が証明に取り組み，ついに 1995 年にアンドリュー・ワイルズによって完全な証明がなされた．（証明までの経緯はサイモン・シンのドキュメンタリー「フェルマーの最終定理」に詳しく書かれている．）

ワイルズによる証明は極めて専門的かつ長大であるので，「あなたにも解ける」とはどういうことかと中身を覗いてみたところ，案の定「アレな本」であった．こんな本を開架においておく駒場図書館もどうかと思ったが，これはきっと「情報の正しさを自分で判断するリテラシーを身につけてほしい」という司書さんからのメッセージだと判断し，その「証明」の検証を行うことにした．

§1. 証明は驚くほどたやすかった

小野田襄二著「あなたにも解けるフェルマーの定理完全証明」（めいけい出版　2003 年）は 300 ページほどの本だが，６部構成になっており，定理の証明自体は最初の 20 ページほどを占める第１部「フェルマーの定理の証明 I」で済んでいる．残りの第２部〜第６部はその解説や別証明に充てられている．第１部の扉には（証明は驚くほどたやすかった）と書かれており，なるほど人類を三百年以上も悩ましてきた難問がなんの前準備もなく 20 ページで解けるならば驚くべきことだろう．

第１部の扉の文言をさらに引用すると，

> ビックリ玉手箱の蓋を開けたら【証明の王子】がささやいた
>
> 2003 年 4 月 17 日のことでした．【証明の王子様】がささやいてくれたのです．それはそれは，驚くほど簡単で，喉から手が出るほど欲していたものでした．【証明の王子様】のしめくくりのことばを紹介します．

【人間の英知】のために人類に贈り物を捧げよう．

ユーモアのつもりなのかもしれないが，完全に危ない人である．**玉手箱の蓋を開けてはいけない．**

それでは小野田氏による証明を見ていこう．なお，この本の文章はところどころわかりにくいところがあり，わたしが読み取れた範囲で論理を組み立てなおしている部分があることをお断りしておく．また，変数名や式の括弧の付け方は小野田氏のオリジナルに従った．

まずフェルマーの方程式

$$a^n + b^n = c^n$$

の両辺を a, b, c の最大公約数で割り，a, b, c はそれぞれ互いに素としてよいことを示している．ここまでは普通である．つぎに「$n = 3$ の証明によって，$n \geq 3$ のすべてを証明してくれる」と主張して $n = 3$ の場合の証明に移っている．

$n = 3$ のときの証明　矛盾とその解消

小野田氏はまず，

$$b^3 = c^3 - a^3 = P$$

とおき，この式を①としている．さらに

$$c^3 - a^3 = b \cdot b^2$$

と変形し，この式を②としている．さっきとほとんど変わらない式なのでわざわざ②とおく必要もない気がするが，まあいいだろう．

②の左辺を因数分解して，

$$(c - a)(c^2 + ca + a^2) = b \cdot b^2$$

とし，さらに $(c - a)^2 \neq c^2 + ca + a^2$ であることから，

$$(c - a) \neq b$$

$$(c^2 + ca + c^2) \neq b^2$$

を導いている．ここまではよい．

ところがこの式が書いてある部分の小見出しは「**★　①と②は矛盾を引き起こす**」である．べつに $(c - a)(c^2 + ca + a^2) = b \cdot b^2$ と上の式とは矛盾していない．これはどういうことなのだろうか？

さらにこの 3 ページ後，「**★　①と②との矛盾をクリアーする**」という謎の小見出しが登場する．「矛盾をクリアー」するとはどういうことなのだろう．

「矛盾をクリアーする」という節の内容を読んでみると，

> 最初の因数分解
>
> $$(c^3 - a^3) = b \cdot b^2$$
> $$(c^3 - a^3) = (c - a)(c^2 + ca + a^2)$$
>
> が引き起こした矛盾は，素数の要素が二つ以上あることを念頭に入れていなかったからである．つまり，素数の要素が一つのときは，互いに素な二つの因数，$(c-a)$ と (c^2+ca+a^2) に b^3 を分けられない，あまりに当たり前のことを語っていただけのことである．

要するに，「**b が素数の時しか考えてなかったから矛盾したような気がしたけど，よく考えたらそんなことなかったぜテヘペロ**」ということらしい．しかし読者としては，小野田氏が b が素数の場合しか考えてなかったなんて分からないし，こんな初歩的な混乱に読者をつき合わせる必要がどこにあるのだろう．

さらに言うと，$(c-a) \neq b$ という式は今後使わない．なんのための議論だったのか．

$n=3$ のときの証明　つづき

気を取り直して先に進もう．a, c は互いに素であることから，$(c-a)$ と (c^2+ca+c^2) の最大公約数は 1 か 3 である．$c^2+ca+a^2 = (c-a)^2+3ca$ なのでこれは正しい．このことから小野田氏は

- $(c-a)$ と (c^2+ca+a^2) が互いに素なとき，

$$\begin{aligned}(c-a) &= (b_1)^3\\ (c^2+ca+a^2) &= (b_2)^3\\ b &= b_1b_2\end{aligned}$$

- $(c-a)$ と (c^2+ca+a^2) の最大公約数が 3 のとき，

$$\begin{aligned}(c-a) &= 3(b_1)^3\\ (c^2+ca+a^2) &= 3^{3q-1}(b_2)^3\\ b &= 3^qb_1b_2\end{aligned}$$

  または，

$$\begin{aligned}(c-a) &= 3^{3q-1}(b_1)^3\\ (c^2+ca+a^2) &= 3(b_2)^3\\ b &= 3^qb_1b_2\end{aligned}$$

と場合分けする．二番目の場合分けは実際には不要だが，ここまではいい．問題はそのあとの節である．

小野田氏は，第一の場合の二番目の式

$$(c^2+ca+a^2) = (b_2)^3$$

の左辺を因数分解して，

$$(c^2+ca+a^2) = (c-\sqrt{ca}+a)(c+\sqrt{ca}+a)$$

とする．ca が平方数でなければ，右辺の因数は整数にはならない．ここで小野田氏は奇妙な主張をする．

> $\sqrt{ca}$ が整数でなければ (無理数ならば)，(c^2+ac+a^2) は，$1\cdot(c^2+ca+a^2)$ を除いて，整数の積で表せないことを意味する．

意味するとは思えない．小野田氏の主張によれば，a, c がいくつかの条件を満たしさえすれば (c^2+ca+a^2) は必ず素数になることになるが，そんなに簡単に素数が作れたら大変である．実際，

$a = 3, c = 5$ とでも置いてみれば $c^2 + ca + a^2 = 49 = 7^2$ となるが，$ca = 15$ は平方数ではない．どうして意味すると思ったのかよくわからない．

この主張は完全に誤りであるが，これを認めてしまえば証明はすぐそこである．

$(b_2)^3$ は素数ではないので，ca は平方数で，a, c は互いに素なので $a = A^2, c = C^2$ と書ける．すると

$$(C^2 + CA + A^2)(C^2 - CA + A^2) = (b_2)^3$$

ここで A と C は互いに素であることから，$(C^2 + CA + A^2)$ と $(C^2 - CA + A^2)$ も互いに素であることが導かれる．このことから，

$$\begin{aligned} (C^2 + CA + B^2) &= (B_1)^3 \\ (C^2 - CA + B^2) &= (B_2)^3 \end{aligned}$$

と書ける．

ここで，

$$\begin{aligned} (C^2 + CA + B^2) &= (C - \sqrt{CA} + A)(C + \sqrt{CA} + A) \\ (C^2 - CA + B^2) &= (C - \sqrt{3CA} + A)(C + \sqrt{3CA} + A) \end{aligned}$$

を用いれば，先ほどと同様の (破綻した) 論法により CA と $3CA$ はともに平方数となるが，これは $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する．証明終了．

先ほどの場合分けの第二，第三の場合も本質的には同じである．

証明の問題点

上記の証明の問題点は，そもそも論理が破綻しているというのもあるのだが，$(c - a) = (b_1)^3$ という条件を使わず，$(c^2 + ca + a^2) = (b_2)^3$ という式のみから矛盾を導こうとしていることである．小野田氏は「**★** $(c^2 + ca + a^2) = (b_2)^3$ **の条件吟味が全てだ**」と小見出しで宣言しているが，これはまずい．なぜなら $(c^2 + ca + a^2) = (b_2)^3$ には

$$\begin{aligned} 1^2 + 1 \cdot 18 + 18^2 &= 7^3 \\ 17^2 + 17 \cdot 36 + 36^2 &= 13^3 \\ 17^2 + 17 \cdot 73 + 73^2 &= 19^3 \end{aligned}$$

などの解があるし，$(c^2 + ca + a^2) = 3(b_2)^3$ のほうも，

$$\begin{aligned} 17^2 + 17 \cdot 20 + 20^2 &= 3 \cdot 7^3 \\ 19^2 + 19 \cdot 70 + 70^2 &= 3 \cdot 13^3 \end{aligned}$$

などの解がある．

したがって第一の条件を無視し第二の条件に的を絞った小野田氏の方針は，失敗が宿命づけられていたといえる．

$n \geq 3$ のときの証明

$n=3$ のときの証明ですでに破綻しているが，それ以上に気になるのは n が一般の場合に拡張できないことである．「$n=3$ の証明によって，$n \geq 3$ のすべてを証明してくれる」とはなんだったのか．

$n \geq 3$ のときの証明の章は次のように始まっている．

> $$b^n = c^n - a^n$$
>
> において，b^n の約数 $b^{n-1}, b^{n-2}, \ldots b^2$ に対応する $(c^n - a^n)$ の約数が存在するためには
>
> $$c^n - a^n = (c-a)(c+a)^{n-1}$$
>
> で表されなければならない．

なぜだ． どうしてそうなるのかわたしには全く分からない．

$c^n - a^n = (c-a)(c+a)^{n-1}$ が成り立つのは $n=2$ のときのみだ，だから $n \geq 3$ のときは整数解は存在しない，証明終了，となっているが，証明になっていないだけでなく，$n=3$ のときの証明ともつながっていない．

実は「$n=3$ のときの証明」の章の最後で小野田氏は，$(c^2+ca+a^2) = (b_2)^3$ の左辺が $(c^2+2ca+c^2)$ か $(c^2-2ca+a^2)$ だったら，$(c+a)^2$ や $(c-a)^2$ と因数分解できるので無数の整数解を簡単に見つけられることを指摘している．それはそうなのだが，しかしそのことがこの式にどうつながるのだろうか？　なんにせよ飛躍が多すぎて証明になっていない．

第二の証明

この本の第四部では「フェルマーの定理の証明 II」と題されており，第 1 部とは別の「証明」が書かれている．この証明は「第 1 部の証明を知ってしまった今となっては，まことに色あせたもの」らしく，なるほど第 1 部より長く，さらに読みづらい．

しかしどうも第 1 部と同種の誤りを犯しているようである．まず，$(c^2+ca+a^2)^{\frac{1}{3}}$ が整数になりえないことを示す，という間違った方針をとっている．

$$L = (c^2+ca+a^2)^{\frac{1}{3}}$$

とおき，$M = c+a$ とおいてこれを

$$ca = M^2 - L^3$$

と変形する．ここまではいい，しかしこのあと，$M^2 - L^3$ の「因数分解」として

$$M^2 - L^3 = (M^{\frac{2}{3}} - L)(M^{\frac{4}{3}} + M^{\frac{2}{3}}L + L^2)$$

および

$$M^2 - L^3 = (M - L^{\frac{3}{2}})(M + L^{\frac{3}{2}})$$

なる計算を行い，左辺が合成数なので，右辺の因数が整数になると考えてしまっているようである．もちろん実際にはこれらが整数になるとは限らない．

まとめ

どうして小野田氏はこのような奇妙な「証明」を行ってしまったのだろう．

どうも小野田氏は，式として因数分解できるということと，その式に値を入れた結果が因数分解できるということを混同しているように思える．たしかに式として因数分解できれば値を入れても (因数の値が ± 1 にならなければ) 因数分解されることになるが，逆は成り立たない．たとえば $f(X) = X$ という多項式はもちろん既約だが，$X = 6$ を代入すれば $f(6) = 6$ となり素数にはならない．

そのうえで，中途半端に無理式を考慮している．$(c^2 + ca + a^2)$ を無理式の積で表すなら，

$$(c^2 + ca + a^2) = (c + \sqrt{3ca + 3a^2} + 2a)(c - \sqrt{3ca + 3a^2} + 2a)$$

でもよいはずなのだが，なぜ上記の $\sqrt{ca}$ が出てくる式だけ考えるのかよくわからない．

§2 数学王国

証明の検討はこれくらいにして，この本のほかの部分を拾い読みしてみよう．

まず本を開くと，目次より先に「社主激白」としてめいけい出版社長の言葉が載っている．「激白」とあるので出版の裏事情の暴露でもするのかと思ったら，小野田氏に対する狂わんばかりの賞賛の言葉が並んでいる．特に印象的なのが次の文句だ．

> いま，社主が夢みることは，小野田氏を核に集う数学大好き人間が打ち立てる数学王国の実現である．危機の日本を救うのは数学立国の建設を措いてない．小野田氏の魅惑的なプランはもう次々と仕掛けられている．日本の未来は明るく輝いてきた．ひとなつこい小野田氏の輝く笑顔を見ると，だれでもこの人とともに，数学王国の建設に着手したい明るい気持ちになってくる．

どこまで本気なのかよくわからない文章だが，なんだか「日本シャンバラ化計画」みたいで恐ろしい．

第５部「証明への道のり」には，小野田氏の「証明」完成までの経緯が書かれてる．それによると，「コンピュータのハードを開発している友人」に「小野田さん，フェルマーの定理を証明したら」と「挑発」されたのが発端らしい．**罪作りな友人である**．そのあとの記述．

> 友人の挑発に乗り，証明のイメージをつかむことはできたのだが，高校１年で数学を捨て，大学入学と同時に数学と完全に縁を切った私である．

やっぱりな，という感じである．小野田氏の論証文の妙な読みにくさは，数学の高等教育を受けていないためなのだろう．

そして小野田は「証明」を完成させると，「読売年鑑の人名事典を調べ，およそ２０人に近い数学者に原稿を送った」とのこと．さらにどうも証明を改訂するたびに数人の数学者に原稿を送っていたらしい．そのうち織田孝幸教授と浪川幸彦教授からは否定的な返事をもらい，織田教授は親切にも Paul Ribenboim 著『13 Lectures on Fermat's Last Theorem』から抜粋をコピーして送ってくださったらしい．しかし小野田氏は英語が読めず，それどころか $A^3 + B^3 + C^3 = 0$ という式だけを見て「**何というセンスの無さ**」というコメントをしてる有様である．

また著者の友人である田吉隆夫教授とは膨大な量の手紙のやり取りをしているらしい．この本にはそのうちのいくつかが載っており，田吉教授はきわめて誠実な態度で著者の「証明」の不明瞭

な点を指摘していることがわかる．**持つべきものは友達である.**

§3 おまけ　そのほかの小野田襄二氏の本

小野田襄二氏にはほかにもさまざまな著作があるらしいので，おまけとして最後に紹介しておく.

- 自然数解が存在する全構造の解明　(社会評論社)
  今回紹介した本の続編らしい．**タイトルが壮大すぎる.**
- 相対性理論の誤りを完全解明する　(小野田書店)
  理系トンデモ本の王道 (？) の相対性理論批判であり，『完全証明』のカバーに広告が載っている．面白いのは次の指摘だ.
  動物の目は網膜に入った光に反応し，空間を伝播している光を見ているのではない.
  ゆえに，光の相対速度は観測できない.
  何を言っているのかよくわからないが，いままでの光速度の測定は人間が肉眼で行ってきたとでも思っているのだろうか。
- やりなおし基礎数学　(ちくま新書)
  小中学生向けの数学の本らしい．注目すべきはこれがちくま新書から出ていることである．**ブランド名にだまされてはいけない.**
- 夫婦耐性実験　(小野田書店)
  小説である.「父親・夫として破綻したゲオが，ノイローゼの駿台生を引きとることによって巻き起こす家族騒動物語」らしい．タイトルが面白い．**ちょっとよみたい.**

§4 まとめ

この手の本を読むことはよい暇つぶしになるが，そんなことをする暇があったらまともな数学書を読みましょう.

ゼータ関数（田村）

§0. はじめに

ますらぼには数学が好きな高校生も来るということで, なるべく高校生にもわかるよう書いてみた. 正則性など細かい条件をごまかしているが, 多項式や e^x などの高校で出てきた関数の組み合わせなら大体成り立つと思っておけばいい. 興味のある人は複素解析の本を読んでみるといいと思う.
さて, タイトルのゼータ関数とは

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots$$

という関数で, リーマンの論文「与えられた数よりも小さな素数の個数について」[?] にも現れる重要な関数である.
具体的な値を挙げておくと次の通りである.

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \\ \zeta(6) &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}\end{aligned}$$

偶数ゼータに対しては, なぜ π が出てくるのかは不思議だが, 上の様な値になることが知られている.
では次の式を見てどう思うだろうか.

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2} \\ \zeta(-1) &= 1 + 2 + \cdots = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

中辺は明らかに発散する無限和である. それが有限の値になるというのは理解し難い. 少しずつその謎を紐解いていこうと思う.

§1. 予備知識

初等関数の複素数での値

オイラーの公式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ を用いると

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

となる.
また, 絶対値が $r > 0$, 偏角が θ の複素数は $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ となるので, z の対数は

$$\log z = \log r + i\theta$$

となる. ただし, 偏角は 2π の整数倍だけ異なることができるので, log は一般には多価関数となる. そこで定義域を 0 と負の実数を除く領域に制限し, 偏角を $-\pi < \theta < \pi$ とすることで一価に定まる. これを対数関数の主枝と呼ぶ.

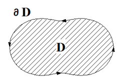
複素数平面上の積分

$f(z)$ が連続, $\gamma(t)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ が区分的 C^1 であれば, $f(z)$ の γ に沿った積分は

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

となる.

D を複素数平面上の区分的 C^1 の境界をもつ領域とし, ∂D を D の境界で D を左手に見て進む向きをもつ閉曲線とする. このとき次の公式が成り立つ.



$s \in \mathbb{Z}$ とする. $a \in D$ のとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{dz}{(z-a)^s} = \begin{cases} 1 & s = 1 \\ 0 & s \neq 1 \end{cases}$$

正則関数 $f(z)$ に対し $\lim_{z\to a} f(z)$ が発散し, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ が 0 以外の値に収束するとき, $z = a$ を $f(z)$ の m 位の極という.

$f(z)$ が D 内に 1 位の極 $z = a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ をもち, $\lim_{z\to a_n}(z-a_n)f(z) = b_n$ とすると次が成り立つ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_n b_n$$

§2.$\zeta(s)$ の解析接続

リーマンは $\zeta(s)$ について,1 以外の全ての複素数 s について成り立つ式を求めた.

それは $Re(s) > 1$ をはみ出した領域での値を求めることであり

$$\Pi(s-1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

から始まる. この関数は s が正の整数の時 $(s-1)!$ に等しい関数である.

x を nx に置き換えると

$$\begin{aligned}\Pi(s-1) &= \int_0^\infty e^{-nx}(nx)^{s-1}ndx \\ &= n^s\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx \\ \frac{\Pi(s-1)}{n^s} &= \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx\end{aligned}$$

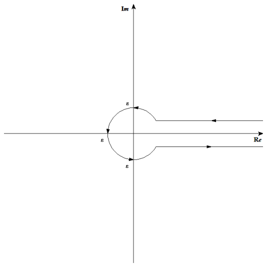
両辺の和をとり

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1} \tag{1}$$

が求まる.

ここで以下の積分を考える.

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1}$$



積分経路は, 実軸よりわずかに上を通って ∞ から 0 へと向かい, 0 の周りを回ったのち, 実軸のわずかに下を通って 0 から ∞ へと向かう.
ただし, $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$ とし, $\log z$ は主枝を選ぶ.

この積分を

$$\int_{\infty}^{\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1} + \int_{|z|=\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1} \tag{2}$$

と分割すると, 中央の項は $Re(s) > 1$ において $\epsilon \to 0$ のとき 0 に近づく.
なぜなら, $|z| = \epsilon$ のとき $|e^z - 1| > 1 - e^{-\epsilon} > 0$ より $\frac{1}{|e^z-1|} < \frac{1}{1-e^{-\epsilon}}$ であるから

$$\left| \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right| \leq \frac{\epsilon^{Re(s)-1}}{1 - e^{-\epsilon}}$$

であり, $\epsilon \to 0$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1} \right| &\leq 2\pi\epsilon \frac{\epsilon^{Re(s)-1}}{1 - e^{-\epsilon}} \\ &= 2\pi \frac{\epsilon}{1 - e^{-\epsilon}} \epsilon^{Re(s)-1} \to 0 \end{aligned}$$

となるからである.
残った 2 つの項をまとめると

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\infty}^{\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1} \right) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\infty}^{\epsilon} \frac{e^{(s-1)(\log z - i\pi)}dz}{e^z - 1} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{(s-1)(\log z + i\pi)}dz}{e^z - 1} \right) \\ &= (e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}) \int_0^{\infty} \frac{z^{s-1}dz}{e^z - 1} \\ &= -2i \sin \pi s \int_0^{\infty} \frac{z^{s-1}dz}{e^z - 1} \end{aligned}$$

これを式 (1) と合わせれば次を得る.

$$-2i \sin \pi s \, \Pi(s-1)\zeta(s) = \int_{\infty}^{\infty} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1}$$

右辺の積分は全ての s に対して収束し, 正則である.

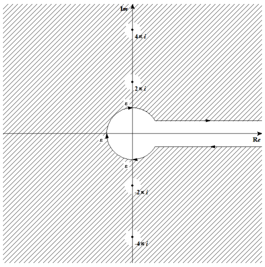
$$\Pi(s-1)\Pi(-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

を用いれば

$$\zeta(s) = -\frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \int_{\infty}^{\infty} \frac{(-z)^{s-1}dz}{e^z - 1} \tag{3}$$

となる. この式は複素平面上における $s = 1$ を除いて解析的な関数 $\zeta(s)$ を定義し, $Re(s) > 1$ において $\sum n^{-s}$ と一致する.

§3. 関数等式



式 (3) において, 積分経路を逆向きにとることで 0 以外の 1 位の極 $z = 2n\pi i \, (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を含む領域に沿った積分とすることができる. 値は -1 倍になる事に注意して

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 2n\pi i} (z - 2n\pi i) \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} &= \lim_{z \to 2n\pi i} \frac{z - 2n\pi i}{e^z - e^{2n\pi i}} (-z)^{s-1} \\ &= (-2n\pi i)^{s-1} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \Pi(-s) \sum_{n=1}^{\infty} ((-2n\pi i)^{s-1} + (2n\pi i)^{s-1}) \\ &= \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} \left(i^{s-1} + (-i)^{s-1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \\ &= \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(1-s) \end{aligned} \tag{4}$$

が得られる.

§4.$\zeta(s)$ の値

さて, $\zeta(s)$ の値をいくつか求めてみよう.
$s = -n \, (n \in \mathbb{N})$ のとき, 式 (3) より

$$\zeta(-n) = -\frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int_{\infty}^{\infty} \frac{(-z)^{-n-1} dz}{e^z - 1}$$

式 (2) と同様に分割すると, 今度は第 1 項と第 3 項が打ち消し合い第 2 項のみが残るので

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= -\frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{(-z)^{-n-1} dz}{e^z - 1} \\ &= (-1)^n \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{z}{e^z - 1} z^{-n-2} dz \\ &= (-1)^n \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m z^m}{m!} \right) z^{-n-2} dz \\ &= (-1)^n \Pi(n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} z^{m-n-2} dz \\ &= (-1)^n n! \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \\ &= (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

また, n を $2n-1$ とすれば

$$\zeta(-(2n-1)) = (-1)^{2n-1} \frac{B_{2n}}{2n}$$

となるが, 関数等式 (4) を用いると

$$\zeta(-(2n-1)) = \Pi(2n-1)(2\pi)^{-2n} 2\sin\left(\frac{-(2n-1)\pi}{2}\right)\zeta(2n)$$

である. 従って

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}$$

を得る.
これらより最初に述べた式

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$
$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

等が求まるのである.

§5. 解析接続の意味

ゼータ関数を解析接続することで通常の和の意味では発散してしまう値を求めたわけでだが, これはどういう意味をもつのであろうか.
実は, 例えば $Res > -3$ なるすべての複素数に対して

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N} n^{-s} - \left(\frac{1}{1-s}N^{1-s} + \frac{1}{2}N^{-s} - \frac{s}{12}N^{-s-1}\right)\right\}$$

となっている.
オイラーマクローリンの公式によれば

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-s} = \frac{1}{1-s}N^{1-s} + \frac{1}{2}N^{-s} - \frac{s}{12}N^{-s-1} + o(N^{-s-2})$$

であるから, これと比較すればゼータ関数の解析接続は $\sum_{n=1}^{N} n^{-s}$ の発散する部分を取り除いた和を求める, いわゆる繰り込みを行っているのである. 従って最初に述べた

$$\zeta(0) = 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}$$
$$\zeta(-1) = 1 + 2 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

は正確ではなく, あくまで $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を解析接続した関数 $\zeta(s)$ が $\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ であると解釈する方が良いだろう.

参考文献

[Harold] ハロルド, M, E.　鈴木治郎訳（2012）『明解　ゼータ関数とリーマン予想』講談社
[Kurokawa] 黒川信重（2014）『ゼータの冒険と進化』現代数学社
[Riemann] Riemann, B. (1859). Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859*, 671-680.

アーベル圏入門 (鯖白 (奴隷))

§1 圏について

定義 1. 圏 $\mathcal{C}$ は,

- **対象** (object) のクラス $Ob(\mathcal{C})$. 誤解の恐れがない時は $Ob(\mathcal{C})$ を単に $\mathcal{C}$ と書く. X が $\mathcal{C}$ の対象であるとき, $X \in Ob(\mathcal{C})$(または $X \in \mathcal{C}$) と書く.
- 任意の対象 X, Y に対し **X から Y への射** (arrow, morphism) の集合が存在する. $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ で表す. $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ のとき, X は f の**ドメイン**, Y は f の**コドメイン**, と呼ぶ. この f について, $f : X \to Y$, または $X \xrightarrow{f} Y$ と書く.
- 任意の対象 X, Y, Z に対し, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ から $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ への写像が存在し, **合成**と呼ばれる. (f, g) の像は $g \circ f$ または gf で表し, f と g の合成と呼ぶ.

以上から構成され, 次の 2 つの条件を満たす.

- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ のとき, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (結合律)
- 任意の対象 X に対し**恒等射** (identity morphism) $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ が存在し, 任意の $f : X \to Y, g : Z \to X$ に対し

$$f \circ id_X = f, id_X \circ g = g,$$

  が成り立つ.

■

例 2. 集合の圏 $Sets$. 対象は任意の集合であり, $X, Y \in Sets$ に対し $Hom_{Sets}(X, Y)$ は X から Y への写像全体, 合成は通常の写像の合成である.

■

例 3. アーベル群の圏 Ab. 対象は任意のアーベル群であり, $X, Y \in Ab$ に対し $Hom_{Ab}(X, Y)$ は X から Y への準同型写像全体, 合成は通常の写像の合成である.

■

例 4. 位相空間の圏 Top. 対象は任意の位相空間であり, $X, Y \in Ab$ に対し $Hom_{Top}(X, Y)$ は X から Y への連続写像全体, 合成は通常の写像の合成である.

■

例 5. 任意の半順序集合 C は以下のようにすると圏 (C) とみなせる.

$Ob(\mathcal{C}) = C$ とし, $x, y \in C$ に対し $x \le y$ のとき $Hom_{\mathcal{C}}$ は一元集合, $x \not\le y$ のときは $Hom_{\mathcal{C}} = \emptyset$ とする. このとき合成は推移律により定義でき, 恒等射は反射律により存在する.

逆に, 圏 $\mathcal{C}$, $Ob(\mathcal{C})$ が集合であり, $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が 1 元以上持たないならば, $Ob(\mathcal{C})$ は $X \le Y \overset{def.}{\Leftrightarrow} Hom_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ と定めることにより半順序集合となる.

■

例 6. 任意のモノイド M は，1 つのみの対象 e を持つ圏 $\mathcal{C}$ と見ることができる．実際 $Ob(\mathcal{C}) = e, Hom_{\mathcal{C}}(e,e) = M$ とすると，$\mathcal{C}$ は二項演算を合成として圏をなす．逆に 1 つのみの対象を持つ圏 $\mathcal{C}$ について，$\mathcal{C} = \{e\}$ とすると $Hom_{\mathcal{C}}(e,e)$ は合成を二項演算としてモノイドになる．
特に群 G は上のようにしてモノイドとみなせる．

■

定義 7. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を圏とする．$\mathcal{C}'$ が $\mathcal{C}$ の**部分圏** (subcategory) であるとは，

- $Ob(\mathcal{C}') \subset Ob(\mathcal{C})$
- 任意の $X, Y \in \mathcal{C}'$ に対し $Hom(\mathcal{C}') \subset Hom(\mathcal{C})$
- 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{C}', f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対し，$g \circ f$ が $\mathcal{C}'$ と $\mathcal{C}$ で一致する．
- 任意の $X \in \mathcal{C}'$ に対し X の恒等射が $\mathcal{C}'$ と $\mathcal{C}$ で一致する．

をみたすことである．
さらに $Hom(\mathcal{C}') = Hom(\mathcal{C})$ を満たすとき，$\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ の**充満部分圏** (full subcategory) という．

■

大雑把に，圏とは「ある構造を持つモノ（対象）とその間の写像など（射）を全体で考えよう」というものです．対象と射は，集合と写像のようなものですが，対象に関しては一般の圏では何らかの集合とは限らず，ただのラベルに過ぎません．射に関しても同じで，射は一般には集合から集合への写像とは限らず，ドメインとコドメインが指定されているだけです．ここで，一般の圏において写像の全射，単射に相当する概念を定義しよう．

定義 8. $\mathcal{C}$ を圏とする．
$m : Y \to Z$ が **mono** とは任意の $f, g : X \to Y$ に対し，

$$m \circ f = m \circ g \;\Rightarrow\; f = g$$

が成り立つことである．
$e : X \to Y$ が **epi** とは任意の $f, g : Y \to Z$ に対し，

$$f \circ e = g \circ e \;\Rightarrow\; f = g$$

が成り立つことである．

■

命題 9. $f : X \to Y, g : Y \to Z$ において,$g \circ f$ が mono ならば f は mono，$g \circ f$ が epi ならば f は epi である．

(証明) 略

■

$Sets$ では f が単射であることと mono であること，全射であることと epi であることは一致する．

定義 10. $f : X \to Y, g : Y \to X$ を圏 $\mathcal{C}$ の射とする．$g \circ f = id_X, f \circ g = id_Y$ が成り立つ時，f, g

を**同型射** (isomorphism) という．このとき，X と Y は**同型** (isomorphic) であるといい，$X \sim Y$ で表す．

■

$Sets$ では mono かつ epi なら同型射ですが，一般には成り立たない．例えば Top で，$X = \{0,1\}$ に離散位相，密着位相を入れたものをそれぞれ $(X, \mathscr{O}_0), (X, \mathscr{O}_1)$ とする．$id_X : (X, \mathscr{O}_0) \to (X, \mathscr{O}_1)$ は mono かつ epi だが，その逆写像は連続ではない．

定義 11. $\mathcal{C}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ の**始対象** (initial object) とは，対象 $I \in \mathcal{C}$ であり，任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対し I から X へ唯一の射が存在するものである．$\mathcal{C}$ の**終対象** (terminal object) とは，対象 $T \in \mathcal{C}$ であり，任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対し X から T へ唯一の射が存在するものである．始対象かつ終対象である対象を**ゼロ対象**と言う．

■

始対象，終対象，ゼロ対象は存在すれば同型を除いて一意である．
$Sets$ において，空集合 $\emptyset$ は始対象で，任意の一元集合は終対象となる．$Sets$ にはゼロ対象は存在しない．Ab において，自明な群 $0 = \{e\}$ は始対象かつ終対象，すなわちゼロ対象となる．

定義 12. $\mathcal{C}$ を圏，$A, B \in \mathcal{C}$ とする．A, B の**直積** (product) とは対象 $A \times B$ であり，射 $\pi_A : A \times B \to A, \pi_B : A \times B \to B$ が存在し，任意の $X \in \mathcal{C}, f_A : X \to A, f_B : X \to B$ に対し $f_A = \pi_A \circ f, f_B = \pi_B \circ f$ を満たす $f : X\ toA \times B$ が一意的に存在するようなものをいう（このような性質を直積の普遍性という）．$A \prod B$ とも書く．

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_B"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

A, B の**直和** (coproduct) とは対象 $A \bigoplus B$ であり，射 $\iota_A : A \to A \bigoplus B, \iota_B : B \to A \bigoplus B$ が存在し，任意の $X \in \mathcal{C}, f_A : A \to X, f_B : B \to X$ に対し $f_A = f \circ \iota_A, f_B = f \circ \iota_B$ を満たす $f : A \bigoplus B \to X$ が一意的に存在するようなものをいう（このような性質を直和の普遍性という）．$A \coprod B$ とも書く．

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "f_A"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A \bigoplus B \arrow[u, dashed, "f"'] & B \arrow[ul, "f_B"'] \arrow[l, "\iota_B"]
\end{tikzcd}$$

■

定義 13. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**関手** (functor)F とは

- $Ob(\mathcal{C})$ から $Ob(\mathcal{D})$ への対応
  $Ob(\mathcal{C}) \ni X \mapsto F(X) \in Ob(\mathcal{D})$
- $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$，$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ から $Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ への写像
  $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \ni f \mapsto F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$

であって，以下を満たすものである．

- $X \in \mathcal{C}, id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ に対し $F(id_X) = id_{FX} \in Hom_{\mathcal{D}}(FX,FX)$
- $X,Y,Z \in \mathcal{C}, X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ に対し $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
  $F(X), F(f)$ を単に FX, Ff と書いたりもする．

写像 $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ が全射のとき，F を**充満関手** (full functor)，単射のとき，**忠実関手** (faithful functor) という．

■

定義 14. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を圏．F,G を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手とする．F から G への**自然変換** η とは，各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して射 $\eta_X : FX \to GX$ が定まっていて，次の図式を可換にするようなものである．

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\eta_X"'] & FY \arrow[d, "\eta_Y"] \\ GX \arrow[r, "Gf"] & GY \end{tikzcd}$$

■

§2 アーベル圏について

定義 15. 圏 $\mathcal{A}$ が**加法圏** (additive category) であるとは，任意の $X,Y \in \mathcal{A}$ に対し，$Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ がアーベル群となり，かつ $\mathcal{A}$ がゼロ対象 0 と，直積 $X \times Y$(任意の $X,Y \in \mathcal{A}$) を持つことである．

■

加法圏のモデルは加法群の圏 Ab である．Ab は実際 Hom 集合はアーベル群となり，ゼロ対象 $0 = e$ を持ち，アーベル群 G_1, G_2 に対して直積 $G_1 \times G_2$ が存在するので，加法圏である．
加法圏 $\mathcal{A}$ において，対象 X から 0, 0 から X への唯一の射を同じ記号 0_X で表す．に対し $0 X \to Y$ を $0_{XY} = 0_Y \circ 0_X$ とする．$\mathcal{A}$ は加法圏より,$Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ はアーベル群をなすが，その単位元は 0_XY であることが容易に確かめられる． また，$f : W \to X, g : Y \to Z$ に対し $0_{XY} \circ f = 0_{WY}$, $g \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$ もわかる．以下，0_{XY} などを単に 0 と書く．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "0_{XY}"] \arrow[drr, bend right, "0_{XZ}"] & Y \arrow[dr, "g"] & \\ W \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, bend right, "0_{WY}"'] & & & Z \end{tikzcd}$$

Ab において（圏論的）直積と（圏論的）直和は一致するが，実は一般の加法圏においてもこれが成り立つ．

命題 16. 加法圏 $\mathcal{A}$ の任意の対象 X,Y に対し，直和 $X \bigoplus Y$ が存在し．直積と一致する．

(証明) $id_X : X \to X, 0 : Y \to X$ に対し，直積 $X \times Y$ の普遍性を用いると，

$$\pi_X \circ \iota_X = id_X \qquad \pi_Y \circ \iota_X = 0$$

をみたす $\iota_X : X \to X \times Y$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "id_X"'] \arrow[d, dashed, "\iota_X"] \arrow[dr, "0"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

同様にして，$0 : Y \to X, 0id_Y : Y \to Y$ に対し，直積 $X \times Y$ の普遍性を用いると，

$$\pi_X \circ \iota_Y = 0 \qquad \pi_Y \circ \iota_Y = id_Y$$

をみたす $\iota_X : X \to X \times Y$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "0"'] \arrow[d, dashed, "\iota_Y"] \arrow[dr, "id_Y"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

さて，次の図式は上の ι, π の式より可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, bend right, "0"'] \arrow[d, "\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y"] \arrow[dr, bend left, "id_Y"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

また，上の $\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y$ を $id_{X \times Y}$ に取り替えても可換である．直積の普遍性より，上の図式を可換にする $X \times Y$ から $X \times Y$ への射は唯一なので，

$$\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y = id_{X \times Y}$$

が成り立つ．この ι_X, ι_Y が直和の普遍性を満たすことを示そう．
$Z \in \mathcal{A}, f : X \to Z, g : Y \to Z$ とする．$h : X \times Y\ oZ$ を $h = f \circ \pi_X + g \circ \pi_Y$ とすると，このhは下図を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_X"] & X \times Y \arrow[u, "h"] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_Y"']
\end{tikzcd}$$

よって可換にするものの存在はいえた．このようなものが唯一であることをを示すために，$h_1, h_2 : X \times Y \to Z$ は

$$h_1 \circ \iota_X = f \qquad h_1 \circ \iota_Y = g$$

$$h_2 \circ \iota_X = f \qquad h_2 \circ \iota_Y = g$$

としよう．これより

$$(h_1 - h_2) \circ \iota_X = 0 \qquad (h_1 - h_2) \circ \iota_Y = 0$$

となる，それぞれ右から π_X, π_Y を合成して和を取ると

$$\begin{aligned}
0 &= (h_1 - h_2) \circ (\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y) \\
&= (h_1 - h_2) \circ id_{X \times Y} \\
&= h_1 - h_2
\end{aligned}$$

より $h_1 = h_2$ がわかる．

■

さて，加法圏において，Ab の準同型の核，像に相当するものを定義したい．しかし mono,epi のときと同様，対象は一般には集合ではないので，アーベル群と同じようには定義できない．まず，核，余核を，普遍性を使って定義する．

定義 17. 加法圏 $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ の**核**とは，射 $ker(f) : Ker(f) \to X$ で，$f \circ ker(f) = 0$ をみたし，次の普遍性を満たすものである．
(核の普遍性) $k \circ f = 0$ をみたす任意の $k : K \to X$ に対し，下図を可換にする一意的な射 $i : K \to Ker(f)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "ker(f)"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
K \arrow[u, dotted, "i"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

また，加法圏 $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ の**余核**とは，射 $cok(f) : Y \to Cok(f)$ で，$cok(f) \circ f = 0$ をみたし，次の普遍性を満たすものである．
(余核の普遍性) $f \circ c = 0$ をみたす任意の $c : Y \to C'$ に対し，下図を可換にする一意的な射 $p : Cok(f) \to C$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "cok(f)"] \arrow[dr, "c"] & Cok(f) \arrow[d, dotted, "p"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

■

加法圏の核，余核は常に存在するとは限らない．対象より射の方に着目することが多いので，ここでは射の核，余核は射を指すことにする．$Ker(f), Cok(f)$ は，2 つあったら同型である．
Ab の準同型 $f : G_1 \to G_2$ において包含写像 $i : Ker(f) \to G_1$ は f の核であり，自然な全射 $p : G_2 \to Cok(f)$ は f の余核である．

定義 18. 加法圏 $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ の**像**とは, 余核 $cok(f) : Y \to Cok(f)$ の核 $im(f) : Im(f) \to Y$ である．
また，加法圏 $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ の**余像**とは，核 $ker(f) : Ker(f) \to X$ の余核 $coim(f) : X \to Coim(f)$ である．

■

命題 19. 加法圏において，核は mono であり，余核は epi である．

(証明) 略

■

命題 20. 加法圏 $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ に対して

- f が mono $\Leftrightarrow$ $f \circ e = 0$ ならば $e = 0$ $(e : W \to X)$
- f が epi $\Leftrightarrow$ $g \circ f = 0$ ならば $g = 0$ $(g : Y \to Z)$

(証明) 略

■

定義 21. 圏 $\mathcal{A}$ が**アーベル圏**であるとは，$\mathcal{A}$ が加法圏であり，任意の射 f について

- 任意の射は核と余核をもつ．
- 任意の mono 射 m はその余核の核である．つまり $m = ker(cok(m))$
- 任意の epi 射 e はその核の余核である．つまり $e = cok(ker(e))$

をみたすことである．

■

命題 22. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 f は，mono かつ epi ならば同型射になる．

(証明) f は mono より $f = ker(cok(f))$．$cok(f) \circ f = 0 = 0 \circ f$．$f$ は epi なので $cok(f) = 0$ これより，$id_Y : Y \to Y$ は $0 = cok(f)$ の核になることがわかる．核のコドメインは同型より，f は同型射となる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "ker(cok(f))", "=" description, "f"'] \arrow[dr, dash, "\cong"'] & & Y \arrow[r, "cok(f)", "=" description, "0"'] & C \\ & Y \arrow[ur, "id_Y"'] & & \end{tikzcd}$$

■

アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ について，次の分解がある．

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "m"] & \\ X \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

ここで，$m = im(f)$ である．この分解は，次のように得る．
余核の定義により $cok(f) \circ f = 0$．$im(f) = ker(cok(f))$ なので，核の普遍性より，下図を可換にする一意的な射 $e : X \to Im(f)$ がのびる．

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "im(f)"] & & \\ X \arrow[ur, dotted, "e"] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[dr, "cok(f)"] & \\ & & & Cok(f) \end{tikzcd}$$

$m = im(f)$ は核なので mono である．実は e が epi であることも示せる．

補題 23. 上の f に対し，mono 射 $m' : K \to Y$ と射 $e' : X \to K$ について $f = m' \circ e'$ が成り立つとき，次を可換にする一意的な射 $t : Im(f) \to X$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Im(f) \arrow[d, "m"] \arrow[dl, dotted, "t"'] \\ K \arrow[r, "m'"'] & Y \end{tikzcd}$$

(証明) $p = cok(m)$, $p' = cok(m')$ とおく．m は mono なので $m' = ker(p')$．$p'm' = 0$ より $p'm'e' = p'f = 0$．よって $Cok(f)$ の普遍性より一意的な射 $w : Cok(f) \to C$ が存在して $p' = wp$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, "f"] & Im(f) \arrow[d, "m"] & \\ K \arrow[r, "m'"'] & Y \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p"] & C \\ & Cok(f) \arrow[ur, dotted, "w"'] & \end{tikzcd}$$

これより $p'm = wpm = 0$．$m' = ker(p')$ なので，核の普遍性より一意的な射 $t : Im(f) \to K$ が存在して $m = m't$．これより右下の可換がいえた．また $m'te = me = f = m'e'$．m' は mono なので，$te = e'$．これより左上の可換が言えた．

■

定理 24. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ の分解

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "m"] & \\ X \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

において，m は mono，e は epi である．

(証明)m は核なので mono である．e が epi を示す．射 $r, s : Im(f) \to Z$ で $re = se$ をみたすとする．$k = ker(r - s)$ とおく．核の普遍性より，下図を可換にする $e' : X \to Ker(r - s)$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} Ker(r-s) \arrow[dr, "k"] & & \\ & Im(f) \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & Z \\ X \arrow[uu, dotted, "e'"] \arrow[ur, "e"] & & \end{tikzcd}$$

k, m は mono よりその合成も mono．よって上の補題より，下図を可換にする一意的な射 t が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "e"] \arrow[d, "e'"'] & & Im(f) \arrow[d, "m"] \arrow[dll, dotted, "t"'] \\ Ker(r-s) \arrow[r, "k"'] & Im(f) \arrow[r, "m"'] & Y \end{tikzcd}$$

$m = mkt$ で m は mono より $kt = id_{Im(f)}$．$k = ker(r-s)$ であったので $(r-s)k = 0$．右から t を合成して $(r-s)kt = r-s = 0$．すなわち $r = s$．

■

$Coim(f)$ を使っても同様の分解が得られる．mono と epi，核と余核は双対であるので，上と同様に f は mono 射 m と epi 射 $coim(f)$ によって分解されることが示される．

$$\begin{tikzcd}
 & Coim(f) \arrow[dr, "m"] & \\
X \arrow[ur, "coim(f)"] \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

$Im(f), Coim(f)$ による分解によって得られた epi 射, mono 射をそれぞれ e, m とする．$Im(f), Coim(f)$ の普遍性を使うと下図を可換にする $i : Im(f) \to Coim(f)$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & & Coim(f) \arrow[r, "\cong", "i"'] \arrow[drr, "m"] & Im(f) \arrow[dr, "im(f)"] & & \\
 & X \arrow[ur, "coim(f)"] \arrow[urr, "e"] \arrow[rrr, "f"] & & & Y \arrow[dr] & \\
Ker(f) \arrow[ur, "ker(f)"] & & & & & Cok(f)
\end{tikzcd}$$

$e = i \circ coim(f), m = im(f) \circ i$ なので i は mono かつ epi，したがって同型射である．よって次を得る．

定理 25. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の任意の射 $f : X \to Y$ に対し $Coim(f) \cong Im(f)$ である．

■

定義 26. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射の列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が Y において**完全** (exact) とは，$im(f) = ker(f)$ となることである．

■

定義 27. $\mathcal{C}$ を圏，$f : X \to Z, g : Y \to Z$ を射とする．f, g の**引き戻し** (pullback) とは，下図の可換図式であり，以下の普遍性を満たすものである．

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

普遍性．$p' : P' \to Y, q' : P' \to X$ で $f \circ p' = g \circ q'$ を満たすような p', q' に対し一意的な射 $t : P' \to P$ が存在し，下図を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "t"] \arrow[drr, bend left, "q'"] \arrow[ddr, bend right, "p'"'] & & \\
& P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

■

定義 28. $\mathcal{C}$ を圏，$f : X \to Y, g : X \to Z$ を射とする．f, g の**押し出し** (pushout) とは，下図の可換図式であり，以下の普遍性を満たすものである．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "q"] \\
Y \arrow[r, "p"] & P
\end{tikzcd}
$$

普遍性．$p' : Y \to P', q' : Z \to P'$ で $p' \circ f = q' \circ g$ を満たすような p', q' に対し一意的な射 $t : P \to P'$ が存在し，下図を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "q'"] & \\
Y \arrow[r, "p"] \arrow[drr, bend right, "p'"'] & P \arrow[dr, dotted, "t"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}
$$

■

上の対象 P はどちらも同型を除いて一意である．

命題 29. 圏 $\mathcal{C}$ において，$f : X \to Z, g : Y \to Z$ を射とし，

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

を引き戻しとする．このとき，f が mono ならば p も mono である．

(証明)f は mono であるとする．$r, s : W \to P$ を射とし，$pr = ps$ であるとする．このとき $fpr = gqr = gqs = fps$．f は mono なので $pr = qr$．これより引き戻しの普遍性から $r = s$ がわかる．

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, shift left, "r"] \arrow[dr, shift right, "s"'] \arrow[drr, bend left, "pr=ps"] \arrow[ddr, bend right, "qr=qs"'] & & \\
& P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

■

アーベル圏では epi の場合も成り立つ.

命題 30. アーベル圏 $\mathcal{A}$ において，$f : X \to Z, g : Y \to Z$ を射とし，

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

を引き戻しとする．このとき，f が epi ならば p も epi である．

（証明) f は epi とする．直積 $X \times Y$ から Z への射 $f\pi_X - g\pi_Y$ の核を $m : P \to X \times Y$ とすると，下図は引き戻しになる．(m が $f\pi_X - g\pi_Y$ の核であることから可換性がわかり，直積と核の普遍性により引き戻しの普遍性が導かれる．)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_Y m"] \arrow[d, "\pi_X m"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

上の P は同型を除いて一意であったので，上の図で f が epi ならば $\pi_Y m$ も epi を示せばよい．このとき $f\pi_X - g\pi_Y$ は epi である．ある $h : W \to X \times Y$ について $h(f\pi_X - g\pi_Y) = 0$ とする．命題 16 より直積は直和でもあるので，ι_X を合成すると

$$0 = h(f\pi_X - g\pi_Y)\iota_X = hf\pi_X\iota_X = hf$$

f は epi だったので $h = 0$，よって $f\pi_X - g\pi_Y$ は epi．これより $f\pi_X - g\pi_Y = cok(m)$ となる．ある $v : Y \to V$ について $v\pi_Y m = 0$ とする．$cok(m)$ の普遍性により $v\pi_Y = v'(f\pi_X - g\pi_Y)$ をみたす $v' : V \to Z$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "m"] & X \times Y \arrow[r, "v\pi_Y"] \arrow[dr, "f\pi_X - g\pi_Y"'] & V \\ & & Z \arrow[u, dotted, "v'"'] \end{tikzcd}$$

ι_X を右から合成すると，$\pi_Y\iota_X = 0$ なので

$$0 = v\pi_Y\iota_X = v'(f\pi_X - g\pi_Y)\iota_X = v'f\pi_X\iota_X = v'f$$

f は epi なので $v' = 0$，よって $v\pi_Y = 0$，$v = v\pi_Y\iota_Y = 0$.

■

系 31. アーベル圏において常に引き戻しが存在する．

■

命題 32. アーベル圏 $\mathcal{A}$ において，$f : X \to Z, g : Y \to Z$ の引き戻しを考える．$k = ker(f)$ とすると下図のような一意的な分解 $k = pk'$ が得られ，$k' = ker(q)$ となる

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
Ker(f) \arrow[ur, dotted, "k'"] \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

(証明) $Ker(f)$ から Y へのゼロ射 0 を考えることにより，引き戻しの普遍性から一意的な射 $k' : Ker(f) \to P$ が存在して $pk' = k, qk' = 0$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, dotted, bend right, "u'"'] & \\
 & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
Ker(f) \arrow[ur, dotted, "k'"] \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

この k' が q の核となることを示そう．$u : K \to P$ を $qu = 0$ をみたす射とする．右から g を合成すると $0 = uqg = upf$ となる．これより $Ker(f)$ の普遍性から一意的な射 $u' : K \to Ker(f)$ が存在して $ku' = pu$．これにより引き戻しの普遍性が使えて，$u = k'u'$ が導かれる．これより k' は q の核となる．

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, shift left, "k'u'"] \arrow[dr, shift right, "u"'] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "ku'=pu"'] & & \\
 & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

■

引き戻しについて上で示されたことの双対は，押し出しについても同様に示される．

定義 33. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の対象 $X \in \mathcal{A}$ をコドメインに持つ射 f を X の**メンバ**と呼び，$f \in {}_m X$ で表す．

■

$\mathcal{A}$ をアーベル圏，$X \in \mathcal{A}$ とする．X のメンバ f, g について，ある epi 射 $u.v$ が存在して $fu = gv$ をみたすとき，$f \equiv g$ と定義する．明らかにこれは反射律，対称律をみたす． 推移律を確かめる．

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "v'"] & \cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & \cdot \arrow[d, "f"] \\
\cdot \arrow[r, "w"] \arrow[d, "r"] & \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "h"] & \cdot &
\end{tikzcd}
$$

$f \equiv g, g \equiv h$ とすると，epi 射 r, u, v, w が存在して $fu = gv, gw = hr$ をみたす．下図において，v, w の引き戻しを考える．v, wepi なので命題 29 より v', w' も epi．よって $f \equiv z$ である．アーベ

ル圏の任意の対象 X について，$0 \in_m X$ であり，$f \in_m X$ なら $-f \in_m X$ である．
$f : X \to Y$ をアーベル圏の射とする．$p \in_m X$ に対し $fp \in_m Y$ となる．$p, q \in_m X, p \equiv q$ とすると $fp \equiv fq$ となる．これより射 f は，あたかも写像のように X のメンバを Y のメンバにうつす．

定理 34. (図式追跡のための基本法則)．アーベル圏におけるメンバについて，以下の性質が成り立つ．

1. $f : X \to Y$ が mono $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in_m X$ に対し $fx \equiv 0$ ならば $x \equiv 0$
2. $f : X \to Y$ が mono $\Leftrightarrow$ 任意の $x, x' \in_m X$ に対し $fx \equiv fx'$ ならば $x \equiv x'$
3. $f : X \to Y$ が epi $\Leftrightarrow$ 任意の $y \in_m Y$ に対し $x \in_m X$ が存在し $gx \equiv x$
4. $f : X \to Y$ がゼロ射 $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in_m X$ に対し $fx \equiv 0$
5. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が Y で完全 $\Leftrightarrow$ $gf = 0$ かつ $gy \equiv 0$ を満たす $y \in_m Y$ に対し $x \in_m X$ が存在して $y \equiv fx$ となる．

(証明) 3. と 5. だけ示す．
3.　$f : X \to Y$ を epi，$y \in_m Y$ とする．f と y に対し引き戻しを考える．

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & \bullet \arrow[d, "y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

このとき f は epi なので e も epi，よって $y \equiv fx$ がわかる．
逆に f が epi でないとすると，どの $x \in_m X$ に対しても fx は epi でないので，$fx \neq id_Y \in_m Y$ である．
5.　$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が Y で完全とする．$Im(f)$ による f の分解 $f = me$ を考える．Y で完全より $m = im(f) = ker(g)$．よって $gf = gme = gker(f)e = 0$．$y \in_m Y$ で，$gy \equiv 0$ なものを考える．$\equiv$ の定義から直ちに $gy = 0$ がいえる．ここで，次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dotted, "e'"] \arrow[d, dotted, "x"] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, dotted, "p"] & \bullet \arrow[d, "y"] \\
X \arrow[r, "e"] & Ker(g) \arrow[r, "m"] & Y
\end{tikzcd}$$

核の普遍性から上を可換にする p が唯一存在する．e, p の引き戻しを上の図のように考えると $ye' = mex = fx$．e は epi なので e' も epi．よって $x \in_m X$ が存在して $y \equiv fx$ となる．
逆に $gf = 0$ かつ $gy \equiv 0$ を満たす $y \in_m Y$ に対し $x \in_m X$ が存在して $y \equiv fx$ となるとする．$k = ker(g)$ は $gk \equiv 0$ を満たすので $x \in_m X$ が存在して $k \equiv fx$．よって $cok(f)k \equiv cok(f)fx \equiv 0$ なので $cok(f)k = 0$．よって $Im(f)$ の普遍性から下図を可換にする射 p が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Ker(g) \arrow[rr, dotted, "p"] \arrow[drr, "k"] & & Im(f) \arrow[d, "im(f)"] & \\
\bullet \arrow[r, "x"] & X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "cok(f)"] & Z \\
& & & Cok(f) &
\end{tikzcd}$$

また $gf = 0$ と f の分解 $f = me$ より $gf = gme = 0$．e は epi より $gm = 0$ がわかる. よって $Ker(g)$ の普遍性から，下図を可換にする射 q が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & Im(f) \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[dr, "m"] & Ker(g) \arrow[d, "ker(g)"] & \\
X \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

この p, q に対して，qp, pq を考えると核と像の普遍性によりどちらも恒等射になる．これより Y で完全であることがわかった．

■

この定理を用いると，アーベル圏における図式の補題が図式の追跡により示すことができる．

補題 35． 五項補題 (five lemma)
下図の可換図式

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "f_3"] & X_4 \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "f_4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\
Y_1 \arrow[r, "h_1"] & Y_1 \arrow[r, "h_2"] & Y_3 \arrow[r, "h_3"] & Y_4 \arrow[r, "h_4"] & Y_5
\end{tikzcd}$$

において，行は完全であるとする．このとき，f_1, f_2, f_4, f_5 が同型射ならば，f_3 も同型射である．

(証明) f_3 が mono を示せば，双対的に epi も示されるので，f_3 が mono を示せば十分である．$x \in_m X$ で $f_3x \equiv 0$ とする．これと図の可換から $f_4g_3x = h_4f_3x \equiv 0$．$f_4$ は mono なので $g_3x \equiv 0$．完全性を用いて定理 33 の 5. より $x_2 \in_m X$ が存在して $x \equiv g_2x$．$h_2f_2x_2 \equiv f_3x \equiv 0$．これより再び定理 33 の 5. を用いると $y_1 \in_m Y$ が存在して $f_2x_2 \equiv h_1y_1$．$f_1$epi なので定理 33 の 3. より $x_1 \in_m X$ が存在して $y_1 \equiv f_1x_1$．$f_2g_1x_1 \equiv f_2x_2$ と f:mono より $x_2 \equiv g_1x_1$．よって $x \equiv g_2g_1x_1 \equiv 0$.

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[d, mapsto, dotted, "epi"] & x_2 \arrow[r, mapsto, dotted] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & g_3x \arrow[d, mapsto, "mono"] \\
y_1 \arrow[r, mapsto, dotted] & f_2x_2 \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & f_4g_3x
\end{tikzcd}$$

■

もうひとつ図式の補題を示すために，以下の列が完全である可換図式を考えよう．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "m'"] & Y' \arrow[r, "e'"] & Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

この図式で f, g, h の核，余核をとると，普遍性から以下の可換図式が得られ，一番上と一番下の行は完全である．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "m_0"] \arrow[d] & Ker(g) \arrow[r, "e_0"] \arrow[d] & Ker(h) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "m'"] \arrow[d] & Y' \arrow[r, "e'"] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & Cok(f) \arrow[r, "m_1"] & Cok(g) \arrow[r, "e_1"] & Cok(h) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

蛇の補題では上の完全列と下の完全列をつなぐ射の存在を示す．

補題 36. 蛇の補題 (snake lemma)
上の図式に対し，以下の列が完全になるような射 $\delta : Ker(h) \to Cok(f)$ が存在する．

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{m_0} Ker(g) \xrightarrow{e_0} Ker(h) \xrightarrow{\delta} Cok(f) \xrightarrow{m_1} Cok(g) \xrightarrow{e_1} Cok(h) \longrightarrow 0$$

(証明) $K = Ker(h), k = ker(h), C = Cok(f), c = cok(f)$ とする．k と e の引き戻し u, k' を取ると，e は epi より u も epi．m の $S = Im(f)$ による分解を $m = pq$ とすると，命題 32 より s による p の分解を得る．(q は mono かつ epi なので実は同型射である)．下半分についても双対で同様のことを考える．下図はすべて可換になる．

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dotted, "s"] \arrow[dr, "p"] & P \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[d, dotted, "k'"] & K \arrow[d, "k"] \\
X \arrow[u, "q"] \arrow[u, phantom, "\cong"'] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, "h"] \\
X' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "c"] & Y' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, dotted, "c'"] \arrow[dr, "q'"] & Z' \\
C \arrow[r, dotted, "v"] & Q \arrow[r, dotted, "t"] & T \arrow[u, "p'"'] \arrow[u, phantom, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

$\delta_0 = c'gk'$ とする．$u = cok(s)$ かつ $v = ker(t)$ から δ_0 は一意的に

$$\delta_0 = v\delta u : P \xrightarrow{u} K \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{v} Q$$

と分解できる．この δ が求める射である．
メンバ $x \in_m K$ から $\delta x \in_m C$ は次の図式の追跡によって得られることを示そう．

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[d, mapsto] \\
 & y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & kx \arrow[d, mapsto] \\
z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & gy \arrow[r, mapsto] & 0 \\
z_1 & &
\end{tikzcd}$$

e は epi なので $y \in {}_mY$ が存在して $ey \equiv kx$ となる．$e'gy = hkx = 0$ と，Y' での完全性から $z \in {}_mX'$ が存在して $gy \equiv m'z$．$z_1 = cz$ とする．このとき $z_1 \equiv \delta x$ となる．これを示そう．
まず $ey \equiv kx$ と引き戻しの普遍性より，$x = ux_0, y = k'x_0$ をみたすメンバ $x_0 \in {}_mP$ が一意的に存在することがわかる．

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dotted, "x_0"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "k'"] & Y \arrow[d, "k"] \\
& X \arrow[r, "e"] & Z
\end{tikzcd}$$

これより

$$v\delta x \ v\delta ux_0 = \delta_0 x_0 = c'gy \equiv vz_1$$

v は mono より $\delta x \equiv z_1$ となる．この式により，z_1 の同値類は図式の追跡の際のメンバの選び方に依存しないこともわかる．この追跡により，$Ker(h), Cok(f)$ の完全性が示される．(定理 34 を使う．頑張って！)

■

参考文献

[1]S. マックレーン著，三好博之／高木理 訳,『圏論の基礎』, シュプリンガー・ジャパン,2012
[2] 梶浦宏成著,『数物系のための圏論』，サイエンス社，2010
[3]Albercht Dold,"Lectures on Algebraic Topology",Springer,1980(Reprint)
[4]Charles A. Weibel,"An introduction to homological algebra",Cambridge University Press,1994

パズルのコーナー（SP1）

スリザーリンク

[9]

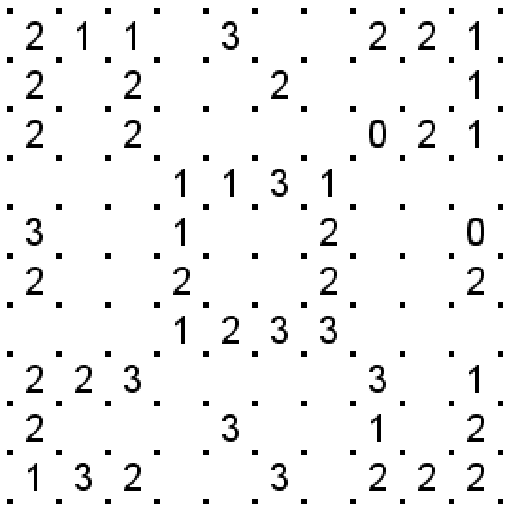


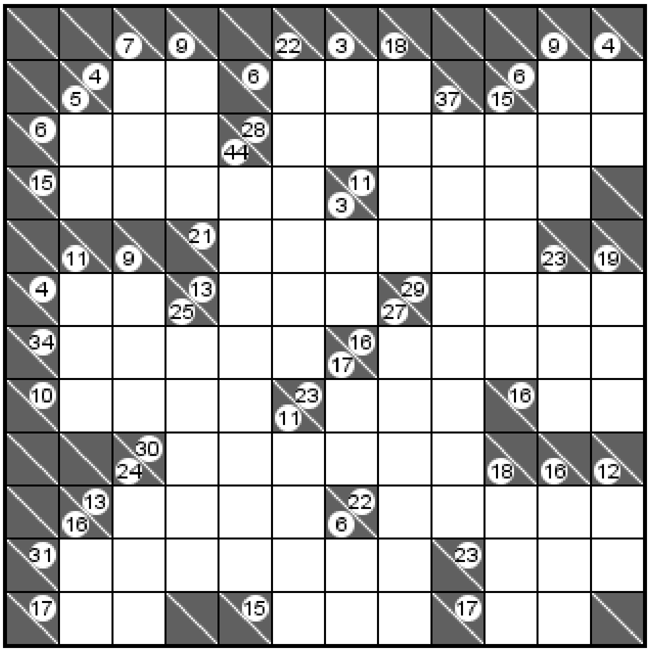
図 1　図のタイトル

スリザーリンクのルール

1. 点と点をタテヨコにつなげ、全体で 1 つの輪っかをつくります。
2. 4 つの点で作られた小さな正方形の中の数字は、その正方形に引く辺の数です。数字のない小さな辺には、何本線を引くかは分かりません。
3. 線を交差させたり、枝分かれさせたりはしません。

[9] 「スリザーリンク」「カックロ」の名称は (株) ニコリの登録商標です。

カックロ



カックロのルール

1. すべての白マスに 1 から 9 までの数字のどれかひとつを入れます。
2. ナナメの線の右上の数字は、その右に連続した白マスに入る数字の合計を表し、左下の数字は、その下に連続した白マスに入る数字の合計を表します。
3. タテヨコへの 1 つの白マスのつながりには、同じ数字を入れてはいけません。

宣伝文

SP1 といいます。パズルを作りました。息抜きにどうぞ。
宣伝ですが、文学部 210 教室でペンシルパズル同好会の展示を行っています。
たくさんのパズルの載った冊子のほか、知恵の輪など触れるパズルも置いています。
パズルに興味を持った方はぜひお越しください。

Counterexamples in Topology 傑作撰

§1. 概説

反例の本

数学は定理と証明を繰り返すだけではなかなか身につきにくく，適切な**反例**を考えることで概念の有用性を理解できることが多い，というのは皆さん経験したことだと思います．歴史的にも，ワイエルシュトラスが連続かつ至るところ微分不可能な「病理的関数」を発見したことで，それまで「連続関数は大体のところで微分可能なんじゃないの〜？」と信じられていた雰囲気がぶち壊され，解析学が $\varepsilon - \delta$ 論法による厳密化へと進展した．このようなことが度々あります．証明によって世界を広げていくというのが数学の基本だと思いますが，反例が「ある」という事実もまた心強いものです．

今回は位相空間論の反例集である“**Counterexamples in Topology** ” (Lynn Steen and J. Arthur Seebach, Jr) の内容から幾つか参考になりそうな例を紹介してみたいと思います．

内容紹介

本書は位相空間論の反例を大量に収録したある意味「病的な」本といえるかもしれませんが，学習の上で参照するにはうってつけのほんだと思います．最大の特徴は，豊富なチャートにあります．例えば，正則であって正規でない[10)]位相空間を探そうと思ったら，分離公理について書かれた 19 ページの表を見て，反例 90 番が該当するということがすぐに分かります．定義間の主従関係が反例付きで載っていますし，巻末には各例について，どの公理を満たし，どの公理を満たさないかが網羅された表が掲載されており，検索に供するようになっています．

第一部では位相の様々な定義（分離公理，コンパクト性，連結性，距離空間）を簡単に復習することができます．第二部がメインコンテンツの反例集で，143 個の例が掲載されています．第三部は「位相空間はいつ距離空間になるか？」という距離化定理にまつわるサーベイとなっています（ここにも反例が載っています）．付録の第四部では前述の網羅された表や演習問題，参考文献等が掲載されています．

§2. 分離公理に関する反例

正則・正規

まずは定義を簡単に復習しましょう．

定義 37 (正則空間). 位相空間 X が**正則**であるとは，以下の 2 つの条件をみたすことを言う．

1. X の任意の 1 点集合は閉集合である．
2. X の任意の閉集合 A と，A に含まれない任意の点 x は開集合で分離される．すなわち，開集合 U,V が存在して，$A \subset U$，$x \in V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ が成立する．

定義 38 (正規空間). 位相空間 X が**正規**であるとは，以下の 2 つの条件をみたすことを言う．

---

10) 正規という性質からは正則という性質が従います．（正規・正則という時には T_0 公理を仮定します．）

1. X の任意の 1 点集合は閉集合である．
2. X の任意の交わらない閉集合の組 A, B は開集合で分離される．すなわち，開集合 U,V が存在して，$A \subset U$，$B \subset V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ が成立する．

定義から明らかですが，正規性からは正則性が従います．また，距離空間は正規ですから，普通のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は正規になります．正則であって，正規でない空間とはどのようなものでしょうか？

例 39 (Sorgenfrey 空間)**.** $\mathbb{R}$ の開集合の基底を $U = [a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とした空間を S とする (Sorgenfrey 直線)．Sorgenfrey 空間 X を $X = S \times S$ で定義する．

X での典型的な開集合は $[a, b) \times [c, d)$ という形をしており，これが X の開集合の基底になっています．ここで部分集合 $\Delta = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ を考えてみると，これは閉集合です．Δ 内の任意の点 x に対して $\{x\}$ は誘導位相の下で開集合になるので，Δ に誘導される位相は離散位相となり，$\Delta_1 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Q}\}$，$\Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_1$ とすると，これらは X の閉集合です．ところが Δ_1 を含む開集合と Δ_2 を含む開集合は必ず交わってしまうことが示せるので X は正規ではありません．

また，Sorgenfrey 直線 S は正則かつ正規であり，2 つの正則空間の直積は正則なので X は正則です．このことから X が「正規空間の直積は正規」という命題の反例ということも分かります．

正規空間は部分空間をとるという操作とも相性が悪く，正規空間の部分空間は正規とは限りません．

定義 40 (全部分正規)**.** 任意の部分空間が正規となるような正規空間 X を**全部分正規**であるという．

全部分正規でないような正規空間の例は，集合論的に少しむずかしい操作をして構成します．

定義 41. ω を最小の超限順序数（自然数の集合 $\mathbb{N}$ に対応する順序数[11)]），Ω を最小の非可算順序数とする．順序数には濃度の比較により全順序が入るので順序数 α, β に対して $[\alpha, \beta] = \{x \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ とする．

例 42 (Tychonoff の板)**.** $[0, \omega]$，$[0, \Omega]$ にそれぞれ区間から定まる位相を入れ，$T = [0, \omega] \times [0, \Omega]$ とする．.

順序数 α に対して $[0, \alpha]$ に区間位相を入れた空間はコンパクトハウスドルフになり，その直積である T もコンパクトハウスドルフですから，コンパクトハウスドルフ空間が正規なことより T は正規空間です[12)]．

ところが，T から (ω, Ω) という一点を除いた空間 T_∞ は正規で無くなってしまうのです．これは T_∞ の部分空間 $A = \{(\omega, \alpha) \mid 0 \leq \alpha < \Omega\}$，$B = \{(n, \Omega) \mid 0 \leq n < \omega\}$ が分離できない 2 つの閉集合であることを示すことで分かります．

距離づけ可能定理と第二可算性

距離空間というのは位相空間の特別な場合です．位相空間を与えたときに，それが距離空間になるような距離が存在する（**距離づけ可能である**）のはどんなときか？という問は距離化の理論

11) 選択公理を認めさせてください．
12) 「$[0, \alpha]$ が正規だから，正規空間の直積である T も正規である」というのはダメですよね．

(Metrization theory) と言われる一般位相空間論の大テーマに発展しており，本書でもこの話題を扱った章に詳しく書かれています．

距離空間は正規ですから，正規空間になにか $+\alpha$ すれば距離空間になるであろうと思うと，次のような定理があります．

定理 43 (Urysohn の定理)**.** 正規かつ第二可算公理をみたす位相空間 X は距離づけ可能である．

証明の方針は以下のようになります．

1. 距離づけ可能な位相空間の直積は距離づけ可能になる（可算個でも OK）．
2. X の可算な開集合の基底を $\mathfrak{B}$ として，$\mathfrak{M} = \{(U, V) \mid \bar{U} \subset V\} \subset \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ とする（この集合の濃度は勿論可算）．
3. 正規性より Urysohn の補題を使って $\mathfrak{M}$ の各元に対して $\bar{U}$ 上で 0，V の補集合上で 1 をとる連続関数を作る．
4. これによって X から $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ へ写像が定まる．これが中への同相写像であることを示す．

実は，正則 + 第二可算は正規性を導くので，Urysohn の定理は通常「正則第二可算ならば距離づけ可能」と書かれます．Sorgenfrey 直線は正規ですが，第二可算でなく距離づけ可能ではありません．また，第二可算でない距離空間が存在する[13)]ので，この定理は必要十分条件を与えているわけではないことにも注意しないといけません．距離づけ可能定理は他にも色々存在します．

多様体は局所的にユークリッド空間と見れるハウスドルフ空間なので，局所コンパクトハウスドルフ ⇒ 正則となります．ふつう「多様体」というときは第二可算公理を仮定するので，多様体は距離づけ可能であることが分かります．第二可算性を満たさないような「多様体」の例として「長い直線」は有名です．

例 44 (長い直線)**.** Ω を最小の非可算順序数として，Ω と区間 $[0, 1)$ の直積集合 L に辞書式順序から定まる順序位相を入れる．これを長い半直線という．長い半直線の端をつなげて出来るのが長い直線である．

普通の半直線 $[0, \infty)$ は $\omega \times [0, 1)$（ω は可算順序数）と思えます．順序数で非可算なものを使ってやることで「長い」感を出しているわけですね．直感的に考えて長い直線は「長すぎる」ために第二可算公理を満たさない．距離づけ可能でない多様体となっているわけです．

§3. コンパクト性に関する反例

コンパクト vs 点列コンパクト

定義 45. 位相空間 X が

- **コンパクト**であるとは，X の任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在することをいう．
- **点列コンパクト**であるとは，X 内の任意の点列が収束する部分列を持つことをいう．

この 2 つの定義は距離空間では同値になりますが，そうでないときは互いに何の関係もない性質です．

13) 簡単な反例があります

例 46 (I^I)．$I=[0,1]$（単位閉区間）とし，$I^I=\prod_{i\in I} I_i$（ただし $I_i=I$）とする．位相は I にユークリッド位相を入れたものの直積位相とする．

Tychonoff の定理より I^I はコンパクトですが，点列コンパクトではありません．I^I は I から I への写像全体の集合と見れて，I^I 内の点列 $\{a_k\}$ が収束する部分列をもつということは，対応する写像の列 $\{f_k\}$ が部分列 $\{f_{k_i}\}$ をもって各点 $x\in I$ で $\{f_{k_i}(x)\}$ が収束するということです．ここでたとえば $f_k(x)=(x$ を 2 進展開したときの小数点第 k 位$)$ とすると，どんな部分列 $\{f_{k_1}\}$ に対しても $\{f_{k_i}(p)\}$ が収束しないような小数 p が存在してしまいます．

点列コンパクトだが，コンパクトでない例としては前節で定義した $[0,\Omega]$ から $\{\Omega\}$ を取り除いた $[0,\Omega)$ があります．$[0,\Omega]$ はコンパクト[14) なのですが，$[0,\Omega)$ はコンパクトではありません[15)．また，$[0,\Omega]$ のコンパクト性から $[0,\Omega)$ 内の任意の点列は $[0,\Omega]$ 内に集積点をもちますが，Ω が集積点になることはないので，$[0,\Omega)$ は点列コンパクトであることがわかります．

§4. 連結性に関する反例

連結性に関する反例といえば，弧状連結 $\Rightarrow$ 連結であるが逆は成立しないということの説明として「**位相幾何学者の正弦曲線**」を持ち出すのが常です[16) が，あまりにも有名なので割愛します[17)．

直積と連結性

Tychonoff の定理（コンパクト集合の任意個の直積はコンパクト）と同様に，連結集合の任意個の直積も連結な位相空間です．ところで位相空間の直積をとる際，直積位相というのは各射影 $pr_\alpha\colon \prod_{\lambda\in A} U_\lambda \to U_\alpha$ がすべて連続となるような「最弱の」位相というように定めました．開集合を「各空間の開集合の直積」とする位相とは異なる（コッチのほうが強い）わけですが，このようにすると変なことが起こります[18)．

例 47 (Box product topology)．$B=\mathbb{R}^\omega$ を無限数列全体の集合とし，B の開集合を $\prod_{i=1}^{\infty} U_i$（U_i は $\mathbb{R}$ にユークリッド位相を入れたときの開集合）とする．

B は連結ではありません．なぜなら有界な無限数列全体の集合と非有界な無限数列全体の集合がともに開集合になってしまうからです．

§5. おわりに

今回紹介した反例は本書の反例のごくごく一部です．これらの他にも面白い反例が沢山あるので是非手にとって読んでみてください．本書は値段も 1800 円ほどと（他の数学書と比べて）安いですし，位相空間論の（日本語だと特に）ややこしい定義が英語でスッキリとまとめられているの

---

14) 順序数の性質からわかります．

15) $[0,\alpha)$ のような開集合で覆うと有限部分被覆が取れません．

16) 勿論本書にも収録されています，というか表紙に書いてある．

17) そういえば「長い直線」も連結だが弧状連結ではないという例になっていますね．

18) Tychonoff の定理も当然不成立になってしまいます．

で，日本語以外の数学書を初めて読む際などにも参考になると思います（反例の紹介部分の書き方は読みにくい感じですが……）．

Counterexample シリーズはこの本がきっかけになって Analysis や Probability も刊行されているようです．Group theory とか Commutative Algebra とかがあればバカ売れだと思うんですけど，どうでしょうか．誰か書きませんか？

編集後記

$e^{\pi i}sode$ **Vol.2**

2014 年 11 月 18 日発行

著　者・・・・・東京大学理学部数学科有志

発行人・・・・・宮本拓磨

表　紙・・・・・浅尾泰彦

裏表紙・・・・・山崎由佳