まえがき

本日は「数学科展示　ますらぼ」にご来場いただき誠にありがとうございます．今年５月に東京大学本郷キャンパスで開かれた五月祭に引き続き，皆さんに数学と東大数学科について知ってもらいたくて，数学科展示ますらぼは駒場祭にも出展することを決めました．今回の冊子 $e\pi isode$(えぴそーど) は，vol 3.5 と題して発行され，またサブタイトルは「わたしのえぴそーど」と題しまして，数学科内定したばかりのの学部２年生，先日発表された数学講究 XA に夢をふくらませる３年生，院試を終えたばかりの４年生，そしてこの企画が始まって以来ずっとコミットしてきた修士１年生という幅広い層の方たちに自分が好きなものとそのエピソードについて語ってもらいました．執筆者のみなさんには１ページから２ページで軽く書いてくれるだけで良いよと言っていたのですが，募集からわずか２週間というとても短い期間でみなさんこれだけたくさんの内容を書いてくださり，またしても濃い内容の冊子が出来上がりました．

数学科はこの駒場キャンパスの東の端にある数理科学研究棟で普段は活動していますが，皆さんからは “数理病棟” と呼ばれたり，他の学科の人に自分が今何を勉強しているのかを説明しようとすると全く理解してもらえなかったりと周囲から距離を感じることがあります．しかし，数学というのはとてもシンプルにまた何に縛られることもなく物事にアプローチをする手段であり，数学をすることによって培われる技能というのは普遍的でどこの分野に於いても通じるものであると私は信じていますし，その面白さは丁寧に話しあえば多くの人に理解してもらえるし，また他の分野と何か共通点があるものであると，この数学科展示ますらぼを通じて実感しています．この冊子を開くと数式や難しそうな言葉がたくさん並べてあって，“うわっ...” っと一歩引いてしまう方も沢山いらっしゃいると思います．でも，そんな時は “この何が面白いんですか” や “何の役に立つんですか” といった質問でも良いので私たちに投げつけて見てください．きっと何か得るものはあると思います．(伊藤)

目　次

ネイピア数eについて (伊藤)

はじめに

〜「私のことは嫌いでも、eのことは嫌いにならないでください！」〜
国民的アイドルグループEXP271のとあるセンターの言葉

$e^{\pi i}sode$(えぴそーど) という名前の冊子を先輩たちから私達が受け継いでから, はや1年半が経ちましたが, 未だに「$e^{\pi i}sode$?これはなんて読むの?」と聞かれることも多いです. 上記のような発言から察するに,$e^{\pi i}$ にこめられた意味も理解されていないでしょう. そこで改めて,**e** という数字について色々とお話をしたいと思います.

e という数字は**ネイピア数**と呼ばれ, 日本語では自然対数の底とも呼ばれたりします. 数なのでちゃんと値があって,$e = 2.71828182845904523536028747 1352\cdots$ という永遠につづく小数として表されます. ネイピア数という名前は, この数を初めて発表したジョン・ネイピア (John Napier) という数学者にちなんでつけられました. ネイピアがこの数を考案した1618年というのは, 日本で言うと1615年は大阪夏の陣で徳川家康[1] と豊臣秀頼が合戦を繰り広げていた年ですし, ヨーロッパではまだ魔女狩りが勃発していたような時代です. 万有引力の法則を発見したアイザック・ニュートンはまだ生まれてもいませんし, ビブン, セキブンという概念・言葉すら生まれていません. 何が言いたいかと言いますと,「eは数学だけの世界に出てくる小難しい数ではなく, 古くから人類と共にあった誰でも理解できるような身近なもの」ということです.

ということで, 出来るだけ皆さんに分かりやすい様に e についてお話をしたいと思います. もし本当は身近なはずの e がこの冊子を読んで, また遠くに感じられてしまったらそれは,e が悪いのではなく, 私が悪いのです.

身近なe

〜「借りた金は忘れるな。貸した金は忘れろ。」〜
田中角栄

e は身近なところから発生します. とりあえず結論だけ先に述べて解説に移ります.

連続的に複利で利息を支払うような年利率1の銀行が存在するとき, この銀行の実質的な年利率は e となる.

という形で e は身近に発生します. ここでキーとなる**金利**という概念です. 金利は現代人にとってある意味遠い世界にあるものかもしれないので一度説明しておきます. 例えば, あなたが銀行にいくらかのお金を預けているとします.[2] そうすると, 銀行は「私達の所にお金を預けてくれてありがとう」と言って年に何度か少しだけあなたの口座にお金を振り込んでおいてくれます. これを**利子**と言います.[3] ここで**金利 (利率)** という概念が発生します. 金利とは,「あなたが銀行に預けているお金」と「利子」の比率を金利と言います. 数式で書くと

$$\text{預金額} \times \text{金利} = \text{利子}$$

---

[1] すごくどうでも良い話ですが, 徳川家康を知らないと日本では非常識人呼ばわりされますが, ネイピア数eを知らない人に対して非常識だ!という石を投げる人はそこまでいないでしょう. 残念です.

[2] ここで預けているという言葉を使うと, まるで厳重な鍵付きの金庫やロッカーにお金を置いてきたように聞こえますが, そのようなことはありません. 銀行も企業とは言え, その銀行の中にいるのは人間ですので, あなたのお友達の山田さんの家のタンスに「お金〜〜万円預けるね. なくしたら承知しないよ.」と言ってお金を置いてきたのと, 解釈によっては変わりはないのです.

[3] 今の日本の銀行の通常預金の金利は 0.001 % ぐらいです. つまり,100 万円預けて置くと年に 10 円ほどもらえる事になります.

となります.[4)]

ここからは, 簡単のために全て年利率を **1 %**の場合にのみ限定して話をすすめましょう.
もし, この世に年率 1 %を謳う銀行がいくつかあったとしましょう. これらは, 皆同じに見えますが, 実は違う可能性があります. それは **年に何回利子が払われるかが分かっていない** ということです. 例えば,

100 万円につき, 年に一度だけ,1 万円の利息がもらえる.

という銀行と,

100 万円につき, 年に 2 度,5 千円づつ利息がもらえる

という銀行は 1 年というスパンで見れば, おなじ年利率 1 %の銀行です. しかし, ここで違ってくるのが**複利**という考え方です.

(ここに複利の図を入れたい) 複利とは, 今までもらった利息を預金額に繰り入れて, 利息を払ってくれる方式です. 例えば,100 万円を (利息年 1 回払いの) 年利息 1 %の銀行に 4 年間預けておくと

$$
\begin{aligned}
100\text{万円} \times 1\,\% + 100\text{万円} &= 101\text{万円} \\
101\text{万円} \times 1\,\% + 101\text{万円} &= 102.01\text{万円} \\
102.01\text{万円} \times 1\,\% + 102.01\text{万円} &= 103.0301\text{万円} \\
103.0301\text{万円} \times 1\,\% + 103.0301\text{万円} &= 104.0604\text{万円}
\end{aligned}
$$

というように雪だるま式にお金が増えていきます. 最初に考えた 1 年間の利払回数が違う場合についても同様のことがいえます.

100 万円につき, 年に 2 度,5 千円づつ利息がもらえる

は,

$1\,\% \div 2 = 0.5\,\%$づつ半年に 1 回お金が増える

ということになります. そして, いくらになるかとか言いますと,

$$
\begin{aligned}
100\text{万円} \times 0.5\,\% + 100\text{万円} &= 100.5\text{万円}\ (=\text{半年後の預金残高}) \\
100.5\text{万円} \times 0.5\,\% + 100.5\text{万円} &= 101.0025\text{万円}\ (=1\text{年後の預金残高})
\end{aligned}
$$

という風に 101 万円よりも, わずか 0.025 万円だけ増えました. つまり違う利息額となったわけです.
では, 更に細かくわけて,1 ヶ月に 1 回. 年 12 回の利息が受け取れる銀行があったとしましょう. この場合は

$1/12 \fallingdotseq 0.083\,\%$づつ 1 ヶ月に 1 回お金が増える

ここで, 今までのように 12 回計算をしても良いのですが, 少し落ち着いて見てみると,
例えば 100 万円が 1 %増えるとその後どうなるかと言うのは,

$$100\text{万円} \times 1\,\% + 100\text{万円} = 100\text{万円} \times (1 + 0.01) = 101\text{万円}$$

という式で計算できるということがわかります. また, これを 2 回払いの式に応用すると

[4)] ここまでの内容は, できれば読まなくても知っているぐらいのレベルであって欲しいです.

$$100\text{万円} \times (1+0.005) \times (1+0.005) = 101.0025\text{万円}$$

という風になります. 同様に,12 回払いの場合も

$$100\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{12}) \times \cdots \times (1+\frac{0.01}{12}) = 100\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{12})^{12} = 101.004596089$$

という結果が得られます.[5] また数字に着目すると, 利息 12 回払いのときのほうがやはり僅かにお金は多くなっています.

では, もっとお金を増やしたい!!ということで,1 日に 1 回利息が振り込まれるような銀行を考えてみるとどうでしょうか,

$$100\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{365})^{365} = 101.005003\text{万円}$$

となってやはり, いままでよりも僅かに増えています. では, この**利払い回数をどんどん増やしていくと億万長者になれるのでは!!!**[6] と思ってしまうわけです. 例えば, 年に 10000 回利払いがされるような銀行があったとしたら

$$100\text{万円} \times (1+\frac{0.01}{10000})^{10000} = 101.005016\text{万円}$$

となりますが, よく見てみると, そこまで増えていません. どうやら上限があるようです. そしてこの上限が e なのです. ここで

$$e^{0.01} = (2.71828182845904523536028747135 2\cdots)^{0.01} = 1.01005016708$$

という数値と見比べて見ましょう [7]. そうすると, 実は 100 万円 $\times e^{0.01} = 101.005016708$ 万円は今まで出てきた数字に非常に近い数字になっています.

つまり, 経験的に,

年利率 1 %の銀行の利払い回数をどんどん大きくしていくと,1 年トータルでみたときには $e^{0.01}$ という利率に近づく.

ということがわかります. これを高校数学の言葉で,$e^{0.01}$ **に収束する**と言います. こうして,e という数字が簡単な金利計算から出て来るということがわかりました. この利率は, その瞬間瞬間に利息が発生し, それが預金に繰り入れられているという意味で**連続複利**と言われます.

ここで, 一連の議論の結果をまとめて,e という数を改めて定義すると

$$e := \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

という風になります.

表 1　利率が e に収束していく

利払い回数	実際の年利率
1 回	1 %
2 回	1.0025 %
12 回	1.004596089 %
365 回	1.005003 %
⋮	⋮
無限回	$e^{0.01}$ 倍 = 1.005016708 %増加

[5] 電卓で計算する場合は 1.00083333× ＝＝＝＝ · · · と＝ボタンを連打すると計算できます

[6] 少し関連した話として,**72 の法則**と言うものが有ります. これは,6 %複利でお金を運用すると約 12 年で 2 倍になる,8 %複利でお金を運用すると約 9 年で 2 倍になるというように複利の%数と二倍になるまでの年数の積がおおよそ 72 になっているという法則です

[7] 流石にこれを普通の電卓で計算すわけにはいきませんので, 関数電卓で計算するか Google で「e^0.01」と検索してみてください

まとめ〜eは本当に身近なのか〜

〜「A bird in the hand is worth two in the bush.」〜
(手に持っている1羽の鳥は、まだ手にしていない茂みの中の2羽の鳥と同じ価値があるということわざ)。

利払い回数をどんどん大きくしていくと, やがては e に近づくということがわかりましたが, 実際にそんなに何度も利払いが行われることなんてあるのだろうかと思う方もいらっしゃると思います. しかし,1つ言えることは,$e^{利率}$ は1日複利とほとんど差はないということです. そして,e という数字の計算上の便利さから, 金融などの分野では e を使った利率計算が行われています. そのことについて触れて, この記事を終えたいと思います.

どうして, 金融機関では e を使う必要があるのかというと, まず一つには e を使った利率計算が, 数学的に相性が良いということがあります.
例えば, 最初の年に12回の利払い1％, 次の年に6回の利払い2％, そのまた次の年に10回の利払い3％の利率でお金を運用したときに, その利息の計算は

$$(1+\frac{0.01}{12})^{12}\times(1+\frac{0.02}{6})^{6}\times(1+\frac{0.03}{10})^{10}$$

となり, いちいち全てを計算する必要があります. また, 数学的に見てもこの式は複雑です. しかし, すべて連続複利であるとみなすと,

$$e^{0.01}\times e^{0.02}\times e^{0.03}=e^{0.01+0.02+0.03}$$

という風にシンプルな式にすることが出来ます.[8] またこの記事では述べませんが, この e の何々乗という数字はとても微分積分などの数学的な操作と相性が良いです.

最後に, そもそも全てのお金を銀行に預けているわけでもないのに, なぜ金融機関がこのようなことをしないといけないのかということについて考えてみましょう. これは, **今手にもっている100万円と 来年の100万円は当価値ではない**ということに由来しています. なぜならば, 今の100万円を仮に銀行に預けたとしたら,100万円プラス利子がついているからです. このようにして, 金融機関では毎年のようにお金の出入りがありますから, それを一度全て現在の価値に換算して計算する必要があります.

「と言っても, 今時超低金利だし関係ないんじゃないの」と思う方もいらっしゃるかもしれません. しかし, 例えば生命保険や年金は非常に長期のお金の出入りがあります. よってその積み重ねは大きく, 少しでも金利が動いただけで, 保険料や年金の掛金に大きな影響を影響をあたえることがあるのです.[9] 故に,(e を用いて) その会社のお金の出入りを管理していくことは非常に重要です.[10] またこれは,e が使われているほんの一例にすぎず, 数学が絡む殆どの分野で e が使われているということを最後に注意しておきたいと思います.

---

[8] 全く関係がない話ですが, 僕がお気に入りの問題として,「e^{π} に最も近い整数を電卓なしで計算せよ」という高校数学の問題が有ります. 暇な方はやってみてください. もっと関係のない話として,π^{e}, e^{e}, π^{π} は全て有理数かすら分かっていませんが,e^{π} は超越数であることが分かっています.

[9] 例えば, 前年度のゼロ金利政策が日本銀行によって発表されたとき, 多くの積立式の保険商品が販売をやめざるを得なくなったという事実からも分かると思われます

[10] 1つお詫びをしなければならないのは,e を用いた現在価値計算が行われるのはどちらかと言うと, 数学色の濃い金融派生商品などの分野で, 本文中で例として挙げた保険会社や年金などでは, 一応「利力」という名前でもって認識はされていますが, 少々数学との相性が悪くても, 普通の複利計算でゴリ押ししてまうところがあります.

e と微分方程式の話～解こう!微分方程式!～

はじめに

e という数は

$$e := \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

という形で定義されるのでした. この e についての最も大事な性質は次のものです.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

これは微分積分学の言葉ですが,e^x **という関数は, 微分しても変わらないということ**です. 世の中にはたくさんの関数が有りますが, **微分して変わらない関数は** e^x **だけ** [11] です. つまり, 微分積分という概念が生まれる前にできた e ですが, それは微分積分学の中心にあるものであり, とても微分や積分と相性が良いわけです. この記事では, その e と微分積分, 微分方程式の関わりについて紹介します. 微分方程式というのは「微分」と「方程式」という険しい言葉が 2 つも並んだものですが, とても有用であり, 世の中の物理現象などの多くは微分方程式で記述されるぐらいに重要な概念です. この記事では, まず e と微分の関係について述べ, その後微分方程式について基本的なことを説明し, 最後に幾つか実際に微分方程式を解くということをします.

微分方程式について

e 再考

定義.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

として $e\in\mathbb{R}$ を定義する.

定理.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

この証明は, 高校数学の教科書に譲ることとしましょう.[12]

定理.

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x),\ \ f(0) = 1$$

を満たすような微分可能な関数 $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はただ一つだけ存在する.[13]

微分方程式入門

ここで, この 2 つの定理を合わせると, 次のような考察ができます. まず, e^x は $\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$ と $f(0) = 1$ を満たしています. かつ. このような関数は唯一つしかありません. よって,$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$ と $f(0) = 1$ を満たせば, 直ちにその

[11] この主張は厳密に言うと正しくないのですが, 後で厳密に述べるので許して下さい

[12] 正しいことを書きたいという数学科生としてのプライドのようなものが私に証明を書かせませんでした.

[13] 数学科 4 年生の大澤くん作詞の歌に「ただひとつ. 示すは難し.」という歌詞があります. 一意性を示すことの難しさを歌った歌です. 詳しくは係まで.

$f(x) = e^x$ ということが導かれます.
ここで, **微分方程式**というものについてすこし紹介します.

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x),\ f(0) = 1$$

という式を見てみると, 左には微分が入っています. このように微分演算が入っているような方程式を**微分方程式**と言います.
ある微分方程式を満たすような, 関数を見つけることを**微分方程式を解く**と言います.
そして, $f(0) = 1$ というのは, 最初の条件を指定しているのです. このような条件を**微分方程式の初期条件**と言います.
つまり, 我々が今したこと用語でまとめると,

$\frac{d}{dx}f(x) = f(x),\ f(0) = 1$ という初期条件の課された微分方程式解くと $f(x) = e^x$ が得られた.

ということです.

一意性について

ある微分方程式の解が一意的に存在するとは, 唯一つしかその微分方程式に対して解が存在しないということです.
数式で書くと,f, g という関数が微分方程式の解ならば,$f = g$ ということです.
ここで「そんな一意性なんて考えて何になるんだ」と思う方がいらっしゃるかもしれませんが, 一意性は微分方程式にとってとても大事な概念です. 次のような例を考えてみましょう.

例. 物理を習ったことがある人ならばピンとくるかもしれませんが, ある地点 O からボールを初速度 v_0 で投げると, ボールは次のような微分方程式で定義される軌道を描いて運動します.

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -m\boldsymbol{g}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{x}_0 = 0$$

ここで, この微分方程式に一意性がなかったらどうなるでしょうか.
つまり異なる解が幾つかあるわけです. つまり, **全く同じ条件で同じ場所から同じボールを投げても, そのボールがどのような軌道を描くかは予測できない**という状態が発生するわけです. これに関する未解決問題として.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \nu\Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t)\\ \nabla\cdot u &= 0\\ u(x,0) &= u_0(x),\ (x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0)\end{aligned}$$

という微分方程式で定義されるナビエ-ストークス方程式という物があります. この方程式は気体や液体の中での運動を記述する流体力学の基本的な方程式ですが, この方程式の解の滑らかさや解の存在や一意性については知られていません. そして, この未解決問題を解くと **100 万ドル**がクレイ数学研究所から貰えます. もし, ナビエ・ストークス方程式の解が一意的でなかったり滑らかでなかったりすると, 同じ条件で飛行機を飛ばしても同じように飛んでくれなかったり, 滑らかに移動してくれないつまりカクカクに移動するという状況が考えられます.

一方で一意性は, 微分方程式を解くという立場においてはとても便利だったりします. なぜならば, もし一意性が保証されていたならば,1 つでも解を見つけてしまえば, それ以外に解を探す必要はなくおしまいなわけです. 今回の e^x という微分方程式でも一意性により, これ以外は無いことがわかりました.[14)]

---

14) 高校数学でも少しだけ微分方程式について教えられましたが, この一意性について言及しないがゆえに, とりあえず解けてしまったが本当にこれだけか分からないということに私は陥りました.

微分方程式を解こう!

前置きが長くなりましたが, これから幾つかの微分方程式を解いてみましょう.

例.

$$\frac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 1$$

これは解けることを祈っています.y という未知の関数を数式できちんと書いてあげれば微分方程式を解けたことになります.
そうですね,$y = e^x$ となります.

例.

$$\frac{dy}{dx} = y$$

今度は初期条件がなくなっています. 実はこのときは, 微分方程式の解は一意的に存在しません.
実際, $y = Ce^x,\ C$ は定数とすると, これは微分方程式の解になっています.
ここで厳密にではないですが, 有用な解き方を書きます.

$$\frac{1}{y}dy = dx$$

と微分を分数の様に見て移行します. そして両辺を積分します.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int dx$$

故に, これらの積分を実際に計算して,

$$\log y = x + c$$

$$y = e^{x+c} = Ce^x$$

という風に解を得ることが出来ました.

例.

$$\frac{dy}{dx} = 2y,\ y(0) = 1$$

今度は y に係数があります. ここで,

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

という理系の高校 3 年生だけが習う公式を紹介しておきます. 例えば,

$$\frac{d}{dx}(5x+2)^2 = 2(5x+2) * 5 = 10(5x+2)$$

ただし,$f(x) = x^2,\ g(x) = 5x+2,\ f'(x) = 2x,\ f'(g(x)) = 2(5x+2),\ g'(x) = 5$ でした. ここで,$y = e^{2x}$ を微分してみます.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{2x} = e^{2x} * 2 = 2e^{2x} = 2y$$

ただし,$f(x) = e^x,\ g(x) = 2x,\ f'(x) = e^x,\ f'(g(x)) = e^{2x}\ g'(x) = 2$ でした. となり, 解になっています. 初期条件も満たしています.
高校 3 年生の内容を引用しましたが. とりあえず,a を定数として,e^{ax} を微分すると,

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

と a だけ前に出てきて,$\frac{dy}{dx} = ay$ の解になっていることを覚えておいてください.

例.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

今度は 2 回微分する用になっています. これは, ここで試しに $y = e^x$ を入れてみると,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x - 5e^x + 6e^x = 2e^x$$

となって 0 にはなってくれませんが, 当たらずといえども遠からずという感じですね. 今度は $y = e^{2x}$ を入れてみます.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \frac{d}{dx}(2e^{2x}) - 5 \cdot 2e^{2x} + 6e^{2x} = (4 - 10 + 6)e^{2x} = 0$$

といって,0 になってくれました. また,$y = e^{3x}$ を入れてみます.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0$$

またしても解になってくれました. 一方で,$y = e^{2x} + e^{3x}$ や $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$ なども解になっています. 実際,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = (4 - 10 + 6)e^{2x} + (9 - 15 + 6)e^{3x} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 3(4 - 10 + 6)e^{2x} - 2(9 - 15 + 6)e^{3x} = 0$$

どうやら $ae^{2x} + be^{3x}$ は全部解になってくれています. 一方で全ての解はこれだけで表されるのでしょうか. 少し不安が残ります. この記事はこの方程式の解が,$ae^{2x} + be^{3x}$ で表されることを示して終わります.

まず事実として,

定理.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

は初期値について 2 つ条件を与えると, 解が一意的に存在する

ということを認めます.

証明 ここで,z という関数が微分方程式の解になったとします. この z が,$ae^{2x} + be^{3x}$ で表されることを証明します
$z(0) = z_0, z(1) = z_1$ とおきます. そして,

$$\begin{cases} z_0 = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \\ z_1 = e^2 \cdot \alpha + e^3 \cdot \beta \end{cases}$$

という連立方程式を解いて α, β を求めます. そうして,$y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ とおくと,

$$\begin{aligned} y(0) &= \alpha e^{2\cdot 0} + \beta e^{3\cdot 0} = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = z_0 \\ y(1) &= \alpha e^{2\cdot 1} + \beta e^{3\cdot 1} = e^2 \cdot \alpha + e^3 \cdot \beta = z_1 \end{aligned}$$

となり, これは初期値 $y(0) = z_0, y(1) = z_1$ を満たすような微分方程式の解になります. よって, 事実として認めた解の一意性から,$y = z$ となり全ての解は $y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ として表されることが証明されました. □

まとめ

このようにして,e は微分積分学の中でも基本的な存在であり,e を使うと色々な微分方程式を示すことが出来ました. 微分方程式によって, 物体や波や電気や音などの運動を記述することができるので, とても有用です. そして, 高校数学ではあまり触れられませんが**解の一意性**というのは, 数学的にも実際微分方程式を解く上でも重要であることを示しました. そして最後に出てきた, 微分方程式について 1 つ数学的に触れておきたい事がありますが,

$$f, g \text{ が微分方程式の解} \Rightarrow \alpha f + \beta g \text{ も微分方程式の解.(ただし} \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

が成り立っているような, 微分方程式を**線形微分方程式**と言います. この線形という性質はとても重要な性質で数学のどこにでも現れるので覚えておいてください. 最後に, さらなる応用として, 微分方程式を形式的に,

$$dy = 2xdx$$

のように書くことが出来ます. これは,x が dx(少し) だけ増えると,y は $dy = 2xdx$ だけ増えることを示しています. これは, 最初の状態を決めると解の一意性より, 全ての挙動が決まってしまいますが, そこにある程度のランダムさを加えた**確率微分方程式**という物があります. 例えば.

$$df_t = af_tdt + bf_tdW_t$$

というのは, ブラック・ショールズ方程式という有名な方程式ですが, これは,t が dt だけ増えると,f_t は確実に,af_tdt だけ増え, またさらに bf_t の分散を持って増減します.(つまり, 増える可能性もありますし, 減る可能性もあります.) このように, ある程度の動きは決定されているが, 一方でランダムさをも抱えているようなモデルを表現することができ, 非常に多くの現実世界の現象を記述することができます.[15] 例えば, このブラック・ショールズ方程式を考案した, マイロン・ショールズにはノーベル賞が授与されました.[16] 例えば, 確率微分方程式は, 経済の分野においては, 株式や金融派生商品や債権などの価格を予想することや, 更には物理学や生物学などにランダムさを扱う多くの分野にも応用がされています.

[15] 例えば, この会社の株価はこれから伸びる!といったときに, 一直線を描いて伸びていくわけではなく, 少しランダムさを含んでギザギザかたちで上昇していくことが想像出来ます

[16] フィッシャー・ブラックはその時には他界していました

e と微分方程式と半群の話

はじめに

前の e と微分方程式の話では, 微分方程式を解く際に,e が重要であることを述べました. ここで, 基本的な解析学や線形代数の知識がある大学 1 年生や 2 年生向けに, 更に微分方程式を一般化した形について考え, そこにも e が現れることを紹介し,e が普遍的で便利な存在であることを述べたいと思います. 世の中にはたくさんの微分方程式がありますが, それを一般化した形で

$$\frac{du}{dt} = Au$$
$$u(0) = u_0$$

という風に書いてしまいましょう.u は我々が求めたい関数,A は u に何らかの変換 (例えば, 数を足す, かける, 微分するなど) を施すものです.
つまり,2 つの式で定義される微分方程式を解くということ解釈すると,

よくわからない関数 u があってそれを解析したい.
u の最初の値と,u が瞬間瞬間にどのように変化していくかは, 分かっているので,u の全体像を求めて欲しい.

これは, 例えば物体や光や音や熱などがどのように動いていくかを調べたい物理ではよくあることで, それぞれの場合に対して微分方程式があります. ここで数学がしたいことは, 問題をすごく一般化したわけですが

u という関数にはどのぐらいの性質を認めてよいのか,A という変換にもどのぐらいのの性質を認めてよいのか.

ということになります. より一般的で広い範囲の u,A を使えるような理論を構築すれば, それだけ多くの問題を同時に解決することが出来ます. この記事では,u をバナッハ空間という空間に属するもの,A を線形作用素という変換に限定して構築された**関数解析**の理論について触れます.

関数解析と半群

バナッハ空間

定義. X がバナッハ空間であるとは, 完備なノルム空間であることである.

いきなり空間に対して 2 つの性質を仮定しましたが, どのようなことなのでしょうか, 詳しく見てみましょう.

定義. X が K 線形空間であるとは,$u, v \in X$ に対して足し算 $u + v \in X$ と,$u \in X, k \in K$ に対して, スカラー倍 $ku \in X$ が定まっていて,
$u, v, w \in X$,$k, l \in K$ に対して,(ベクトルと同様の) 次のような性質を満たしているものである.[17)]
$(u + v) + w = u + (v + w), u + v = v + u, u + 0 = u, u + (-u) = 0,$
$k(u + v) = ku + kv, (k + l)u = ku + lu, (kl)u = k(lu), 1u = u$

ここでたくさんの式が出てきましたが,K というのは, 実数 $\mathbb{R}$ や複素数 $\mathbb{C}$ について考えてもらって構いません. そし

17) 線形代数を知っている人に対しては冗長であるので, 詳しくは説明するべきではないし, 線形代数を知らない人に対しても雰囲気だけを知ってもらいたいので厳密に書くことはしません.

て,X という線形空間は, 所謂高校数学のベクトル空間です. 高校数学のベクトルは矢印であり, 矢印を足すことやスカラー倍することが許されていました. そして, ベクトルに対しては長さが定まっていたので, それを今から定めます.

定義. 線形空間 X 上で定義された $\mathbb{R}$ に値を取る関数 $\|,\| : X \to \mathbb{R}$ がノルムであるとは次の 3 つの性質が成り立つことである.
(1) 正値性: 全ての $u \in X$ に対して $\|u\| \geq 0$ が成り立つ.
(2) スカラー倍に対する同次性: 全ての $u \in X$ と $k \in K$ に対して $\|ku\| = |k|\|u\|$ が成り立つ.
(3) 三角不等式: 全ての $u, v \in X$ に対して,$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ が成り立つ.
また, ノルムが 1 つ指定された線形空間のことを**ノルム空間**という.

これも長さにとって当然成り立って欲しい性質を述べただけとなりました. そして, バナッハ空間の 1 つ目の性質**ノルム空間**とは, 長さが定義された空間ということでした.
続いて完備性について, 触れてみましょう.

定義. ノルム空間 X の元の列,x_n $(n = 1, 2, \dots)$ がコーシー列であるとは次を満たすことである.

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \ (n, m \to \infty)$$

である.

つまり, ある点列 [18] の間の距離がどんどん小さくなっているというが, コーシー列であるということの定義です.[19] ある数列が収束しているとき, これはコーシー列になりますが, 逆に**一般にコーシー列は収束列ではありません**. 例えば,$\mathbb{Q}$ という有理数全体の空間を考えて,$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots$ という風に π にどんどん近づいて行くような数列を考えます. この数列の間はどんどん 0 へと近づいていきますが, その収束先の π は有理数ではないため, 収束先はありません. よって, この数列は収束列ではないのです [20].

定義. ノルム空間 X が**完備**であるとは任意のコーシー列が収束する先があるということである.

つまり, バナッハ空間の 2 つ目の性質はコーシー列のようなちゃんとした数列は, ちゃんと収束する先があるような空間を考えたいということです.[21]

線形作用素

次に $\frac{du}{dt} = Au$ の A がどのようなものであるかを考えます.

定義. X, Y を線形空間として, 写像 $A : X \to Y$ が $\mathcal{D}(A)$ 上で定義された線形作用素であるとは.
$\mathcal{D}(A)$ は X の部分空間であり, この $\mathcal{D}(A)$ 上で A が線形性を満たしていることである.

定義. A を X から Y への線形作用素とするとき, ある M が存在して,

$$\|Au\| \leq M\|u\| \ (u \in \mathcal{D}(A))$$

が成り立つとき,A は有界であるという.

ここで, $\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \to Y$ 線形作用素 $|\mathcal{D}(A) = X, A$ は有界 $\}$ とおく. とすると, この空間には次のようなノ

[18] 高校数学でいうところの数列であるが, ここで列をなしているものは空間上の点であるので, 点列という
[19] コーシー列の詳しい話については, この $episode$ の前多さんの記事割り算再考にも書いてありますが, もう一度触れてみます.
[20] これは空間を $\mathbb{Q}$ で考えたからであり, もちろん $\mathbb{R}$ という実数の空間で考えるとこの数列は収束します
[21] 僕もコーシー列のようにちゃんとした数列なので収束先がほしい

ルムを入れることができる.

$$\|A\| = \sup_{u\neq 0}\frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1}\|Au\|$$

こうすると,$\|Au\| \leq \|A\|\|u\|$ が成り立つ. 実は Y がバナッハ空間であるとき,$\mathcal{L}(X,Y)$ もバナッハ空間となる.

半群

一般に半群といえば, 集合 S と演算 $*$ の組で, 全ての元 $a,b,c\in S$ に対して結合律 $a*(b*c)=(a*b)*c$ が成り立っているようなものを指しますが, 今回はバナッハ空間における半群を次のような考えます.

定義. X をバナッハ空間,$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を X 上の線形作用素の族とする. この時,$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ が半群であるとは,

(1) $t\geq 0$ に対して $T(t)\in\mathcal{L}(X)$

(2) $T(0)=I$

(3) $t,s\geq 0$ に対して $T(t)\cdot T(s)=T(t+s)$

半群の例を見ておきましょう

例. $X=L^p(0,\infty)$ として,$t\geq 0$ に対して

$$(T(t)u)(x) := u(t+x)\ (x>0,\ u\in X)$$

という風に関数を t だけ横にずらすような作用素 $T(t)$ は半群をなします.

ここで半群の重要な性質について定義します.

定義. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ が (C_0) 半群であるとは, 任意の $a\in X$ に対して,t の関数 $T(t)a:[0,\infty)\to X$ が連続であることである.

定理. X をバナッハ空間として,$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を (C_0) 半群とすると, 次のような $M\geq 1$ と β が存在して,

$$\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}\ (t\geq 0)$$

定義. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を半群とすると, この半群の生成作用素 A を次のように定義する.

$$\mathcal{D}(A) := \{u\in X \mid \lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)u-u}{h}\text{が存在する}\}$$

$$Au := \lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)u-u}{h}$$

定理. A を (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ の生成作用素とすると A は閉作用素であり, 次のような性質が成り立つ.
$a\in\mathcal{D}(A)$ とすると,$T(t)a\in\mathcal{D}(A)\ (t>0)$ であり,

$$T(t)Aa = AT(t)a\ (t\geq 0)$$

$$\frac{d}{dt}T(t)a = T(t)Aa = AT(t)a\ (t>0)$$

さらに $\mathcal{D}(A)$ は X で稠密である.

そして, 実は (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ は実は $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ という形で書けることが明らかになります.

定理. (C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 半群と生成作用素 A は一対一対応する

証明 まず,(C_0) 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ と $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ の生成作用素がどちらも A だったと仮定する.
このとき,$t_0 > 0$ と $a \in \mathcal{D}(A)$ を任意にとって $w(t) = T(t_0 - t)S(t)a\ (0 \leq t \leq t_0)$ と定めます. そうすると $\frac{dw}{dt} = 0$ が計算によりわかり,$w(0) = w(t_0)$ であることがわかります. よって,$T(t_0)a = S(t_0)a$ がわかり, $\mathcal{D}(A)$ は X で稠密であることと,$T(t_0), S(t_0)$ は有界であるので,$T(t_0) = S(t_0)$ となります.
よって, 生成作用素により (C_0) 半群は一意に定まることがわかりました.
次に

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

として定めると, これは (C_0) 半群であり, その生成作用素は A であることを示します. まず $\|T(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{t^n}{n!} A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n \leq e^{t\|A\|}$ となってこれは有界です. そして, 項別微分することによって $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ が得られ, 特に $\lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)u - u}{h} = Au$ です.
その他の $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ が半群であるという性質は一般の e の議論によって分かります. □

半群と微分方程式

色々と定義が長くなってしまいましたが, 我々がそもそも考えたかった問題に立ち返って見ましょう.
X をバナッハ空間として,A を作用素とします. このときに次のような抽象的な微分方程式を解きたかったのです.

$$\frac{du}{dt} = Au\ (t > 0)$$

$$u(0) = a$$

ただし,u は $u : [0, \infty) \to X$ で C^1 級のものを考えています. ここで次のような定理が成り立ちます.

定理. A が (C_0) 半群を生成して, かつ $a \in \mathcal{D}(A)$ ならば,$u(t) = e^{tA}a$ が上の微分方程式の一意の解となる.

さらにここでは紹介しませんが,A が解析半群という特別な半群を生成するとき, 更に強い次のような定理が成り立ちます.

定理. さらに A が解析半群を生成していれば, 任意の初期値 $a \in X$ に対して,$u(t) = e^{tA}a$ が上の微分方程式の一意の解となる.

つまり,A がある性質を満たしてくれれば, 一瞬にしてこの微分方程式は解けてしまうのです. では, どのような条件をみたすときに A は (C_0) 半群を生成してくれたり, 解析半群を生成してくれたり, するのでしょうかそれについては次のような定理が有用です.

定理 (吉田-Hille の定理)**.** A が縮小 (C_0) 半群を生成することと次の 2 条件は同値である.
(1)　A の定義域は X で稠密であり,A は閉作用素である.
(2)　$\{\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ であり,

$$\lambda\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1\ (\lambda > 0)$$

円周率 π がひょこっと現れる話 (山本)

はじめに

e, π, i の中で唯一義務教育までで習う数，それが円周率 π です．$3.14159\cdots$ という並びは皆さんも人生で一度は見たことがあるでしょう．「円周率」の名の通り，π という数字は「円周の長さを直径で割ったもの」として定義される，図形由来の数です．円の面積を求めるときだったり，大学受験では回転体の体積を求めるときだったりに現れることが多いですね．今日はこのように図形的な側面の強い円周率 π が数学のひょんな所にひょこっと現れる話をしたいと思います．

(Caution：当文章においては，「大体どのような感じか」を理解していただくことを重要視するために，積分と無限和の順序を注意なしに交換する箇所が何か所かございます．あらかじめご了承ください．)

1. 三角関数と Fourier 級数展開

「π と関係する関数」と言われて，真っ先に思い浮かぶものは何でしょうか？高校までの範囲でくくると，おそらく三角関数を連想する人が一番多いのではないでしょうか．そこで，最初はこの三角関数についてお話しようと思います．

まず三角関数，特に $\sin\theta$ や $\cos\theta$ のグラフの形を思い出してみましょう．これらのグラフは「正弦波」と呼ばれる綺麗な形の波になっています．これは，音叉を叩いたときの音の波形などに現れます．また，$\sin\theta$ や $\cos\theta$ は

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

なる関係を満たしていました．これは θ がちょうど 2π 増えたときの関数の値が元のものと同じであること，すなわち 2π が関数の周期になっていることを意味します．より一般に，関数 $f(x)$ に対して $f(x+2\pi) = f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は 2π を周期として持つといいます．これに沿えば，正の整数 n に対して，$\sin(n\theta), \cos(n\theta)$ もまた 2π を周期として持つことが分かります．

このように，2π を周期に持つ関数の簡単な例として三角関数が挙げられます．これらは比較的簡単な形をしており，解析もしやすいです．さて実際には周期 2π の関数はこれだけではないわけで，音や振動を解析する際には単純な正弦波の形をしていないものを対象とする場合がほとんどです．そのような場合の関数はどのように扱うのがいいでしょうか？

大学 1 年で習う Taylor 展開は，関数をある点の付近で多項式により近似するものでした．これに倣うと，「一般の関数をより簡単な関数の和で近似する」ことを考えるのがいいかもしれません．

18〜19 世紀の数学者 Fourier は，「すべての周期関数は，同じ周期を持つ無限個の三角関数の和で表される」という主張をしました．この主張は元々熱伝導に関する問題を解く際に用られたものであり，主張を認めればその問題の解にたどり着くことができたのでした．Fourier によるこの大胆な主張は，真偽が定かでなかったために数学界に議論を巻き起こしましたが，結果的には「大体」正しい主張であったことが後に分かります．主張がどこまで正しいのか・また正しいとして，その無限和の収束やふるまいは良いものか？という当時の問いは，その後の解析学，ひいては数学そのものを大きく発展させたと言われています．

さて，Fourier 級数展開の具体的な主張を見てみましょう．

$f(x)$ を「性質の良い」周期 2π の関数とする．このとき，

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{1}$$

となるような実数 a_n, b_n(n は自然数) が存在する．

ここで,「性質の良い」というのは，例えば「定義域全体で微分可能で，さらに導関数も連続」などが相当します．上に出てきた各係数 a_n, b_n は，大雑把には次のように計算されます．まず a_0 については，(1) の両辺を x について 0 から 2π まで積分して

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)dx &= \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\, dx \\
&= 2\pi a_0 + 0 = 2\pi a_0
\end{aligned}$$

すなわち

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

を得ます．正の整数 m に対する a_m については，次の公式

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx) &= \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx) &= 0
\end{aligned}$$

を使えば，次のように計算できます．(1) の両辺に $\cos mx$ をかけ，それを x について 0 から 2π まで積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(mx) f(x)dx &= \int_0^{2\pi} \cos(mx) \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} a_0 \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos(mx)\,(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\, dx \\
&= \pi a_m
\end{aligned}$$

を得ます．すなわち，$m \geq 1$ に対して

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(mx) f(x)dx$$

となります．同様にして，b_m も

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(mx) f(x)dx$$

と計算できることになります．これで，係数が計算できました．

それでは，とある関数を実際に三角関数の無限和で表してみましょう．

周期 2π の関数 $f(x)$ を，$0 \leq x \leq 2\pi$ において $f(x) = -x(x - 2\pi)$ となるように定めます．これは $x = 2\pi n$(n は整数) において微分可能ではありませんが，先に述べた「性質の良い」関数の 1 つです．これを認めれば，積分計算により a_0, a_n, b_n を求めてやることで $f(x)$ を三角関数に表すことが出来ます．実際に計算してみると (部分積分を使えば高校生にもできる計算ですので，やってみてください),

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{3}\pi^2 \\
a_n &= -\frac{4}{n^2} \\
b_n &= 0
\end{aligned}$$

となるので，結局

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(mx)$$

と表すことができました．

さて，上式に $x = 0$ を代入してみましょう．すると

$$0 = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

となり，適当に整理すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

となりました．これはすなわち，「自然数の二乗の逆数の和が $\pi^2/6$ になる」ということを意味しています．左辺は整数に関する基本的な級数になっているわけですが，その値として π がひょこっと現れるという不思議な公式が出来てしまいました．この級数は「Basel 級数」と呼ばれています．

他にも，Fourier 級数展開を使うと導ける級数は色々あります．関数を色々変えてみて，様々な公式を作ってみるのも興味深いかと思います．

ζ 関数，Γ 関数と関数等式

前章において，自然数の二乗の逆数の和の値に π が現れることを見ました．では，「二乗」が「n 乗」，あるいは実数「s 乗」と変わった場合の値はどうなるのでしょうか？

そこで，1 より大きい実数 s に対して，$\zeta(s)$(ゼータ) という関数を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

により定義します．ここで「1 より大きい実数」と言ったのは，1 以下の実数では定義式の級数が発散してしまうことを考慮してのことです．この ζ 関数の定義式から，前章の Basel 級数は $\zeta(2)$ に相当します．実は，正の偶数 n に対して，$\zeta(n)$ は π^n と有理数の積の形をしていることが知られています．

「正の偶数」という規則正しい数値を代入すると π に関係する値を返す ζ 関数ですが，この関数まわりで π が出てくるのは，関数に何かしらの値を代入するときだけではありません．

それを説明するために，$\zeta(s)$ とは別の関数として，$s > 0$ なる実数に対して $\Gamma(s)$(ガンマ) という関数を

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

により定義します．$\cdots$ いきなり積分の式が出てきてしまいましたが，これがどのような関数なのか説明します．部分積分を行えば，$s > 0$ なる実数 s に対して

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt \\
&= \Big[-e^{-t} t^s\Big]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t})(st^{s-1}) dt \\
&= 0 + s\int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt = s\Gamma(s)
\end{aligned}$$

となることが分かります．この $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ のように，ある種の関数が満たしている等式のことを「関数等式」といいます．また，とくに

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

となるので，上の関数等式と合わせれば，数学的帰納法により全ての正の整数 n に対して

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

となることが分かります．つまり，Γ 関数とは「正の整数でしか定義されなかった階乗の定義域を拡張したもの」ということになります．ある意味で整数論由来の関数というわけですね．

さて，Γ 関数は階乗の定義域を拡張したものと述べました．しかし，この関数は更に「ほとんどの複素数」にまで定義域を拡張することができます．高校までの数学では，関数といえば定義域は実数のものがほとんどだったかと思いますが，大学での数学では定義域を複素数にすることもしばしばあります．

例えば，$y = x^2$ という関数は定義域を複素数としても「自然に」定義できますし，$y = 1/x$ という関数は定義域を「0 以外の複素数」としてもやはり「自然に」定義できます．指数関数 e^x についても，e^x を Taylor 展開して

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

という関数として考えれば，やはり複素数全体に定義域を「自然に」拡張することができるでしょう．これらと同様にして，Γ 関数も「自然な方法により」，定義域を「ほとんどの複素数」とする関数にすることができます．具体的には，「複素数全体のうち，0 以下の整数を除いたもの」全体を定義域とすることができます．

Γ 関数についての話が長くなりましたが，ようやく ζ 関数の話に戻ります．Γ 関数同様，ζ 関数も「自然な方法で」定義域を拡張することができます．さらに，この ζ 関数の現れる関数等式を得ることもできます．ここまで出てきた関数を組み合わせて

$$\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

という関数を定めます．(ただし，複素数 s に関して，$\pi^s = e^{s \log \pi}$ と定めると，これは定義域が実数の場合の拡張になっています．) このとき，この関数について

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$$

という関数等式を得ることができます．この等式はすなわち，「$\Lambda(s)$ は点 $s = 1/2$ に関して対称な関数であること」を意味する，かなり簡潔かつ綺麗な式になっていることが分かるかと思います．Γ 関数，ζ 関数といういわば「整数論由来の」関数における簡素な関数等式を導くという方向からも，π が現れてくるわけです．ちなみに，先ほど定義域を広げることが出来るといった ζ 関数ですが，関数等式を用いることにより，負の偶数 n に対して $\zeta(s) = 0$ となることが分かります．それ以外で $\zeta(s) = 0$ となるような複素数 s はどのような分布の仕方をしているか？という問いは「Riemann 予想」と呼ばれ，最初に提唱されてから 150 年以上経った今でも未解決です．

3.Ramanujan と π

先の章で，無限和による π の公式 (Basel 級数) を 1 つ見ました．他にはどのような公式があるのでしょう？そこで，突然ながらこの公式をご覧ください．

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(4^n n!)^4 99^{4n}}$$

$\cdots$ なかなかに面妖な格好をしています．この公式を見出したのは「インドの魔術師」という異名を持つ，Ramanujan という数学者です．Ramanujan 本人はこの公式を証明したわけでなく，実際に証明されたのは提唱されてから 50 年以上経ったころのことだそうです．にもかかわらず，このようにかなり複雑な公式を Ramanujan はいきなり発見したのですから驚きです．これ以外にも，Ramanujan は π に関していくつかの公式を発見しています．

また，Ramanujan は π に関する公式以外にも様々なことをやっています．例えば，次の関数をご覧ください．

$$\Delta(q)=q(1-q)^{24}(1-q^2)^{24}\cdots=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

これは Ramanujan の Δ(デルタ) 関数と呼ばれるものです．Δ 関数を q に関して「展開」すると，

$$\Delta(q)=q-24q^2+252q^3-1472q^4+\cdots$$

のようになります．これは q に関する多項式のようなもの (正式にはべき級数といいます) になっているわけですが，これの q^n における係数を $\tau(n)$ とおきます．すなわち：

$$\Delta(q)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

です．この関数 τ を「Ramanujan の τ(タウ) 関数」といいます．また，$\Delta(q)$ の定義式の q として $q=e^{2\pi iz}$ を代入することができ，そうすると

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi inz}$$

は虚部が正である複素数全体を定義域とする関数となります．Δ および今作った F は，次の性質を満たします．(3 つ目の性質を証明することは若干難しいです．)

- $\Delta(q)$ は q に関するべき級数
- $F(z+1)=F(z)$
- $F(-1/z)=z^{12}F(z)$

この性質により，F および Δ は「重さ 12 の保形型式」であるといいます．さらに，

- $\Delta(0)=0$

が成り立つことにより，F および Δ は「重さ 12 のカスプ型式」であるといいます．保形型式・カスプ型式は整数論的にも歴史のある関数です．さて，実際に $\tau(n)$ を計算してみると，こんな感じになります．(計算力に自信のある人は試してみてください．)

$$\tau(1)=1,\tau(2)=-24,\tau(3)=252,\tau(4)=-1472$$
$$\tau(5)=4830,\tau(6)=-6048,\tau(7)=-16744,\tau(8)=84480$$
$$\tau(9)=-113643,\tau(10)=-115920,\tau(11)=534612,\tau(12)=-370944$$

これらの数字を見て何か気付くことはあるでしょうか？もし即答できたら，あなたも Ramanujan になれるかもしれない！？

実際のところ，Ramanujan はおおよそ次のようなことに気付きました：

- 互いに素な整数 n,m に対し $\tau(n)\tau(m)=\tau(nm)$
- 素数 p，正の整数 n に対し $\tau(p^{n+1})=\tau(p)\tau(p^n)-p^{11}\tau(p^{n-1})$

n,m を小さめの数字にして確認してみると，

$$\tau(4)=-1472=(-24)^2-2^{11}\cdot 1=\tau(2)\tau(2)-2^{11}\tau(1)$$
$$\tau(6)=-6048=-24\cdot 252=\tau(2)\tau(3)$$

となり，なるほど確かにそうなっているように思えます．そしてこの考察は的中していたことが後に証明されました．Ramanujan の洞察力の凄まじさを思い知らされます．

さて，前章で Riemann 予想について少しだけ触れましたが，ζ 関数を考察する一つの方法として，ζ 関数を単体で見るのではなく，何らかの関数のクラスの 1 つであると見てやるというものがあります．そのような「関数のクラス」として，保形型式から得られる「保形 L 関数」というものがあります．今回は，Δ 関数から保形 L 関数を作り，その中でやはりひょっこり π が登場することを見たいと思います．

といっても定義自体は簡単で，保形 L 関数 $L_\Delta(s)$ は

$$L_\Delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

により，実部が十分大きい複素数 s で定義することができます．ζ 関数の定義式を少し変えただけですね．そうなるとやはり，ζ 関数と似た性質を持つことが期待されます．

ここで突然ですが

$$\Lambda(s) = \int_0^\infty F(iy) y^{s-1} dy$$

という値を考えてみます．$F(iy)$ が $y \to \infty$ で「非常に速く」0 に収束すること，および先に挙げた F の性質から $F(i/y) = y^{12} F(iy)$ となることを使えば，$\Lambda(s)$ は全ての複素数 s で値を持つことが分かります．また，

$$F(iy) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-2\pi y n}$$

だったことを思い出せば，$\Lambda(s)$ は次のように計算できます：

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \int_0^\infty F(iy) y^{s-1} dy \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-2\pi y n} \right) y^{s-1} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_0^\infty e^{-2\pi y n} y^{s-1} dy\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{-2\pi y n} y^{s-1} dy$$

において，変数変換 $t = 2\pi n y$ により，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2\pi y n} y^{s-1} dy &= (2\pi n)^{-s} \int_0^\infty e^t t^{s-1} dy \\ &= (2\pi)^{-s} \times \Gamma(s) \times n^{-s}\end{aligned}$$

となります．よって，

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) (2\pi)^{-s} \Gamma(s) n^{-s} \\ &= (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L_\Delta(s)\end{aligned}$$

となっていることが分かります．よく分からない積分の式から $L_\Delta(s)$ が現れ，また再び π がひょこっと出てきました．$\Lambda(s)$ が全ての複素数に対して定義できていたことから，

$$L_\Delta(s) = (2\pi)^s \Lambda(s) / \Gamma(s)$$

により $L_\Delta(s)$ の定義域を複素数全体に拡張することができます．これが，$\Lambda(s)$ なるものを考えた理由の 1 つです．$\Lambda(s)$ を考えた理由はもう 1 つあります．$\Lambda(s)$ の定義式にある y について，$t = 1/y$ と積分変換すると，

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= -\int_\infty^0 F(i/t)t^{-(s-1)}\frac{dt}{t^2} \\ &= \int_0^\infty t^{12}F(it)t^{-(s+1)}dt \\ &= \int_0^\infty F(it)t^{(12-s)-1}dt \\ &= \Lambda(12-s)\end{aligned}$$

となることが分かります．これにより，L_Δ に関する関数等式

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_\Delta(s) = (2\pi)^{12-s}\Gamma(12-s)L_\Delta(12-s)$$

が導かれました．ζ 関数のとき同様，底を π の何乗かとする指数関数を掛け合わせることによって，かなり綺麗な形の関数等式を得ることができました．

おわりに

今回は π が「ひょこっと」現れる話ということで，図形的な概念でないところから π が出現するというものをいくつか挙げてみました．(後半はかなり解析的整数論の話になってしまいましたが (汗)) 今回挙げたもの以外でも π が現れるところは色々ありますし，また π でなくても，全く関係がないと思われていた分野に別概念がいきなり現れるということはしばしばあります．皆さんも，興味があればそういったものを探してみてはいかがでしょうか？

割り算再考 (前多)

小学校以来習ってきた割り算の概念をもう一度考えてみると，実は数学の概念に繋がっているとがわかります．高校生にでもわかるよう配慮して書いたつもりですが，*がついている項目は大学1,2年を想定して，**がついている項目は大学3,4年を想定して書いています．

割り算とは

始まりは小学生の問題です．

問題 6人を2人ずつのチームにわけました．この時，何チームできるでしょう．

式 $6 \div 2 = 3.$　　　　答え 3チーム．

懐かしいですね．また，足し算の答えを「和」と言うように割り算の答えは，「商」と言うんでした．ちなみに $\div$ という記号はアメリカ，日本，イギリスぐらいしか使われておらず，標準的には6/3とスラッシュを使いますので，今回もこれ以降は / で書きます．

さて，今回注目したいのは，式ではなく図です．

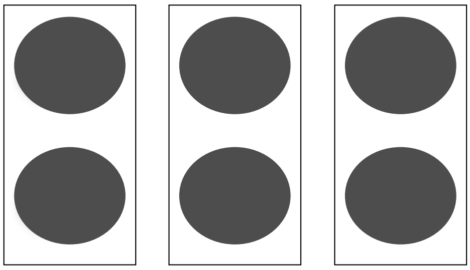


図1 : 3つのチーム分け

小学校以来習ってきた割り算というのは，「たくさんあるものを，均等にチーム分けした時のチーム数を求める演算」だと考えることができます．このイメージを元に，「集合の割り算」を定義してみましょう．

商集合

とはいえ，集合が与えられたとき，いきなり割り算するというのはできません．「チーム分け」するには何が必要かを考えてみましょう．なお，大学以降では，集合の要素のことを「元 (げん)」というので，これ以降の記事では，要素を元と書くことにします．

同値関係

チーム分けするためのアイディアは，「同じチームに属する条件」を与えることです．「同じチームに属している条件」を「同値関係」と言います．「同値関係」は，以下に定義されるような3つの条件を満たす必要があります．

Definition 0.0.0.1 (同値関係). 集合 X に対し，同値関係 $\sim$ とは，以下の3つの条件を満たす集合の元の間の関係をいう．

(1) (反射律) 全ての $x \in X$ に対し，$x \sim x.$

(2) (対称律) $x \sim y$ を満たす全ての $x, y \in X$ に対し，$y \sim x$

(3) (推移律) $x \sim y$,$y \sim z$ を満たす全ての $x, y, z \in X$ に対し，$x \sim z$

一見，難しそうな定義ですが，よく読めば大したことは言っていません．1つ目の条件は，どんな奴でも自分自身とは同じチーム，2つ目の条件は，チームメートは逆からみてもチームメート，3つ目の条件は，チームメートのチームメートはチームメートだと言うことです（当然成り立ってほしい条件ですよね).

例をいくつかあげてみましょう．

例. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ において，元の関係 $\sim$ を

$$n \sim m \Leftrightarrow n - m \text{ は } 2 \text{ で割り切れる}$$

と定めると，これは同値関係です．実際，どんな数 n についても，$n - n = 0$ は2で割り切れますし，$n - m$ が2で割り切れるなら $m - n$ も2で割り切れます．さらに，$n - m, m - l$ が2で割り切れるなら $n - l$ も2で割り切れます．今は「2」で割り切れるとしましたが，他の自然数でも上のように定めれば同値関係になることは同様に示せます．

例. 実数の集合 $\mathbb{R}$ において，$\leq$ ($<$ または $=$) で定められる元の関係

$$x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$$

は同値関係ではありません. どんな実数 x に対しても $x \leq x$ ですし，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ ですから，反射律と推移律は満たしますが，対称律を満たしません．実際，$x \leq y$ だからと言って，$y \leq x$ とは限らないからです．

同値関係があるとき，同じチームに属している奴らを集めてきたものを，同値類と言います．例えば，$x \in X$ と同値関係にある X の元全体 (x が入っているチーム) を，$[x]$ で書くことにします．

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

すると，集合を「チーム分け」する，つまり集合の割り算を定めることができます．

商集合の定義

さて，同値関係が定まると集合の割り算を定義できます．

Definition 0.0.0.2 (商集合). 集合 X とその上の同値関係 $\sim$ に対し，商集合 $X/\sim$ を以下で定める．

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

例で感覚を掴みましょう．

例.
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とします．このとき，X に，同値関係 $\sim$ を,

$$n \sim m \Leftrightarrow n - m \text{ が } 2 \text{ で割り切れる}$$

と定めます．このとき，商集合 $X/\sim$ は何になるでしょうか．例えば，1 の同値類 (1 の入っているチーム) は，$[1] = \{1, 3, 5\}$, 0 の同値類は，$[0] = \{0, 2, 4, 6\}$ となります．これ以外のチームはありませんから,

$$X/\sim = \{[0], [1]\} = \{\{0, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$$

であるとわかります．まさに偶数と奇数への「チーム分け」ですよね．$\{0, 1\}$ はチームの代表メンバーであり，数学

用語でも「完全代表系」と言います．しかし，わり算とはいえ，必ずしも 1 つ 1 つのチームの元の数は一致しないことには注意しましょう．

様々な商集合の例

合同式

まずは，上の概念をそのまま延長して自然数の集合 $\mathbb{N}$ に対して，同値関係 $\sim$ を以下で定めてみます．

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ が } 4 \text{ で割り切れる}$$

この同値関係で割った集合 $\mathbb{N}/\sim$ は，4 で割ったあまりでのチーム分けになります．

$$\mathbb{N}/\sim = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

これを図にすると以下のようになります．自然数全体を 4 つのチームに分けてしまったのがよくわかると思います．

12	13	...	
8	9	10	11
4	5	6	7
0	1	2	3
−4	−3	−2	−1
	...	−6	−5

図 2：4 で割ったあまりでチーム分け

合同式を思い出してみましょう．

$$1 \equiv 5 \mod 4$$

などという表記を見たことがあるかもしれませんが，これは，1 と 5 が上で定めた同値関係，すなわち $1 \sim 5$ を示しているに他なりません．さらに，もともと $\mathbb{N}$ に定まっている足し算，掛け算はそのまま $\mathbb{N}/\sim$ に遺伝します．つまり，

$$[a] + [b] = [a + b] \qquad [a] \times [b] = [a \times b]$$

が成り立つということです．これを使えば, 例えば

$$[15^{30}] = [15]^{30} = [3]^{30} = [3^2]^{15} = [1]^{15} = [1]$$

となり，15^{30} がチーム 1 に属する (すなわち，4 でわると 1 あまる) ことがすぐ確かめられます．

ベクトル

今までは数字を使っていましたが，集合にしたおかげで，もっと概念的なものについても商集合を考えることができます．高校で習うベクトルも，商集合として考えてみましょう．E を平面 (もしくは空間) の有向線分 (向きを持った線分，つまり矢印) 全体からなる集合とします．このとき，E 上の同値関係を，

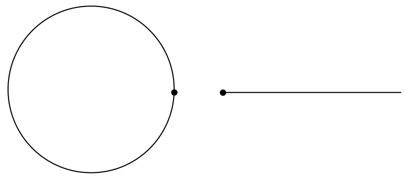
$$v \sim w \Leftrightarrow v \text{ と } w \text{ は平行移動で重なる}$$

と定めます (同値関係になっていることはチェックしてみてください)．このとき，$E/\sim$ がまさに平面全体のベクト

ルを集めた集合になります．この商集合の一つ一つの元は「平行移動で重なったら同じベクトルを集めたチーム」になりますが，この中で原点を始点として持つものを「代表」とすれば，終点の「座標」で全てのチームが表せます．これこそがベクトルの「成分表示」なのです．

空間の貼り合わせ

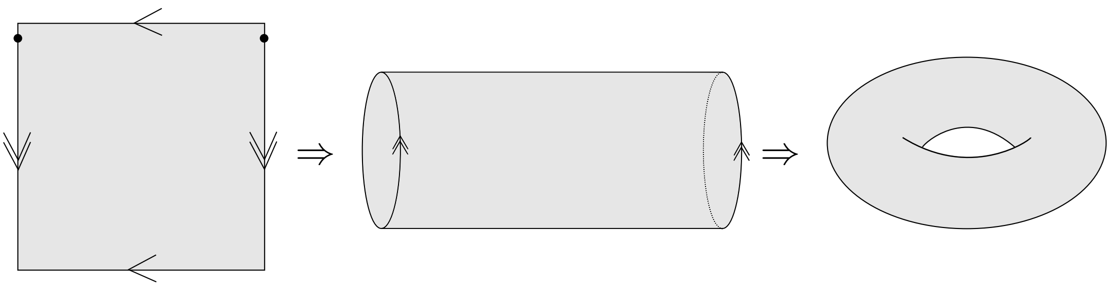
ベクトルの例からもわかるように，あるものたち (ベクトルの場合は平行移動したもの) を**「おんなじものと見たい」「同一視したい」**という気持ちがあるときは，商集合が使われます．数学においては図形同士を，のりで貼り合わせたいというシーンに多々遭遇しますが，これをキチンと定式化するのも商集合の大事な役割です．例えば，下の円と直線を黒点の部分で貼り合わせてみましょう．



このとき，二つの図形の点の集まりを一つの集合 X だと考え，A を 2 つの黒点からなる集合として，以下のような同値関係を定めます（同値関係になっていることはすぐ確かめられます).

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A \text{ または } x = y$$

つまり，A に入っていない点たちは，その点 1 点からなるチームに，A に入っている点たちはまとめて一つのチームにしてしまいます．そうすれば，チーム全体の集合 $X/\sim$ は，まさに，二つの図形を貼り付けたものになっていることがわかります．このような貼り付けにより作られる図形の一つをみてみましょう．正方形の辺を貼り付けて立体を作るということを考えてみます．図の黒点同士のように, 左側の辺と右側の辺，上と下も同様に，同じ方向に貼り付けると，右のように浮き輪の形の図形が出来上がります．これは (2 次元) トーラスといい，数学の様々な場面に登場します．



ちなみに，貼り付けかたを一つだけ逆にすればクラインの壺，二つとも逆にすると二次元射影空間と呼ばれる図形になります (想像できますか?).
二次元球面 (地球の表面) は地球上の地図を貼り合わせて構成できますし，多くの図形は貼り合わせによって構成が可能です．大雑把に言って，このように直線や平面などまっすぐな空間を貼り合わせて作られる図形のことを数学では多様体と呼び，古くから研究されてきた対象です．

商ベクトル空間*

ここで扱う例は，大学 1 年生で習うベクトル空間の概念なので，知らない人は飛ばしてもらって結構です．

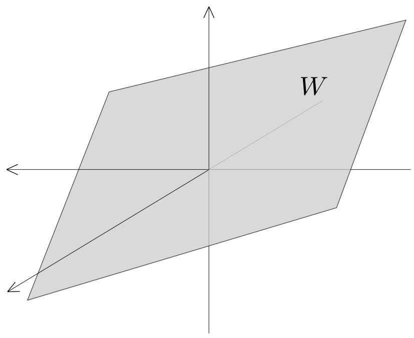
ここまでの概念がわかってしまえば，大学 1 年生の線形代数での 1 つの難所である商空間は簡単に定義できます．

Definition 0.0.0.3. ベクトル空間 V と部分空間 W に対し，V 上の同値関係を，

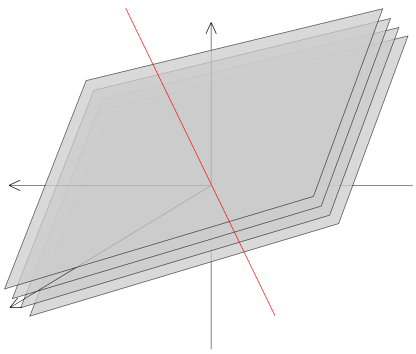
$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

と定義する．$V/\sim$ を，部分空間 W による V の商空間といい，V/W で表す．

これだとイメージしにくいかもしれませんが，v_1 の同値類 $[v_1]$ は $v_1 + w$ $(w \in W)$ と書けるものな訳ですから，W の元だけずれているものは全て同じチームなのです．絵で描けば，以下のようになります．まず，部分空間とは，原点を通るまっすぐな空間ですから，V と W の図は以下のようになります．



この空間 W 全てが同じチームとなりますので，チームは以下のようにならんでいることがわかります．つまり，商空間とは，この 1 枚 1 枚のチームの全体となるのです．完全代表系は，W と原点のみにおいて交わる直線と平面たちの交点となります（完全代表系の取り方は無限通りあります)．つまり，商空間 V/W はこの直線と同一視できるのです．スカラー倍や足し算については合同式のときと同じく商集合に遺伝することが示せるので，V/W もベクトル空間となることがわかります．イメージとしては，商空間 V/W は V を図の直線に向かって潰した空間ということになります．潰した時，W は原点に潰れるわけですから，V において，W の成分を全て 0 と同一視したものだとも言えます．



数の構成

さて，ここからは応用編です．唐突ですが，「整数，有理数，実数とは何か」と聞かれたとき，何て答えるでしょうか．「え，そりゃあ，-1 とか分数とかでしょ？」とか答えられても，あくまでそれは例にすぎません．「自然数の集合 $\mathbb{N}$ と足し算，掛け算しか知らない」と仮定して，整数の集合 $\mathbb{Z}$ や有理数の集合 $\mathbb{Q}$，実数の集合 $\mathbb{R}$ を自然数のみを用いて構成してみることにします．(今回は，自然数の存在は暗に認めています．公理的集合論の立場では自然数は無限公理を満たす最小の集合として存在を保証しているのですが，今回は解説しないことにします．)[22]

[22] 以下の話の厳密な証明が知りたい場合，[1] を参照してください．

自然数から整数

　さて，自然数から整数を構成することを考えてみましょう．一番簡単なアイディアは，プラスパートとマイナスパートの自然数を作るということです．(a,b) と書いたとき，1 つめの項はプラス，2 つ目の項はマイナスに当たると考えてみましょう．例えば，$(2,0)$ を 2 に当たる数として，$(0,3)$ を -3 に当たる数として定めるわけです．そして，2 つの数の足し算を $(2,0)+(0,3)=(2,3)$ と定めます．$(2,3)$ はプラスパートとマイナスパートがそれぞれ $2,3$ ですから，-1 を表していると考えます．これで一見，うまくいったかのように見えますが，これだと $(2,3)$ と $(0,1)$ が同じ数字を表しているため，”ダブり”が生じています．$(2,3)$ と $(0,1)$ を同じものと見たい，同一視したい．こんな時こそ商集合の出番です．

Definition 0.0.0.4 (整数). 自然数を二つ並べた集合 $\mathbb{N}^2=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{N}\}$ を考え，$\mathbb{N}^2$ 上に同値関係

$$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$$

と定め，この同値関係による商集合 $\mathbb{N}/\sim$ を整数 $\mathbb{Z}$ と定める．さらに，$\mathbb{Z}$ 上の加法と乗法を，

$$[(a,b)]+[(c,d)]=[(a+b,c+d)] \qquad [(a,b)]\times[(c,d)]=[(ac+bd,ad+bc)]$$

と定める [23)]

　例えば，$2+1=3+0$ ですから，$[(2,3)]=[(0,1)]$ だとわかります．掛け算はちょっと技巧的ですが，これでうまくいっていることがわかります．例えば，正の数同士は，$[(n,0)]\times[(m,0)]=[(nm,0)]$ と，今までと全く同じ演算であることがわかります．また，$[(n,0)]\times[(0,m)]=[(0,nm)]$ や，$[(0,n)]\times[(0,m)]=[(nm,0)]$ などから，プラスかけるマイナスがマイナス，マイナスかけるマイナスがプラスであることも説明できます．
最後に，$[(x,0)]$ を x とかき，$[(0,x)]$ を $-x$ を書くことにすれば，今まで使っていた表記と合致します．

整数から有理数

　さて，今度は有理数を構成してみましょう．さっきのアイディアをそのまま借用して，分母パートと分子パートを並べて書いてみることにします．つまり，(a,b) と書いたとき，$\dfrac{a}{b}$ を表すとしてみます．しかし，分数というのは，小学校以来，約分しても同じ，だったわけですから，例えば $(2,4)$ と $(1,2)$ は同じものであってほしいわけです．そこで，商集合を使って同一視してみます．

Definition 0.0.0.5 (有理数). $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})=\{(a,b)\mid a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}-\{0\}\}$ 上に同値関係

$$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$$

と定め，この同値関係による商集合 $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})/\sim$ を有理数 $\mathbb{Q}$ と定める．さらに，$\mathbb{Q}$ 上の加法と乗法を，

$$[(a,b)]+[(c,d)]=[(a+c,b+d)] \qquad [(a,b)]\times[(c,d)]=[(ac,bd)]$$

と定める [24)]．

---

23) 本当は，これで矛盾なく定まっていることをチェックしなければいけません．つまり，$(a,b)\sim(a',b')$ のとき，

$$(a+c,b+d)\sim(a'+c,b'+d) \qquad (ac+bd,ad+bc)\sim(a'c+b'd,a'd+b'c)$$

であることを示す必要があります．もしこうでなければ，足し算や掛け算の結果が，チームの代表メンバーの選び方によって違う結果になってしまい，矛盾してしまうからです．一つ目だけチェックすれば，$a+b'=a'+b$ より $(a+c)+(b'+d)=(a'+c)+(b+d)$ ですからうまくいっています (二つ目もチェックしてみましょう)．このようにうまく定まっていることを，数学では，well-defined と言います．

24) これも well-defined であることをチェックする必要があります．示してみてください．

$\sim$ の同値関係は，外項と内項の積が等しい，つまり，$a:b=c:d$ を表していますから，同じ分数を 1 チームにまとめていることがわかります．
さて，定義から，$[(1,1)]$ はどんな数とかけても相手を変えない，自然数の"1" に当たる数だとわかります．また，$[(0,1)]$ は，どんな数とかけても $[(0,1)]$ になり，どんな数と足し算しても相手を変えない，自然数の"0" に当たる数だとわかります．
また，

$$[(a,b)]\times[(b,a)]=[(ab,ab)]=[(1,1)]$$

ですから，$[(a,b)]$ に，$[(b,a)]$ をかけると 1 になることがわかります．ということは，

$$[(c,d)]=[(a,b)]\times([(b,a)]\times[(c,d)])$$

ですから，

$$[(c,d)]/[(a,b)]=[(b,a)]\times[(c,d)]$$

となり，小学校以来やってきた，分数の割り算は分母と分子をひっくり返してかけるということも正当化できます．
最後に，(a,b) を $\dfrac{a}{b}$ と書く [25] ことにすれば，今まで使っていた表記と合致します．

有理数から実数

さて，最後に実数を作ってみましょう．これはかなり困難です．実数の構成には，代表的なもので Dedekint cut によるものと，有理数の完備化の二つがあるのですが，今回は有理数の完備化を解説したいと思います．

Definition 0.0.0.6 (Cauchy 列)．数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であるとは，以下のことを言う．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ such that } n,m>N\Rightarrow|a_n-a_m|<\varepsilon$$

一見ギョッとするような定義ですが，簡単に言えば，コーシー列とは，「二項間の差がどんどん小さくなっていくような数列」のことです．さて，ここで，次のような問題を考えて見ましょう．

Cauchy 列は収束するでしょうか？

答えは，実数列なら○，有理数列なら×です．数学用語でこの性質を「完備性」と言います．有理数は完備ではないのです．例えば，有理数で $\sqrt{2}$ に近づくような数列を考えてみれば，もちろん二項の差は縮まっていきますが，肝心の収束先の $\sqrt{2}$ が有理数ではないですから，「有理数の中では」収束しません．このことに着目して，有理数から実数を作ります．具体的には，

$\sqrt{2}$ に収束する有理数列を $\sqrt{2}$ だと定義する

です．数列と $\sqrt{2}$ を同じと見るなんてかなり気持ち悪いですが，一応定義はできるわけです．とはいっても，$\sqrt{2}$ に収束する有理数列はいっぱいあります．そこで，商集合の考え方を使って，$\sqrt{2}$ に収束する数列を 1 チームにしてしまえば良いのです．

Definition 0.0.0.7 (実数)．$\mathcal{C}$ を有理数の Cauchy 列全体からなる集合とし，$\mathcal{C}$ 上の同値関係を，

$$\{a_n\}\sim\{b_n\}\Leftrightarrow\forall\varepsilon\ \exists N \text{ such that } n>N\Rightarrow|a_n-b_n|<\varepsilon$$

[25] ちなみに，$\dfrac{a}{b}$ は日本語では「b 分の a」と読みますが，英語では逆で，"a over b" と読みます．

と定め[26]，この同値関係による商集合 $\mathcal{C}/\sim$ を実数 $\mathbb{R}$ と定める．さらに，$\mathbb{R}$ 上の加法と乗法を，

$$[\{a_n\}]+[\{b_n\}]=[\{a_n+b_n\}] \qquad [\{a_n\}]\times[\{b_n\}]=[\{a_nb_n\}]$$

と定める．[27]

上のように定めれば $\{a_n\}\sim\{b_n\}$ であれば，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が同じ値に近づいていくことがわかります．本当は，$\mathbb{R}$ が満たすべきたくさんの性質をここから示さなければいけないのですが，今回の主題はそこではないので，詳しくは参考文献を見てみてください．

このように，存在が当たり前だと思っていた整数や有理数や実数，そしてそのたくさんの性質は，商集合のアイディアに支えられているのです．[28]

応用**

最後に，少しだけ応用をみてみます．

等質空間

群構造をもつ可微分多様体で群の積演算 $(a,b)\mapsto ab$ と逆演算 $a\mapsto a^{-1}$ が可微分であるものを Lie 群と言います (群と多様体のあいのこです)．例えば，一般線形群 $GL(n,\mathbb{R})$ や特殊線形群 $SL(n,\mathbb{R})$, 特殊直交群 $SO(n)$ などは Lie 群になっています．

さて，Lie 群 G がある多様体 M に推移的に作用していることを考えてみましょう．推移的，というのは全ての点同士がある Lie 群の元の作用で写りあえるという意味です．全射群準同型 $G\to\mathrm{Diff(M)}$ があると言ってもいいです．例えば，球面 S^n, 上半平面 H には，

$$\begin{aligned} SO(n+1) &\to \mathrm{Diff}(S^n) & A &\mapsto (p\mapsto Ap) \\ SL(2,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Diff}(H) & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \end{aligned}$$

のように，Lie 群が推移的に作用しています．この時，ある一点 p の群作用による行き先（軌道）は，推移的であるという仮定から全体を覆うわけですが，作用させても動かない G の元があるかもしれません．これを集めたもの，

$$H=\{g\in G\mid gp=p\}$$

を G の一点 p の固定部分群と言います (定義より閉部分群になります)．この H たちをチームにして, 点 p と同一視すれば，作用させている空間との 1 対 1 対応ができます．すなわち，

$$G/H\simeq M \qquad [g]\mapsto gp$$

となるわけです．

ここで，左辺の G/H とは，G を，$g_1\sim g_2\Leftrightarrow g_1g_2^{-1}\in H$ という同値関係で割ったもので,G の部分群 H による商群と呼ばれます．特に，Lie 群をその中の閉部分群で割った商群 G/H には多様体構造が定まることが知られており，上の同型は微分同相であることが示せます．

このように，Lie 群が推移的に作用している多様体は，必ず Lie 群の商の形で書くことができます．このような多様

26) これが同値関係であることは非自明ですが，ここでは省略します．
27) これが well-defined であることも非自明ですが，ここでは省略します．
28) 実は複素数も，商集合を用いて $k[X]/(X^2+1)$ などと定義できるのですが，今回は紙面の関係上，省略します．

体を等質空間と言います．

例 (球面)．$SO(n+1)$ の作用による球面 S^n 上のある 1 点 $(0,0,0,\cdots,0,1)$ の固定部分群は，

$$\left\{ \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array} \right) \middle| A \in SO(n) \right\} \simeq SO(n)$$

よって，$S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$ となります．

例 (上半平面)．$SL(2)$ の作用による上半平面 H 上のある 1 点 i $(=\sqrt{-1})$ の固定部分群は，

$$\frac{ai+b}{ci+d} = i \Leftrightarrow a = d,\ b = -c$$

より，

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \middle| a = d, b = -c \right\} \simeq SO(2)$$

よって，$H \simeq SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ となります．H は複素多様体ですが，実 Lie 群の商でかけます．

この表示の一つのメリットは，ある 1 点に定めた幾何構造を全体に写すことにあります．G/H の形で書いた場合，当然，原点の同値類 $[e]$ があります．これについて

補題. G/H を等質空間とする．集合として，次の同型がある．

$$(\bigotimes^r T_{[e]}M \otimes \bigotimes^s T^*_{[e]}M)^H \simeq (\Gamma(M, \bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M))^G$$

ただし，左は，$\mathrm{Ad}(H)$ 不変なテンソルの元，右辺は M からベクトル束への左作用の微分 L_{G*} 不変な切断である．

表示は仰々しいですが，例えば，$r=1, s=0$ とすれば，H 不変な接空間のベクトルと，G 不変なベクトル場が 1 対 1 に対応していることがわかりますし，$r=0, s=2$ とすれば，H 不変な接空間上の内積と，G 不変な計量，H 不変な複素構造と G 不変な概複素構造が 1 対 1 に対応することがわかります．
他にも，等質空間上では測地線を Lie 代数から Lie 群への指数写像でかけたり，曲率テンソルが，Lie 括弧でかなりシンプルにかけたりなど，計算できる具体例を豊富に提供してくれます．

Clifford-Klein 形

Riemann の一意化定理の一般化である，Klein-Poincaré-Koebe の一意化定理より，Riemann 面の普遍被覆は，上半空間 H，複素数 $\mathbb{C}$, 複素射影空間 $\mathbb{P}^1$ のいずれかに正則同値になります．また，特に，種数が 2 以上のコンパクト Riemann 面は，上半平面を，Fuchs 群と呼ばれる Aut(H) の離散部分群 Γ で割って作られます．H 自体は上で見たように $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ とかけますから，コンパクト Riemann 面は，$\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ という $SL(2,\mathbb{R})$ を 2 回割ったものとして書くことができます．一般に，G/H に固有不連続かつ自由に作用する G の離散部分群 Γ が存在すれば，等質空間 G/H をさらに割った $\Gamma\backslash G/H$ を考えられます．これを Clifford-Klein 形といい，等質空間より豊富な例を含む広いクラスとして，現在も研究されています．

終わりに

たくさんの例を「割り算」というテーマでざっくばらんに解説してみました．何を隠そう，この集合の割り算という概念を理解するのに僕自身苦労したので，あえて書いて見ました．数学というと，「イメージではなく，論理的にのみ考える学問」と考えられがちな気がします．論理ももちろん大事ですが，決して論理だけではなく，むしろ，「イメー

ジをいかに数式という形で正確に伝えられるか」というモチベーションで研究が進むことも多いと思います．高校や大学で難しい概念に出会ったときは，ただ定義を眺めるだけではなく，様々な例を見ながら，どういう気持ちで概念が生まれているのかを考えて見るといいと思います．

参考文献

[1] 数の構成　自然数から複素数まで http://mathematics-pdf.com/pdf/construction_of_numbers.pdf
[2] S.Helgason.Differetntail Geometory and Symmetric Spacees.AMS Chelsea Publishing,2001
[3] 佐武一郎. 線型代数学．裳華房，数学選書 1,1974
[4] 松坂和夫．集合・位相入門．岩波書店，1968
[5] 小林俊行．数学の最先端 21 世紀への挑戦.vol1.Springer,2001

ベルヌーイ数小噺 (荒田)

前半は高校生程度の知識で読める。後半は複素関数の知識が必要となる。

0.1　自然数のべき乗の和

自然数のべき乗の和は、次のように n の多項式で書ける。高校では次の 3 つを学ぶはずだ：

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

では、4 乗の和や 5 乗の和を表す公式はどうなるか？もっと言うと、自然数 p について k^p の和を表す一般的な式はあるか？

先に答えを述べると、自然数の p 乗の和（以後これを、ここだけの記号で $s_p(n)$ とおく）は n についての $p+1$ 次の多項式であり、有理数の数列 B_k $(k=0,1,2,\dots)$ を使って次のように書ける：

$$s_p(n)=\sum_{k=1}^{n} k^p=\frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}(-1)^k B_k n^{p+1-k}$$

この B_k はベルヌーイ数 (Bernoulli numbers) と呼ばれる数列で、最初の数項は次のようになる：

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\dots$$

ベルヌーイ数は次の初項と漸化式によって計算できる：

$$B_0=1,$$
$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$$

ベルヌーイ数は文献によって符号が若干違っていたり、奇数番目を飛ばしていたりするので、文献ごとに定義を確認するようにしたい。

0.1.1　自然数のべき乗の和の公式の導出

まず、 p が自然数のとき、 $s_p(n)$ は n についての $p+1$ 次の多項式である [29)]。そこで、 n^{p+1-k} の係数を a_k とおき、

$$s_p(n)=a_0n^{p+1}+a_1n^p+\cdots+a_pn+a_{p+1}=\sum_{k=0}^{p+1}a_kn^{p+1-k}$$

---

29) 証明のやり方はいくつかあるが、詳細は割愛する。一つのやり方としては、

$$(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=(p+1)k^p+\cdots+(p+1)k+1$$

を $k=1,\dots,n$ について辺ごとに足すというものがある。別のやり方を 0.3 で与える。

と書く。

さて、 $s_p(n)$ は次の 2 つの式を満たす：

$$s_p(0) = 0, \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}.\ s_p(n) - s_p(n-1) = n^p. \tag{3}$$

逆に、これらの式を満たす多項式があれば、その多項式は $s_p(n)$ と一致する。

ちなみに、$s_p(n)$ が多項式であることに留意すれば、2 番目の式を多項式としての等式

$$s_p(x) - s_p(x-1) = x^p$$

としても同じことになる。

式 2 と式 3 から、係数 a_k に対する何らかの条件が得られるはずである。まず、式 2 からは $a_{p+1} = 0$ がわかる。

式 3 については、左辺を a_i によって表すと

$$\begin{aligned}
s_p(n) - s_p(n-1) &= \sum_{i=0}^{p+1} a_i n^{p+1-i} - \sum_{i=0}^{p+1} a_i (n-1)^{p+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} a_i n^{p+1-i} - \sum_{i=0}^{p+1} a_i \sum_{j=0}^{p+1-i} \binom{p+1-i}{j} (-1)^j n^{p+1-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} a_i n^{p+1-i} - \sum_{m=0}^{p+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{p+1-k}{m-k} (-1)^{m-k} a_l n^{p+1-m} \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k \right) n^{p+1-i}
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$ は二項係数である [30)]。

つまり、式 3 を a_i の言葉で書けば、

$$n^p = \sum_{i=1}^{p+1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k \right) n^{p+1-i}$$

となる。この両辺の n^{p+1-i} の係数を比較することにより、

$$\begin{aligned}
1 &= (p+1)a_0 & & (i = 1) \\
0 &= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k & & (1 < i \leq p+1)
\end{aligned} \tag{4}$$

を得る。式 4 を変形すると

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{p+1-k}{i-k} (-1)^{i-k-1} a_k \\
&= (-1)^{i-1} \frac{(p+1)!}{i!(p+1-k)!} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{k!(p+1-k)!}{(p+1)!} (-1)^k a_k \\
&= (-1)^{i-1} \binom{p+1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} (-1)^k a_k \bigg/ \binom{p+1}{k}
\end{aligned}$$

となり、結局 $1 < i \leq p+1$ について

30) 高校では ${}_nC_k$ というような記号で書くかもしれない。

$$0 = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} (-1)^k a_k \Big/ \binom{p+1}{k}$$

を得る。ここで、やや天下り的[31]だが、新たに記号 B_k を導入して a_k を

$$a_k = \frac{(-1)^k}{p+1}\binom{p+1}{k} B_k \qquad (0 \le k \le p) \tag{5}$$

と置くことにする。すると、B_k は

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ 0 &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \qquad (1 \le m) \end{aligned} \tag{6}$$

を満たす。式 6 を B_m に関して解くと

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k \qquad (1 \le m)$$

という漸化式が得られる。この初項と漸化式は p に依存しないので、 B_k は p によらない数列である。この B_k こそが、冒頭に書いたベルヌーイ数である。

結局、$s_p(n)$ は、ベルヌーイ数によって

$$s_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^k B_k n^{p+1-k} \tag{7}$$

と書ける。

0.1.2 べき乗和の公式の性質

以下、 $s_p(x)$ の多項式としての性質をいくつか見ていく。

定理 1. $p \ge 1$ のとき、$s_p(-x) = (-1)^{p+1} s_p(x-1)$.

証明. 自然数 n を任意に取ったとき、

$$\begin{aligned} s_p(0) - s_p(-n) &= \sum_{k=-n+1}^{0} (s_p(k) - s_p(k-1)) \\ &= \sum_{k=-n+1}^{0} k^p = 0^p + (-1)^p + (-2)^p + \cdots + (-n+1)^p \\ &= (-1)^p s_p(n-1) \end{aligned}$$

より、

$$s_p(-n) = (-1)^{p+1} s_p(n-1)$$

が成り立つ。この等式は全ての自然数 n について成り立つので、 $s_p(-x)$ と $(-1)^{p+1} s_p(x-1)$ は多項式として等しい。(この証明は $0^p = 0$ となることに依存しているので、 $p = 0$ の時は成り立たない) □

[31] 理由や出どころを隠して式や定義をどこからともなく持ってくることを「天下り的」である、という。例えば、α が方程式の解だと知っている人が「方程式に α を代入したら成立するから解の 1 つは α だ！」という議論をした場合、これは天下り的である。本文中の用例では、筆者の心の中には「このように B_k を定義すれば漸化式が綺麗になるし、世間でいうベルヌーイ数の定義と一致する」という気持ちがあるわけだが、それを本文に書いていないので「天下り的」である。

系 2. p が 2 以上の偶数のとき、$s_p\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. 特に、$s_p(x)$ は p が 2 以上の偶数のとき $2x+1$ で割り切れる。

定理 3 (Faulhaber)**.** p が奇数のとき、 $s_p(x)$ は $s_1(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ の多項式として書ける。
p が 2 以上の偶数のとき、 $\frac{s_p(x)}{x+1/2}$ は $s_1(x)$ の多項式として書ける。

証明. p が奇数の場合は、定理 1 および、後に述べる補題 4 より従う。
p が 2 以上の偶数のときは、 $s_p(x)$ は $2x+1$ で割り切れる（系 2）ので、 $\frac{s_p(x)}{x+1/2}$ は多項式である。$f(x)=\frac{s_p(x)}{x+1/2}$ と置いたときに $f(-x)=f(x-1)$ が成り立つことを示して、補題 4 を使えば良い。 □

補題 4. 多項式 $f(x)$ が $f(-x)=f(x-1)$ を満たすならば、 $f(x)$ は $s_1(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ の多項式として書ける。

証明. $\mathbf{Q}[x]$ の部分集合 V を $V=\{f\in\mathbf{Q}[x]\mid f(-x)=f(x-1)\}$ により定める。定理 1 より、 s_p は V の元である。V の元は全て $s_1(x)$ の多項式として書けることを、 V の元 f の次数に関する帰納法で示す。
$\deg f=0$ の場合は OK。$\deg f=1$ の場合は $f(-x)=f(x-1)$ とはなり得ないので考える必要はない。
$\deg f\geq 2$ の場合。写像 $F\colon V\to V$ を

$$Ff(x):=\frac{f(x)-f(0)}{x(x+1)/2}$$

により定める。多項式 $f(x)-f(0)$ は $x(x+1)$ で割り切れるので、 Ff は多項式である。$Ff\in V$ は

$$Ff(-x)=\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)(-x+1)/2}=\frac{f(x-1)-f(0)}{x(x-1)/2}=Ff(x-1)$$

とわかる。定義より、 $\deg Ff<\deg f$ なので、帰納法の仮定より、 Ff は s_1 の多項式として書ける。

$$f(x)=f(0)+\frac{x(x+1)}{2}Ff(x)$$

より、f も s_1 の多項式である。 □

例. $S=x(x+1)/2$ とおくと、

$$\begin{aligned}
s_3(x)&=S^2,\\
s_4(x)&=\frac{(2x+1)(6S^2-S)}{15},\\
s_5(x)&=\frac{S^2(4S-1)}{3}.
\end{aligned}$$

定理 5. $p\geq 1$ のとき、 $s_p(x)-x^p/2$ は、 p に応じて偶関数または奇関数となる。具体的には、

$$s_p(-x)-\frac{(-x)^p}{2}=(-1)^{p+1}\left(s_p(x)-\frac{x^p}{2}\right).$$

証明. 定理 1 および $s_p(x)=s_p(x-1)+x^p$ を使う。 □

0.1.3　ベルヌーイ数の性質

定理 6. $k\geq 1$ のとき, $B_{2k+1}=0$. つまり、奇数番目のベルヌーイ数は、 B_1 を除くと 0 である。

証明. 定理 5 と 式 7 を見比べるとわかる。 □

定理 7. $n\geq 2$ のとき、

$$B_{2n}=-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2(n-k)}B_{2k}.$$

証明は後回しにする。

系 8. $n \geq 1$ のとき、$(-1)^{n-1}B_{2n} > 0$.

証明．帰納法で示す。$n = 1$ のときは $B_2 = 1/6$ より成り立つ。
$n \geq 2$ の場合。n 未満で成り立つと仮定すると、定理 7 より、

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n-1}B_{2n} &= -\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2(n-k)}B_{2k} \\
&= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}\underbrace{(-1)^{n-k-1}B_{2(n-k)}}_{>0}\underbrace{(-1)^{k-1}B_{2k}}_{>0} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

□

0.2　ベルヌーイ数の母関数

数列を係数に持つ（形式的）べき級数を、その数列の母関数と呼ぶ。母関数は、数列の性質を調べるのに便利である。ベルヌーイ数の場合は、数列の各項を $n!$ で割ったものの母関数（指数型母関数）を考える：

$$
\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}. \tag{8}
$$

この母関数によってベルヌーイ数を定義することも多い。もちろん、この定義と先に示した漸化式による定義は等価である。

式 8 を複素関数のテイラー展開として見た場合、左辺の関数の原点に最も近い特異点は $z = \pm 2\pi i$ であるため、右辺の級数の収束半径は 2π である。

母関数を使ってベルヌーイ数の性質を一つ二つ示してみよう：

定理 *6* の別証明（方針）．$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ が偶関数であることを確かめる。□

定理 *7* の証明．$g(z) := \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ とおくと、

$$
g(z) - zg'(z) = g(z)^2 - \frac{z^2}{4}
$$

が成り立つ。この等式に $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ を当てはめて両辺を比較すると、$n \geq 2$ のとき

$$
(1-2n)B_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}B_{2(n-k)}B_{2k}
$$

を得る。□

0.2.1　余接(コタンジェント)関数のローラン展開と正接(タンジェント)関数のテイラー展開

ベルヌーイ数の母関数を使うと、余接関数 $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ のローラン展開を書き下せる。cot を指数関数で書いた時に分母に $e^{\text{ほにゃらら}} - 1$ の形が現れるのがポイントである。

$$\begin{aligned}\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}} &= \frac{i(e^{2iz}+1)}{e^{2iz}-1}\\ &= i\left(1+\frac{1}{iz}\frac{2iz}{e^{2iz}-1}\right)\\ &= i+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2iz)^n}{n!}\\ &= \frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\frac{z^{2k-1}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

さらに、正接関数 $\tan z$ のテイラー展開もベルヌーイ数を使って書き下すことができる。三角関数の倍角の公式より、$\tan z$ は cot を使って次のように書ける：

$$\tan z = \cot z - 2\cot 2z.$$

これを使うと、

$$\begin{aligned}\tan z &= \left(\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\frac{z^{2k-1}}{(2k)!}\right) - 2\left(\frac{1}{2z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\frac{(2z)^{2k-1}}{(2k)!}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} 2^{2k}(2^{2k}-1) B_{2k}\frac{z^{2k-1}}{(2k)!}\end{aligned}$$

となる。簡単だね。

0.2.2 リーマンのゼータ関数の特殊値

1 より大きい実数 s について、ゼータ関数 $\zeta(s)$ を次のように定める。

$$\zeta(s) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots \tag{9}$$

平方数の逆数の和、すなわち $\zeta(2)$ が π を使って次のように書けることは有名だろう：

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

一般に、ゼータ関数の正の偶数における値は次のようにベルヌーイ数を使って表される：

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}B_{2k}}{2\cdot(2k)!}(2\pi)^{2k} \quad (k \geq 2)$$

実部が 1 より大きい複素数 s については、式 9 の級数によって $\zeta(s)$ が定まる。しかし、うまいこと解析接続してやると、$\zeta(s)$ を複素平面から 1 を除いた領域 $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ で定義することができる。このとき、負の整数の値はベルヌーイ数を使って表すことができる。

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \quad (k \geq 1)$$

特に、 k が偶数の場合は $\zeta(-k)=0$ となる。つまり、負の偶数は ζ の零点である。

ζ の零点は便宜上「自明な零点」と「非自明な零点」に分類され、負の偶数は前者、皆さんの大好きなリーマン予想で問題になっているのは後者である。

0.3　おまけ：スターリング数

次のような記号を導入する[32]：

$$x^{\overline{n}} := x(x+1)\cdots(x+n-1),$$
$$x^{\underline{n}} := x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

自然数 n と k について、第 1 種スターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ と第 2 種スターリング数 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ を次の関係式により定める。

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \qquad x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k,$$
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

スターリング数は次の漸化式によって計算できる：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \qquad \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

$x^{\overline{n}}$ や $x^{\underline{n}}$ には次のような関係式があり、階差や総和に関して形を保つ[33]：

$$x^{\overline{n}} - (x-1)^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}, \qquad (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$

特に、

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$$

が成り立つ。

そこで、k^p を一旦 $k^{\overline{m}}$ の和として書いてやれば、総和の公式を直接的に与えることができそうである。

$$\begin{aligned}
s_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{p} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{p-m} k^{\overline{m}} \\
&= \sum_{m=0}^{p} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{p-m} \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{p} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} \frac{(-1)^{p-m}}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} n^k \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \left(\sum_{m=k-1}^{p} \frac{(-1)^{p-m}}{m+1} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} \right) n^k. \qquad = \sum_{k=0}^{p} () \, n^{p+1-k}
\end{aligned}$$

この方法を使えば、 $s_p(n)$ が n についての $p+1$ 次の多項式であることが直接わかる。

$s_p(n)$ をベルヌーイ数を使って表した式（式 7）と、スターリング数を使って表した式を比較すると、

$$\frac{1}{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k B_k = \sum_{m=p-k}^{p} \frac{(-1)^{p-m}}{m+1} \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 \\ p+1-k \end{bmatrix} \quad (0 \leq k \leq p)$$

---

[32] 言うまでもないが階乗の一般化となっている。超幾何関数の係数を書くのに使われたりする。$(x)_n$ という記号が使われる場合もある。

[33] x^n が微分や積分に関して形を保つのと似ている。

を得る。特に $k=p$ とおけば、スターリング数とベルヌーイ数の関係として

$$B_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{m+1} \left\{ {k \atop m} \right\} \left[{m+1 \atop 1} \right] = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \left\{ {k \atop m} \right\}$$

を得る。ただし、$\left[{m+1 \atop 1} \right] = m!$ を使った。

0.4　おまけ：数表

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & & & & \\
B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, & B_8 &= -\frac{1}{30}, \\
B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, & B_{16} &= -\frac{3617}{510}, \\
B_{18} &= \frac{43867}{798}, & B_{20} &= -\frac{174611}{330}, & B_{22} &= \frac{854513}{138}, & B_{24} &= -\frac{236364091}{2730}, \\
B_{26} &= \frac{8553103}{6}, & B_{28} &= -\frac{23749461029}{870}, & B_{30} &= \frac{8615841276005}{14322}, & B_{32} &= -\frac{7709321041217}{510},
\end{aligned}$$

以下については、$S = n(n+1)/2$ とおく。

$$\begin{aligned}
s_0(n) &= n, & & \\
s_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n & &= S, \\
s_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n & &= \frac{(2n+1)S}{3}, \\
s_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 & &= S^2, \\
s_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n & &= \frac{(2n+1)S(6S-1)}{15}, \\
s_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 & &= \frac{S^2(4S-1)}{3}, \\
s_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n & &= \frac{(2n+1)S(12S^2-6S+1)}{21}.
\end{aligned}$$

参考文献

[1]　荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信『ベルヌーイ数とゼータ関数』牧野書店, 2001 年

$e^{\pi i}sode$ **Vol.3.5**

2015 年 11 月 21 日発行

著　者・・・・・東京大学理学部数学科有志

発行人・・・・・伊藤克哉